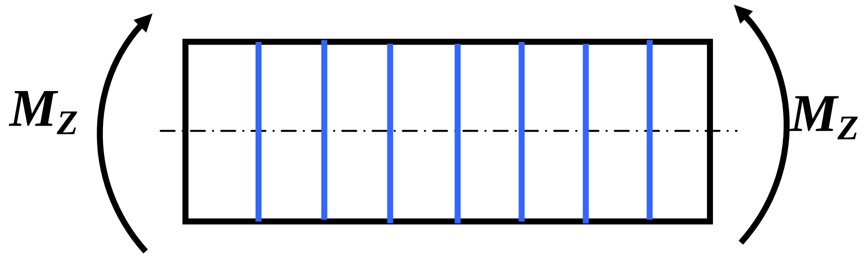
Лекция 10 – Напряжения и перемещения при изгибе

Нормальные напряжения при изгибе прямого бруса

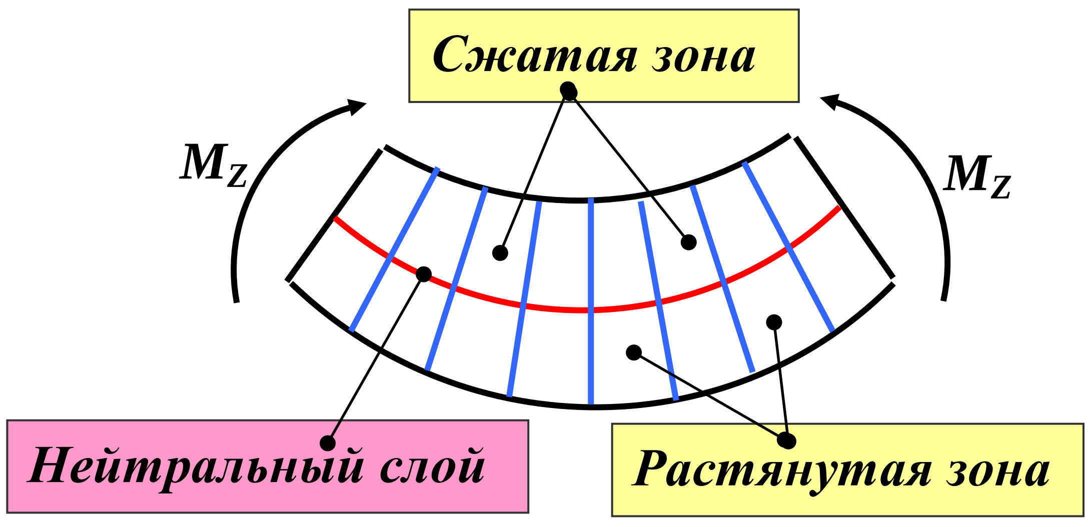
Рассмотрим балку при чистом изгибе: $M_Z \neq 0$; $Q_Y = 0.$

Выделим участок балки, где $M_Z = const$



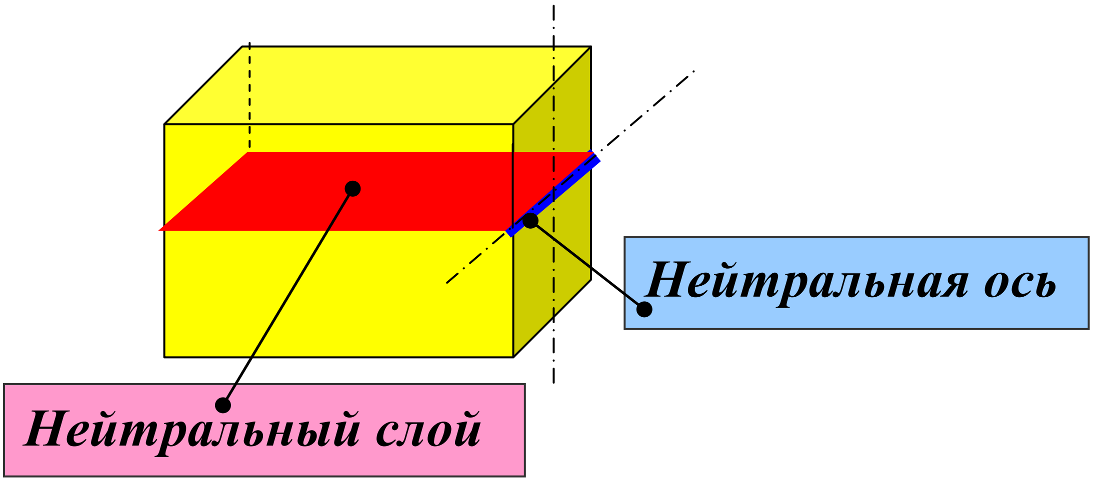
Исходные положения:

1. **При чистом изгибе возникают растянутые и сжатые зоны. Волокна, находящиеся на границе зон, не испытывают ни растяжения, ни сжатия. Эти волокна образуют нейтральный слой.**

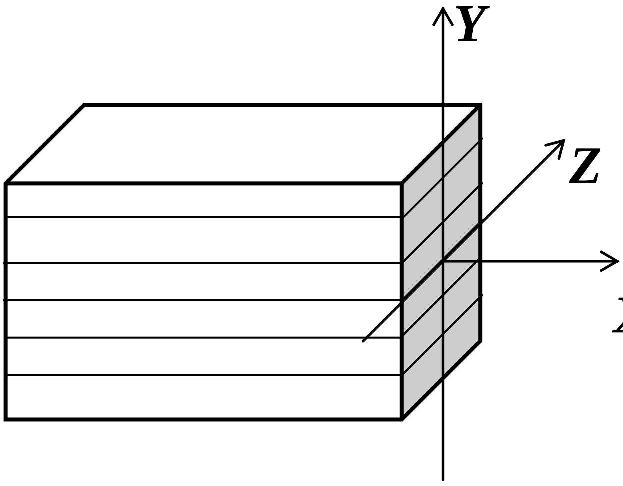


2. Справедлива гипотеза плоских сечений. Сечения бруса, бывшие плоскими и нормальными к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси бруса после деформации (Синии сечения).

2. Линия пересечения нейтрального слоя с поперечным сечением называется нейтральной осью сечения.



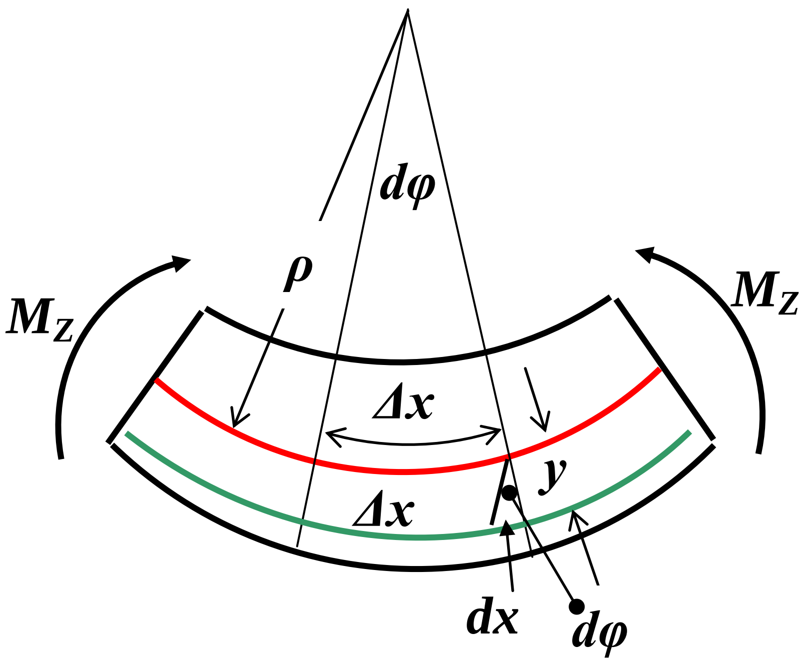
4. Отсутствие давления между продольными волокнами или слоями бруса.



Это означает, что напряжения $\sigma_Y = 0$ и остаются только напряжения σ_X.

Поэтому напряженное состояние при изгибе – одноосное.

Рассмотрим теперь элемент бруса длиной Δx и вычислим удлинение продольного волокна на произвольном расстоянии y от нейтрального сечения бруса.



Под действием изгибающих моментов сечения развернутся и составят между собой угол φ. Нейтральный слой превратится в изогнутую пластинку с радиусом кривизны ρ. Отрезок волокна длиной Δx удлинится на dx.

Из геометрии получаем

$$dx = yd\varphi; \qquad \Delta x = \rho d\varphi$$

Относительная деформация выделенного (зеленого) волокна будет равна

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x + dx - \Delta x}{\Delta x} = \frac{dx}{\Delta x} = \frac{y}{\rho} \qquad (10.1)$$

Следовательно, относительная деформация ε_x волокна пропорциональна расстоянию y между волокном и нейтральным слоем.

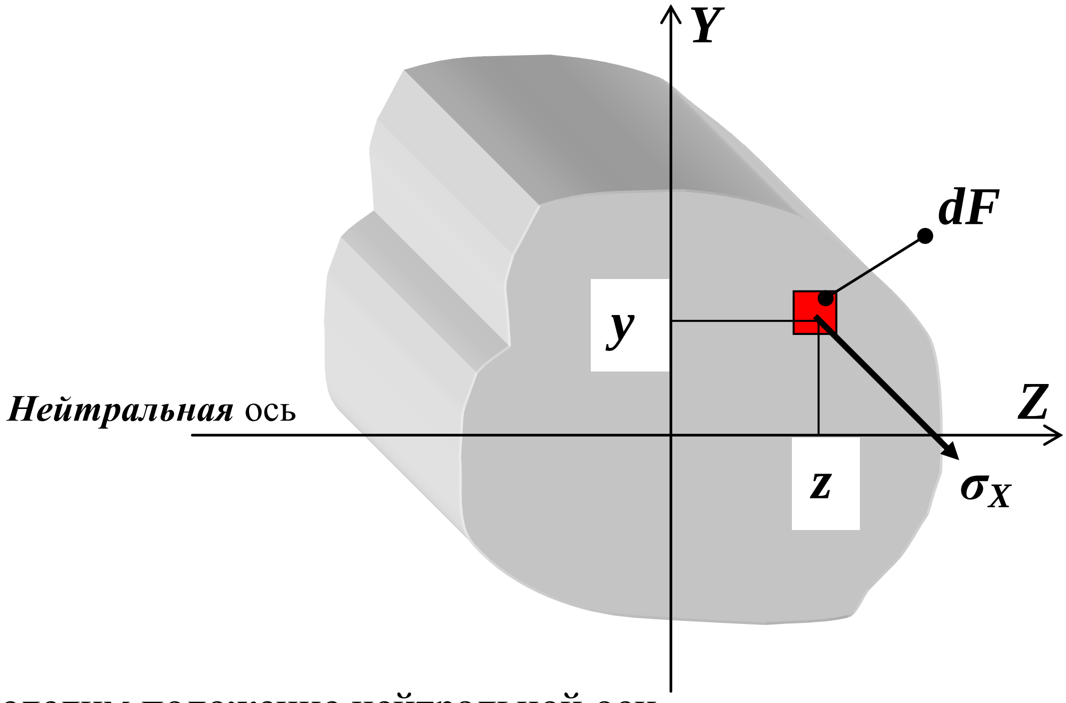
В соответствии с законом Гука для одноосного растяжения

$$\sigma_x = E\varepsilon_x$$

или, с учетом (10.1),

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} y \quad . \qquad (10.2)$$

Рассмотрим поперечное сечение бруса при чистом изгибе.
Направим ось Z по нейтральной оси сечения.



Определим положение нейтральной оси.
При чистом изгибе продольная сила $\boldsymbol{N_X}$ равна нулю.

$$N_x = \int_F \sigma_x dF$$

С учетом (10.2) получаем условие

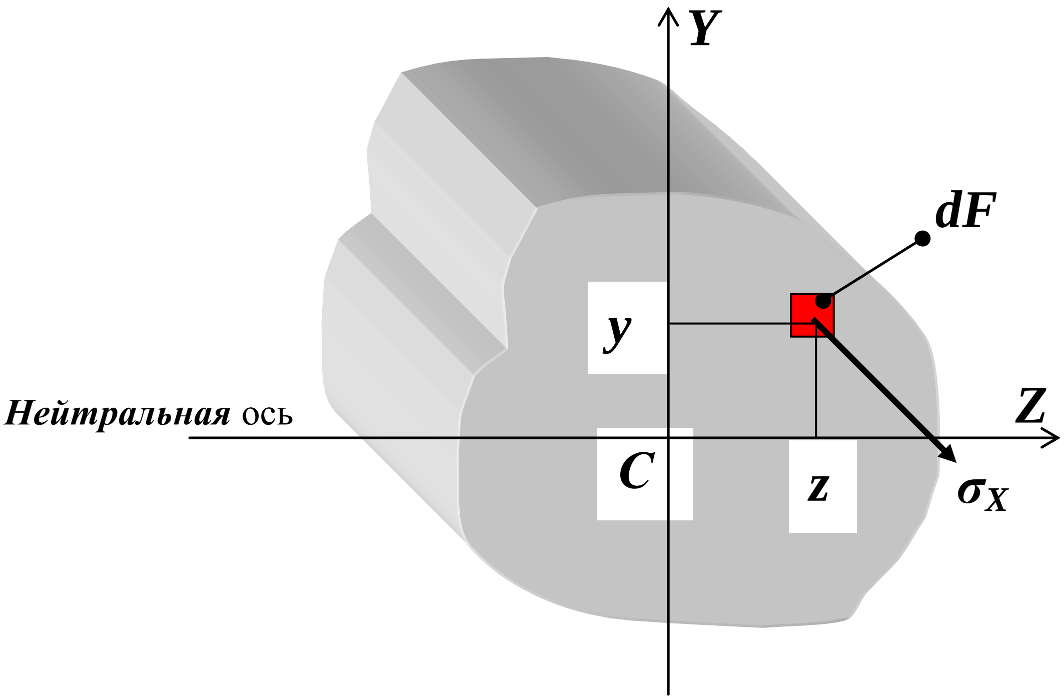
$$N_x = \int_F \sigma_x dF = \frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0 \, .$$

Итак, равен нулю интеграл, который есть **статический момент S_Z** относительно оси $\boldsymbol{Z}$,

$$\int_F y dF = S_z = y_c F = 0 \, .$$

Следовательно, **нейтральная ось проходит через центр тяжести сечения**, координата которого $y_c = 0$.

Поместим начало координат в центр тяжести сечения *C*.



Поскольку рассматриваемый изгиб – плоский, то при деформации бруса он остается в силовой плоскости и изгибающий момент $M_Y = 0$.

Следовательно,

$$M_y = \int_F \sigma_X z dF = \frac{E}{\rho} \int_F yz dF = 0$$

Поэтому равен нулю интеграл, который есть **центробежный момент инерции I_{YZ}**,

$$\int_F yz dF = I_{yz} = 0.$$

А это означает, что оси *Y* и *Z* есть главные центральные оси сечения.

Подсчитаем теперь изгибающий момент $\boldsymbol{M_Z}$, создаваемый напряжениями $\boldsymbol{\sigma_x}$.

$$M_z = \int_F \sigma_x y dF = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = \frac{E}{\rho} I_z \qquad (10.3)$$

где

$$I_z = \int_F y^2 dF \qquad (10.4)$$

осевой момент инерции сечения относительно оси $\boldsymbol{Z}$.

Из (10.3) получаем

$$\frac{E}{\rho} = \frac{M_z}{I_z}. \qquad (10.5)$$

После подстановки в формулу для напряжений (12.2) имеем

$$\sigma_x = \frac{E}{\rho} y = \frac{M_z}{I_z} y, \qquad (10.6)$$

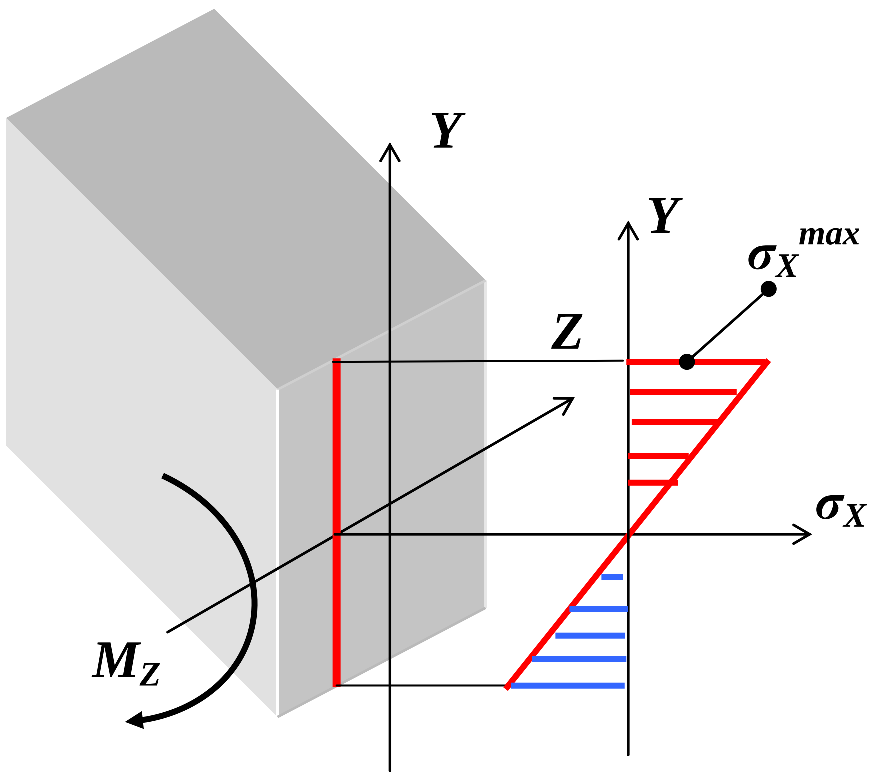
и, с учетом закона Гука

$$\varepsilon_x = \frac{M_z}{EI_z} y, \qquad (10.7)$$

где $\boldsymbol{EI_Z}$ – жесткость сечения при изгибе.

Итак, и напряжения, и относительные деформации при изгибе являются линейной функцией координаты *Y* точки сечения.

$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y$$



Максимальные напряжения соответствуют максимальной координате y^{max},

$$\sigma_x^{max} = \frac{M_z}{I_z} y^{max}, \qquad (10.8)$$

или

$$\sigma_x^{max} = \frac{M_z}{W_z}, \qquad (10.9)$$

где

$$W_z = \frac{I_z}{y^{max}} \qquad (10.10)$$

Для прямоугольного сечения с основанием b и высотой h ,

$$I_z = \frac{bh^3}{12}, \qquad W_z = \frac{bh^2}{6}.$$

Напряжения при поперечном изгибе

Нормальные напряжения

При поперечном изгибе не равны нулю и $\boldsymbol{M_Z}$**,** и $\boldsymbol{Q_Y}$ **.**

При наличии поперечной силы гипотеза плоских сечений, строго говоря, не оправдывается.

Однако, если отношение высоты $\boldsymbol{h}$ балки к ее длине $\boldsymbol{L}$

$$\frac{h}{L} << 1,$$

то искажение сечений мало и гипотеза плоских сечений выполняется с большой степенью точности и для нормальных напряжений справедлива формула

$$\sigma_X = \frac{M_Z}{I_Z} y$$

Касательные напряжения

Формулу для касательных напряжений (формулу Журавского) получим при следующих допущениях:

1. Рассматривается балка, имеющая высокое прямоугольное поперечное сечение, т.е.

$$\frac{h}{b} > 2 .$$

2. Касательные напряжения направлены параллельно вызывающей их силе,

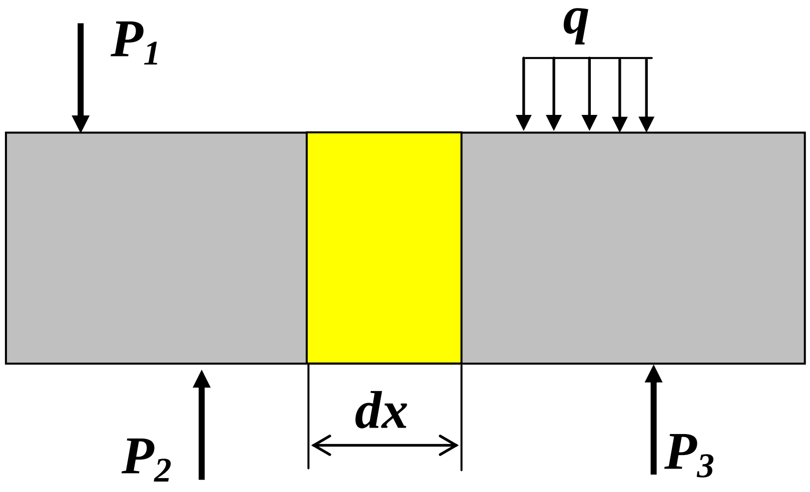
$$\vec{\tau}_{XY} \| \vec{Q}_Y .$$

3. Касательные напряжения не изменяются по ширине сечения, т.е. они не зависят от координаты $\boldsymbol{Z}$,

$$\vec{\tau}_{XY(Y=const)} = const .$$

4. Касательные напряжения зависят только от координаты $\boldsymbol{Y}$.

Рассмотрим балку



Выделим участок длиной ***dx*** на том месте балки, где отсутствуют внешние силы ***q*** и ***P***.

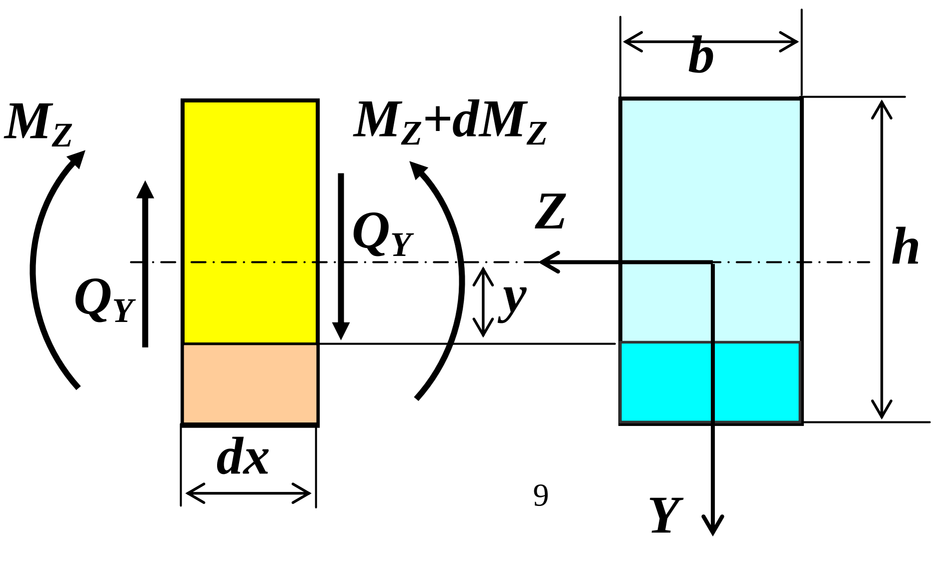
Так как на элементе ***dx*** распределенная нагрузка ***q = 0***, то

$$q = \frac{dQ_y}{dx} = 0.$$

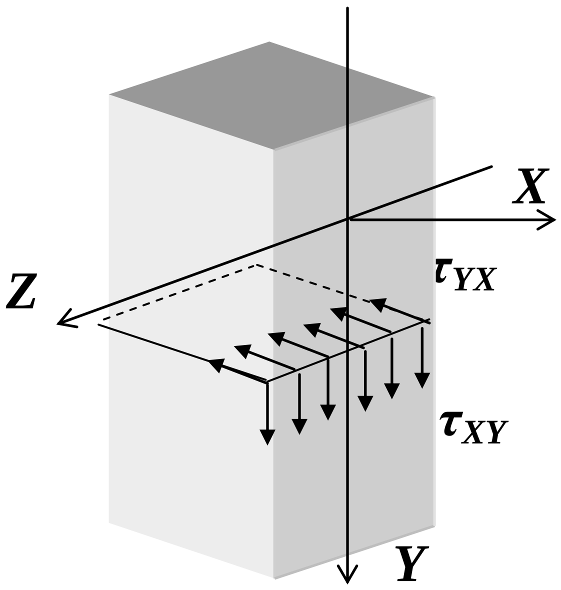
Следовательно, $Q_Y = const$ и, поскольку $\frac{dM_Z}{dx} = Q_y$, то изгибающий момент на выделенном участке M_Z **изменяется.**

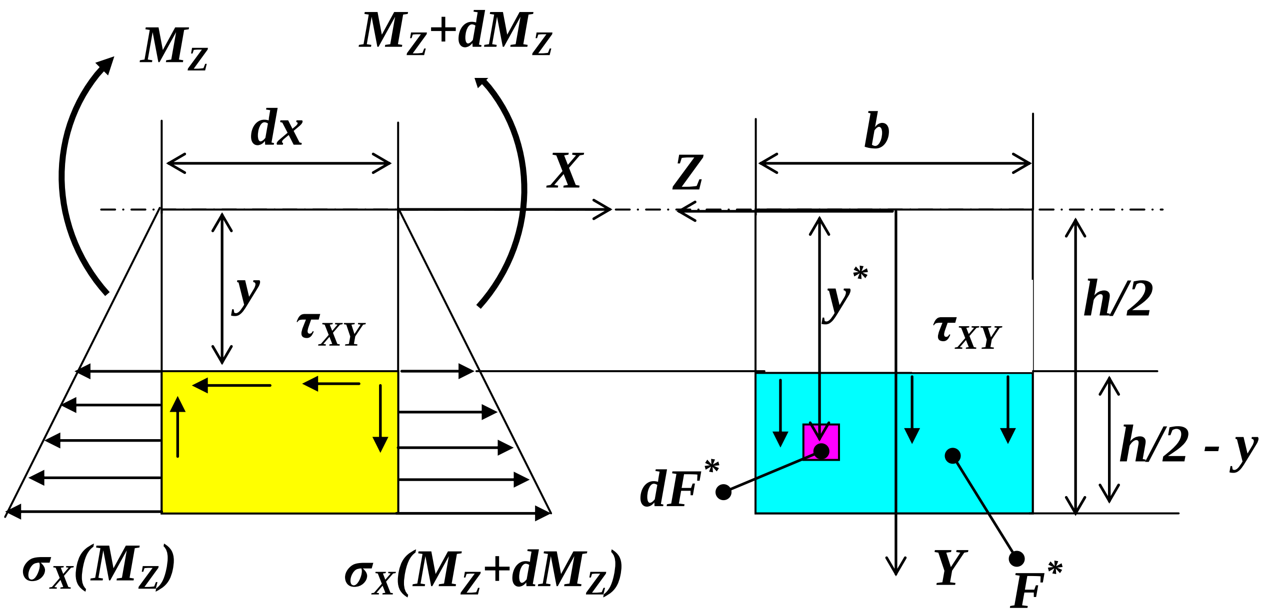
Вернемся к выделенному участку балки.

Горизонтальным сечением, расположенным на расстоянии ***y*** от нейтральной оси ***Z***, разделим выделенный элемент балки на две части и рассмотрим равновесие нижней части.



Предварительно заметим, что $\tau_{XY} = \tau_{YX}$.





Спроектируем все силы на ось X .

$$-\int\limits_{F^*} \sigma_X(M_Z)dF^* + \int\limits_{F^*} \sigma_X(M_Z + dM_Z)dF^* - \tau_{xy}bdx = 0$$

Так как $$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y,$$

то получаем

$$-\frac{M_z}{I_z}\int_{F^*} y^* dF^* + \frac{M_z + dM_z}{I_z}\int_{F^*} y^* dF^* - \tau_{xy} b dx = 0$$

$$\frac{dM_z}{I_z}\int_{F^*} y^* dF^* - \tau_{xy} b dx = 0$$

Поскольку интеграл

$$\int_{F^*} y^* dF^* = S_z\left(y^*\right),$$ где $$y \le y^* \le \frac{h}{2}$$

есть статический момент площади $\boldsymbol{F^*}$ относительно оси $\boldsymbol{Z}$ и

$$\frac{dM_z}{dx} = Q_y,$$

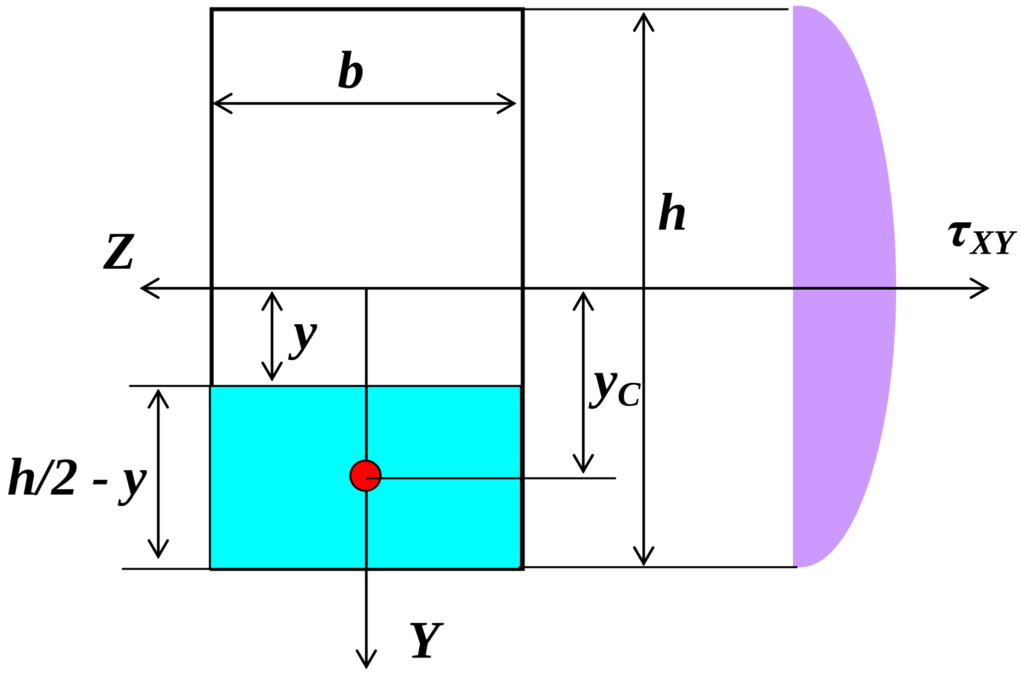
то получаем окончательную формулу для касательных напряжений при поперечном изгибе

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z\left(y^*\right)}{b I_z}, \qquad (10.11)$$

где $$S_z\left(y^*\right) = F^* y_c$$ и $$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

Для прямоугольного сечения

$$y_c = \frac{h}{4} + \frac{y}{2}$$



$$S_z\left(y^*\right) = F^* y_c = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\left(\frac{h}{4} + \frac{y}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right)$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right)}{2I_z}$$

Следовательно, касательное напряжение есть параболическая функция координаты точки сечения, и достигает максимума при ***y = 0***:

$$\tau_{xy}^{max} = \frac{Q_y S_z\left(y^*\right)}{bI_z} = \frac{Q_y bh^2 12}{8bbh^3} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{bh}.$$

Итак, максимальное касательное напряжение имеет порядок

$$\tau_{xy}{}^{max} \approx \frac{Q_y}{F}.$$

Нормальное максимальное напряжение примерно равно

$$\sigma_x{}^{max} = \frac{M_z}{W_z} \approx \frac{6PL}{bh^2} \approx \frac{6Q_y L}{Fh}.$$

Следовательно

$$\frac{\sigma_x{}^{max}}{\tau_{xy}{}^{max}} \approx \frac{6L2}{3h} = \frac{4L}{h}.$$

Но так как для балок

$$L >> h,$$

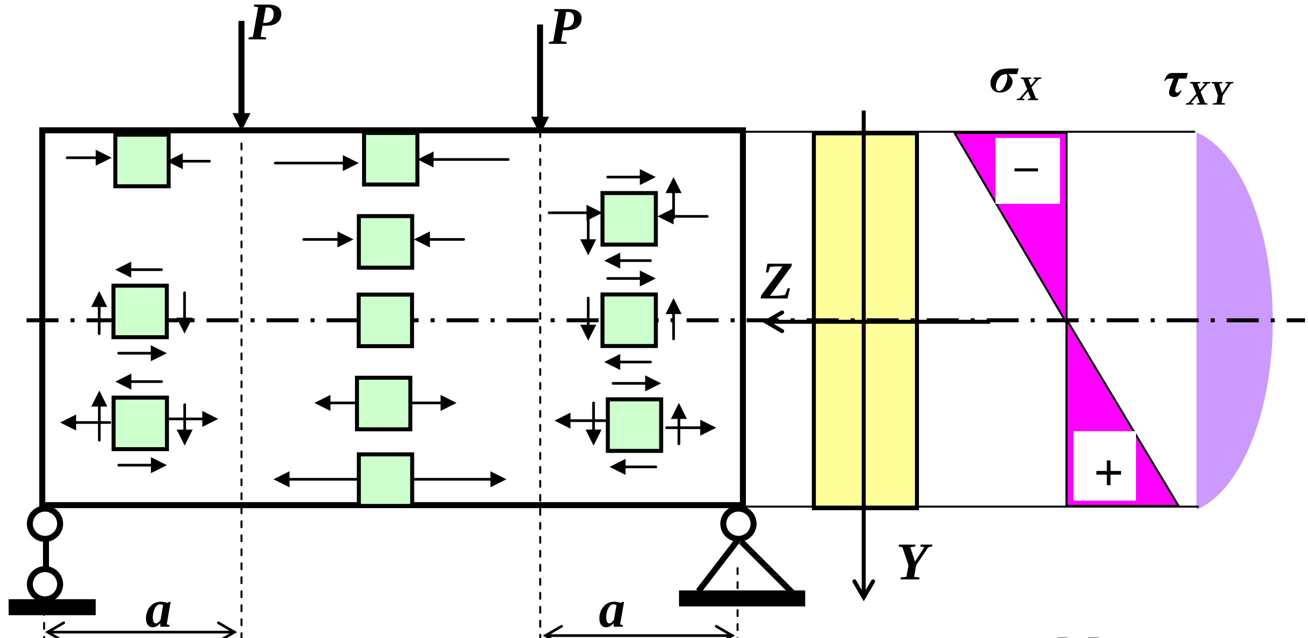
то

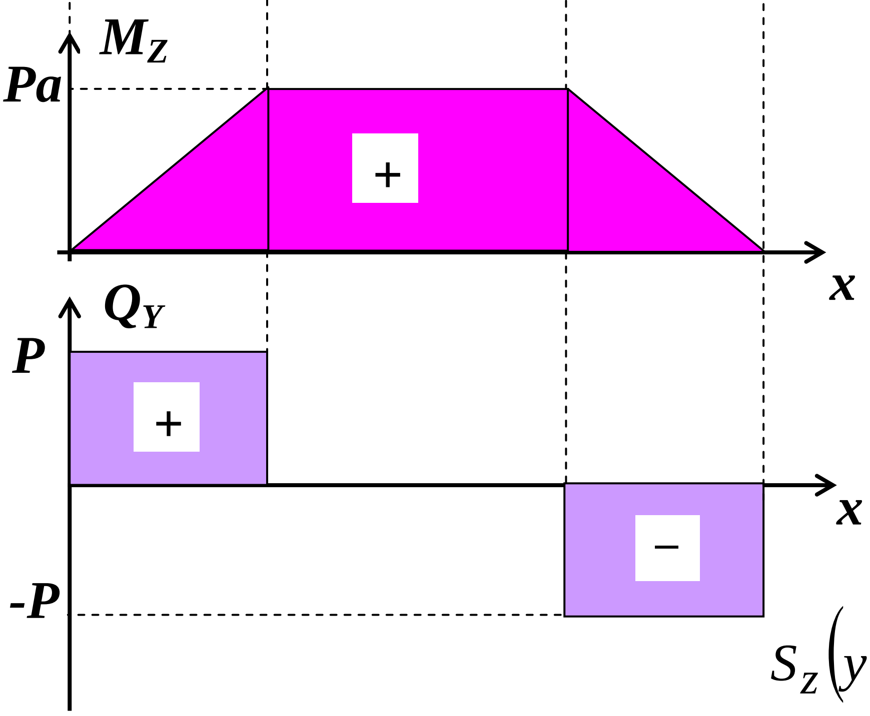
$$\sigma_x{}^{max} >> \tau_{xy}{}^{max}.$$

Поэтому в расчетах балок на прочность **касательным напряжением можно пренебречь**, особенно если учесть, что там, где нормальное напряжение максимально, касательное напряжение минимально (и наоборот).

Напряженное состояние при изгибе

Рассмотрим балку, нагруженную поперечными силами $\boldsymbol{P}$, которые находятся на расстояниях $\boldsymbol{a}$ от концов балки. При таком нагружении в середине балки между силами имеет место чистый изгиб, а справа и слева от сил – поперечный изгиб.





$$\sigma_x = \frac{M_z}{I_z} y$$

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z\left(y^*\right)}{b I_z}$$

$$I_z = \frac{bh^3}{12}$$

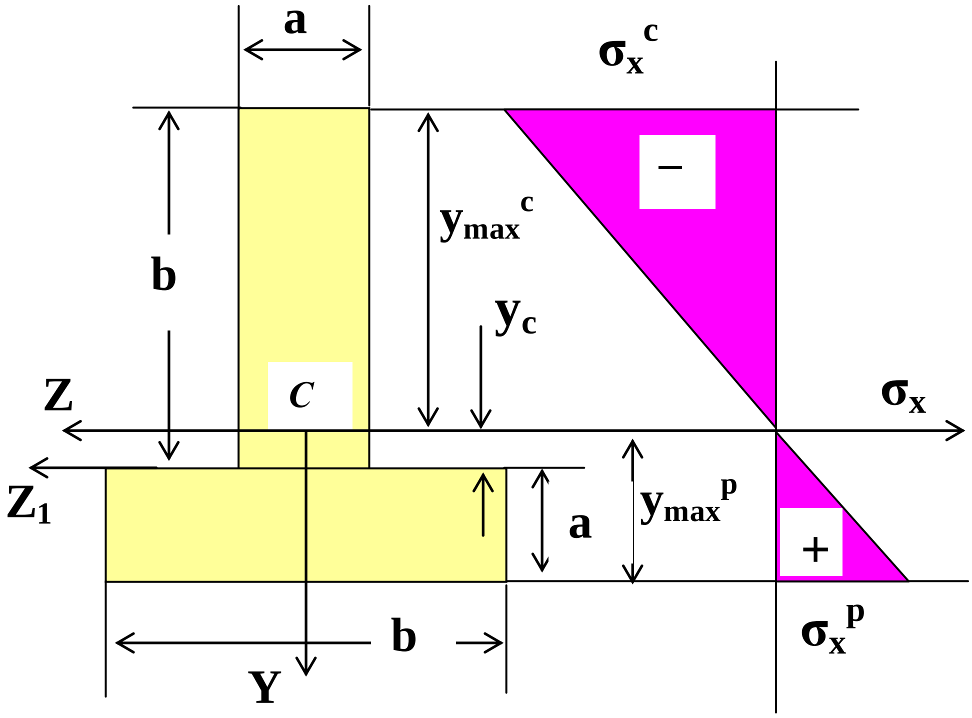
$$S_z\left(y^*\right) = \frac{b}{2}\left(\left(\frac{h}{2}\right)^2 - y^2\right)$$

В зоне чистого изгиба возникает одноосное напряженное состояние растяжения или сжатия.

В зоне поперечного изгиба имеет место как одноосное, так и двухосное состояние, в том числе чистый сдвиг (в точках на нейтральной оси)

Расчет на прочность при изгибе по нормальным напряжениям

Допустим, что балка имеет тавровое сечение указанных размеров



Допустим, что сопротивление материала балки растяжению и сжатию различно, т.е.

$$[\sigma_p] \neq [\sigma_c].$$

Для обеспечения прочности необходимо выполнение двух условий:

$\sigma_x^p \le [\sigma_p]$ и $\sigma_x^c \le [\sigma_c]$.

Или

$$\frac{M_z}{I_z} y_{max}^p \le [\sigma_p] \quad ; \qquad \frac{M_z}{I_z} y_{max}^c \le [\sigma_c].$$

$$W_p \ge \frac{M_z}{[\sigma_p]} \quad ; \qquad W_c \ge \frac{M_z}{[\sigma_c]}.$$

где $W_p = \dfrac{I_z}{y_{max}^p}$ и $W_c = \dfrac{I_z}{y_{max}^c}$ - моменты сопротивления сечения для растянутой и сжатой зон, соответственно.

$$y_{max}^p = a + y_c\ ; \qquad y_{max}^c = b - y_c.$$

Размеры поперечного сечения должны быть вычислены для максимального момента сопротивления.

Для сведения, расстояния $\boldsymbol{y_c}$ от оси $\boldsymbol{Z_1}$ до центра тяжести сечения, а также осевые момента инерции таврового сечения относительно оси $\boldsymbol{Z}$**,** равны

$$y_c = \frac{b - a}{4} \qquad I_z = \frac{13}{48}\cdot b\cdot a^3 + \frac{13}{48}\cdot a\cdot b^3 + \frac{1}{8}\cdot b^2\cdot a^2$$

$$b = a \qquad y_c = 0 \qquad I_z = \frac{2}{3}\cdot a^4$$

$$b = 2\,a \qquad y_c = \frac{1}{4}\cdot a \qquad I_z = \frac{77}{24}\cdot a^4$$

$$b = 3\,a \qquad y_c = \frac{1}{2}\cdot a \qquad I_z = \frac{37}{4}\cdot a^4$$

$$b = 4\,a \qquad y_c = \frac{3}{4}\cdot a \qquad I_z = \frac{245}{12}\cdot a^4$$

$$b = 5\,a \qquad y_c = a \qquad I_z = \frac{115}{3}\cdot a^4$$

$$y_{max}^p = a + y_c \qquad y_{max}^c = b - y_c$$

Перемещения при изгибе

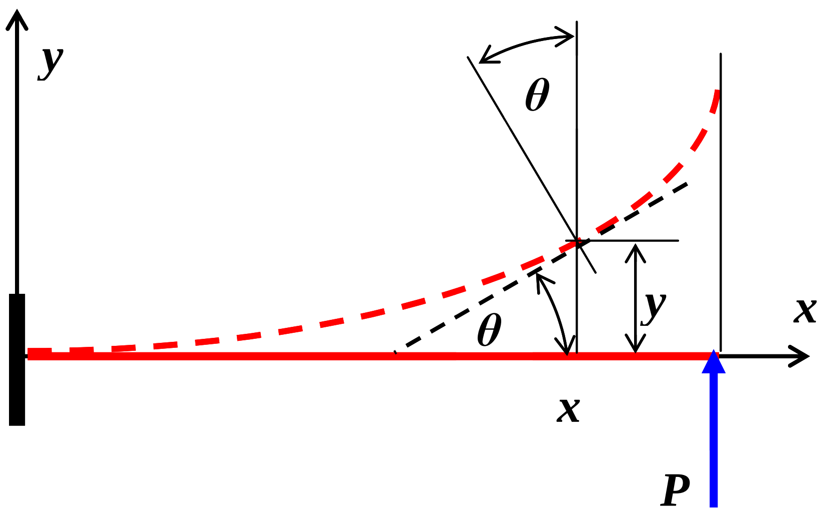
Рассмотрим консольную балку, нагруженную силой ***P***.

Определим балку в системе координат ***x, y***. Начало координат для удобства совместим с левым концом балки.

Изогнутая ось балки есть некоторая кривая в координатах ***x, y***:

$$y = f(x),$$

где y – прогиб балки на расстоянии x от начала координат.



Сечение балки на расстоянии x от начала координат будет развернуто на угол $\boldsymbol{\theta}$, причем

$$\theta = \frac{dy}{dx} = y'. \tag{10.12}$$

Ранее мы получили уравнение

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M_Z(x)}{EI_Z}, \tag{10.13}$$

где $\boldsymbol{\rho}$ - радиус кривизны, $\boldsymbol{M_Z(x)}$ - эпюра изгибающего момента,

$\boldsymbol{EI_Z}$ - жесткость сечения балки при изгибе.

Из курса аналитической геометрии известно, что кривизна кривой равна

$$\frac{1}{\rho(x)} = \frac{y''}{\left(1+(y')^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Поскольку прогибы малы и первая производная $\mathbf{y' << 1}$, то с большой точностью

$$\frac{1}{\rho(x)} \approx y'' \quad . \qquad (10.14)$$

С учетом (10.13) получаем дифференциальное уравнение изогнутой оси балки

$$y'' = \frac{M_z(x)}{EI_z} \quad . \qquad (10.15)$$

Интегрируем это уравнение.
Угол поворота сечения будет равен

$$y' = \theta(x) = \frac{1}{EI_z}\int M_z(x)dx + c \quad , \qquad (10.16)$$

прогиб -

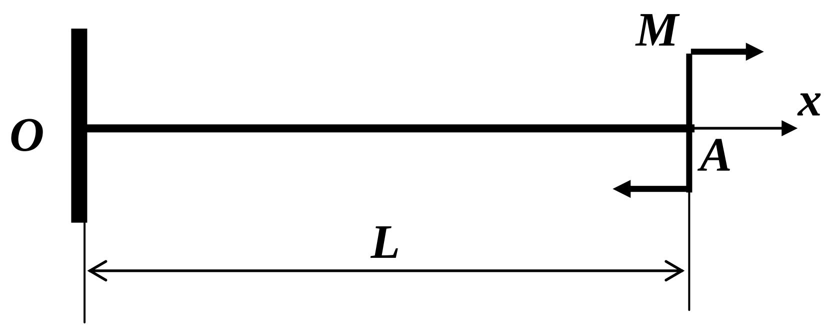
$$y = \frac{1}{EI_z}\int\left(\int M_z(x)dx\right)dx + cx + d \quad . \qquad (10.17)$$

Постоянные интегрирования $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ находят из условий, налагаемых опорами на линейные и угловые перемещения.

Пример 1.

Дана консольная балка известной жесткости, нагруженная на конце $\boldsymbol{A}$ изгибающим моментом $\boldsymbol{M}$.

Требуется найти угол поворота сечения и прогиб конца балки.



Для этой балки $\boldsymbol{M_Z\ (x) = M = const.}$

Граничные условия – угол поворота и прогиб в заделки равны нулю, т.е.

$$\theta(0) = 0 \ \textit{и} \ \ y(0) = 0.$$

Это дает нулевые постоянные интегрирования

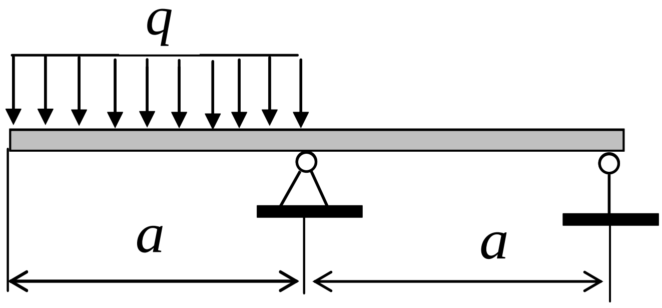
$$c = 0 \ \textit{и} \ \ d = 0$$

Из (10.16) и (10.17) получаем

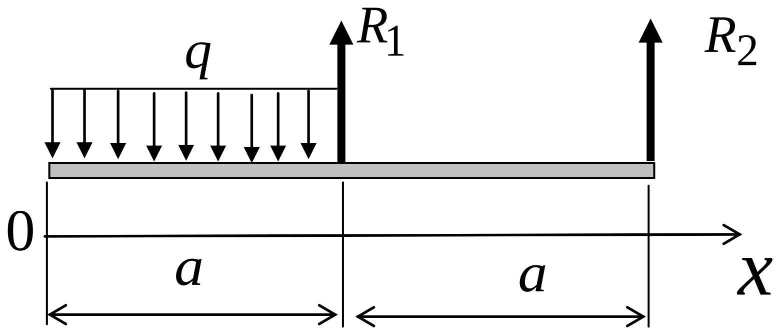
$$\theta(x) = \frac{x}{EI_z}\,; \qquad \theta(x = L) = \frac{L}{EI_z}\,;$$

$$y(x) = \frac{x^2}{2EI_z}\,; \qquad y(x = L) = \frac{L^2}{2EI_z}\,.$$

Пример 2. Численное интегрирование упругой линии балки



a = 1 m ; q = 10 кН/м.



$R_1 = \frac{3a}{2}$

$R_2 = -\frac{qa}{2}$

$$M_z(x) := \begin{cases} -q\cdot x\cdot\frac{x}{2} & \text{if } 0 \le x < a \\ -q\cdot a\cdot\left(x - \frac{a}{2}\right) + R_1\cdot(x-a) & \text{if } a \le x \le 2\cdot a \\ 0\cdot kN\cdot m & \text{otherwise} \end{cases}$$

$E := 2\cdot 10^5\cdot MPa$ $\qquad\qquad$ $I_z := 100\cdot cm^4$

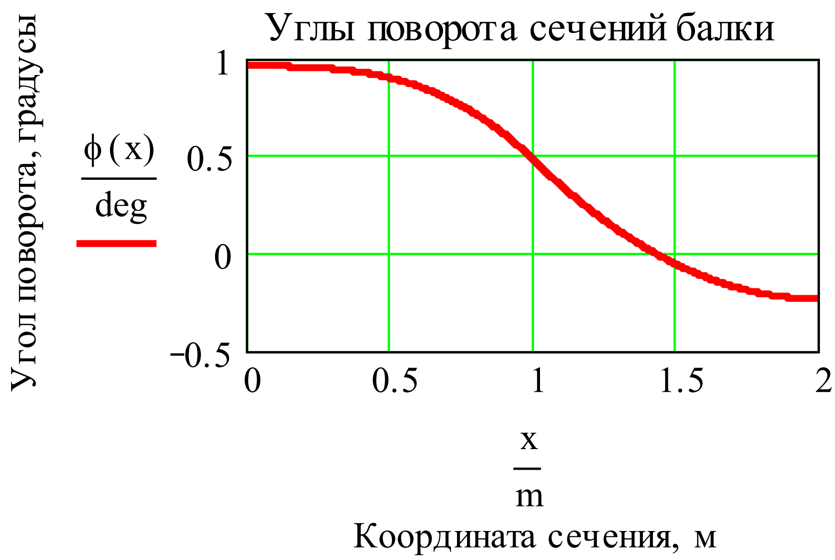
Given

$$\int_{0\cdot m}^{a}\int_{0\cdot m}^{x}\frac{M_z(x)}{E\cdot I_z}\,dx\,dx + C1\cdot a + C2 = 0\cdot m$$

$$\int_{0\cdot m}^{2\cdot a}\int_{0\cdot m}^{x}\frac{M_z(x)}{E\cdot I_z}\,dx\,dx + C1\cdot 2\cdot a + C2 = 0\cdot m$$

$\begin{bmatrix} C1 \\ C2 \end{bmatrix} := \text{Find}(C1, C2)$ $\qquad$ $C1 = 0.017$ $\qquad$ $C2 = -14.577\cdot mm$

$$\phi(x) := \int_0^x \frac{M_z(x)}{E \cdot I_z}\, dx + C1$$



$$y(x) := \int_0^x \phi(x)\, dx + C2$$