

Лекция 22

ПРИМЕРЫ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ ПРИ ОБРАБОТКЕ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Применение общих положений рассмотренных выше методов статистической теории принятия решений при диагностике технических объектов проиллюстрируем на нескольких задачах.

Задача Л22.1. Состояние подшипника главного циркуляционного насоса ЯЭУ контролируется по содержанию металла в смазке, появляющегося в результате износа конструктивных элементов подшипника. Предварительно установлено, что концентрация металла подчиняется нормальному закону распределения, причем в исправном состоянии D_0 среднее содержание металла составляет $x_0 = 0,5$ мг/кг при среднеквадратическом отклонении $\sigma_0 = 0,2$ мг/кг, а для предельно изношенного состояния D_1 эти величины соответственно равны $x_1 = 1,5$ мг/кг, $\sigma_1 = 0,3$ мг/кг. Используя различные статистические методы принятия решений, определить предельное содержание металла в смазке, при котором подшипник подлежит разборке и ремонту, если их стоимость в условных величинах составляет $\Pi_{01} = 10$ единиц, а последствия аварийной ситуации, связанной с остановкой реактора, оцениваются в $\Pi_{10} = 200$ единиц. Априорные вероятности исправного и изношенного состояний подшипника на момент диагностики соответственно равны $P(D_0) = 0,95$ и $P(D_1) = 0,05$.

Рассмотрим решение этой задачи с использованием различных методов статистической теории принятия решений.

Метод минимального риска

Плотности вероятностей распределения диагностического параметра — концентрации металла в смазке — при нормальном и изношенном состояниях подшипника описываются функциями

$$w(x/D_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} \exp\left\{-\frac{(x-x_i)^2}{2\sigma_i^2}\right\}; x \geq 0; (i = 0, 1).$$

Взаимное расположение графиков функций $w(x/D_0)$ и $w(x/D_1)$ показано на рис. Л20.1, см. лекцию 20, который для удобства анализа и интерпретации данных воспроизводится на рис. Л22.1.

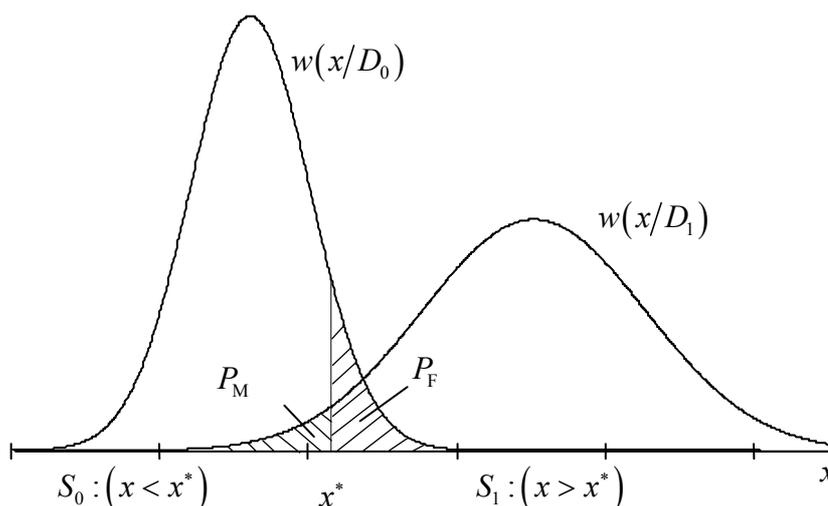


Рис. Л22.1. Условные плотности вероятности распределения параметра x в состояниях D_0 и D_1 ; x^* — граничное значение параметра; площади заштрихованных областей пропорциональны ошибкам 1-го и 2-го рода

Составив отношение правдоподобия и прологарифмировав обе части соотношения (Л20.6), получим уравнение для определения критической концентрации x^* (граничное значение) металла в смазке:

$$\frac{(x^* - x_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x^* - x_0)^2}{2\sigma_0^2} + \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \ln \left(\frac{\Pi_{10} P(D_1)}{\Pi_{01} P(D_0)} \right). \quad (\text{Л22.1})$$

Здесь, поскольку неизвестны выигрыши от правильно поставленных диагнозов, они приняты равными нулю. Введя обозначение $z = x^*/x_0$ уравнение (Л22.1) можно записать в виде

$$z^2 + 2bz + c = 0, \quad (\text{Л22.2})$$

где

$$b = \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} - x_1/x_0 \right) / \left(1 - \sigma_1^2/\sigma_0^2 \right);$$

$$c = \left[\left(\frac{x_1^2}{x_0^2} - \frac{\sigma_1^2}{\sigma_0^2} \right) + 2 \left(\frac{\sigma_1}{x_0} \right)^2 \ln \left\{ \frac{\sigma_1 \Pi_{01} P(D_0)}{\sigma_0 \Pi_{10} P(D_1)} \right\} \right] / \left(1 - \sigma_1^2/\sigma_0^2 \right).$$

Подставив исходные данные, определяем положительный корень уравнения (Л22.2) — $z = 1,842$. Следовательно, $x^* = 0,92$ мг/кг.

Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода, см. рис. Л20.1, вычисляются по формулам (Л20.2), которые в нашем случае имеют вид:

$$P_F = P(D_0) \int_{x^*}^{+\infty} w(x/D_0) dx;$$

$$P_M = P(D_1) \int_0^{x^*} w(x/D_1) dx. \quad (\text{Л22.3})$$

В результате вычислений находим $P_F = 0,0168$; $P_M = 0,00134$. Средний риск равен

$$R = \Pi_{01} P_F + \Pi_{10} P_M = 0,44 \text{ усл. ед.}$$

Метод минимального числа ошибочных решений

Критическую концентрацию металла в смазке определяем из уравнения (Л22.1), положив в правой его части $\Pi_{01} = \Pi_{10}$, (см. п. 2 лекции 20),

$$\frac{(x^* - x_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x^* - x_0)^2}{2\sigma_0^2} + \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = \ln \left(\frac{P(D_1)}{P(D_0)} \right).$$

В результате вычислений находим $x^* = 1,09$ мг/кг. Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода вычисляются по формулам (Л22.3) при найденном значении x^* : $P_F = 0,0016$ и $P_M = 0,0042$. Средний риск составляет $R = 0,86$ усл. ед.

Метод максимального правдоподобия

Критическую концентрацию металла в смазке вычислим из уравнения (Л22.1), положив в правой его части $\Pi_{10} P(D_1) = \Pi_{01} P(D_0)$, (см. п. 3 лекции 20). При этом уравнение (Л22.1) для определения x^* принимает вид:

$$\frac{(x^* - x_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x^* - x_0)^2}{2\sigma_0^2} + \ln \frac{\sigma_1}{\sigma_0} = 0.$$

Решив это уравнение, находим $x^* = 0,92$ мг/кг. Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода рассчитываются согласно (Л22.3) при найденном значении x^* : $P_F = 0,0161$ и $P_M = 0,00137$. Средний риск составляет величину $R = 0,44$ усл. ед.

Метод минимакса

Критическая концентрация металла в смазке определяется из уравнения

$$\Pi_{01} \int_{x^*}^{+\infty} w(x/D_0) dx = \Pi_{10} \int_0^{x^*} w(x/D_1) dx.$$

Решая это уравнение численным методом, находим $x^* = 0,74$ мг/кг. Наименее благоприятное сочетание вероятностей исправного $P^*(D_0)$ и неисправного $P^*(D_1) = 1 - P^*(D_0)$ состояний вычисляются по формуле:

$$\frac{w(x^*/D_0)}{w(x^*/D_1)} = \frac{\Pi_{10}}{\Pi_{01}} \cdot \frac{1 - P^*(D_0)}{P^*(D_0)}.$$

В результате определяем $P^*(D_0) = 0,528$; $P^*(D_1) = 0,472$. Вероятности ошибок 1-го и 2-го рода рассчитываются по формулам (Л22.3), в которых необходимо положить $P(D_0) = P^*(D_0)$ и $P(D_1) = P^*(D_1)$: $P_F = 0,0604$ и $P_M = 0,0027$. Минимаксный риск равен $R = 1,14$ усл. ед.

Обратим внимание на то, что действительный риск меньше минимаксного риска, поскольку последний определялся при наиболее неблагоприятном значении вероятности исправного состояния $P^*(D_0)$, отличающегося от реальной априорной вероятности $P(D_0)$.

Метод Неймана—Пирсона

Проведем расчет критической концентрации металла в смазке для нескольких значений коэффициента избыточности $k = 1; 3; 5$. Для выбранных значений k вероятности ложной тревоги соответственно равны ($\varepsilon = k P(D_1)$): $\varepsilon = 0,05; 0,15; 0,25$. Критическая концентрация металла определяется из условия не превышения ошибки 1-го рода P_F

заданной величины ε . Следовательно, уравнение для вычисления x^* в нашем случае имеет вид, см. рис. Л22.1,

$$P(D_0) \int_{x^*}^{+\infty} w(x/D_0) dx = \varepsilon.$$

Для указанных ε значения x^* равны: $x_1^* = 0,82$; $x_2^* = 0,7$; $x_3^* = 0,63$. По формуле (Л22.3) определяем соответствующие вероятности пропуска дефекта: $P_{M1} = 0,00061$; $P_{M2} = 0,00019$; $P_{M3} = 0,00009$. Средний риск в этих случаях составляет соответственно: $R_1 = 0,62$; $R_2 = 1,54$; $R_3 = 2,52$ усл. ед. Результаты проведенных расчетов сведены в табл. Л22.1.

Таблица Л22.1. Данные расчетов с помощью различных методов статистических решений

Метод	Критическая концентрация x^* , мг/кг	Вероятность ложной тревоги, $P_F, 10^{-2}$	Вероятность пропуска дефекта, $P_M, 10^{-2}$	Средний риск, R , усл. ед.	
Минимального риска	0,92	1,68	0,13	0,44	
Минимального числа ошибочных решений	1,09	0,16	0,42	0,86	
Максимального правдоподобия	0,92	1,61	0,14	0,44	
Минимакса	0,74	6,04	0,27	1,14	
Неймана–Пирсона	$\varepsilon = 0,05$	0,82	5,0	0,06	0,62
	$\varepsilon = 0,15$	0,70	15,0	0,02	1,54
	$\varepsilon = 0,25$	0,63	25,0	0,01	2,52

Из приведенных данных следует, что применение метода минимального числа ошибочных решений приводит к наибольшей вероятности пропуска дефекта, так как при расчете критической концентрации металла не учитывались существенно различные стоимости ошибок диагностирования. В итоге — сравнительно высокое значение риска. Метод минимакса, а также метод Неймана–Пирсона при $k = 3; 5$ дают высокий уровень ложной тревоги, то есть приводят к необходимости замены большого числа исправных подшипников (соответственно около 6, 15 и 25 %) и высокой величине риска диагностирования.

Обращает на себя внимание тот факт, что данные расчетов с помощью методов минимального риска и максимального правдоподобия практически совпадают. Такое

совпадение связано исключительно с исходными данными этого примера. Для приведенных значений выполняется следующее условие $\Pi_{10}P(D_1)/\Pi_{01}P(D_0) \cong 1$, а как указано в п. 3 лекции 20, метод минимального риска сводится к методу максимального правдоподобия при равенстве этого соотношения единице ($\Lambda_0 = 1$). Отсюда совпадение результатов расчетов с использованием этих методов. В общем случае это не так.

Из результатов расчетов следует, что наилучшее правило принятия решения с наименьшим по сравнению с другими значением среднего риска дает применение метода минимального риска, основанного на использовании всей доступной информации о диагностируемом объекте.

Детальный анализ показывает, что критическое значение информативного параметра x^* — концентрация металла в смазке, существенно зависит от соотношения между потерями от ошибок 1-го и 2-го рода при диагностике. На рис. Л22.2а показана зависимость критического значения x^* от отношения между потерями от ошибок при диагностике Π_{10}/Π_{01} . С увеличением потерь от ошибки 2-го рода — пропуска сигнала, критическое значение x^* убывает. При этом уменьшается вероятность пропуска сигнала P_M и, соответственно, возрастает вероятность ложной тревоги P_F .

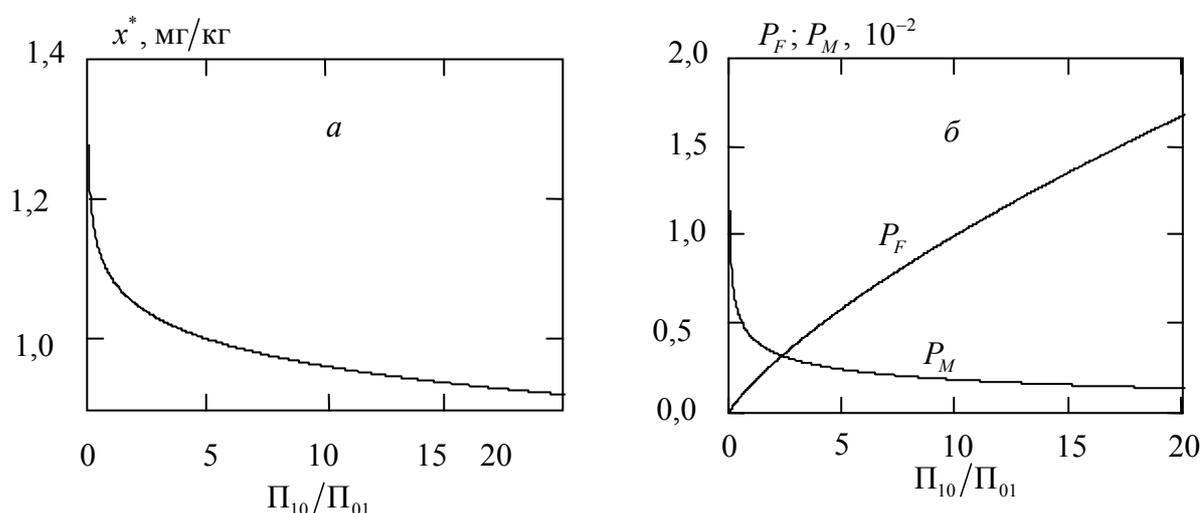


Рис. Л22.2. Изменение критического значения диагностического параметра x^* (а) и ошибок 1-го и 2-го рода (б) в зависимости от отношения потерь от неправильно принятых решений

На рис. Л22.2б приведены зависимости вероятностей ошибок 1-го и 2-го рода от отношения между потерями от этих ошибок. Заметим, что с возрастанием отношения Π_{10}/Π_{01} темп роста P_F выше, чем у P_M . Это обусловлено тем, что среднеквадратическое

отклонение σ_0 распределения $w(x/D_0)$ меньше, чем среднеквадратическое отклонение σ_1 распределения $w(x/D_1)$.