

## Лекция 12

# ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГНОЗИРУЮЩИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ОБРАБОТКЕ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ (Продолжение)

### Экспоненциальное сглаживание

Рассмотренные методы построения и устранения трендов требуют подбора модели для прогнозирования будущих значений ряда. Кроме того, они не учитывают, что с течением времени относительная ценность информации убывает по сравнению с более поздними данными. Поэтому в задачах прогнозирования, когда сглаженная функция-тренд  $f(t)$  определяет экстраполированные значения в будущем, более логичным представляется подход, когда более недавним наблюдениям придается больший вес. Для этого используют обобщенный метод наименьших квадратов, при использовании которого минимизируют функцию вида

$$Q = \sum_{k=0}^{t-1} \alpha^k [x(t-k) - f(t-k)]^2,$$

где величина  $\alpha$  выбирается из промежутка  $0 < \alpha < 1$ . Видно, что по мере увеличения  $k$  (удаления в прошлое) множители (веса)  $\alpha^k$  экспоненциально убывают, откуда и произошло название метода.

Для понимания сути метода введем оператор сглаживания, с помощью которого производится переход к сглаженному ряду в соответствии с формулой

$$S_t(x) = \alpha x_t + (1 - \alpha) S_{t-1}(x), \quad 0 < \alpha < 1.$$

При сглаживании используют текущие значения ряда. При  $\alpha = 0$  сглаживания не происходит, при  $\alpha = 1$  теряется идея метода, то есть вводятся единые весовые коэффициенты для всех наблюдений. Поэтому метод экспоненциального сглаживания применяется только для значений коэффициента сглаживания из приведенного интервала значений.

На практике при построении модели рекомендуется подбирать значения параметра сглаживания перебором его возможных значений, например в интервале от 0,1 до 0,9 с шагом 0,1. Выбирается значение  $\alpha$ , обеспечивающее наименьшее значение суммы квадратов остатков, то есть наилучшую подгонку модели по методу наименьших квадратов. Однако в этом случае в качестве остатка рассматривается разность между текущим

экспериментальным значением и следующим за ним прогнозным значением в соответствии с выбранной моделью процесса.

Применим последовательно экспоненциальное сглаживание ко всем членам ряда от 1 до  $t < T$ , где  $t$  — текущая переменная (номер измерения), а  $T$  — размерность массива. После преобразований можно получить:

$$\begin{aligned} S_T(x) &= \alpha x_T + (1 - \alpha) S_{T-1}(x) = \\ &= \alpha x_T + (1 - \alpha) \alpha x_{T-1} + (1 - \alpha)^2 \alpha x_{T-2} + \dots \end{aligned}$$

Проведя подстановки и введя новый индекс суммирования  $s$ , получим выражение:

$$S_T(x) = \alpha \sum_{s=0}^{T-1} (1 - \alpha)^s x_{T-s}.$$

По сути, записан алгоритм представления данных. Применим экспоненциальное сглаживание к случайной составляющей процесса и распространим суммирование до бесконечности, полагая незначимым вклад от очень старых данных. Получим:

$$S_T(\varepsilon) = \alpha \sum_{s=0}^{T-1} (1 - \alpha)^s \varepsilon_{T-s}.$$

Рассчитаем дисперсию этого процесса:

$$D\{S_T(\varepsilon)\} = E \left[ \alpha \sum_{s=0}^{\infty} (1 - \alpha)^s \varepsilon_{T-s} \right]^2 = \alpha^2 E \left[ \sum_{s,r=0}^{\infty} (1 - \alpha)^{s+r} \varepsilon_{T-s} \varepsilon_{T-r} \right].$$

Введем предположение, что остатки (шум) не коррелированы между собой и их среднее имеет нулевое значение. Это означает, что математическое ожидание произведений с разными индексами равно нулю. Тогда

$$\begin{aligned} D\{S_T(\varepsilon)\} &= \alpha^2 E \left[ \sum_{s,r=0}^{\infty} (1 - \alpha)^{2s} \varepsilon_{T-s}^2 \right] = \\ &= \alpha^2 \sigma_\varepsilon^2 \sum_{s=0}^{\infty} (1 - \alpha)^{2s} = \alpha^2 \sigma_\varepsilon^2 / \left[ 1 - (1 - \alpha)^2 \right] = \alpha \sigma_\varepsilon^2 / (2 - \alpha) < \sigma_\varepsilon^2, \end{aligned}$$

где  $\sigma_\varepsilon^2$  — первоначальное математическое ожидание дисперсии остатков,  $E$  — символ математического ожидания. Таким образом, при использовании данной модели шум уменьшился, то есть экспоненциальное сглаживание увеличивает соотношение «сигнал/шум».

Может оказаться, что процедура сглаживания недостаточна, тогда допустимы операции повторного сглаживания. В этом случае для первого, второго и последующих повторных сглаживаний записывают выражения:

$$\begin{aligned}
 S_t^{(1)}(x) &= \alpha x_t + (1 - \alpha) S_{t-1}^{(1)}(x); \\
 S_t^{(2)}(x) &= \alpha S_t^{(1)} + (1 - \alpha) S_{t-1}^{(1)}(x); \\
 &\dots\dots\dots \\
 S_t^{(n)}(x) &= \alpha S_t^{(n-1)} + (1 - \alpha) S_{t-1}^{(n-1)}(x).
 \end{aligned}$$

Применяя несколько раз оператор сглаживания и подбирая величину  $\alpha$ , можно практически полностью исключить случайную составляющую и как результат получить детерминированный сигнал. На основании описанной модели можно сделать прогноз изменения исследуемой величины на несколько шагов вперед.

Введем прогнозирующий полином и на основании результатов измерений до момента  $T$ , сделаем прогноз на время  $\tau$ . Прогнозирование производится с помощью формулы:

$$x(t + \tau) = a_0^{(t)} + \sum_{i=1}^N \frac{a_i^{(t)}}{i!} \tau^i.$$

Коэффициенты  $a_i$  рассчитывают по известным алгоритмам. В частности можно воспользоваться теоремой Брауна, гласящей, что коэффициенты прогнозирующих полиномов линейно выражаются через сглаженные значения ряда, а ряд имеет вид:

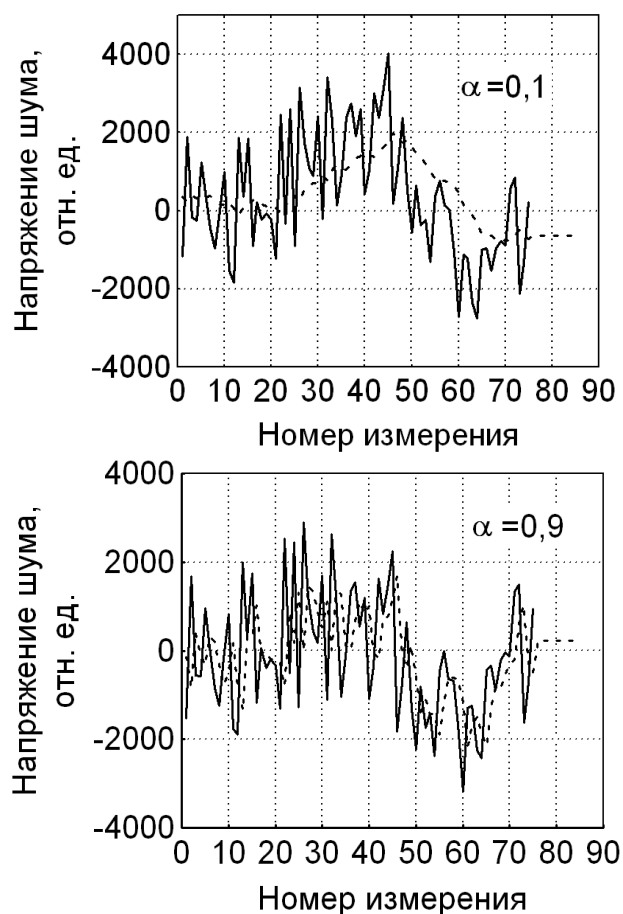
$$S_t^{(1)}(x), \dots, S_t^{(N)}(x), S_t^{(N+1)}(x).$$

Тем самым предоставляется возможность использования линейного аппарата для нелинейных функций экспоненциального сглаживания.

Как следствия теоремы Брауна для простейших случаев могут быть получены соотношения, позволяющие вычислить значения коэффициентов в явном виде. В частности, при  $n = 1$

$$\begin{aligned}
 y(t + \tau) &= a_0^{(t)} + a_1^{(t)} \tau; \\
 a_0^{(t)} &= 2S_t^{(1)}(x) - S_t^{(2)}(x); \\
 a_1^{(t)} &= [\alpha / (1 - \alpha)] [S_t^{(1)}(x) - S_t^{(2)}(x)].
 \end{aligned}$$

Для расчета на ЭВМ используют рекуррентные формулы, которые хороши тем, что при появлении нового наблюдения не обязательно хранить весь предыдущий отрезок, необходимо лишь знать коэффициенты прогнозирующего полинома по предыдущему отрезку. Соответствующие рекуррентные соотношения реализуются в пакетах программ статистических расчетов. В качестве примера на рис. Л12.1 приведены результаты экспоненциального сглаживания рассмотренного нами ранее ряда (см. рис. Л11.1).



**Рис. Л12.1.** Влияние коэффициента сглаживания на характер аппроксимирующей кривой при экспоненциальном сглаживании

Заметим, что сглаженная кривая дает прогноз на несколько шагов вперед. Однако этот прогноз выражается всего лишь горизонтальной прямой линией, находящейся на уровне последних усредненных результатов измерений.

Как и можно было ожидать, степень сглаживания процесса тем выше, чем меньше коэффициент затухания  $\alpha$ , то есть чем более велик вклад далеких от момента наблюдения результатов измерений. Обработка данных с помощью метода экспоненциального сглаживания сходна с низкочастотной фильтрацией. Фильтрующее устройство, соответствующее такой обработке, как правило, физически не может быть реализовано, что не является ограничением при компьютерной обработке данных.

Напомним, что при корректном применении экспоненциального сглаживания ряд остатков должен удовлетворять требованиям стационарности, центрированности, нормальности и некоррелированности между собой отдельных значений этого ряда, что подлежит отдельной проверке.

## ИДЕНТИФИКАЦИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ МОДЕЛЕЙ

Идентификация является процедурой получения приблизительных значений порядков модели. Возможно рассмотрение и сопоставление разных моделей. В модели ARIMA (Auto-Regressive Integrated Moving Average) или модели APCC (авторегрессии — скользящего среднего) таких параметров два:  $p$  — порядок авторегрессии;  $q$  — порядок скользящего среднего. В некоторых пакетах программ вводится третий параметр  $d$ , который указывает, сколько раз следует продифференцировать исходный ряд для исключения тренда, то есть перехода к стационарному ряду, прежде чем применить рассмотренные выше модели. В компьютерных расчетах вместо дифференцирования применяется операция взятия конечных разностей, и после каждой такой операции длина ряда уменьшается на единицу.

Рассмотрим идентификацию порядка разности модели. Сначала отобразим исходный ряд на экране монитора и попытаемся определить визуально, можно ли считать его стационарным. Например, если очевиден монотонный или периодический тренд, ряд стационарным не является. Если явных признаков нестационарности нет, имеет смысл построить автокорреляционную функцию процесса. Если автокорреляционная функция (АКФ) не убывает сильно при больших лагах, ряд нестационарен. При отсутствии признаков нестационарности, в первом начальном приближении можно положить  $d = 0$  и рассматривать далее модель  $APCC(p, 0, q) \equiv APCC(p, q)$ .

При явных признаках нестационарности следует рассмотреть разность первого порядка для рассматриваемого ряда, то есть применить дискретный оператор дифференцирования (разностный оператор) первого порядка. Если нестационарность не исчезла, операция повторяется и т. д. Корректность выполнения процедуры проверяется по отсутствию значимого тренда во вновь образованном ряде и (или) проверкой ряда остатков, который должен являться белым (некоррелированным) гауссовским шумом с нулевым средним.

После приведения ряда к стационарному виду следует определить значения  $p$  и  $q$ . Для этого можно применить рассмотрение автокорреляционной (АКФ) и частной автокорреляционной (ЧАКФ) функций, которые ведут себя определенным образом, что позволяет идентифицировать модель, то есть определить ее основные параметры, в частности порядок модели. Характер поведения АКФ и ЧАКФ при разных характерах процесса и низких порядках моделей дает табл. Л12.1. Приведенные в таблице сведения носят рекомендательный характер для выбора вида модели с целью ее последующего

анализа. Следует рассмотреть разные варианты моделей и выбрать представляющийся оптимальным.

Вид убывания АКФ и ЧАКФ (монотонное или осциллирующее) зависит от знаков коэффициентов в модели. Если после положительного коэффициента модели следует отрицательный, можно ожидать осциллирующего характера АКФ, при последовательности положительных коэффициентов более вероятно монотонное убывание АКФ.

Таблица Л12.1. Связь характера некоторых часто используемых моделей авторегрессии — скользящего среднего с видом автокорреляционной и частной автокорреляционной функции процесса

Тип процесса	АКФ	ЧАКФ
$AP(p)$	Относительно плавно спадает	Обрывается на лаге $p$ (значима для лагов $\leq p$ )
$CC(q)$	Обрывается на лаге $q$ (значима для лагов $\leq q$ )	Относительно плавно спадает
$AP(1)$	Экспоненциально затухает	Значима на лаге, равном 1
$AP(2)$	Убывает по экспоненте либо монотонно, либо осциллируя	Значима для лагов $\leq 2$
$CC(1)$	Значима для лага 1	Затухает по экспоненте либо монотонно, либо осциллируя
$CC(2)$	Значима для лагов $\leq 2$	Периодична или экспоненциально затухает
$APCC(1,1)$	Убывает по экспоненте либо монотонно, либо осциллируя	Убывает по экспоненте либо монотонно, либо осциллируя

Следует сделать ряд общих замечаний.

1. При определении каждого коэффициента модели число степеней свободы уменьшается на единицу, что может оказаться важным при небольшой длине ряда или попытке применения моделей высоких порядков (больших  $p$  и  $q$ ).

2. Может оказаться, что даже при большом числе дифференцирований ряд останется нестационарным. В этом случае следует либо ограничиться отрезком ряда, включающим в себя наиболее поздние данные, либо перейти к модели, в которой влияние «давних» данных ограничено, например модели экспоненциального сглаживания.

3. Процесс  $AP(2)$  хорошо описывает случайные колебания.

4. В пакете Matlab нахождение параметров авторегрессионной модели производится командами `arconv` и `armlcov`, в которых задаются вектор исходных данных и порядок модели. В результате выполнения команды формируется вектор параметров, представляющих собой набор коэффициентов  $a_k$  модели (фильтра) с коэффициентом передачи вида

$$K(z) = \sigma / (1 + a_2 z^{-1} + \dots + a_{p+1} z^{-p}).$$

Здесь  $\sigma$  — уровень процесса, получаемого на выходе фильтра, соответствующего данной модели при подаче на его вход белого гауссовского шума, имеющего единичный уровень. При выполнении команды `arsov` используется алгоритм минимизации погрешности прогнозирования будущих значений процесса по методу наименьших квадратов. Команда `arsov` минимизирует, кроме того, ошибки «обратного» прогноза.

Рассмотренные модели позволяют описать широкий класс случайных процессов. Практическая ценность этих моделей заключается в возможности представления процесса моделью с небольшим числом параметров. В ряде случаев модель может подсказать механизм формирования наблюдаемых данных, а значения коэффициентов иметь физическую интерпретацию.

Для ряда, представленного выше, модель  $AP(1)$  дает значения коэффициентов 1 и  $-0,4941$ ; модель  $AP(2)$  — 1,  $-0,2871$  и  $-0,4191$ . Отрицательные значения коэффициентов указывают на наличие периодической составляющей в процессе. Спектральный анализ подтверждает наличие пика в спектре процесса на частоте, соответствующей  $0,036$  частоты дискретизации. Поскольку при рассмотрении ряда временной масштаб не оговорен, по умолчанию частота представления данных (частота дискретизации) равна единице. На самом же деле эта частота для упомянутого ряда равна  $1000$  Гц, следовательно, спектральный пик соответствует частоте  $36$  Гц.

Отсюда видна связь данных, получаемых разными методами анализа, их выбор часто определяется опытом исследователя.