Семинар 1

Векторный анализ

Напомнить определения градиента, дивергенции, ротора, запись векторного произведения и ротора через антисимметричный тензор $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ и рассмотреть следующие задачи:

1.1

Вычислить градиент функции $f(r)$, зависящий только от абсолютной величины радиус-вектора $\mathbf{r}$ ($r = |\mathbf{r}|$).

1.2

Вычислить $\mathrm{grad}\,|\mathbf{r}-\mathbf{a}|;\ \mathrm{grad}\,\dfrac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{a}|};\ \mathrm{grad}\,(\mathbf{ar});\ \mathrm{grad}\,\mathrm{f}(|\mathbf{r}-\mathbf{a}|);\ \mathrm{grad}\,\dfrac{\mathbf{ar}}{\mathrm{r}^2}$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

1.3

Вычислить $\mathrm{div}\,\mathbf{r};\ \mathrm{rot}\,\mathbf{r}$.

1.4

Вычислить $\operatorname{div}[\mathbf{ar}]$; $\operatorname{rot}[\mathbf{ar}]$; $(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{r}$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

1.5

Вычислить $\operatorname{div}\varphi(\mathrm{r})\mathbf{r}$; $\operatorname{rot}\varphi(\mathrm{r})\mathbf{r}$.

1.6

Показать, что $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) = 0$; $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r}) = 0$, где $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ и $\varphi(\mathbf{r})$ — произвольные векторная и скалярная функции радиус-вектора $\mathbf{r}$.

1.7

Доказать соотношения

$$
\begin{aligned}
\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r})\mathrm{f}(\mathbf{r}) &= \varphi(\mathbf{r})\operatorname{grad}\mathrm{f}(\mathbf{r}) + \mathrm{f}(\mathbf{r})\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r}) \\
\operatorname{div}\varphi(\mathbf{r})\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \varphi(\mathbf{r})\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) + \mathbf{A}(\mathbf{r})\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r}) \\
\operatorname{rot}\varphi(\mathbf{r})\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \varphi(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) + [\operatorname{grad}\varphi(\mathbf{r})\mathbf{A}(\mathbf{r})] \\
\operatorname{div}\,[\mathbf{A}(\mathbf{r})\mathbf{B}(\mathbf{r})] &= \mathbf{B}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \mathbf{A}(\mathbf{r})\operatorname{rot}\mathbf{B}(\mathbf{r}) \\
\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}) - \triangle\mathbf{A}(\mathbf{r})
\end{aligned}
$$

Вычисления провести двумя способами, основываясь на стандартных определениях векторного произведения, дивергенции и ротора, а также используя антисимметричный тензор $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ и его свойства.

1.8

Вычислить $\operatorname{grad}\mathbf{A}(\mathrm{r})\mathbf{B}(\mathrm{r})$ (где $r = |\mathbf{r}|$); $\operatorname{div}\varphi(\mathrm{r})\mathbf{A}(\mathrm{r})$; $\operatorname{rot}\varphi(\mathrm{r})\mathbf{A}(\mathrm{r})$.

Семинар 2

Преобразование Лоренца

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

2.1

Показать, что два последовательных преобразования Лоренца вдоль одного и того же направления перестановочны и эквивалентны одному преобразованию Лоренца для относительной скорости.

2.2

Система отсчета K' движется со скоростью V относительно системы K вдоль оси x. Угол между направлением распространения света и осью x' в системе K' равен θ'. Найти угол между направлением распространения света и осью x в системе K. Изобразить зависимость θ от θ' и проанализировать изменения, возникающие по мере приближения V к скорости света. Рассмотреть случай $V \ll c$ и вычислить $\theta - \theta'$.

2.3

Система отсчета K' движется относительно системы K в плоскости xy со скоростью V под углом α к оси x. Вывести формулы преобразования времени и координат при переходе из K' в K.

2.4

При $V \ll c$, используя формулы преобразования Лоренца, получить формулы преобразования Галилея и первые поправочные по $\dfrac{V}{c}$ члены к этим формулам.

2.5

Система отсчета K' движется со скоростью V относительно системы K вдоль оси x. В K' траектория частицы есть парабола $(x' = vt' + \dfrac{wt'^2}{2},\ y' = vt')$. Найти траекторию частицы в системе K. Как меняется траектория с ростом V? При замене V на $-V$?

Семинар 3

Четырехмерные векторы и тензоры

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

3.1

Показать, что при переходе от одной системы отсчета к другой элемент четырехмерного объема $d\Omega = cdtdV$ является 4-скаляром. Вычислить якобиан преобразования Лоренца.

3.2

Четырехмерная скорость определяется выражением $u^i = \left(\dfrac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}, \dfrac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \right)$. Основываясь на формулах преобразования компонент 4-скорости при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой, найти формулы преобразования компонент скорости $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$.

3.3

Вывести формулы преобразования компонент симметричного 4-тензора A^{ik} при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

3.4

Вывести формулы преобразования компонент антисимметричного 4-тензора A^{ik} при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой.

3.5

Записать квадрат интервала s^2 в виде произведения контравариантных и ковариантных компонент 4-радиус-вектора и вычислить $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x^i} s^2$.

3.6

Вычислить $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x^i}\left(x_j x^j x_k x^k\right)$; $\dfrac{\partial^2}{\partial x_i \partial x^i} e^{k_j x^i}$.

Семинар 4

Релятивистская механика. Столкновение частиц

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

4.1

Найти первые релятивистские поправки к нерелятивистским выражениям для импульса свободной частицы, функции Лагранжа и функции Гамильтона.

4.2

Выразить компоненты 4-вектора силы $g^i = \dfrac{dp^i}{ds} = mc\dfrac{du^i}{ds}$ через трехмерный вектор силы $\mathbf{f} = \dfrac{d\mathbf{p}}{dt}$ и скорость частицы v.

4.3

Частица, движущаяся со скоростью v, распадается на две частицы, энергии которых в Ц-системе равны $\mathcal{E}_{10}$ и $\mathcal{E}_{20}$. Найти связь между углом вылета и энергией каждой из частиц в лабораторной системе отсчета.

4.4

Частица, движущаяся со скоростью v, распадается на две одинаковые частицы. Энергия частиц в Ц-системе равна $\mathcal{E}_0$, угол вылета в Ц-системе θ_0 для одной частицы и, соответственно, $\pi - \theta_0$ для другой. Найти угол между направлениями движения частиц в лабораторной системе отсчета.

4.5

Найти зависимость энергии γ-кванта, рассеянного на покоящемся электроне, от угла рассеяния. Обобщить полученный результат на случай, когда электрон движется со скоростью v в направлении движения γ-кванта.

4.6

Найти частоту γ-кванта, который излучается покоящимся возбужденным ядром с массой M. Энергия возбуждения равна $\triangle E$.

4.7

Показать, что аннигиляция электрон-позитронной пары с излучением одного γ-кванта запрещена законом сохранения энергии и импульса.

4.8

Частица m_1 налетает на покоящуюся частицу m_2. Скорость налетающей частицы v_1. Найти скорость Ц-системы, абсолютную величину импульса сталкивающихся частиц в Ц-системе. Найти максимальную передаваемую энергию и проанализировать ее зависимость от энергии налетающей частицы при различных значениях $\dfrac{m_1}{m_2}$.

Семинар 5

Движение заряженной частицы во внешнем поле

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

5.1

Заряженная частица движется в постоянном и однородном электрическом поле $\mathbf{E}$. Получить выражение для ускорения частицы через ее скорость и напряженность электрического поля. Сравнить компоненты вектора ускорения, параллельные и перпендикулярные скорости, в нерелятивистском и ультрарелятивистском предельных случаях.

5.2

Заряженная частица движется в постоянном и однородном электрическом поле $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$. Выписать интегралы движения. Проинтегрировать уравнение движения для начальных условий:

а) $x(0) = 0,\ y(0) = 0,\ z(0) = 0;\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{y}(0) = 0,\ \dot{z}(0) = 0;$

б) $x(0) = 0,\ y(0) = 0;\ \dot{x}(0) = 0,\ \dot{y}(0) = v,\ \dot{z}(0) = 0.$

Для случая (б) найти траекторию движения $x = x(y)$. Проанализировать полученные результаты в нерелятивистском предельном случае.

5.3

Определить частоты колебаний двумерного (xy) заряженного осциллятора в постоянном однородном поле $\mathbf{H} = (0, 0, H)$. Собственные частоты колебаний осциллятора ω_1 (по оси x) и ω_2 (по оси y). Проанализировать полученные результаты для $\omega_1 = \omega_2$, и также для случая слабого магнитного поля.

5.4

Нерелятивистская заряженная частица движется в постоянных и однородных электрическом $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ и магнитном $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ полях. Выписать интегралы движения. Проинтегрировать уравнение движения для начальных условий $x(0) = y(0) = z(0) = 0;\ \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = \dot{z}(0) = 0$.

5.5

Найти в полярных координатах траекторию финитного движения релятивистской частицы с зарядом q и массой M во внешнем поле с потенциалом $\varphi = -\dfrac{Q}{r}$.

5.6

Заряд e движется вдоль оси x в постоянном однородном электрическом поле $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$. Найти $p(x)$ и $x(t)$ $(p_x(0) = 0, x(0) = 0)$. Найти асимптотику $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ при $t \to \infty$. Выразить ускорение через скорость и напряженность поля, найти асимптотики при $t \to \infty$.

Семинар 6

Преобразование потенциалов и полей

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

6.1

Векторный и скалярный потенциал удовлетворяют калибровочному условию $\frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}+\mathrm{div}\mathbf{A} = 0$. Какому уравнению должна удовлетворять функция f, входящая в калибровочное преобразование.

6.2

Убедиться в том, что векторные потенциалы $\mathbf{A}' = \frac{1}{2}[\mathbf{H}\mathbf{r}]$, где $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ и $\mathbf{A}'' = (-Hy, 0, 0)$ определяют одно и то же магнитное поле. Найти функцию f, осуществляющую калибровочное преобразование от $\mathbf{A}'$ к $\mathbf{A}''$.

6.3

Записать закон преобразования компонент электрического и магнитного полей при переходе между инерциальными системами отсчета в векторном виде (ввести параллельные ($\|$) и перпендикулярные ($\perp$) скорости $\mathbf{V}$ компоненты векторов напряженности).

6.4

Показать, что величины $\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2$ и $\mathbf{HE}$ инвариантны относительно перехода между инерциальными системами отсчета.

6.5

Найти систему отсчета, в которой $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ параллельны.

6.6

В покоящейся системе отсчёта напряжённости электрического $\mathbf{E}$ и магнитного $\mathbf{H}$ полей взаимно ортогональны и не равны по модулю. Найти скорости $\mathbf{V}$ тех инерциальных систем, в которых имеются:

а) только электрическое поле;

б) только магнитное поле.

Определить напряжённости указанных полей.

6.7

Напряжённости $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ однородного электромагнитного поля в некоторой инерциальной системе координат заданы, причём $[\mathbf{EH}] \neq 0$. Найти скорости $\mathbf{V}$ всех инерциальных систем координат, в которых модуль напряжённости электрического (или магнитного) поля имеет то же численное значение, что и в исходной системе отсчёта. Результат представить в векторной форме.

6.8

Напряжённости $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ электрического и магнитного полей в исходной системе координат образуют острый угол. Определить модули E' и H' напряжённостей электрического и магнитного полей в той инерциальной системе отсчёта, в которой угол между векторами $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}'$ равен $\pi/4$.

Семинар 7

Электростатика

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

7.1

Определить напряженность электрического поля внутри и снаружи равномерно заряженного шара. Заряд шара Q, радиус R.

7.2

Определить напряженность электрического поля внутри и снаружи шара с объемной плотностью заряда $\rho(r) = \rho_0 \left(\dfrac{r}{R}\right)^n$ (R — радиус шара, $n > -2$).

7.3

Определить напряженность электрического поля внутри и снаружи равномерно заряженного цилиндра радиуса R. Объемная плотность заряда ρ_0.

7.4

Определить напряженность электрического поля внутри и снаружи равномерно заряженного слоя толщиной a. Объемная плотность заряда ρ_0.

7.5

Определить потенциал внутри и снаружи равномерно заряженного шара радиуса R. Заряд шара Q.

7.6

Определить потенциал, создаваемый объемной плотностью заряда $\rho(r) = \dfrac{e}{\pi a^3} e^{-\dfrac{2r}{a}}$, где a — постоянная величина. Вычислить напряженность электрического поля.

7.7

Найти объемную плотность заряда $\rho(r)$, если потенциал имеет вид

$$\varphi = \frac{e}{r} e^{-\frac{r}{a}}$$

7.8

Вычислить энергию взаимодействия двух равномерно заряженных шаров. Заряды шаров Q_1 и Q_2. Расстояние между центрами шаров l.

7.9

Вычислить электростатическую энергию равномерно заряженного шара радиуса R с зарядом Q.

Семинар 8

Электростатика

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

8.1

Плотность заряда электронного облака в атоме водорода есть $\rho(z) = -\frac{e}{\pi a^3} e^{-\frac{2r}{a}}$. Учитывая вклады электронного облака и ядра найти потенциал $\varphi(r)$. Найти энергию взаимодействия электронного облака и ядра и собственную электростатическую энергию электронного облака.

8.2

В равномерно заряженном шаре радиуса R с объемной плотностью заряда ρ_0 есть полость радиуса R_0 ($R_0 < R$), центр которой смещен на расстояние a от центра шара. Найти напряженность электрического поля и потенциал внутри полости, внутри и вне шара. Проанализировать случай больших расстояний от системы. Найти дипольный и квадрупольный моменты.

8.3

Найти энергию взаимодействия диполя $\mathbf{d}$ с точечным зарядом q, расположенным на расстоянии r от диполя. Вычислить силу, действующую на диполь.

8.4

Найти энергию взаимодействия диполя $\mathbf{d}$ с равномерно заряженным шаром. Заряд шара Q, радиус R, расстояние между диполем и центром шара равно r. Вычислить силу и момент сил, действующих на диполь. Рассмотреть случаи $r > R$ и $r < R$.

8.5

Вычислить квадрупольный момент равномерно заряженного элипсоида вращения (относительно его центра); стержня кругового сечения. Рассмотреть предельный случай вытянутого (сплюснутого) эллипсоида.

8.6

В вершинах квадрата со стороной a расположены точечные заряды. Знак заряда q меняется на противоположный при переходе к соседней вершине. Найти тензор квадрупольного момента в системе координат, в которой оси x и y проходят через вершины.

Семинар 9

Постоянное магнитное поле

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

9.1

Найти объемную плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, если напряжённость магнитного поля имеет вид $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \left[\mathbf{a}, \dfrac{\mathbf{r}}{r}\right]$; $\mathbf{H} = (\mathbf{ar})[\mathbf{a}, \mathbf{r}]$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор.

9.2

Найти напряжённость магнитного поля внутри и снаружи цилиндрической области, по которой течет ток, равномерно распределенный по сечению с плотностью j (радиус проводника R).

9.3

Найти напряжённость магнитного поля внутри цилиндрической полости в цилиндрической области, по которой течёт ток, равномерно распределенный по сечению с плотностью

j. Оси цилиндров параллельны и находятся на расстоянии a друг от друга.

9.4

В цилиндрической области радиуса R течёт ток, распределённый по сечению с плотностью $j = j_0 \left(\dfrac{a}{\rho}\right)$ при $\rho \le R$, ρ — расстояние от оси. Найти векторный потенциал и напряжённость магнитного поля (при $\rho \le R$ и при $\rho \ge R$).

9.5

Найти напряжённость магнитного поля на оси кольца радиуса R, по которому течет ток J.

9.6

Найти магнитный момент шара, равномерно вращающегося с угловой скоростью ω. Заряд Q равномерно распределён по объему шара. Найти напряжённость магнитного поля в центре шара.

9.7

Определить отношение магнитного и механического моментов для системы из двух нерелятивистских зарядов e_1 и e_2 с массами m_1 и m_2, соответственно. Проанализировать результат для одинаковых частиц. Начало координат выбрать в центре масс.

9.8

Вычислить векторный потенциал системы из двух антипараллельных токов J, расстояние между которыми a.

Семинар 10

Электромагнитные волны

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

10.1

Векторный потенциал плоской электромагнитной волны задан в виде $\mathbf{A} = \mathbf{A_0}F(\mathbf{kr} - \omega t)$, где $k = \dfrac{\omega}{c}$, $\mathbf{A}_0$ — постоянный вектор, F — некоторая функция. Предполагая, что векторный и скалярный потенциалы взяты в лоренцевой калибровке, найти напряженности электрического и магнитного полей и вектор Пойтинга.

10.2

Две монохроматические волны поляризованы по кругу в противоположные стороны и распространяются в одном направлении. Амплитуды и частоты волн одинаковы, а фазы отличаются на постоянную величину. Определить суммарную волну.

10.3

Две волны поляризованы по кругу. Амплитуда правополяризованной волны равна A, а левополяризованной – B. Частоты и фазы этих волн одинаковы. Определить поляризацию результирующей волны.

10.4

Две монохроматические волны $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_{01}\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha_1)$ и $\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{01}\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha_2)$ поляризованы во взаимно перпендикулярных направлениях. Считая амплитуды этих волн одинаковыми, найти поляризацию результирующей волны.

10.5

Две монохроматические волны, поляризованные по кругу в противоположные стороны, имеют одинаковые амплитуды и распространяются в одном направлении. Частоты ω_1 и ω_2 волн отличаются на малую величину $|\omega_1 - \omega_2| \ll \omega_1 + \omega_2$. Определить поляризацию результирующей волны.

10.6

Волновой пакет получен суперпозицией монохроматических волн $\mathbf{e}E_0\cos(\omega t - \mathbf{kr})$ с частотами в интервале $0 \le \omega \le \infty$. Направление распространения и вектор поляризации $\mathbf{e}$ этих волн одинаковы, а распределение монохроматических волн по частотам равно

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}\Delta}\exp\left(-\frac{\omega}{\Delta}\right)d\omega,$$

где Δ – постоянная, не зависящая от частоты. Найти напряжённость электрического поля волнового пакета как функцию координат и времени.

10.7

Волновой пакет получен путём наложения монохроматических волн $\mathbf{e}E_0\cos(\omega t - \mathbf{kr} + \alpha)$ с частотами, изменяющимися в пределах от ω_0 до $\omega_0 + \Delta$, где $\Delta \ll \omega_0$. Направление распространения и вектор поляризации $\mathbf{e}$ этих волн одинаковы, а амплитуда волн с частотами от ω до $\omega + d\omega$ равна $\frac{E_0}{2\omega_0}d\omega$. Здесь E_0, ω_0 и Δ – постоянные, не зависящая от частоты ω. Определить напряжённость электрического поля волнового пакета как функцию координат и времени.

10.8

Напряжённость электрического поля волнового пакета имеет постоянное направление и описывается функцией

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}\left(t - \frac{\mathbf{nr}}{c}\right),$$

которая отлична от нуля для конечной области изменения своего аргумента. Здесь $\mathbf{n}$ – постоянный единичный вектор, а c – скорость света. Разлагая заданную функцию в интеграл Фурье, представить волновой пакет как суперпозицию монохроматических волн.

10.9

Показать, что волновое уравнение инвариантно относительно преобразования Лоренца и не является инвариантным относительно преобразования Галилея.

10.10

Зеркало движется со скоростью V в направлении, противоположном собственной нормали. На зеркало падает свет под углом θ с частотой ω. Определить направление распространения и частоту отраженной волны.

Семинар 11

Поле движущегося заряда

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

11.1

Найти электрическое и магнитное поля движущегося с постоянной скоростью $v = (v, 0, 0)$ заряда e. Вычисления провести двумя способами:

а) вычислить электрическое поле в системе отсчета, в которой заряд покоится, и перейти в лабораторную систему отсчета;

б) найти векторный и скалярный потенциалы в лабораторной системе и по ним определить электрическое и магнитные поля.

Проанализировать результаты в нерелятивистском и ультрарелятивистском предельных случаях.

11.2

Найти силу взаимодействия между двумя зарядами e_1 и e_2, которые движутся с одинаковыми скоростями $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}$ на расстоянии R друг от друга.

11.3

Найти электрическое и магнитное поля движущегося с постоянной скоростью $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ диполя $\mathbf{d} = (d, 0, 0)$.

11.4

Найти электрическое и магнитное поля движущегося с постоянной скоростью $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ магнитного момента $\mathbf{m} = (m, 0, 0)$.

11.5

В нерелятивистском пределе найти силу взаимодействия движущегося со скоростью $\mathbf{v}$ магнитного момента с покоящимся зарядом q.

11.6

Основываясь на формулах для потенциалов Лиенара-Вихерта, найти электрическое и магнитное поля движущегося с постоянной скоростью $\mathbf{v}$ заряда e.

Семинар 12

Излучение. Дипольное приближение

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

12.1

Диполь вращается в плоскости xy с угловой скоростью ω, $\mathbf{d} = (d\cos\omega t, d\sin\omega t, 0)$. Вычислить $d^2\varepsilon/dtd\Omega$. Проанализировать поляризацию излучения в плоскости xy и в направлении оси z. Найти усреднённые по времени значения

$$\left\langle \frac{d^2\varepsilon}{dtd\Omega} \right\rangle, \quad \left\langle \frac{d\varepsilon}{dt} \right\rangle.$$

12.2

Частица с массой m и зарядом e пролетает по диаметру шара радиуса R, внутри которого равномерно распределён заряд Q. Заряды частицы и шара противоположного знака. Перед влётом в шар частица имела кинетическую энергию $\mathcal{E}_0$. Определить энергию $\mathcal{E}$, теряемую частицей на дипольное излучение во время пролёта через шар.

12.3

Напряжённость $\mathbf{H}$ магнитного поля в полупространстве однородна, постоянна и направлена параллельно граничной плоскости. В это полупространство влетает частица с массой m и зарядом e. Скорость $\mathbf{v}$ при влёте перпендикулярна граничной плоскости. Определить энергию $\mathcal{E}$, теряемую частицей на дипольное излучение за время пролёта.

12.4

Электрон с массой m и зарядом e пролетает на большом расстоянии l от неподвижного ядра с зарядом $Z|e|$. В бесконечно удалённый момент времени $t \to -\infty$ электрон имел скорость, по абсолютной величине равную v_0. Пренебрегая искривлением траектории, найти энергию $\mathcal{E}$, теряемую электроном на дипольное излучение за всё время пролета.

12.5

Частица с массой m и зарядом e движется перпендикулярно однородному постоянному магнитному полю с напряжённостью H. Кинетическая энергия в начальный момент времени $t_0 = 0$ равнялась $\mathcal{E}_0$. Найти закон убывания кинетической энергии $\mathcal{E}$, обусловленный дипольным излучением.

12.6

В классической модели атома, предложенной Резерфордом, электрон с массой m и зарядом e вращается по круговой орбите вокруг неподвижного ядра с зарядом $Z|e|$. Найти закон убывания полной энергии $\mathcal{E}$ электрона, обусловленный дипольным излучением. Вычислить время, по истечении которого электрон упадёт на ядро вследствие потери энергии на дипольное излучение. В начальный момент времени $t_0 = 0$ электрон находился на расстоянии R от ядра.

12.7

Доказать, что у замкнутой системы заряженных частиц с одинаковым отношением заряда к массе дипольное излучение отсутствует.

Семинар 13

Излучение. Дипольное приближение

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

13.1

Найти $d^2\varepsilon/dtd\Omega$ и $d\varepsilon/dt$ при пролёте электрона e массой m по прямолинейной траектории мимо неподвижного заряда $Z|e|$. Скорость частицы v, прицельный параметр l (изменением скорости пренебречь).

13.2

Определить закон изменения со временем энергии нерелятивистского заряда, движущегося по круговой орбите (в плоскости xy) в постоянном однородном магнитном поле $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ и теряющего энергию на излучение.

13.3

Нерелятивистская частица с зарядом e, движущаяся со скоростью $\mathbf{v}$, упруго отражается от плоскости. Определить низкочастотную часть спектрального распределения излучения.

13.4

До начального момента времени $t_0 = 0$ электрон с массой m и зарядом e покоился. При $t \geq 0$ он движется под действием электрического поля с напряжённостью $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(-\alpha t) \cos \omega t$. Найти энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную электроном на частотах от ω до $\omega + d\omega$.

13.5

Электрон с массой m и зарядом e влетает в полупространство, в котором напряжённость $\mathbf{E}$ электрического поля однородна и постоянна. Направление скорости $\mathbf{v}_0$ электрона при влёте образует с вектором $\mathbf{E}$ острый угол α. Определить энергию $d\mathcal{E}_\omega$, излученную электроном в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ за всё время движения во внешнем поле.

Семинар 14

Рассеяние электромагнитных волн

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

14.1

Циркулярно поляризованная волна $\mathbf{E} = E_0[\mathbf{e}_x \cos(\omega t - kz) + \mathbf{e}_y \sin(\omega t - kz)]$ падает на свободный электрон с массой m и зарядом e. Найти среднюю за период интенсивность рассеянного излучения $d^2\varepsilon/dtd\Omega$. Чему равно полное сечение σ рассеяния волны?

14.2

Определить дифференциальное $d\sigma$ и полное σ сечение рассеяния эллиптически поляризованной плоской волны

$$\mathbf{E} = \mathbf{e}_x b_1 \cos(\omega t - kz + \alpha) + \mathbf{e}_y b_2 \sin(\omega t - kz + \alpha)$$

на свободном электроне с массой m и зарядом e.

14.3

Определить сечение рассеяния линейно поляризованной волны осциллятором (заряд e, масса m, частота колебаний ω_0) с учётом влияния торможения излучением.

14.4

Определить дифференциальное сечение рассеяния волны системой из двух одинаковых заряженных частиц (заряд частицы e, масса m). На систему зарядов падает волна $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{kr} - \omega t)$. Заряды расположены в точках $\mathbf{r}_1$ и $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{a}$. Проанализировать полученный результат в зависимости от ориентации $\mathbf{a}$, значения параметра $\omega|\mathbf{a}|/c$.

14.5

Линейно-поляризованная волна рассеивается на свободном электроне. Найти поляризацию рассеянного излучения.

Семинар 15

Магнитно-дипольное и квадрупольное излучение

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

15.1

Электрон с массой m и зарядом e движется во внешнем постоянном однородном электрическом поле с напряжённостью $\mathbf{E}$. Представить интенсивность магнитно-дипольного излучения как функцию скорости $\mathbf{v}$ электрона и напряжённости электрического поля.

15.2

Два одинаковых заряда величины e совершают плоское движение. Их полярные координаты r_1, ψ_1, r_2 и ψ_2 меняются по закону

$$r_1 = r_2 = a\dot{\psi}^2, \quad \psi_1 = \psi(t), \quad \psi_2 = \pi + \psi(t),$$

где a – положительная постоянная, а $\psi(t)$ – монотонная функция, заключённая в пределах $0 \le \psi(t) \le \pi$. Определить интенсивность магнитно-дипольного излучения такой системы.

15.3

Две частицы с одинаковым отношением заряда к массе $e_1/m_1 = e_2/m_2 = e/m$ связаны между собой пружиной и совершают гармонические колебания в отсутствие поля тяжести. Длина ненагруженной пружины l, а её коэффициент жестскости k. В начальный момент времени пружина была растянута до длины l_0 и покоилась. Найти среднюю по времени интенсивность $d\varepsilon/dt$ излучения. Взаимодействием зарядов между собой пренебречь.

15.4

Частица с массой m и зарядом e движется в произвольном направлении во внешнем однородном постоянном электрическом поле с напряжённостью $\mathbf{E}$. Представить интенсивность $d\varepsilon/dt$ квадрупольного излучения как функцию скорости $\mathbf{v}$ протона и напряжённости внешнего электрического поля.

15.5

Точечный диполь с моментом $\mathbf{d}$ вращается с постоянной угловой скоростью ω по окружности радиуса R. Вектор $\mathbf{d}$ постоянен по модулю и в каждый момент времени направлен по радиусу окружности. Определить интенсивности $d\varepsilon/dt$ дипольного, магнитно-дипольного и квадрупольного излучения в длинноволновом приближении $R \ll \lambda = c/\omega$.

15.6

Однородно заряженный тонкий диск радиуса R вращается вокруг своего диаметра с постоянной угловой скоростью ω. Полный заряд диска равен Q. Найти интенсивность излучения

$d\varepsilon/dt$.

15.7

Заряд Q равномерно распределён по тонкому стержню длины $2l$, который вращается в плоскости с постоянной угловой скоростью ω вокруг своей центральной точки. Найти интенсивность излучения $d\varepsilon/dt$.

Семинар 16

Излучение быстро движущегося заряда

Проконтролировать выполнение домашнего задания; ответить на имеющиеся по домашнему заданию вопросы. Объявить тему семинара. Сформулировать кратко основные положения и формулы лекции по данной теме и рассмотреть следующие задачи:

16.1

Скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\dot{\mathbf{v}}$ заряда e параллельны. Определить полную интенсивность I излучения по всем направлениям. Исследовать полученную формулу в ультрарелятивистском случае, а также при малых скоростях заряда $v^2 \ll c^2$.

16.2

Быстрый электрон с массой m и зарядом e влетает со скоростью $\mathbf{v}_0$ в полупространство, в котором напряжённость $\mathbf{E}$ электрического поля постоянна, однородна и параллельна вектору $\mathbf{v}_0$. Пренебрегая обратным влиянием излучения на движение электрона, определить энергию $\mathcal{E}$, потерянную им за время пребывания во внешнем поле.

16.3

Релятивистская частица с массой m и зарядом e влетает в полупространство, в котором напряжённость $\mathbf{H}$ магнитного поля однородна, постоянна и параллельна граничной плоскости. Начальная скорость $\mathbf{v}_0$ частицы перепендикулярна вектору $\mathbf{H}$ и составляет угол $\pi/4$ с граничной плоскостью. Определить энергию $\mathcal{E}$, излучённую за всё время движения в магнитном поле. Рассмотреть два случая:

а) сила Лоренца в начальный момент времени направлена в полупространство, занятое магнитным полем;

б) сила Лоренца направлена в сторону свободного полупространства.

16.4

Электрон с массой m и зарядом e пролетает на большом расстоянии l от неподвижного ядра, имеющего заряд $Z|e|$. Пренебрегая искривлением траектории и считая изменение скорости электрона очень малым по сравнению с её начальным значением $\mathbf{v}_0$, определить энергию $\mathcal{E}$, излучённую за время пролёта. Показать, что в предельном случае $v_0^2 \ll c^2$ полученный результат совпадает с ответом задачи 12.4.

16.5

Релятивистская частица с массой m и зарядом e пролетает на большом расстоянии l от покоящегося электрического диполя с моментом $\mathbf{d}$. Во время движения изменение скорости частицы пренебрежимо мало по сравнению с её начальным значением $\mathbf{v}_0$. Пренебрегая искривлением траектории, найти энергию $\mathcal{E}$, излучённую за время пролета в двух случаях:

а) дипольный момент $\mathbf{d}$ перпендикулярен плоскости движения;

б) дипольный момент $\mathbf{d}$ параллелен скорости частицы.

16.6

На большом расстоянии l от неподвижного нейтрона, имеющего магнитный момент $\mathbf{m}$, пролетает электрон с массой m и зарядом e. Его скорость $\mathbf{v}_0$ на бесконечно большом расстоянии от нейтрона по порядку величины равна скорости света. Считая приближённо траекторию электрона прямолинейной, а изменение скорости во время движения очень малым, определить полную энергию $\mathcal{E}$, излучённую в двух случаях:

а) магнитный момент $\mathbf{m}$ перпендикулярен плоскости движения;

б) магнитный момент $\mathbf{m}$ параллелен скорости электрона.

16.7

По бесконечной прямой течёт постоянный линейный ток J. Перпендикулярно току на расстоянии l от него пролетает релятивистская частица с массой m и зарядом e. Считая приблизительно траекторию прямолинейной, а скорость $\mathbf{v}$ частицы неизменной, определить полную энергию $\mathcal{E}$, излучённую за время пролёта.

16.8

Найти дифференциальное сечение рассеяния линейно поляризованной волны зарядом, движущимся со скоростью $\mathbf{v}$ в направлении, совпадающим с направлением распространения волны.