Лекция 11

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОГНОЗИРУЮЩИХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ОБРАБОТКЕ ДИАГНОСТИЧЕСКОЙ ИНФОРМАЦИИ

Модели временных рядов используются:

— для прогнозирования;
— оценки передаточных функций;
— фильтрации и управления;
— имитации и оптимизации;
— создания новых физических теорий.

Под прогнозированием в данном контексте будем понимать оценивание будущих значений $x(t)+T$ временно́го ряда из некоторого интервала будущих значений $0 \le T \le l$ по известным значениям ряда.

При диагностировании и прогнозировании значительную роль играют неконтролируемые факторы, изменяющиеся со временем. К их числу относятся влияние окружающей температуры, влажности среды, неоднородность свойств материалов, растворов и т. д. Указанное влияние приводит к необходимости корректировки регрессионных моделей по мере поступления новой информации. Необходимо отслеживание изменения со временем оценок параметров регрессионных моделей (коэффициентов регрессии), иными словами по известной оценке коэффициента регрессии $b(t)$ в момент времени t требуется оценить величину $b(t+t_0)$ в будущий момент $t+t_0$. Величина t_0 носит название глубины прогноза.

В общем виде задача построения прогнозирующей модели, основанной на использовании опытных данных, состоит в следующей последовательности действий:

— определения совокупности (пространства) диагностических параметров;
— наблюдение за перемещением в этом пространстве точки, характеризующей состояние объекта;
— определение на основе априорных данных или результатов ранее проведенных наблюдений за объектом допустимых границ перемещения точки в диагностическом пространстве, исходя из приемлемых значений вероятностей ложных тревог и пропусков сигналов опасности;

— классификации объекта — постановка диагноза, то есть классификация вида повреждения и оценка степени его опасности;

— составление прогноза поведения объекта и оценка его остаточного ресурса.

На основании накопленных экспериментальных данных и принятой модели явления определяют критерий годности и предельных значений диагностических параметров, по достижении которых эксплуатация объекта либо опасна, либо нецелесообразна из технико-экономических соображений.

Обычно более состоятельными являются прогнозирующие модели, основанные на физике наблюдаемых явлений. Такие модели обычно позволяют обойтись меньшим количеством параметров. Если сведений об исследуемом явлении недостаточно для построения физически обоснованной модели, может быть использована подгонка параметров эмпирических моделей.

Тригонометрическая регрессия

В случаях, когда есть основания ожидать, что данные содержат циклическую (периодическую, сезонную) составляющую, используют модель тригонометрической регрессии, в общем виде представляемую как

$$y_t = f(t,\alpha) + \varepsilon_t; \quad t = 1,2,\ldots,T,$$

причем $f(t,\alpha)$ — периодическая функция с известным периодом m, таким, что $T = hm$; h — целое число. Ряд остатков ε_t является центрированным, то есть $\overline{\varepsilon}_t = 0$, стационарным $\left(D\{\varepsilon_t\} = \sigma^2 = \text{const}\right)$, и состоит из некоррелированных между собой значений, то есть $R_{\varepsilon_t \varepsilon_s} = 0$, при $t \neq s$. Считается, что m и t являются четными числами.

При выполнении этих условий периодическая регрессионная кривая вычисляется по следующей формуле

$$f(t,\alpha) = \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i \varphi_i(t) =$$

$$= \alpha_0 + \sum_{j=0}^{m/2-1} \left[\alpha_{2j-1} \cos(2j\pi t/m) + \alpha_{2j} \sin(2j\pi t/m)\right] + (-1)^t \alpha_{m-1}.$$

Применение метода наименьших квадратов для оценки значений коэффициентов α_i дает:

$$\alpha_0 = \overline{y};$$

$$\alpha_{2j-1} = (2/T)\sum_{i=1}^{T} y_i \cos(2j\pi t/m), \quad j = 1,2,...m/2-1;$$

$$\alpha_{2j} = (2/T)\sum_{i=1}^{T} y_i \sin(2j\pi t/m), \quad j = 1,2,...m/2-1;$$

$$\alpha_{m-1} = (1/T)\sum_{i=1}^{T} (-1)^t y_i .$$

При этом

$$\sigma^2 = \left[1/(T-m)\right]\left[\sum_{i=1}^{T} y_t^2 - T\alpha_0^2 - (T/2)\sum_{j=1}^{m/2-1}\left(\alpha_{2j-1}^2 + \alpha_{2j}^2\right) - T\alpha_{m-1}^2\right];$$

$D\alpha_0 = D\overline{y} = \sigma^2/T$; $D\alpha_{2j-1} = 2\sigma^2/T$; $D\alpha_{m-1} = \sigma^2/T$, а остаточная дисперсия составляет $D\left\{y_{t\ ðàñ÷}\right\} = m\sigma^2/T = \sigma^2/h$.

МОДЕЛИ СТАЦИОНАРНЫХ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ

Модели авторегрессии

После исключения тренда с целью изучения вариабельности краткосрочных прогнозов и их влияния на надежность долгосрочных прогнозов изучают ряды остатков ε_t. В качестве моделей стационарных временных рядов остатков часто используют процессы авторегрессии, скользящего среднего и их комбинации. Лежащие в их основе предположения требуют стационарности анализируемого ряда, достаточной его длительности (не менее примерно пятидесяти значений), постоянства параметров модели на исследуемом участке ряда.

Авторегрессионная модель является моделью случайной последовательности и выражает текущее значение процесса через конечную линейную совокупность предыдущих значений процесса и значения шумовой компоненты процесса в текущий момент времени. Авторегрессионная модель порядка p (краткое обозначение — $AP(p)$, в латинской транскрипции — $AR(p)$) описывается как

$$x_t = a_1 x_{t-1} + a_2 x_{t-2} + ... + a_p x_{t-p} + \varepsilon_t .$$

где x_t — значение переменной в отсчете с номером t; ε_t — значение шума в том же отсчете. Предполагается, что шум является стационарным, гауссовым, центрированным.

Используем оператор сдвига z, применение которого означает переход от отсчета с номером t к предыдущему отсчету $zx_t = x_{t-1}$. Очевидно, что $zx_{t-1} = x_{t-2}$; $zx_{t-2} = x_{t-3}$ и т.д. Отсюда следует, что в общем случае $x_{t-k} = z^k x_t$. С учетом последних соотношений модель может быть записана как

$$x_t - a_1 x_{t-1} - a_2 x_{t-2} - \ldots - a_p x_{t-p} = \varepsilon_t,$$

или, в операторном виде:

$$\left(1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_p z^p\right) x_t = \varepsilon_t.$$

Обозначив оператор авторегрессии как

$$A(z) = 1 - a_1 z - a_2 z^2 - \ldots - a_p z^p = 1 - \sum_{i=1}^{p} a_i z^i,$$

можно записать уравнение авторегрессии в операторном виде:

$$A(z)x = \varepsilon.$$

Авторегрессионные модели порядка p предусматривают использование p предыдущих значений наблюдаемых параметров с весовыми коэффициентами, убывающими по мере удаления прошлых моментов от текущего.

АР-модели полезны для описания многих встречающихся на практике рядов. Например, модель $AP(2)$ — так называемый процесс Юла, хорошо описывает поведение маятника, подверженного влиянию малых случайных воздействий, когда амплитуда и фаза колебаний будут являться случайными величинами из-за перемещения людей, открытой форточки и других причин.

Модель $AP(1)$ описывает *марковский процесс*, характерным признаком которого является независимость последующих значений процесса от предыдущих, — процесс без памяти, поведение которого зависит только от текущего состояния. Она является частным случаем общей модели регрессии для случая, когда текущее значение процесса регрессирует на его предыдущие значения.

Процессы авторегрессии могут быть как *стационарными*, так и *нестационарными*.

Обычный параметрический авторегрессионный анализ основывается на детерминистской модели, параметры которой однозначно определены. Анализ нестационарных процессов основан на принципе локальной стационарности процесса, основанном на применении АР-модели с зависящими от времени параметрами, когда для каждой выборки, полученной в данный момент времени, строится своя АР-модель. Другой подход основан на разбиении данных на некоторое число блоков, для каждого из которых порядок модели неизменен.

Модель скользящего среднего

Модель скользящего среднего основана на том, что значение x_t процесса линейно зависит от конечного числа предыдущих значений шума, то есть процесс может быть представлен как отклик некоторого линейного фильтра на входной белый шум.

Случайный процесс $X(t)$ носит название процесса скользящего среднего порядка q, если

$$X(t) = \beta_1 \varepsilon_{t-1} + \ldots + \beta_q \varepsilon_{q-1} + \varepsilon_t,$$

где ε_t — белый шум. Краткое обозначение такого процесса $CC(q)$, в латинской транскрипции — $MA(q)$ (от moving average). Коэффициенты β_i, $i = 1,\ldots,q$ обычно подчиняются некоторому закону. Можно показать, что корреляционная функция R_i процесса $MA(q)$ равна нулю для всех $i > q$. Модель полезна, если вид тренда не очевиден. Она основана на переходе от исходных значений ряда к их значениям, усредненным на некоторых интервалах. Интервал усреднения перемещается (скользит) вдоль ряда. При этом получают сглаженный ряд, на котором имеющиеся тенденции становятся более очевидными, чем в исходном ряде.

В качестве результата усреднения не обязательно должно использоваться среднее арифметическое значение. Могут быть использованы средневзвешенные, медианные значения или значения, полученные по более сложным правилам. Чем длиннее интервал усреднения, тем более сглаженным окажется ряд скользящих средних.

Если сглаживание производится с помощью среднего арифметического по n членам ряда, то в случае нечетного $n = 2m + 1$ происходит переход к члену ряда y_t из скользящих средних по формуле:

$$y_t = \left(x_{t-m} + \ldots + x_t + \ldots + x_{t+m}\right)/n.$$

В операторном виде модель скользящего среднего порядка q представляется как

$$x_t = C(z)\varepsilon_t,$$

где оператор $C(z)$ — оператор скользящего среднего, имеет вид:

$$C(z)=1-\sum_{i=1}^{q}c_i z^i .$$

Если длина интервала сглаживания является четным числом $n=2m$, то в исходном ряде отсутствует номер, который следовало бы приписать вновь образованному члену сглаженного ряда. Эту трудность обычно обходят, добавляя еще один член в интервал усреднения, длина которого опять становится равной $n=2m+1$, а внесенную погрешность компенсируют введением весового коэффициента, равного 0,5, для крайних значений ряда:

$$y_t=\left(0,5x_{t-m}+x_{t-m+1}+\ldots+x_t+\ldots+x_{t+m-1}+0,5x_{t+m}\right)/n$$

Соседние члены ряда скользящих средних сильно коррелированны между собой, так как при их формировании используются в основном одни и те же члены исходного ряда. Это может привести к появлению в сглаженном ряде циклических компонент, отсутствующих в исходном ряде (эффект Слуцкого-Юла).

Воспользовавшись приведенными соотношениями, можно показать, что операторы авторегрессии и скользящего среднего связаны соотношением

$$C(z)=A^{-1}(z).$$

Можно показать, что в модели $CC(q)$ прогноз возможен не более чем на q шагов вперед. При этом среднеквадратическая ошибка прогноза при $k\le q$ составит $\left(1+a_1^2+\ldots+a_{k-1}^2\right)\sigma^2$, где σ^2 — дисперсия шумовой составляющей процесса (ряда остатков).

Комбинированная модель авторегрессии — скользящего среднего

Комбинированная модель авторегрессии — скользящего среднего (АРСС) имеет вид:

$$A(z)x=C(z)\varepsilon,$$

или, в развернутом виде:

$$x_t-a_1x_{t-1}+a_2x_{t-2}+\ldots+a_px_{t-p}+\varepsilon_t-c_1\varepsilon_{t-1}-\ldots-c_q\varepsilon_{t-q} .$$

При этом запись $APCC(p,q)$ означает комбинацию моделей $AP(p)$ и $CC(p)$. В литературе и пакетах программ на английском языке применяются записи $ARMA(p,q)$ и $ARIMA(p,d,q)$, причем в последнем случае d означает порядок предварительного дифференцирования ряда, обычно с целью исключения медленно изменяющихся компонент тренда.

Целесообразность применения моделей АРСС состоит в том, что такая модель может иметь меньший порядок, чем модель АР или СС по отдельности, упрощая построение модели и повышая наглядность.

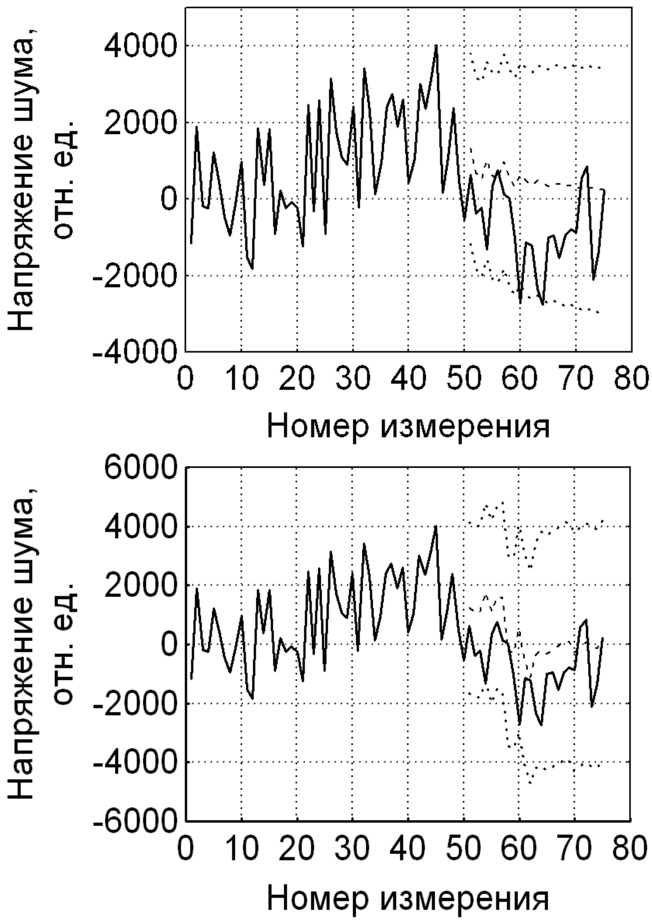

Рис. Л11.1. Характер изменения прогноза в соответствии с моделями:
АР(9) — верхний рисунок;
АРСС(9, 9) — нижний рисунок.

С целью иллюстрации возможностей моделей рассмотрим ряд, полученный в ходе анализа электрохимического шума (рис. Л11.1). На рисунке представлен отрезок временнóго ряда, характеризующего шумовую составляющую разности потенциалов между электродами из циркония и стали 20 в трехпроцентном растворе $NaCl+FeCl_3$ при равных весовых концентрациях компонентов раствора.

Показаны 75 отсчетов ряда, модели применяли к первым 50 отсчетам. Это позволило сравнить прогнозируемые значения отсчетов, имеющих номера с 51 по 75, с действительно наблюдавшимися отсчетами и таким образом оценить качество прогноза.

Жирными линиями представлены наблюдавшиеся значения потенциала, пунктиром — прогнозные значения и 90%-й доверительный коридор для них. Для построения прогнозов выбраны модели высоких порядков, редко используемых при прогнозировании, равно как и большая глубина прогноза (на 25 шагов). Столь достаточно уникальный выбор обусловлен иллюстративными целями рисунков. Видно, что при использовании модели $APCC(9,9)$, содержащей вдвое большее число параметров, чем модель $AP(9)$, прогнозируемые значения более близки к истинным значениям, однако доверительный коридор несколько расширяется. В обоих случаях имеет место сглаживание прогнозируемого процесса по отношению к реально наблюдаемому, что соответствует представлениям, согласно которым аппроксимация ряда моделями типа AP, CC и $APCC$ может интерпретироваться как пропускание исходного процесса через некоторый фильтр, параметры которого определяются коэффициентами модели.

В случае многомерных рядов (рядов, содержащих более одной наблюдаемой величины), вместо операторов используют матрицы, одна из которых является обращением другой.