Лекция 21

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ
(Продолжение)

4. Метод минимакса

Метод минимакса используется, если неизвестны априорные вероятности состояний — $P(D_0)$ и $P(D_1)$. Суть метода — минимизация максимально возможного риска, который может иметь место из-за неблагоприятного сочетания неизвестных априорных вероятностей состояний диагностируемого объекта $P(D_0)$ и $P(D_1)$.

Чтобы понять основную идею метода, рассмотрим, как меняется функция среднего риска R в зависимости от априорных вероятностей состояния диагностируемого объекта $P(D_0)$ и $P(D_1)$. Так как эти величины взаимосвязаны и в сумме равны единице, достаточно проанализировать поведение R при изменении одной из указанных вероятностей, например $P(D_0)$.

Очевидно, что известны значения риска в точках $P(D_0)=0$ и $P(D_0)=1$. Действительно, если $P(D_0)=0$, то априорно известно, что объект находится в состоянии D_1. Сделав такое заключение, получим выигрыш от правильно принятого решения. Функция риска при этом принимает значение $R=\Pi_{11}$, $(\Pi_{11}<0)$, рис. Л21.1. Напомним, что выигрыши — это отрицательные потери, см. комментарии к табл. Л19.3, лекцию 19. С увеличением $P(D_0)$ возрастает неопределенность при определении состояния диагностируемого объекта. Растет и риск принятия решения $R>\Pi_{11}$, причем производная функции риска в точке $P(D_0)=0$ положительная.

Аналогично, если $P(D_0)=1$, делается заключение, что объект находится в состоянии D_0. В результате получаем выигрыш от правильного решения. Функция риска в этой точке равна $R=\Pi_{00}$, причем $\Pi_{00}<0$. При смещении из точки $P(D_0)=1$ влево $\left(P(D_0)<1\right)$ из–за возникающей неопределенности данных о состоянии диагностируемого объекта возрастает риск принятия решения, то есть $R > \Pi_{00}$. Следовательно, производная функции риска в точке $P(D_0) = 1$ имеет отрицательное значение.

Поскольку R — непрерывная функция аргумента $P(D_0)$, то в некоторой точке $P^*(D_0)$ интервала $(0;1)$ R должна иметь максимум. Это — наименее благоприятное значение априорной вероятности $P(D_0)$, при котором риск принятия решения $R(P^*(D_0)) = R^*$ максимален. При известных потерях и выигрышах максимум риска и значение $P^*(D_0)$ можно определить, построив график, аналогичный графику на рис. Л21.1. Данные для этого можно получить, последовательно задавая $P(D_0)$ из интервала 0…1 и вычисляя R с помощью соотношения (Л20.4), см. лекцию 20. Так как реальная априорная вероятность $P(D_0)$ неизвестна, для расчетов принимается значение $P^*(D_0)$. Очевидно, что при этом реальный риск принятия решения о состоянии диагностируемого объекта не превысит R^*.

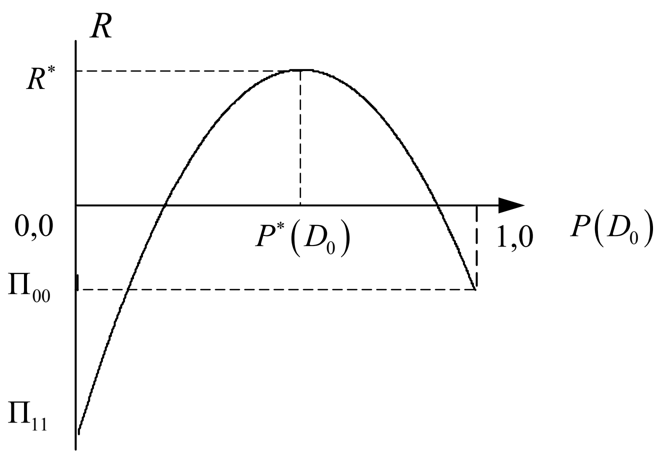

Рис. Л21.1. Изменение среднего риска R в зависимости от априорной вероятности состояния D_0

Чтобы определить условие разбиения диагностического пространства на области S_0 и S_1, необходимо найти экстремум функции среднего риска R (см. (Л20.4)) относительно величины $P(D_0)$ с учетом того, что $P(D_1)=1-P(D_0)$.

Определить условие разбиения диагностического пространства на области S_0 и S_1 и величину $P^*(D_0)$ из уравнения $dR\{P^*(D_0)\}/dP(D_0)=0$ можно только в случае однопараметровой диагностики, то есть когда имеется лишь один диагностический параметр. В общем случае в (Л20.4) входят интегралы по S_0 и S_1, а их зависимости от $P(D_0)$ заранее не известны.

В этом случае целесообразно перейти от многомерных плотностей вероятности распределения диагностических параметров $w(\mathbf{x}/D_0)$ и $w(\mathbf{x}/D_1)$ к одномерным — $w(\Lambda(\mathbf{x})/D_0)$ и $w(\Lambda(\mathbf{x})/D_1)$. Для этого, как и ранее в п.1 лекции 19, рассматриваем отношение правдоподобия $\Lambda(\mathbf{x})$ как случайную функцию вектора $\mathbf{x}$ и вводим условные плотности вероятности $w(\Lambda(\mathbf{x})/D_0)$ и $w(\Lambda(\mathbf{x})/D_1)$. Как показано в п.1 лекции 20, вероятности правильно и ошибочно поставленных диагнозов (Л20.1) и (Л20.2) можно представить в виде:

$$P_0 = P(D_0)P(\{\Lambda(\mathbf{x})>\Lambda_0\}/D_0) = P(D_0)\int_{\Lambda_0}^{+\infty} w(\Lambda(\mathbf{x})/D_0)\,d\Lambda;$$

$$P_1 = P(D_1)P(\{\Lambda(\mathbf{x})<\Lambda_0\}/D_1) = P(D_1)\int_{-\infty}^{\Lambda_0} w(\Lambda(\mathbf{x})/D_1)\,d\Lambda; \qquad (Л21.1)$$

$$P_F = P(D_0)P(\{\Lambda(\mathbf{x})<\Lambda_0\}/D_0) = P(D_0)\int_{-\infty}^{\Lambda_0} w(\Lambda(\mathbf{x})/D_0)\,d\Lambda;$$

$$P_M = P(D_1)P(\{\Lambda(\mathbf{x})>\Lambda_0\}/D_1) = P(D_1)\int_{\Lambda_0}^{+\infty} w(\Lambda(\mathbf{x})/D_1)\,d\Lambda. \qquad (Л21.2)$$

После подстановки этих соотношений в (Л20.3), см. лекцию 20, получим зависимость функции среднего риска R от параметров $P(D_0)$, $P(D_1)=1-P(D_0)$ и Λ_0 — $R=R\{P(D_0),\Lambda_0\}$. Из условия $\partial R\{P(D_0),\Lambda_0\}/\partial P(D_0)=0$ с учетом (Л20.5) получим уравнение для определения порогового значения отношения правдоподобия Λ_0:

$$\Pi_{00}+\left(\Pi_{01}-\Pi_{00}\right)\int\limits_{-\infty}^{\Lambda_0} w\left(\Lambda\left(\mathbf{x}\right)/D_0\right)d\Lambda=\Pi_{11}+\left(\Pi_{10}-\Pi_{11}\right)\int\limits_{\Lambda_0}^{+\infty} w\left(\Lambda\left(\mathbf{x}\right)/D_1\right)d\Lambda. \qquad (Л21.3)$$

Определив отсюда Λ_0, наименее благоприятное значение вероятности исправного состояния $P^*\left(D_0\right)$ можно вычислить с помощью соотношения

$$\frac{1-P^*\left(D_0\right)}{P^*\left(D_0\right)}=\frac{\Pi_{01}-\Pi_{00}}{\Pi_{10}-\Pi_{11}}\cdot\Lambda_0. \qquad (Л21.4)$$

Правило постановки диагноза определяется формулой (Л20.7), уравнение граничной поверхности — (Л20.6), а ошибки диагностирования — соотношениями (Л21.2) с учетом равенства

$$P^*\left(D_1\right)=1-P^*\left(D_0\right).$$

Методы расчета условных плотностей вероятности отношения правдоподобия $w\left(\Lambda\left(\mathbf{x}\right)/D_0\right)$ и $w\left(\Lambda\left(\mathbf{x}\right)/D_1\right)$ для некоторых основных видов распределений $w\left(\mathbf{x}/D_i\right)$ изложены в [3].

5. Метод Неймана – Пирсона

Если стоимости потерь от ошибочно принятых решений неизвестны, правило постановки диагноза можно установить из условия минимума значения вероятности одной из ошибок диагностирования при заданном (допустимом) уровне другой.

Первый вариант. По методу Неймана-Пирсона минимизируется вероятность ошибки 2-го рода (пропуска дефекта) P_M, см. второе соотношение в (Л20.2) или (Л21.2), при условии, что вероятность ошибки 1-го рода (ложной тревоги) P_F, см. первое соотношение в (Л20.2) или (Л21.2), не превышает заданного значения ε:

$$P\left(D_0\right)\int\limits_{-\infty}^{\Lambda_0} w\left(\Lambda\left(x\right)/D_0\right)d\Lambda=\varepsilon. \qquad (Л21.5)$$

Этот уровень устанавливается на основе опыта эксплуатации объектов или интуитивных соображений с учетом разрешающей способности диагностических средств, степени опасности дефектов и экономических затрат. В практических расчетах принимают

$$\varepsilon=kP\left(D_1\right),\varepsilon \qquad (Л21.6)$$

где k — коэффициент избыточности, выбираемый из диапазона 1...3, если пропуск дефекта приводит к несущественным потерям, или из интервала 3...10, если пропуск дефекта влечет катастрофические последствия.

Соотношение (Л21.5) определяет пороговое значение Λ_0. Уравнение граничной поверхности в пространстве параметров и правило постановки диагноза по-прежнему описываются формулами (Л20.6) и (Л20.7).

Второй вариант. Можно использовать другой подход — определить пороговое значение Λ_0 исходя из допустимой вероятности пропуска дефекта (ошибки 2-го рода) P_M :

$$P(D_1)\int_{\Lambda_0}^{+\infty} w\big(\Lambda(\mathbf{x})/D_1\big)\,d\Lambda = P_M\,.$$

Если пропуск дефекта влечет тяжелые последствия нежелателен, принимают

$$P_M \le 1/k\,N\,,$$

где N — общее число контролируемых объектов, $k=1,\dots,10$ — коэффициент избыточности.

Еще раз отметим, что для упрощения вычислений во всех вышеприведенных формулах вместо отношения правдоподобия можно использовать монотонную функцию — логарифм этого отношения.

Пример Л21.1. Рассмотрим диагностику по двум параметрам $\mathbf{x}=(x_1,\,x_2)$, имеющим нормальное распределение в состояниях D_0 и D_1. Параметры этих распределений будем считать статистически независимыми, то есть их совместная плотность вероятности равна произведению плотностей вероятности распределения каждого параметра:

$$w(x_1,x_2/D_i)=\frac{1}{4\pi\sigma_{1i}\sigma_{2i}}\exp\left\{-\left[\frac{(x-\overline{x}_{1i})^2}{2\sigma_{1i}^2}+\frac{(x-\overline{x}_{2i})^2}{2\sigma_{2i}^2}\right]\right\};\ (i=0,1),$$

где четыре параметра $\overline{x}_{1i}$, $\overline{x}_{2i}$ $(i=0,1)$ — средние значения параметров x_1 и x_2, а σ_{1i},σ_{2i} — среднеквадратические отклонения этих параметров соответственно в состояниях D_0 $(i=0)$ и D_1 $(i=1)$.

Логарифмируя обе части (Л20.7), находим правило постановки диагноза по методу минимального риска

$$\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\left(x_j-\overline{x}_{j1}\right)^2}{\sigma_{j1}^2}-\frac{\left(x_j-\overline{x}_{j0}\right)^2}{\sigma_{j0}^2}\right]\overset{D_0}{\underset{D_1}{\gtrless}}2\ln\left[\frac{\sigma_{10}\sigma_{20}}{\sigma_{11}\sigma_{21}}\cdot\frac{\Pi_{10}-\Pi_{11}}{\Pi_{01}-\Pi_{00}}\cdot\frac{P\left(D_1\right)}{P\left(D_0\right)}\right]=2\ \ln\Lambda_0 .$$

Если в этой формуле знаки неравенства заменить на знак равенства, получим уравнение граничной линии второго порядка на плоскости диагностических параметров $\left(x_1, x_2\right)$. В случае равенства среднеквадратических отклонений $\sigma_{j0}=\sigma_{j1}=\sigma_j;\ \left(j=1,2\right)$ правило упрощается:

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\left(\overline{x}_{j1}-\overline{x}_{j0}\right)}{\sigma_j^2}\left[\left(\overline{x}_{j1}+\overline{x}_{j0}\right)-2x_j\right]\overset{D_0}{\underset{D_1}{\gtrless}}2\ln\Lambda_0 .$$

Граничной линией, разделяющей области диагнозов, в этом случае является прямая. Если средние значения каких-либо параметров при равных дисперсиях для двух состояний совпадают, соответствующие слагаемые в сумме отсутствуют. Другими словами, эти параметры бесполезны для постановки диагноза. Кроме того, видно, что при уменьшении дисперсии ценность соответствующих параметров возрастает, так как увеличивается их вклад в отношение правдоподобия.