Лекция 23

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ ОБРАБОТКЕ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ
(Продолжение)

Задача Л23.1. Степень старения металла различных участков трубопроводов АЭС могут быть оценены по изменению в процессе эксплуатации предела текучести металла $\sigma_{0,2}$. На основе анализа сертификатных данных трубопроводов и результатов массовых натурных безобразцовых измерений этого параметра методом измерения твердости установлено, что в исходном и состаренном состояниях его значение подчиняется нормальному закону распределения. Для трубопроводов ГЦТ третьего и четвертого блоков Нововоронежской АЭС в исходном состоянии среднее нормативное значение предела текучести основного металла — стали 0Х18Н10Т — составляет $\sigma_{0,2}^{\text{исх}} = 245$ МПа при среднеквадратическом отклонении 25 МПа, а для предельно состаренного состояния эти величины соответственно равны $\sigma_{0,2}^{\text{стар}} = 175$ МПа и 20 МПа.

Используя различные статистические методы принятия решений, определить значение предела текучести, при котором трубопровод подлежит замене, если стоимость замены в условных единицах составляет 10 ед., а затраты на ликвидацию последствий аварийной ситуации, связанной с разрушением трубопровода, оцениваются в 200 ед. Априорные вероятности допустимого и недопустимого состояний трубопровода на момент диагностического обследования соответственно равны 0,95 и 0,05. Выигрыши от правильно принятых решений при диагностике трубопроводов можно принять равными нулю.

Проанализируем условия этой задачи, сопоставив их с данными предыдущей задачи Л22.1. Прежде всего, для упрощения обозначений условимся диагностический параметр — предел текучести стали $\sigma_{0,2}$ — обозначать x. Плотности вероятности распределения этого параметра в исходном и состаренном состояниях показаны на рис. Л23.1. Сравним рис. Л23.1 с рис. Л22.1, на котором показано взаимное расположение графиков условных плотностей вероятности распределения диагностического параметра для разных состояний диагностируемого объекта, соответствующее данным задачи Л22.1.

Обратим внимание на то, что среднее значение диагностического параметра —

предела текучести стали — в исходном состоянии выше, чем в состаренном. Поэтому на рис. Л23.1 график плотности вероятности распределения диагностического параметра для исходного состояния металла трубопровода расположен справа от графика плотности вероятности распределения диагностического параметра в случае состаренного состояния металла.

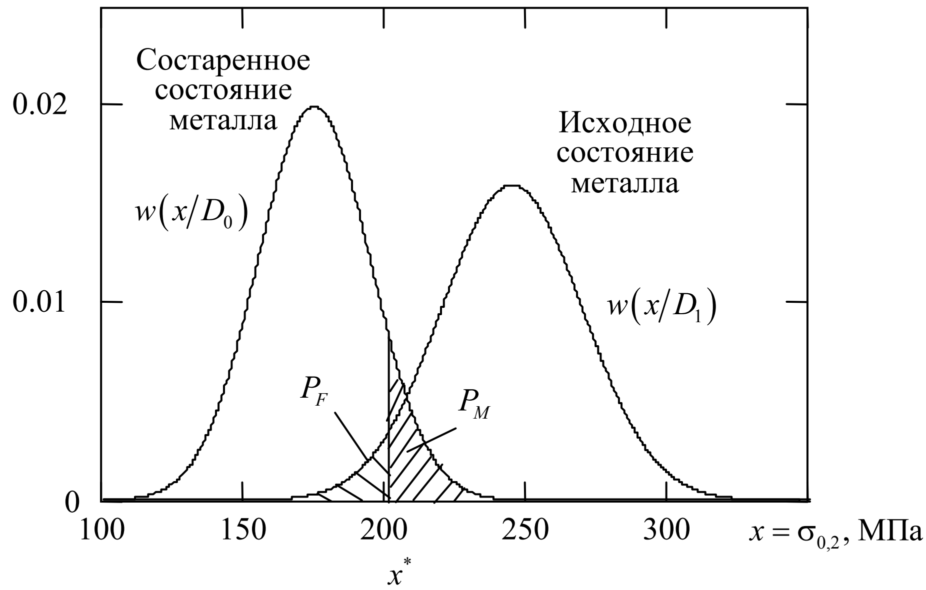

Рис. Л23.1. Распределения предела текучести металла трубопровода в исходном и состаренном состояниях

С изменением взаимного расположения графиков плотностей вероятности распределения диагностического параметра для допустимого и недопустимого состояний металла трубопроводов изменилось и положение заштрихованных областей, соответствующих вероятностям ошибок 1-го и 2-го рода — P_M и P_F, сравни рис. Л22.1 и рис. Л23.1.

В связи с этим нетрудно сообразить, что для расчета критического значения предела текучести стали, вероятностей ошибок диагностирования и среднего риска с применением различных статистических методов принятия решений можно воспользоваться соотношениями, приведенными в пп. 1–5, если исходное (допустимое) состояние металла трубопроводов обозначить как D_1, состаренное (недопустимое) — D_0, а в формулах вычисления ошибок диагностирования заменить P_M на P_F и наоборот. С учетом сказанного введем следующие обозначения: среднее значение предела текучести стали в состаренном состоянии — $x_0 = 175$ МПа; среднеквадратическое отклонение предела текучести стали в состаренном состоянии — $\sigma_0 = 20$ МПа; среднее значение предела текучести стали в исходном состоянии — $x_1 = 245$ МПа; среднеквадратическое отклонение предела текучести стали в исходном состоянии — $\sigma_1 = 25$ МПа; априорные вероятности исходного (допустимого) и состаренного (недопустимого) состояний металла трубопровода на момент диагностического обследования соответственно равны $P(D_1) = 0{,}95$ и $P(D_0) = 0{,}05$; потери от ошибки 1-го рода $\Pi_{10} = 10$ усл. ед.; потери от ошибки 2-го рода $\Pi_{01} = 200$ усл. ед.

Метод минимального риска

Распределение предела текучести стали в нормальном (исходном) $(i = 1)$ и состаренном $(i = 0)$ состояниях описываются функциями, рис. Л23.1:

$$w(x/D_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left\{ -\frac{(x - x_i)^2}{2\sigma_i^2} \right\};\ x \ge 0;\ (i = 0,\ 1).$$

После вычисления коэффициентов b и c в уравнении (Л22.2), см. лекцию 22, и его решения находим критическое значение предела текучести $x^* = 208{,}1$ МПа. Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода в нашем случае вычисляются по формулам

$$P_M = P(D_0) \int_{x^*}^{+\infty} w(x/D_0)\, dx;$$

$$P_F = P(D_1) \int_{0}^{x^*} w(x/D_1)\, dx, \qquad \text{(Л23.1)}$$

а средний риск —

$$R = \Pi_{10} P_F + \Pi_{01} P_M. \qquad \text{(Л23.2)}$$

В результате вычислений находим $P_F = 0{,}0663$; $P_M = 0{,}0025$ и $R = 1{,}15$ усл. ед.

Метод минимального числа ошибочных решений

Критическое значение предела текучести определяем из уравнения (Л22.2), в котором при расчете коэффициента c необходимо положить $\Pi_{01} = \Pi_{10}$. В результате находим $x^* = 185{,}3$ МПа. Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода вычисляются по формулам (Л23.1)

$P_F = 0,008$ и $P_M = 0,0152$. Средний риск составляет $R = 3,12$ усл. ед.

Метод максимального правдоподобия

Критическое значение предела текучести определяем из уравнения (Л22.2), в котором при расчете коэффициента c необходимо положить $\Pi_{10}P(D_1) = \Pi_{01}P(D_0)$. Определив положительный корень этого уравнения, находим $x^* = 207,7$ МПа. Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода рассчитываются по формулам (Л23.1) $P_F = 0,0664$ и $P_M = 0,0025$. Средний риск составляет $R = 1,16$ усл. ед.

Метод минимакса

Критическое значение предела текучести определяется из уравнения

$$\Pi_{01}\int_{x^*}^{+\infty} w(x/D_0)\,dx = \Pi_{10}\int_{0}^{x^*} w(x/D_1)\,dx .$$

Решая это уравнение, находим $x^* = 222,2$ МПа. Наименее благоприятное сочетание вероятностей допустимого $P^*(D_1)$ и недопустимого $P^*(D_0) = 1 - P^*(D_1)$ состояния металла трубопровода, по-прежнему, вычисляются по формуле:

$$\frac{w(x^*/D_0)}{w(x^*/D_1)} = \frac{\Pi_{10}}{\Pi_{01}}\cdot\frac{1-P^*(D_0)}{P^*(D_0)} .$$

В результате вычислений находим $P^*(D_0) = 0,3$; $P^*(D_1) = 0,7$. Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода рассчитываются по формулам (Л23.1), в которых полагаем $P(D_0) = P^*(D_0)$ и $P(D_1) = P^*(D_1)$: $P_F = 0,1268$ и $P_M = 0,0027$. Минимаксный риск равен $R = 3,45$ усл. ед.

Метод Неймана–Пирсона

Вычислим критическое значение предела текучести металла трубопроводов x^* для нескольких значений коэффициента избыточности $k = 1;\ 3;\ 5$. Для этих значений коэффициента избыточности вероятности ложной тревоги в нашем случае соответственно равны $\left(\varepsilon = k\,P\left(D_0\right)\right)$: $\varepsilon = 0{,}05;\ 0{,}15;\ 0{,}25$. Критическое значение предела текучести определяем из условия не превышения ошибки 1-го рода P_F заданной величины ε, тогда из второго соотношения (Л23.1) получаем уравнение для вычисления x^*:

$$P\left(D_1\right)\int\limits_0^{x^*} w\left(x/D_1\right)dx = \varepsilon .$$

Для указанных ε соответствующие значения x^* равны: $x_1^* = 204{,}5$ МПа; $x_2^* = 219{,}9$ МПа и $x_3^* = 229{,}2$ МПа. По формуле (Л23.1) рассчитываем соответствующие вероятности ошибок 2-го рода: $P_{M1} = 0{,}0035$; $P_{M2} = 0{,}0006$; $P_{M3} = 0{,}0001$.

Таблица Л23.1. **Данные расчетов с помощью методов статистических решений**

Метод		Критическая концентрация x^*, МПа	Вероятность ложной тревоги, P_F, 10^{-2}	Вероятность пропуска дефекта, P_M, 10^{-2}	Средний риск, R, усл. ед.
Минимального риска		208,1	6,63	0,25	1,15
Минимального числа ошибочных решений		185,3	0,80	1,52	3,12
Максимального правдоподобия		207,7	6,64	0,25	1,16
Минимакса		222,2	12,68	0,27	3,45
Неймана–Пирсона	$\varepsilon = 0{,}05$	204,5	5,0	0,35	1,20
	$\varepsilon = 0{,}15$	219,9	15,0	0,06	1,62
	$\varepsilon = 0{,}25$	229,2	25,0	0,01	2,53

Средний риск при указанных значениях вероятностей ошибок диагностирования согласно (Л20.3) составит: $R_1 = 1{,}2$; $R_2 = 1{,}62$; $R_3 = 2{,}53$ усл. ед. Данные вычислений объединены в табл. Л23.1.

Их анализ показывает, что здесь имеют место те же закономерности, которые были отмечены при обсуждении результатов расчетов, полученных при решении задачи Л22.1.