

Лекция 1

1.1 Принцип относительности

В классической (нерелятивистской) механике движение с постоянной скоростью нельзя отличить от состояния покоя, а законы движения выглядят одинаково во всех системах отсчёта, движущихся с постоянной скоростью друг относительно друга (рис. 1.1). Математически это означает, что замена переменных

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{V}t \quad (1.1)$$

не изменяет уравнений движения Ньютона

$$m_a \frac{d^2 \mathbf{r}_a}{dt^2} = - \sum_{a \neq b} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} V(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|) \quad (1.2)$$

где m_a и \mathbf{r}_a – масса и радиус-вектор a -ой частицы, $V(|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|)$ – парный потенциал взаимодействия между a -ой и b -ой частицами. Считается, что время t течёт одинаково во всех системах отсчёта,

$$t' = t \quad (1.3)$$

Соотношения (1.1), (1.3) называются преобразованием Галилея. Таким образом законы классической механики инвариантны относительно преобразований Галилея. Система отсчёта, в которой тело, не испытывающее действия сил, движется без ускорения, называется инерциальной. Следовательно, инвариантность законов механики относительно преобразования Галилея (1.1), (1.3) приводит к эквивалентности всех инерциальных си-

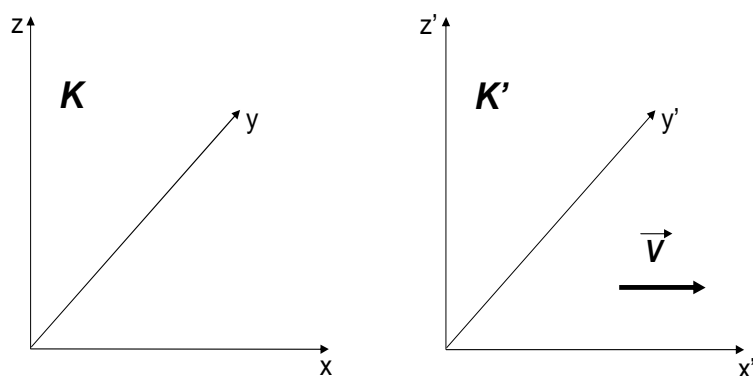


Рис. 1.1:

стем отсчёта. Выбор той или иной инерциальной системы отсчёта для описания движения частиц ничем не ограничен.

Однако в электродинамике ситуация существенно иная – форма уравнений Максвелла не сохраняется при преобразованиях (1.1), (1.3). Следовательно, можно предположить, что электромагнитные явления будут по-разному происходить в различных системах отсчёта, движущихся друг относительно друга с постоянной скоростью. Если считать, что справедливы как уравнения Максвелла, так и законы классической механики, то должна существовать некоторая преимущественная система отсчёта, в которой свет распространяется со скоростью c . В классической физике полагали, что эта система связана с так называемым ”эфиром”.

Применимость принципа относительности Галилея к законам механики и его неприменимость в электродинамике, приводит к необходимости сделать выбор между следующими возможностями:

- 1) принцип относительности применим к механике и не работает в электродинамике; должна существовать преимущественная система отсчёта (”эфир”);
- 2) принцип относительности работает как в механике, так и в электродинамике; основные уравнения электродинамики – уравнения Максвелла – требуют изменения;
- 3) принцип относительности работает как в механике, так и в электродинамике; законы классической механики требуют изменения.

Выбор между этими возможностями можно сделать лишь на основе опыта. Наиболее

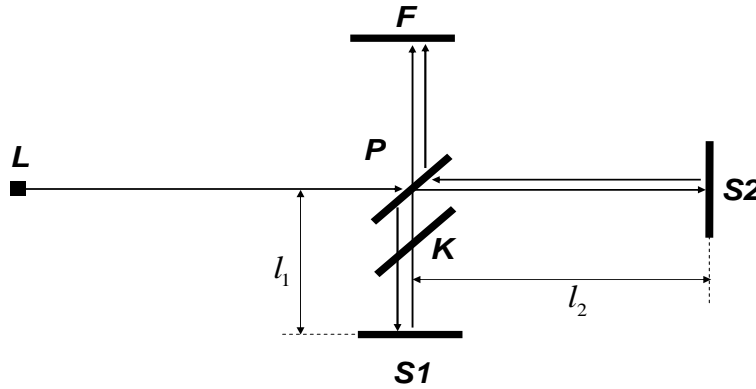


Рис. 1.2:

известным экспериментом в этой области является опыт Майкельсона-Морли (1881 год).

1.2 Опыт Майкельсона-Морли

Схема опыта состоит в следующем (рис. 1.2). С помощью полупрозрачного зеркала P свет от источника L разделялся на два луча. Лучи отражались от зеркал S_1 и S_2 и попадали через полупрозрачное зеркало на экран F , на котором наблюдалась интерференционная картина. Разность оптических длин плеч интерферометра компенсировалась пластинкой K .

Пусть интерферометр движется относительно неподвижного эфира со скоростью v параллельно плечу S_1P . Тогда с точки зрения классической механики время, необходимое для того, чтобы свет прошел путь PS_1P , равно

$$t_1 = l_1 \left(\frac{1}{c-v} + \frac{1}{c+v} \right) = \frac{2l_1}{c(1 - \frac{v^2}{c^2})} \quad (1.4)$$

При аналогичном расчёте для второго плеча следует учесть то обстоятельство, что пока свет идёт от P до S_2 зеркало P передвинется на расстояние δ (рис.1.3). В результате, время прохождения светом пути PS_2P равно

$$t_2 = \frac{2l_2}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.5)$$

Таким образом, разность Δ оптических длин составляет

$$\Delta = c(t_1 - t_2) = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(\frac{l_1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - l_2 \right) \quad (1.6)$$

Если интерферометр повернуть на 90° , то l_1 и l_2 поменяются местами и тогда

$$t'_1 = \frac{2l_1}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad t'_2 = \frac{2l_2}{c(1 - \frac{v^2}{c^2})}, \quad (1.7)$$

а новая разность оптических длин окажется равной

$$\Delta' = c(t'_1 - t'_2) = \frac{2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(l_1 - \frac{l_2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (1.8)$$

Следовательно, при повороте прибора на 90° следует ожидать смещения интерференционной картины на n полос:

$$n = \frac{\Delta' - \Delta}{\lambda} = \frac{2(l_1 + l_2)}{\lambda\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \approx -\frac{l_1 + l_2}{\lambda} \frac{v^2}{c^2} \quad (1.9)$$

Приближение в последнем равенстве связано с малостью скорости v по сравнению с c , $v \ll c$.

Однако никакого смещения в опыте Майкельсона и Морли обнаружено не было. По их результатам скорость Земли относительно эфира должна быть меньше 10 км/сек , хотя орбитальная скорость Земли равна примерно 30 км/сек .

1.3 Принцип относительности Эйнштейна

Опираясь на результаты опыта Майкельсона-Морли, а также на другие экспериментальные факты, Эйнштейн в 1905 году отказался от гипотезы существования эфира и предложил принцип относительности, отличающийся от принципа относительности Галилея.

Согласно принципу относительности Эйнштейна:

1) *Законы природы (электродинамики, механики) одинаковы во всех инерциальных системах отсчёта;*

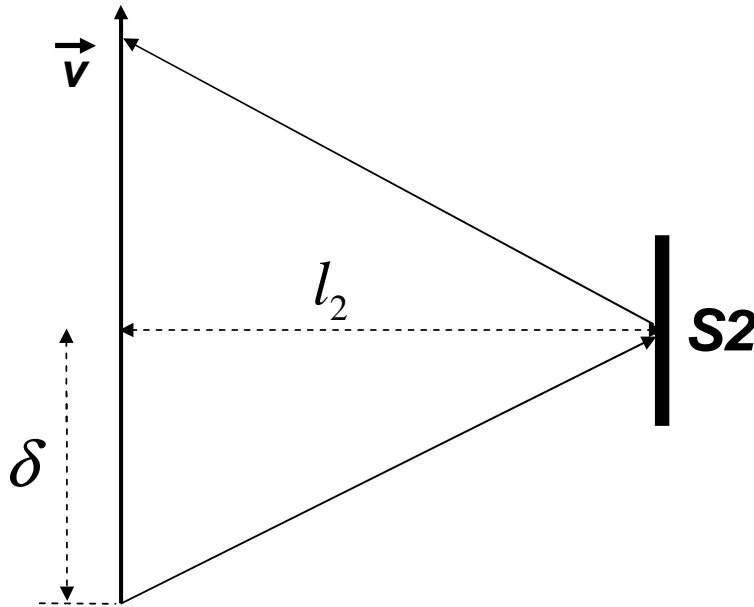


Рис. 1.3:

2) *Скорость света не зависит от движения источника.*

Последнее утверждение можно также сформулировать как постоянство скорости света во всех инерциальных системах отсчёта.

Рассмотрим для иллюстрации следующий из принципа относительности Эйнштейна эффект "замедления времени".

Пусть система отсчёта K' движется вдоль оси x со скоростью V относительно системы отсчёта K (см. рис.1.1). При сравнении хода часов, находящихся в системах отсчёта, движущихся друг относительно друга, нельзя одни часы в системе K сравнивать с одними часами в системе K' , так как часы пространственно совпадают лишь в один момент времени. Следует сравнивать двое часов в системе K с одними часами в системе K' . Часы в системе K должны быть синхронизированы посредством световых сигналов. Пусть в той точке, где расположены часы, в системе K' находится источник света (рис.1.4). Световой сигнал, испущенный перпендикулярно к \mathbf{v} , отразится зеркалом, расположенным нормально оси z' на расстоянии z'_0 от источника и вернется обратно. Для наблюдателя, покоящегося в системе K' , время, необходимое для этого, равно

$$\Delta t' = \frac{2z'_0}{c} \quad (1.10)$$

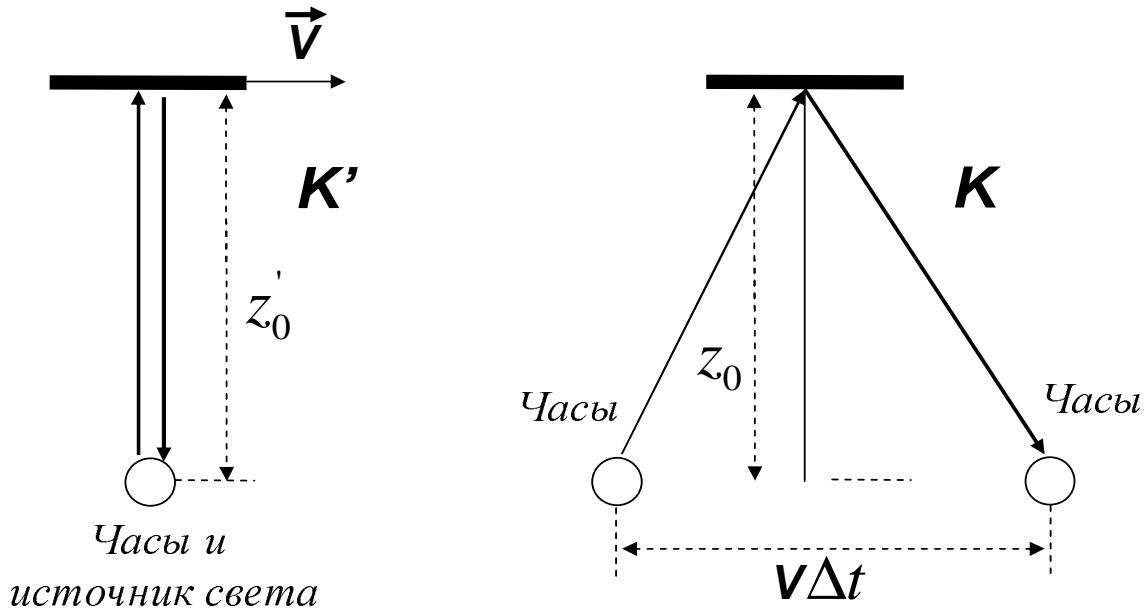


Рис. 1.4:

Наблюдатель же, покоящийся в системе K , измерит время Δt между теми же событиями посредством двух часов, разнесённых друг от друга на расстояние $v\Delta t$ вдоль направления движения. Так как скорость света не зависит от системы отсчёта, этот отрезок времени определится соотношением

$$\Delta t = \frac{2z_0}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.11)$$

Поскольку движение происходит вдоль оси x , то естественно считать, что $z_0 = z_0'$. Поэтому

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (1.12)$$

где величина $\Delta t'$ – представляет собой собственное время, т.е. промежуток времени между двумя событиями, происшедшими в одном и том же месте в системе K' . Время Δt не является собственным временем, так как оно измеряется различными часами в разных точках в системе K .

Следует отметить, что для наблюдателя, покоящегося в системе K' , время $\Delta t'$ всегда меньше, чем время Δt . Это явление называется "замедлением времени".

Лекция 2

2.1 Преобразование Лоренца

Пусть система отсчёта K' движется относительно системы K вдоль оси x со скоростью V .

Запишем преобразование Галилея в несколько иной форме по сравнению с (1.1), (1.3). Не будем рассматривать координаты y, z , которые не изменяются при преобразовании Галилея в данном случае. Для удобства введем вместо времени t переменную ct , имеющую размерность длины. Тогда преобразования Галилея можно представить в матричном виде

$$\begin{pmatrix} ct \\ x \end{pmatrix} = \hat{g}(\mathbf{V}) \begin{pmatrix} ct' \\ x' \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

где введена матрица преобразования от одной системы отсчёта к другой

$$\hat{g}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{V}{c} & 1 \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Очевидно, что если перейти из системы отсчёта K' в систему отсчёта K и обратно, то такая процедура эквивалентна тождественному преобразованию. Поэтому произведение

$$\hat{g}(\mathbf{V})\hat{g}(-\mathbf{V}) \quad (2.3)$$

должно превратиться в единичную матрицу (это подтверждается непосредственным вычислением). Поэтому можно записать

$$\hat{g}(-\mathbf{V}) = \hat{g}^{-1}(\mathbf{V}) \quad (2.4)$$

Будем теперь искать преобразование координат и времени, которое, в отличие от преобразования Галилея, удовлетворяло бы принципу относительности Эйнштейна. При этом потребуем, чтобы искомое преобразование подчинялось условию (2.4) и переходило в матрицу (2.2) в нерелятивистском пределе $V \ll c$.

Как и раньше, предполагаем, что система K' движется относительно K со скоростью \mathbf{V} . Представим искомую матрицу \hat{g} в виде

$$\hat{g}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \alpha(V) & \beta(V) \\ \gamma(V) & \delta(V) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

В этом случае связь между штрихованными и нештрихованными координатами в развернутом виде имеет вид

$$\begin{cases} ct = \alpha ct' + \beta x' \\ x = \gamma ct' + \delta x' \end{cases} \quad (2.6)$$

Рассмотрим движение начала координат системы отсчёта K' и положим в (2.6) $x' = 0$. В результате найдем

$$\frac{x}{ct} = \frac{V}{c} = \frac{\gamma}{\alpha} \quad (2.7)$$

Далее рассмотрим движение начала координат системы отсчёта K . Из (2.6) при $x = 0$ и $x' = -Vt'$ находим

$$\frac{x'}{ct'} = -\frac{V}{c} = -\frac{\gamma}{\delta} \quad (2.8)$$

В результате вид \hat{g} упрощается

$$\hat{g}(\mathbf{v}) = \begin{pmatrix} \alpha(V) & \beta(V) \\ \alpha(V) \cdot \frac{V}{c} & \alpha(V) \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.4) получаем

$$\beta(V) = \frac{\alpha(V)\alpha(-V) - 1}{\alpha(-V) \cdot \frac{V}{c}} \quad (2.10)$$

Чтобы найти $\alpha(V)$, воспользуемся соотношениями (2.6) для рассмотрения явления "замедления времени". Согласно (2.6), если расположить часы в системе K' в точке с координатой x' , то

$$c(t_2 - t_1) = (\alpha ct'_2 + \beta x') - (\alpha ct'_1 + \beta x') = \alpha c(t'_2 - t'_1) \quad (2.11)$$

Сравнивая (2.11) с (1.12), получаем

$$\alpha(V) = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.12)$$

Подставляя (2.12) в (2.9), (2.10) находим окончательное выражение для матрицы $\hat{g}(\mathbf{V})$

$$\hat{g}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & \frac{V}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ \frac{V}{c} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \end{pmatrix} \quad (2.13)$$

В явном виде преобразование (2.5) выглядит следующим образом

$$ct = \frac{ct' + \frac{V}{c}x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y = y', \quad z = z' \quad (2.14)$$

При $V \ll c$ из (2.14) следует

$$t = t' + \frac{V}{c^2}x', \quad x = x' + Vt', \quad y = y', \quad z = z' \quad (2.15)$$

Отсюда в пределе $c \rightarrow \infty$ получаем преобразование Галилея.

Преобразование (2.14) называется преобразованием Лоренца. Оно играет фундаментальную роль в релятивистской теории, построенной на основе принципа относительности Эйнштейна.

Сравним длину одного и того же стержня, расположенного параллельно осям x и x' , измеренную в неподвижной и движущейся системах отсчёта. Пусть стержень покоится в системе K , и координаты его начала и конца равны x_1 и x_2 . Его длина, измеренная в этой системе, равна $\Delta x = x_2 - x_1 = l_0$ (l_0 – собственная длина). Длина стержня в системе K' равна разнице координат $\Delta x' = x'_2 - x'_1 = l$, измеренных в один и тот же момент времени t' . Используя (2.14) находим

$$l_0 = \Delta x = \frac{x'_2 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} - \frac{x'_1 + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \frac{l}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.16)$$

Таким образом, длина стержня при переходе в движущуюся систему отсчёта уменьшается:

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$$

Этот эффект называется лоренцевым сокращением.

Поскольку поперечные размеры тела при его движении не изменяются, то объём \mathcal{V} уменьшается по закону

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}_0 \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad (2.17)$$

где \mathcal{V}_0 есть собственный объём тела.

2.2 Преобразование скорости

Воспользовавшись соотношениями (2.14), легко найти закон преобразования скоростей при переходе от одной системы отсчёта к другой. Обозначим скорость частицы в системах отсчёта K и K' как \mathbf{v} и \mathbf{v}' , соответственно. Связь между ними имеет следующий вид

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{dx' + V dt'}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = \frac{v'_x + V}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{dy' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = v'_y \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \\ v_z &= \frac{dz}{dt} = \frac{dz' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{dt' + \frac{V}{c^2} dx'} = v'_z \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}{1 + \frac{v'_x V}{c^2}} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Если в (2.18) положить $v'_x = c$, т.е. рассмотреть фотон, движущийся в системе K' со скоростью света, то v_x также будет равняться скорости света c .

Выберем оси координат так, чтобы скорость частицы лежала в плоскости xy . Тогда скорость частицы в системах K и K' имеет компоненты

$$v_x = v \cos \theta, \quad v_y = v \sin \theta, \quad v'_x = v' \cos \theta', \quad v'_y = v' \sin \theta'$$

где $v^2 = v_x^2 + v_y^2$, $v'^2 = v'^2_x + v'^2_y$; θ, θ' - углы, образованные вектором скорости с осями x, x' , соответственно, в системах K и K' . Тогда из соотношений (2.18) можно найти

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{v' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \theta'}{v' \cos \theta' + V} \quad (2.19)$$

Эта формула определяет изменение направления скорости при переходе между инерциальными системами отсчёта.

Рассмотрим явление абберации света – отклонение света при переходе к другой системе отсчёта. Положим в (2.19) $v' = c$. В результате для изменения направления распространения имеем

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \sin \theta'}{\cos \theta' + \frac{V}{c}} \quad (2.20)$$

В нерелятивистском пределе ($V \ll c$) из (2.20) для разности углов $\Delta\theta = \theta' - \theta$ можно получить соотношение

$$\Delta\theta = \frac{V}{c} \cdot \sin \theta' \quad (2.21)$$

т.е. изменение направления распространения является величиной первого порядка по V/c .

2.3 Интервал между событиями

Введём понятие события. Событие определяется местом, где оно произошло, и временем, когда оно произошло. Для описания события удобно ввести четырёхмерную систему координат, на осях которой откладываются три пространственные координаты и время. В этом пространстве событие изображается точкой, которую принято называть мировой (например, точки 1, 2 на рис.2.1). Движение частицы в этом пространстве описывается мировой линией (линия, соединяющая точки 1 и 2 на рис.2.1). Равномерно и прямолинейно движущейся частице соответствует прямая линия.

Рассмотрим две системы отсчёта, K и K' , движущиеся друг относительно друга с постоянной скоростью V . Ось x , вдоль которой движется K' , совпадает с осью x' , оси y , z параллельны осям y' , z' ; время в системах K и K' обозначим t и t' .

Пусть первое событие состоит в том, что в момент времени t_1 из точки с координатами $\mathbf{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, отправляется световой сигнал. Второе событие – приход этого сигнала в мировую точку $t_2, \mathbf{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$. Расстояние, которое пройдёт световой сигнал между этими событиями равно $c(t_2 - t_1)$. С другой стороны это расстояние равно $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Таким образом

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2 = 0 \quad (2.22)$$

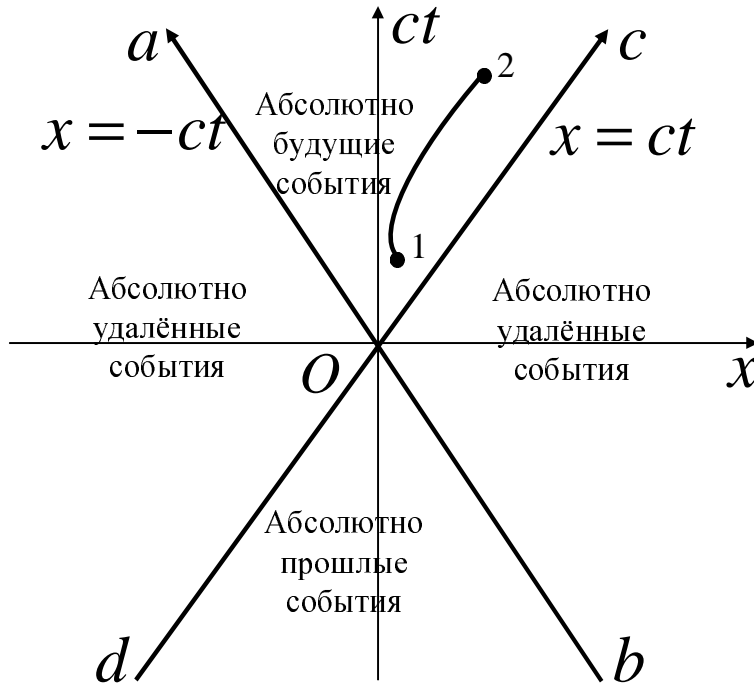


Рис. 2.1:

Аналогичные рассуждения для тех же событий в системе отсчёта K' приводят к равенству

$$c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 - (y'_2 - y'_1)^2 - (z'_2 - z'_1)^2 = 0 \quad (2.23)$$

Величину

$$s_{12} = \sqrt{c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}, \quad (2.24)$$

назовём интервалом между событиями. Таким образом, из инвариантности скорости света следует, что если интервал между двумя событиями равен нулю в одной системе отсчёта, то он равен нулю и в любой другой системе отсчёта.

Покажем, что интервал между любыми событиями является инвариантом.

Рассмотрим в системах отсчёта K и K' следующие два события. В момент времени $t_1 = 0$ из точки $x_1 = y_1 = z_1 = 0$ начинает двигаться частица. В момент $t_2 = t$ она попадает в точку $x_2 = x, y_2 = z_2 = 0$. Считаем, что время и координаты первого события в K и K' совпадают. Время и координаты второго события в системе K' равны $t'_2 = t', x'_2 = x', y'_2 = z'_2 = 0$. Интервалы между этими событиями выглядят следующим образом:

$$s^2 = c^2t^2 - x^2, \quad s'^2 = c^2t'^2 - x'^2 \quad (2.25)$$

С помощью преобразования Лоренца (2.14) получим

$$s^2 = c^2 t^2 - x^2 = \frac{c^2 \left(t' + \frac{V}{c^2} x'\right)^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} - \frac{(x' + V t')^2}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = c^2 t'^2 - x'^2 = s'^2 \quad (2.26)$$

Формула (2.26) отражает важнейшее следствие принципа относительности Эйнштейна: *интервал между двумя событиями одинаков во всех инерциальных системах отсчёта.*

Используя инвариантность интервала, можно ответить на вопрос: существует ли такая система отсчёта, в которой два события, связанные с материальной частицей, происходят в одном и том же месте пространства?

Введем обозначения

$$t_2 - t_1 = t_{12}, \quad |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1| = r_{12}, \quad t'_2 - t'_1 = t'_{12}, \quad |\mathbf{r}'_2 - \mathbf{r}'_1| = r'_{12}$$

для соответствующих событий в системе K и K' . В этих обозначениях инвариантность интервала выглядит так:

$$c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2 = c^2 t'_{12}{}^2 - r'_{12}{}^2 \quad (2.27)$$

Для событий, происходящих в системе K' в одной и той же точке пространства, $r'_{12} = 0$, имеем

$$c^2 t_{12}^2 - r_{12}^2 = c^2 t'_{12}{}^2 > 0 \quad (2.28)$$

Таким образом, если интервал между событиями вещественный $s_{12}^2 > 0$, существует система отсчёта, где события происходят в одной и той же точке пространства. Такие интервалы называют *времениподобными*. Для событий, связанных с одной материальной частицей, интервал всегда времениподобный, так как скорость тела не может превышать скорость света.

Если квадрат интервала между событиями отрицательный, $s_{12}^2 < 0$, то всегда найдётся система отсчёта, в которой эти события происходят в одно и то же время, $t'_{12} = 0$. Такие интервалы называют *пространственноподобными*.

Разделение интервалов на времениподобные и пространственноподобные есть понятие абсолютное.

Рассмотрим систему координат на плоскости (x, ct) (рис.2.1). Прямые $x = \pm ct$ изображают распространение двух световых сигналов в противоположных направлениях, проходящих через событие O . В областях aOc , dOb интервалы между событием O и любыми другими событиями времениподобные, $s^2 > 0$. Поэтому не существует систем отсчёта, в которых события из этих областей происходили бы одновременно с событием O . Область aOc отвечает будущему; dOb – прошлому. В областях dOa , cOb интервал пространственно-подобный, $s^2 < 0$. В любой системе отсчёта событие O и любое другое событие из указанных областей происходят в разных точках пространства. Поэтому эти области отвечают абсолютно удалённым событиям.

2.4 Собственное время

Используя инвариантность интервала, найдем связь собственного времени произвольно движущегося тела с показаниями покоящихся часов.

В каждый отдельный момент времени движение тела можно рассматривать как равномерное. Введём сопутствующую инерциальную систему отсчёта, которая в данный момент движется с той же скоростью, что и тело. В течение бесконечно малого отрезка времени по неподвижным часам dt , движущиеся часы проходят расстояние $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$. В сопутствующей системе отсчёта $dx' = dy' = dz' = 0$. В силу инвариантности интервала,

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2 dt'^2 \quad (2.29)$$

Учитывая равенство

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = v^2$$

где v – скорость движущегося тела, находим $dt' = \frac{ds}{c} = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Поэтому

$$t'_2 - t'_1 = \int_{t_1}^{t_2} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2.30)$$

Соотношение (2.30) определяет связь между промежутком временем по движущимся часам $t'_2 - t'_1$ и показанием неподвижных часов $t_2 - t_1$.

Лекция 3

3.1 Четырёхмерное пространство

Перед тем, как рассмотреть математические соотношения, касающиеся свойств четырёхмерного пространства, напомним ряд основных формул векторной алгебры.

Координаты двумерного вектора $\mathbf{r} = (x, y) = (x', y')$ при повороте системы координат на угол φ (см. рис.3.1) преобразуются по закону

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

Равенство (3.1) можно переписать следующим образом:

$$x'_\alpha = \sum_{\beta=1}^2 a_{\alpha\beta} x_\beta \equiv a_{\alpha\beta} x_\beta \quad (3.2)$$

где

$$x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad a_{11} = a_{22} = \cos \varphi, \quad a_{12} = -a_{21} = \sin \varphi$$

и использовано правило: по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование (в (3.2) это индекс β).

Как легко убедиться, матрица преобразования \hat{a} удовлетворяет соотношению

$$a_{\alpha\beta}(\varphi) a_{\beta\gamma}(-\varphi) = a_{\alpha\beta}(\varphi) a_{\beta\gamma}^{-1}(\varphi) = \delta_{\alpha\gamma} \quad (3.3)$$

где $\delta_{\alpha\gamma}$ – δ -символ Кронекера.

Свойство (3.3) отражает очевидный факт: поворот системы отсчёта на угол $-\varphi$ есть обратное преобразование по отношению к повороту системы на угол φ .

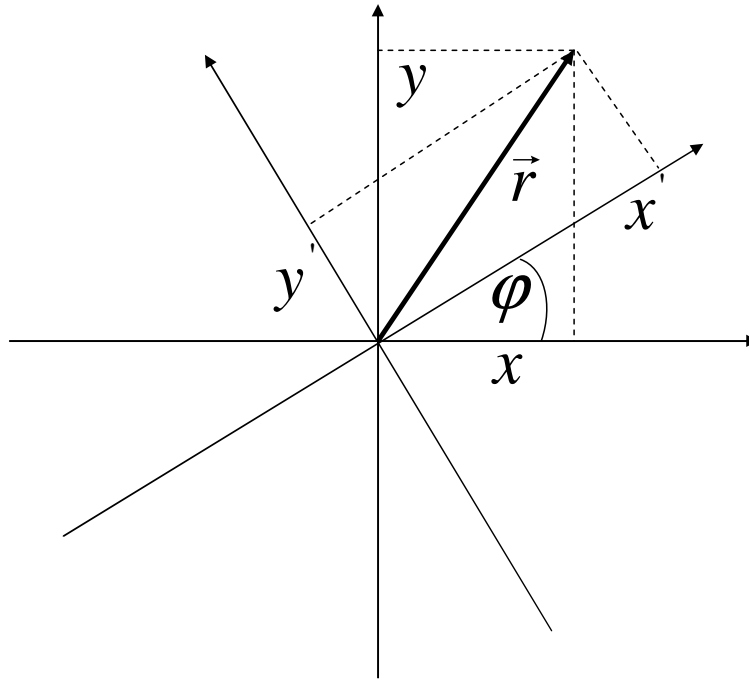


Рис. 3.1:

Следствием явного вида матрицы \hat{a} (3.1) является равенство

$$\hat{a}(\varphi) = (\hat{a}^{-1}(\varphi))^T = (\hat{a}(-\varphi))^T \quad (3.4)$$

Квадрат радиус-вектора не меняется при вращениях:

$$r'^2 = x'_\alpha x'_\alpha = a_{\alpha\beta} x_\beta a_{\alpha\gamma} x_\gamma = a_{\alpha\beta} a_{\gamma\alpha}^{-1} x_\beta x_\gamma = \delta_{\beta\gamma} x_\beta x_\gamma = r^2 \quad (3.5)$$

Градиент $\nabla f = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y)$ в случае линейного преобразования

$$x'_\alpha = a_{\alpha\beta} x_\beta$$

преобразуется по закону

$$\frac{\partial f}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x'_\beta} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_\alpha} = \frac{\partial f}{\partial x'_\beta} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} (a_{\beta\gamma} x_\gamma) = \frac{\partial f}{\partial x'_\beta} a_{\beta\alpha} \quad (3.6)$$

Умножая равенство (3.6) с обеих сторон на матрицу \hat{a}^{-1} , находим

$$\frac{\partial f}{\partial x'_\alpha} = (\hat{a}^{-1})^T_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x_\beta} \quad (3.7)$$

Сравнивая (3.2) и (3.7), можем заключить, что радиус-вектор и градиент в общем случае преобразуются по разным законам. В случае вращения законы (3.2) и (3.7) совпадают из-за свойства (3.4) матрицы (3.1).

Обратимся теперь к четырёхмерному пространству.

Координаты события ct, x, y, z можно рассматривать как компоненты четырёхмерного радиус-вектора в четырёхмерном пространстве. Его компоненты будем обозначать x^i , где индекс i принимает значения 0, 1, 2, 3,

$$x^0 = ct, \quad x^1 = x, \quad x^2 = y, \quad x^3 = z \quad (3.8)$$

Компоненты 4-радиус-вектора x^i преобразуются согласно формулам преобразования Лоренца (2.14), которые в обозначениях (3.8) выглядят так

$$x^0 = \frac{x^{0'} + \frac{V}{c} x^{1'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x^1 = \frac{x^{1'} + \frac{V}{c} x^{0'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad x^2 = x^{2'}, \quad x^3 = x^{3'} \quad (3.9)$$

Матрица преобразования (3.9) имеет вид

$$\hat{g}(\mathbf{V}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & \frac{V/c}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ \frac{V/c}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Существенным отличием преобразования Лоренца (3.9) от рассмотренных выше поворотов в пространстве (3.1),(3.2), является то, что для матрицы преобразования (3.10)

$$\hat{g} \neq (\hat{g}^{-1})^T \quad (3.11)$$

Поэтому не будет скаляром определённая аналогично (3.5) величина $x^i x^i$, и правила преобразования 4-вектора градиента, для которого матрицей преобразования является $(\hat{g}^{-1})^T$, будут отличаться от (3.9).

В рассматриваемом нами четырёхмерном пространстве необходимо различать два вида векторов. Векторы A^i , которые преобразуются как компоненты 4-радиус-вектора (3.9), т.е. с матрицей преобразования (3.10), будем называть *контравариантными* 4-векторами.

Векторы B_i (индекс внизу), которые преобразуются как компоненты 4-вектора градиента $\partial f/\partial x^i$, т.е. с матрицей преобразования $(\hat{g}^{-1})^T$, будем называть *ковариантными* 4-векторами. Как нетрудно видеть матрица $(\hat{g}^{-1})^T$ получается из (3.10) заменой V на $-V$.

Скалярами, т.е. величинами не меняющимися при преобразовании Лоренца, будут произведения вида

$$A^i B_i = A^0 B_0 + A^1 B_1 + A^2 B_2 + A^3 B_3 \quad (3.12)$$

В этом легко убедиться непосредственно, воспользовавшись сформулированными правилами преобразования и явным видом матриц \hat{g} и $(\hat{g}^{-1})^T$.

В качестве примера ковариантного 4-вектора рассмотрим 4-градиент квадрата интервала. Имеем

$$\frac{\partial s^2}{\partial x^i} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left((x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 - (x^3)^2 \right) = 2(x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = 2(ct, -x, -y, -z) \quad (3.13)$$

Таким образом, поскольку величину (ct, x, y, z) мы определили как контравариантный 4-вектор, величина $(ct, -x, -y, -z)$ преобразуется как ковариантный 4-вектор. Обозначая компоненты первой величины x^i , а второй — x_i , можем заключить, что опускание индекса не меняет нулевую — временную — компоненту, и изменяет знак у пространственных составляющих

$$x^i = (ct, \mathbf{r}), \quad x_i = (ct, -\mathbf{r})$$

Скаляр

$$x^i x_i = x^0 x_0 + x^1 x_1 + x^2 x_2 + x^3 x_3 = (ct)^2 - x^2 - y^2 - z^2 \quad (3.14)$$

есть квадрат интервала s^2 , величина действительно инвариантная относительно преобразования Лоренца.

Рассмотренные свойства 4-радиус-вектора распространяются на любые четырёхмерные векторы. Если A^i — контравариантные компоненты 4-вектора, $A^i = (A^0, \mathbf{A})$, то его ковариантные компоненты A_i равны

$$A^0 = A_0, \quad A^1 = -A_1, \quad A^2 = -A_2, \quad A^3 = -A_3 \quad \text{или} \quad A_i = (A^0, -\mathbf{A}) \quad (3.15)$$

и преобразуются с матрицей $(\hat{g}^{-1})^T$. Величина

$$A^i A_i = (A^0)^2 - (A^1)^2 - (A^2)^2 - (A^3)^2$$

представляет собой скаляр – инвариант относительно преобразования Лоренца.

Наряду с 4-векторами нас будут интересовать тензорные величины. 4-тензором "n"-ого ранга называется величина, которая преобразуется как произведение компонент n 4-векторов, $A^{i_1} B^{i_2} \dots C^{i_n}$. При $n = 1$ мы возвращаемся просто к 4-векторам. При $n = 2$ имеем важный для физических приложений случай 4-тензора 2-ого ранга. Компоненты 4-тензора 2-ого ранга (всего 16 величин) могут быть представлены в трёх видах. В виде контравариантного тензора A^{ik} , ковариантного тензора A_{ik} и тензора смешанного вида – A^i_k, A_k^i . В последнем случае (A^i_k, A_k^i) надо различать, какой именно – первый или второй – индекс стоит сверху, а какой внизу. Связь между различными видами компонент определяется по общему правилу: поднятие или опускание временного индекса (0) не меняет, а поднятие или опускание пространственного индекса (1, 2, 3) меняет знак соответствующей компоненты. Например

$$A_{00} = A^{00}, \quad A_{01} = -A^{01}, \quad A_{11} = A^{11}, \dots$$

Единичным 4-тензором – аналогом δ -символа Кронекера – называется тензор $\delta_i^k \equiv \delta_i^k$, который равен единице при $i = k$, и равен нулю при $i \neq k$.

Удобно также ввести так называемый метрический тензор g^{ik} , играющий важную роль в релятивистской теории,

$$g^{ik} = g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

(индекс i нумерует строки, а индекс k – столбцы в порядке значений 0, 1, 2, 3). Он получается из δ_i^k поднятием или опусканием индексов. Очевидно, что

$$g^{ik} A_k = A^i, \quad g_{ik} A^k = A_i \quad (3.17)$$

Поэтому скалярное произведение двух 4-векторов можно записать в виде

$$A^i A_i = g^{ik} A_k A_i = g_{ik} A^k A^i \quad (3.18)$$

Компоненты тензоров δ_i^k , $g^{ik} = g_{ik}$ одинаковы во всех системах отсчёта. Поэтому их называют инвариантными тензорами.

Лекция 4

4.1 Релятивистская механика. Четырёхмерная скорость

Как известно, задачей механики является определение положения движущегося тела в произвольный момент времени. В классической механике это сводится к нахождению временной зависимости трёх координат радиус-вектора $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$. Время в классической – нерелятивистской – механике одинаково во всех системах отсчёта – оно не меняется при преобразовании Галилея. В релятивистской механике это не так – время становится равноправной координатой, зависящей от системы отсчёта. Поэтому в релятивистской механике задача может быть сформулирована следующим образом: найти зависимость 4-”радиус-вектора” от величины интервала между начальной и конечной мировыми точками $x^i(s) = (ct(s), x(s), y(s), z(s))$. Выбор интервала в качестве аргумента обусловлен его инвариантностью относительно преобразований систем отсчёта. Согласно (2.29), связь интервала с промежутком времени на часах у наблюдателя, выглядит следующим образом

$$ds = c dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (4.1)$$

где v – трёхмерная скорость частицы относительно наблюдателя. Поэтому, если аналогично трёхмерной скорости

$$\mathbf{v} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right)$$

ввести четырёхмерную скорость

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad (4.2)$$

то используя (4.1), u^i можно записать в виде

$$u^i = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \frac{\mathbf{v}}{c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) \quad (4.3)$$

Из (4.3) следует, что

$$u^i u_i = 1 \quad (4.4)$$

По аналогии с 4-скоростью можно определить 4-ускорение

$$w^i = \frac{d^2 x^i}{ds^2} = \frac{du^i}{ds} \quad (4.5)$$

Дифференцируя соотношение (4.4) по s , найдём

$$w^i u_i = 0 \quad (4.6)$$

т.е. 4-векторы скорости и ускорения взаимно ортогональны.

4.2 Принцип наименьшего действия

Как и в классической механике, будем исходить из принципа наименьшего действия. Согласно этому принципу, для всякой механической системы существует такой функционал S , называемый действием, который на истинной траектории движения имеет минимум и, следовательно, вариация δS равна нулю, $\delta S = 0$.

Этот функционал не должен зависеть от выбора системы отсчёта, т.е. должен быть скаляром относительно преобразований Лоренца. Чтобы удовлетворить этому требованию, действие для свободной частицы в релятивистской механике должно иметь вид

$$S = \alpha \int_1^2 ds \quad (4.7)$$

где α – постоянная, подлежащая определению. Интеграл в (4.7) берётся по всем возможным мировым линиям, начинающимся в мировой точке 1 и заканчивающимся в точке 2 (см. рисунок 2.1).

Действие (4.7) можно представить в виде интеграла по времени

$$S = \int_1^2 L dt = \alpha c \int_1^2 dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (4.8)$$

где L – функция Лагранжа

$$L(\mathbf{v}) = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (4.9)$$

Во втором равенстве в (4.8) использовано соотношение (4.1).

В нерелятивистском ($v \ll c$) пределе функция Лагранжа (4.9) выглядит так:

$$L(\mathbf{v}) = \alpha c \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \approx \alpha c - \alpha \cdot \frac{v^2}{2c} \quad (4.10)$$

Как известно из нерелятивистской механики, функция Лагранжа определена с точностью до полной производной по времени от произвольной функции координат и времени. Поэтому постоянное слагаемое в (4.10) не влияет на уравнения движения. Опустив его и сравнив (4.10) с нерелятивистской функцией Лагранжа свободной частицы

$$L(\mathbf{v}) = \frac{mv^2}{2},$$

находим, что $\alpha = -mc$. Соответственно, действие и функция Лагранжа свободной релятивистской частицы определяются следующими равенствами:

$$S = -mc \int_1^2 ds, \quad L(\mathbf{v}) = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (4.11)$$

4.3 Энергия и импульс релятивистской частицы

Импульс частицы по определению равен

$$\mathbf{p} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \left(\frac{\partial L}{\partial v_x}, \frac{\partial L}{\partial v_y}, \frac{\partial L}{\partial v_z} \right)$$

Подставляя в определение импульса соотношение (4.11), находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial v_\alpha} &= -mc^2 \frac{\partial}{\partial v_\alpha} \sqrt{1 - \frac{v_\beta v_\beta}{c^2}} = \\ &= \frac{m}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot 2v_\beta \frac{\partial v_\beta}{\partial v_\alpha} = \frac{m}{2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} 2v_\beta \delta_{\alpha\beta} = \frac{mv_\alpha}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \end{aligned} \quad (4.12)$$

т.е.

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.13)$$

Энергией \mathcal{E} частицы называется величина

$$\mathcal{E} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L$$

Используя (4.11) и (4.13), для энергии частицы находим

$$\mathcal{E} = \mathbf{p}\mathbf{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (4.14)$$

Из (4.14) следует, что в релятивистской механике энергия свободной частицы не обращается в нуль при $v = 0$, а остаётся конечной величиной, равной

$$\mathcal{E} = mc^2 \quad (4.15)$$

Величину (4.15) называют энергией покоя.

В нерелятивистском пределе ($v \ll c$) для энергии частицы имеем

$$\mathcal{E} \approx mc^2 + \frac{mv^2}{2}, \quad (4.16)$$

т.е. энергия свободной нерелятивистской частицы определяется суммой классического выражения для кинетической энергии и энергии покоя. Сравнивая (4.13) и (4.14), можно получить важное соотношение между импульсом, скоростью и энергией

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}\mathbf{v}}{c^2} \quad (4.17)$$

Как известно, функция Гамильтона определяется формулой для энергии, выраженной через импульс. Из (4.13) следует, что

$$v^2 = \frac{p^2 c^2}{m^2 c^2 + p^2},$$

Подставляя v^2 в определение (4.14), для функции Гамильтона находим

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}) = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}, \quad (4.18)$$

В нерелятивистском пределе ($p \ll mc$) функция Гамильтона, имеет вид

$$\mathcal{H}(\mathbf{p}) = mc^2 + \frac{p^2}{2m}, \quad (4.19)$$

4.4 Уравнение движения в четырёхмерном виде

Используя явный вид действия (4.11), выведем уравнение движения свободной частицы.

Вариация действия (4.11) равна

$$\delta S = -mc\delta \int_1^2 ds = -mc \int_1^2 \delta ds \quad (4.20)$$

Учитывая, что операции дифференцирования и варьирования перестановочны ($\delta d \dots = d\delta \dots$), для вариации интервала имеем

$$\delta ds = \delta \sqrt{dx^i dx_i} = \frac{1}{2\sqrt{dx^i dx_i}} \delta(dx^i dx_i) = \frac{d\delta x^i dx_i + dx^i d\delta x_i}{2\sqrt{dx^i dx_i}} = \frac{dx_i d\delta x^i}{ds} = u_i d\delta x^i \quad (4.21)$$

Поэтому вариацию действия (4.20) можно представить в виде

$$\delta S = -mc \int_1^2 u_i d\delta x^i \quad (4.22)$$

Проинтегрируем получившееся выражение по частям. В результате находим

$$\delta S = -mc u_i \delta x^i \Big|_1^2 + \int_1^2 \delta x^i \frac{du_i}{ds} ds \quad (4.23)$$

где использовано равенство $du^i = (du^i/ds)ds$.

Для нахождения истинной траектории приравняем $\delta S = 0$. Учтём, что варьлируем траектории, проходящие через две заданные мировые точки 1 и 2 – т.е. в этих точках $(\delta x^i)_1 = (\delta x^i)_2 = 0$. Из условия, что вариация (4.23) должна обращаться в нуль при произвольной δx^i , находим уравнения движения для свободной частицы в четырёхмерном виде,

$$\frac{du_i}{ds} = 0 \quad (4.24)$$

Уравнение (4.24) означает постоянство четырёхмерной скорости свободной частицы.

Рассмотрим теперь действие как функцию координат. В этой постановке рассматриваются только истинные, т.е. удовлетворяющие уравнениям движения (4.24), траектории.

Заданной считается лишь одна точка 1, так что $(\delta x^i)_1 = 0$. Вторую точку 2 считаем переменной, $(\delta x^i)_2 \equiv \delta x^i$. Тогда вариация действия (4.23) приобретает вид

$$\delta S = -m c u_i \delta x^i \quad (4.25)$$

Величина

$$p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} \quad (4.26)$$

называется 4-импульсом. Как известно из классической механики, производные $\partial S/\partial x$, $\partial S/\partial y$, $\partial S/\partial z$ – три компоненты вектора импульса частицы \mathbf{p} , а производная $(-\partial S/\partial t)$ есть энергия частицы \mathcal{E} . Поэтому ко- и контравариантные компоненты 4-импульса равны

$$p_i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, -\mathbf{p} \right), \quad p^i = \left(\frac{\mathcal{E}}{c}, \mathbf{p} \right) \quad (4.27)$$

Согласно (4.25) 4-импульс свободной частицы равен

$$p^i = m c u_i \quad (4.28)$$

Поэтому $p^i p_i = m c^2$ (см. (4.4)). Подставив в (4.28) компоненты 4-скорости (4.3), возвращаемся к выражениям (4.13), (4.16) для импульса \mathbf{p} и энергии \mathcal{E} .

Поскольку энергия и импульс являются компонентами 4-вектора (4.27), при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой они преобразуются согласно преобразованию Лоренца для 4-вектора.

Согласно (4.13), (4.16), частица с отличной от нуля массой не может двигаться со скоростью света – её импульс и энергия стремятся к бесконечности. Со скоростью света движутся только безмассовые частицы (например, γ -квант). Для них

$$\mathcal{E} = p c.$$

К такому же соотношению между энергией и импульсом можно приближённо прийти в пределе $\mathcal{E} \gg m c^2$ (или $p \gg m c$), который называют ультрарелятивистским пределом.

Лекция 5

5.1 Распад и упругие столкновения частиц

Энергия свободного тела в релятивистской механике представляет собой вполне определенную, всегда положительную величину, связанную с его массой. В системе отсчета, в которой тело покоится, энергия не обращается в нуль, а остается конечной величиной, равной Mc^2 . Энергия покоящегося тела содержит в себе, кроме энергий покоя входящих в его состав частей, их кинетическую энергию и энергию их взаимодействия. Поэтому в релятивистской механике нет закона сохранения массы (масса тела не равна сумме масс его частей), а есть только закон сохранения энергии, которая включает в себя и энергию покоя частей тела.

Рассмотрим, как иллюстрацию к сказанному, распад частицы с массой M на две части с массами m_1 и m_2 . В системе отсчета, в которой частица с массой M покоится, закон сохранения энергии имеет вид

$$Mc^2 = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 \quad (5.1)$$

где \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 - энергии продуктов распада,

$$\mathcal{E}_{1,2} = c\sqrt{p_{1,2}^2 + m_{1,2}^2c^2}$$

Соотношение (5.1) может быть выполнено, если $M > m_1 + m_2$, то есть распад тела возможен на части, сумма масс которых меньше массы тела.

Поскольку в рассматриваемой системе отсчета исходная частица покоилась, то закон

сохранения импульса имеет вид

$$\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = 0, \quad (5.2)$$

т.е. суммарный импульс продуктов распада равен нулю. Из (5.2) следует, что $p_1^2 = p_2^2$ или

$$\mathcal{E}_1^2 - (m_1 c^2)^2 = \mathcal{E}_2^2 - (m_2 c^2)^2 \quad (5.3)$$

Решая систему двух уравнений, (5.1) и (5.3), получим

$$\mathcal{E}_1 = \frac{M^2 + m_1^2 - m_2^2}{2M} c^2, \quad \mathcal{E}_2 = \frac{M^2 + m_2^2 - m_1^2}{2M} c^2 \quad (5.4)$$

Применим полученный результат к распаду π -мезона на мюон и нейтрино. Энергия покоя π -мезона 139.6 МэВ, мюона 105.7 МэВ, нейтрино считаем безмассовой частицей. Используя формулы (5.4), находим значение энергии мюона $\mathcal{E}_\mu = 109.8$ МэВ и нейтрино $\mathcal{E}_\nu = 29.8$ МэВ. Скорость мюона при такой энергии составляет $v_\mu = 0,27c$ (в рассматриваемой ситуации нерелятивистская формула для кинетической энергии мюона $T_\mu = \mathcal{E}_\mu - m_\mu c^2 \approx \frac{1}{2} m_\mu v_\mu^2$ дает погрешность всего в 6%).

Рассмотрим теперь упругое столкновение двух частиц (массы частиц до и после столкновения остаются неизменными). Предполагаем, что частица с массой m_1 и энергией \mathcal{E}_1 налетает на покоящуюся частицу с массой m_2 . В исходной (лабораторной) системе отсчета законы сохранения энергии и импульса выглядят следующим образом:

$$\mathcal{E}_1 + m_2 c^2 = \mathcal{E}'_1 + \mathcal{E}'_2 \quad (5.5)$$

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 \quad (5.6)$$

где значения энергии и импульса каждой из частиц после столкновения отмечены штрихом.

Найдем значения углов θ_1 и θ_2 , под которыми будут двигаться частицы после соударения (θ_1 и θ_2 отсчитываются от направления движения налетающей частицы). Из равенства (5.6) следует

$$(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}'_1)^2 = p_1^2 + p_1'^2 - 2pp_1 \cos \theta_1 = p_2'^2$$

Тогда, с учетом закона сохранения энергии (5.5), находим

$$\cos \theta_1 = \frac{p_1^2 + p_1'^2 - p_2'^2}{2p_1 p_1'} = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}'_1 - (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}'_1) m_2 c^2 - (m_1 c^2)^2}{c^2 p_1 p_1'} \quad (5.7)$$

где

$$p_1 = \frac{1}{c} \sqrt{\mathcal{E}_1^2 - (m_1 c^2)^2}, \quad p'_1 = \frac{1}{c} \sqrt{\mathcal{E}'_1{}^2 - (m_1 c^2)^2}$$

Аналогичным образом получим

$$\cos \theta_2 = \frac{(\mathcal{E}_1 + m_2 c^2)(\mathcal{E}'_2 - m_2 c^2)}{c^2 p_1 p'_2} \quad (5.8)$$

где

$$p'_2 = \frac{1}{c} \sqrt{\mathcal{E}'_2{}^2 - (m_2 c^2)^2}$$

Следует отметить, что в случае, когда налетающая частица легче покоящейся, $m_1 < m_2$, угол θ_1 меняется от нуля при $\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1$ до π при

$$\mathcal{E}'_1 = \frac{2m_1^2 m_2 c^4 + \mathcal{E}_1 (m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2)}{m_1^2 c^2 + m_2^2 c^2 + 2\mathcal{E}_1 m_2} \quad (5.9)$$

Если налетающая частица более тяжелая, $m_1 > m_2$, угол θ_1 не превышает предельного значения $(\theta_1)_{max}$,

$$(\theta_1)_{max} = \arccos \sqrt{1 - \left(\frac{m_2}{m_1}\right)^2} \equiv \arcsin \frac{m_2}{m_1} \quad (5.10)$$

К такому выводу нетрудно прийти, дифференцируя (5.7) по \mathcal{E}'_1 и приравнявая нулю значение производной. В случае $m_1 > m_2$ зависимость $\cos \theta_1$ от \mathcal{E}'_1 оказывается немонотонной.

Минимальное значение $\cos \theta_1$ достигается при энергии

$$\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{m_2 (\mathcal{E}_1^2 - (m_1 c^2)^2)}{m_1^2 c^2 + m_2 \mathcal{E}_1} \quad (5.11)$$

и отвечает углу отклонения (5.10).

Применим полученные формулы, чтобы найти связь между углом отклонения и энергией γ -кванта при столкновении с покоящимся электроном (эффект Комптона). Поскольку масса γ -кванта равна нулю, $m_1 = 0$, из соотношения (5.7) получаем

$$\cos \theta_1 = 1 - \frac{m_2 c^2 (\mathcal{E}_\gamma - \mathcal{E}'_\gamma)}{\mathcal{E}_\gamma \mathcal{E}'_\gamma} \quad (5.12)$$

Тогда зависимость энергии γ -кванта после столкновения от угла отклонения имеет вид

$$\mathcal{E}'_\gamma = \frac{\mathcal{E}_\gamma}{1 + \frac{\mathcal{E}_\gamma}{m_2 c^2} (1 - \cos \theta_1)} \quad (5.13)$$

При малых углах отклонения значение \mathcal{E}'_γ близко к начальному \mathcal{E}_γ . Наименьшее значение энергии γ -кванта отвечает отклонению назад

$$(\mathcal{E}'_\gamma)_{min} = \frac{\mathcal{E}_\gamma}{1 + 2\frac{\mathcal{E}_\gamma}{m_2c^2}} \quad (5.14)$$

Такой же результат получается и из выражения (5.9), если положить в нем $m_1 = 0$.

Проанализируем теперь упругое соударение двух частиц в системе отсчета, в которой суммарный импульс сталкивающихся частиц равен нулю. Как и в классической механике, будем называть такую систему отсчета \mathcal{C} -системой.

Считаем, как и раньше, что в лабораторной системе отсчета (\mathcal{L} -системе) частица с массой m_1 , энергией \mathcal{E}_1 и импульсом \mathbf{p}_1 налетает на покоящуюся частицу с массой m_2 . Будем рассматривать сталкивающиеся частицы как один составной объект. Тогда его энергия есть $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + m_2c^2$, а импульс равен суммарному импульсу частиц, $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$. Скорость движения этого составного объекта как целого определяется равенством

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{p}c^2}{\mathcal{E}} = \frac{\mathbf{p}_1c^2}{\mathcal{E}_1 + m_2c^2} \quad (5.15)$$

Найденная скорость есть скорость движения \mathcal{C} -системы относительно лабораторной системы отсчета. Действительно, в системе отсчета, движущейся со скоростью (5.15), импульс первой частицы равен

$$\frac{p_1 - \frac{V}{c} \left(\frac{\mathcal{E}_1}{c} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}} \quad (5.16)$$

импульс второй частицы –

$$\frac{-\frac{V}{c} \left(\frac{m_2c^2}{c} \right)}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}} \quad (5.17)$$

Суммарный импульс двух частиц равен нулю:

$$\frac{p_1 - \frac{V}{c} \left[\left(\frac{\mathcal{E}_1}{c} \right) + \left(\frac{m_2c^2}{c} \right) \right]}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c} \right)^2}} = 0$$

Столкновение двух частиц выглядит в \mathcal{C} -системе следующим образом. Поскольку сумма импульсов в \mathcal{C} -системе есть нуль, импульсы сталкивающихся частиц до и после соударения равны по величине и противоположны по направлению,

$$\mathbf{p}_1^{(c)} = -\mathbf{p}_2^{(c)}, \quad \mathbf{p}_1^{(c)'} = -\mathbf{p}_2^{(c)'}$$

Здесь и далее величины, относящиеся к \mathcal{C} -системе, будем отмечать дополнительным знаком (c) .

Используя закон сохранения энергии

$$\mathcal{E}_1^{(c)} + \mathcal{E}_2^{(c)} = \mathcal{E}_1^{(c)'} + \mathcal{E}_2^{(c)'}$$

где $\mathcal{E}_a^{(c)} = c\sqrt{(p_a^{(c)})^2 + (m_a c)^2}$, $(a = 1, 2)$, получаем, что абсолютные значения всех импульсов равны между собой

$$p_1^{(c)} = p_1^{(c)'} = p_2^{(c)} = p_2^{(c)'} \quad (5.18)$$

Таким образом, в результате соударения импульсы сталкивающихся частиц в \mathcal{C} -системе просто поворачиваются на некоторый угол (обозначим его χ).

Выразим (как и в классической механике) значения энергии и импульсов частиц после соударения через угол χ . Для этого выпишем явное выражение 4-скаляра $(p_1)_i(p_1')^i$ в \mathcal{L} - и \mathcal{C} -системах. В \mathcal{L} -системе с учетом выражения (5.7) имеем

$$(p_1)_i(p_1')^i = \frac{\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_1'}{c^2} - p_1 p_1' \cos \theta_1 = (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_1') m_2 + (m_1 c^2)^2 \quad (5.19)$$

В \mathcal{C} -системе,

$$\begin{aligned} (p_1)_i(p_1')^i &= \frac{\mathcal{E}_1^{(c)} \mathcal{E}_1^{(c)'}}{c^2} - p_1^{(c)} p_1^{(c)'} = \left(\sqrt{p_1^{(c)2} + (m_1 c)^2} \right)^2 - p_1^{(c)2} \cos \chi = \\ &= (m_1 c)^2 + p_1^{(c)2} (1 - \cos \chi) \end{aligned} \quad (5.20)$$

Приравнивая (5.19) и (5.20), находим

$$\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_1 - \frac{p_1^{(c)2}}{m_2} (1 - \cos \chi) \quad (5.21)$$

Значение $p_1^{(c)}$ – импульс частицы с массой m_1 в \mathcal{C} -системе – определяется формулой (5.16).

Подставляя (5.16) в (5.21), с учетом выражения для скорости \mathcal{C} -системы (5.15), получим

$$\mathcal{E}'_1 = \mathcal{E}_1 - \frac{m_2 (\mathcal{E}_1^2 - (m_1 c^2)^2)}{(m_1 c)^2 + (m_2 c)^2 + 2\mathcal{E}_1 m_2} (1 - \cos \chi) \quad (5.22)$$

В соответствии с законом сохранения энергии,

$$\mathcal{E}'_2 = m_2 c^2 + \frac{m_2 (\mathcal{E}_1^2 - (m_1 c^2)^2)}{(m_1 c)^2 + (m_2 c)^2 + 2\mathcal{E}_1 m_2} (1 - \cos \chi) \quad (5.23)$$

Наименьшее значение энергии \mathcal{E}'_1 достигается при $\chi = \pi$ и, как нетрудно проверить, совпадает с полученным выше результатом (5.9).

Из соотношений (5.22), (5.23) следует, что максимальная энергия, передаваемая в соударении (т.е. теряемая налетающей и приобретаемая покоящейся частицами), есть

$$\Delta \mathcal{E}_{max} = \frac{2m_2 (\mathcal{E}_1^2 - (m_1 c^2)^2)}{(m_1 c)^2 + (m_2 c)^2 + 2\mathcal{E}_1 m_2} \quad (5.24)$$

Проанализируем эту формулу в различных предельных случаях.

Для нерелятивистских частиц $\mathcal{E}_1 \approx m_1 c^2 + \frac{p_1^2}{2m_1}$, где кинетическая энергия $T = \frac{p_1^2}{2m_1} \ll m_1 c^2$, из (5.24) получаем известный результат классической механики,

$$(\Delta \mathcal{E})_{max} \approx \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} T \quad (5.25)$$

Для частиц ультрарелятивистской энергии, $\mathcal{E}_1 \gg m_1 c^2$, из формулы (5.24) находим

$$\Delta \mathcal{E}_{max} \approx \frac{2m_2 \mathcal{E}_1^2}{(m_1 c)^2 + (m_2 c)^2 + 2\mathcal{E}_1 m_2} \quad (5.26)$$

В классической механике, если массы сталкивающихся частиц сильно различаются, передаваемая энергия оказывается малой по сравнению с кинетической энергией налетающей частицы. В релятивистской механике ситуация иная. При больших энергиях, согласно (5.26), $(\Delta \mathcal{E})_{max}$ стремится к \mathcal{E}_1 . Если налетающая частица является более тяжелой, $m_1 \gg m_2$, в пределе $\mathcal{E}_1 \gg \frac{m_1}{m_2} m_1 c^2 \gg m_1 c^2$, имеем

$$(\Delta \mathcal{E})_{max} = \mathcal{E}_1 - \frac{m_1}{m_2} m_1 c^2 + \dots \quad (5.27)$$

В случае, когда налетает легкая частица, $m_1 \ll m_2$, величина $(\Delta\mathcal{E})_{max}$ приближается к \mathcal{E}_1 по закону

$$(\Delta\mathcal{E})_{max} = \mathcal{E}_1 - m_2c^2 + \dots \quad (5.28)$$

при $\mathcal{E}_1 \gg m_2c^2 \gg m_1c^2$. Отметим, что разница между \mathcal{E}_1 и $(\Delta\mathcal{E})_{max}$ с увеличением энергии налетающей частицы не исчезает, а стремится к предельному значению, которое зависит только от масс сталкивающихся частиц.

Лекция 6

6.1 Диаграмма столкновения частиц в релятивистской механике

Построим диаграмму столкновения частиц в релятивистской механике. Как и раньше, предполагаем, что частица с массой m_1 и импульсом \mathbf{p}_1 налетает на покоящуюся частицу с массой m_2 . После столкновения импульс налетающей частицы \mathbf{p}'_1 , а изначально покоящейся \mathbf{p}'_2 , $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2$. Найдём геометрическое место точек, определяющее возможные значения импульса первой частицы после столкновения.

Напомним, что в классической (нерелятивистской) механике искомым геометрическим местом точек была окружность радиуса

$$p^{(c)} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} p_1,$$

смещённая относительно начала системы координат (p'_{1x}, p'_{1y}) на величину

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} p_1.$$

В релятивистском случае соответствующая диаграмма будет выглядеть несколько иначе.

Воспользуемся преобразованием Лоренца для 4-импульса и выпишем соотношения, связывающие проекции импульса в L - и C -системах. Скорость движения C -системы относительно лабораторной системы отсчёта определяется формулой (5.15). Направление движения C -системы выберем за ось x . Перпендикулярную этому направлению компоненту вектора \mathbf{p}'_1 выберем за ось y . Тогда проекции импульса \mathbf{p}'_1 в L -системе связаны с

проекциями импульса $\mathbf{p}_1^{(c)'}$ в Π -системе следующими соотношениями

$$p'_{1x} = \frac{p_{1x}^{(c)' } + \frac{V}{c} \frac{\mathcal{E}_1^{(c)' }}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \quad (6.1)$$

$$p'_{1y} = p_{1y}^{(c)' } \quad (6.2)$$

где V – скорость (5.15),

$$\mathcal{E}_1^{(c)' } = c\sqrt{\left(p_{1x}^{(c)' }\right)^2 + (m_1c)^2}.$$

Вводя угол χ ,

$$p_{1x}^{(c)' } = p_1^{(c)' } \cos \chi, \quad p_{1y}^{(c)' } = p_1^{(c)' } \sin \chi,$$

и учитывая, что в Π -системе значения энергии и абсолютные значения импульсов частиц до и после столкновения остаются неизменными, из (6.1), (6.2) получим

$$\cos \chi = \frac{p'_{1x} \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2} + \frac{V}{c} \frac{\mathcal{E}_1^{(c)' }}{c}}{p_1^{(c)' }} \quad (6.3)$$

$$\sin \chi = \frac{p'_{1y}}{p_1^{(c)' }} \quad (6.4)$$

Возведем (6.3) и (6.4) в квадрат и сложим друг с другом. В результате приходим к уравнению эллипса:

$$\frac{\left(p'_{1x} - \frac{\mathcal{E}_1^{(c)' } V}{c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}\right)^2}{a^2} + \frac{(p'_{1y})^2}{b^2} = 1 \quad (6.5)$$

Уравнение (6.5) описывает в системе координат (p'_{1x}, p'_{1y}) эллипс с полуосями

$$a = \frac{p_1^{(c)' }}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}, \quad b = p_1^{(c)' } \quad (6.6)$$

по осям p'_{1x} и p'_{1y} , соответственно (рис.6.1). Центр эллипса A смещён относительно начала системы координат (p'_{1x}, p'_{1y}) по оси p'_{1x} на величину

$$\frac{\mathcal{E}_1^{(c)' } V}{c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}.$$

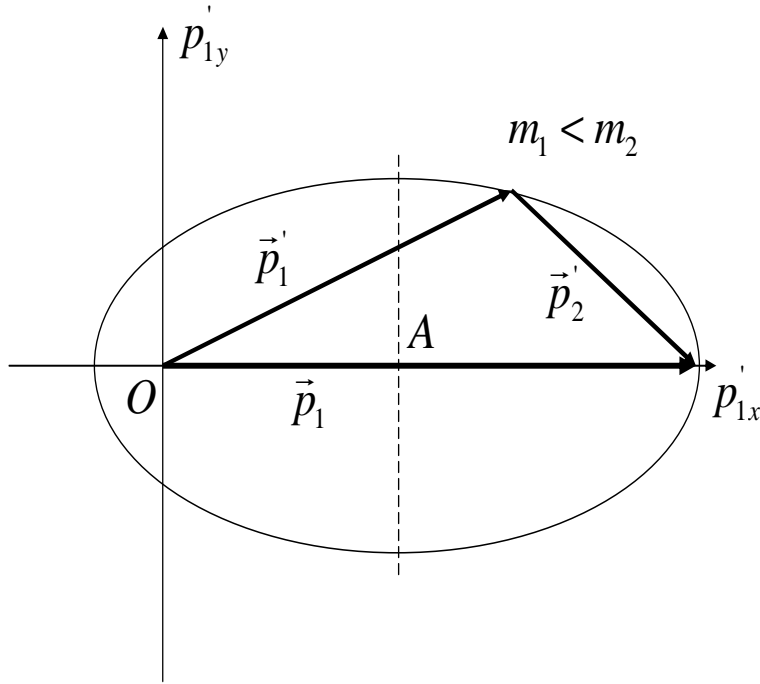


Рис. 6.1:

Таким образом, концы вектора \mathbf{p}'_1 лежат на эллипсе.

Если $m_1 > m_2$, то смещение центра эллипса превышает величину большой полуоси (рис.6.2). Это условие следует непосредственно из неравенства

$$\frac{\mathcal{E}_1^{(c)} V}{c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} > \frac{p_1^{(c)}}{\sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}}$$

В случае $m_1 > m_2$, как следует из рис.6.2, существует максимальное значение угла θ_1 – угла между направлением вектора \mathbf{p}'_1 и вектора \mathbf{p}_1 . Величину θ_{1max} можно вычислить, если найти уравнение касательной к эллипсу.

Из (6.5) можно получить

$$p'_{1y} = \pm p_1^{(c)} \sqrt{1 - \frac{1}{a^2} \left(p'_{1x} - \frac{\mathcal{E}_1^{(c)} V}{c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{V}{c}\right)^2}} \right)^2} \quad (6.7)$$

где значение a определено равенством (6.6). Дифференцируя (6.7) по p'_{1x} , получим уравнение касательной, которое выглядит следующим образом:

$$p'_{1y} - p'_{1y} \left(p'_{1x} \right) = \frac{dp'_{1y}}{dp'_{1x}} \Big|_{p'_{1x}^{(0)}} \left(p'_{1x} - p'_{1x}{}^{(0)} \right) \quad (6.8)$$

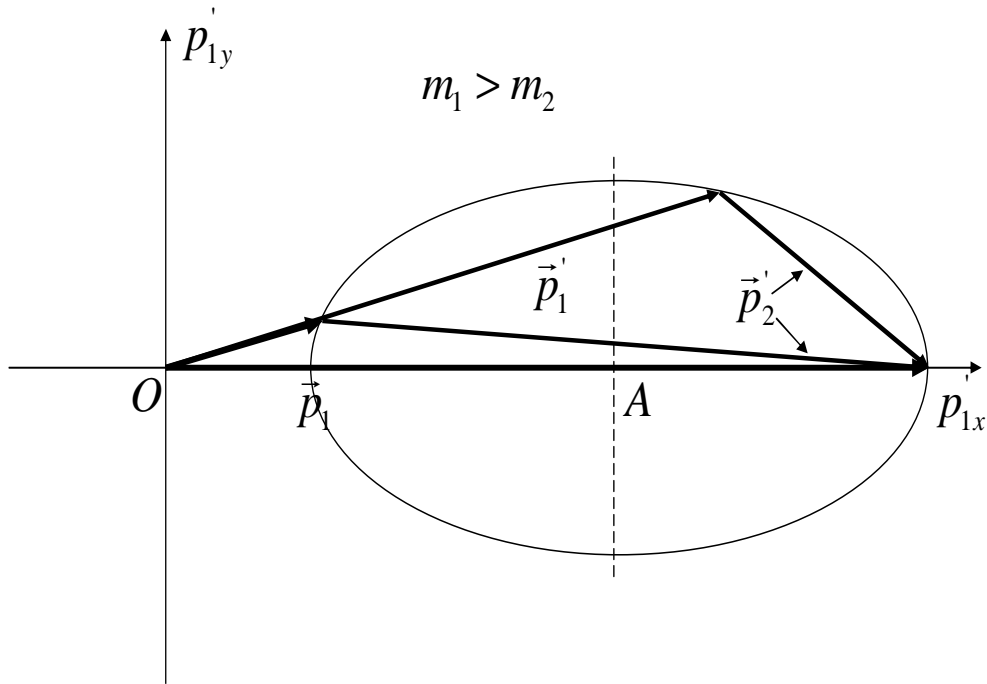


Рис. 6.2:

где значение $p'_{1x}{}^{(0)}$ находится из уравнения

$$p'_{1y} \left(p'_{1x}{}^{(0)} \right) = \left. \frac{dp'_{1y}}{dp'_{1x}} \right|_{p'_{1x}{}^{(0)}} \cdot p'_{1x}{}^{(0)} \quad (6.9)$$

Величина производной dp'_{1y}/dp'_{1x} в точке $p'_{1x}{}^{(0)}$ определяет $\operatorname{tg}\theta_{1max}$, а величину $\sin\theta_{1max}$ можно найти, зная $\operatorname{tg}\theta_{1max}$. Отталкиваясь от уравнения (6.7), получаем

$$\sin\theta_{1max} = \frac{m_2}{m_1}$$

т.е. результат (5.10).

Отметим, что такой же результат был получен ранее в рамках нерелятивистской – классической – механики. Эллипс в нерелятивистском случае вырождается в окружность: уравнение (6.5) при $V \ll c$ и $\mathcal{E}_1^{(c)} \approx m_1 c^2$ принимает вид

$$\frac{(p'_{1x} - m_1 V)^2}{(p_1^{(c)})^2} + \left(\frac{p'_{1y}}{p_1^{(c)}} \right)^2 = 1 \quad (6.10)$$

где скорость \mathcal{C} -системы определяется формулой

$$V = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1,$$

v_1 – скорость налетающей частицы.

В случае $m_1 > m_2$ одному и тому же значению угла θ_{1max} отвечают два возможных значения \mathbf{p}'_1 (см. рис.6.2). Поэтому, если регистрировать частицы под заданным углом, в их распределении по энергии будут два пика, отвечающие соответствующим значениям импульса.

Лекция 7

7.1 Заряд во внешнем электромагнитном поле

Взаимодействие частиц друг с другом можно описать с помощью силового поля: частица создает поле; на другую частицу, находящуюся в этом поле, действует сила. Благодаря конечности скорости распространения взаимодействия силы, действующие в данный момент на частицу, зависят от расположения частиц в предыдущие моменты, т.е. перемещение одной из частиц отражается на других частицах спустя некоторый промежуток времени. Поэтому мы можем говорить о формировании поля одной частицей и о последующем взаимодействии поля с другой частицей.

Не рассматривая квантовые эффекты, считаем элементарные частицы точечными.

Действие S частицы, движущейся в заданном поле, определяется суммой двух членов – действия свободной частицы и члена, описывающего взаимодействие частицы с полем. Взаимодействие с полем зависит как от величин, характеризующих частицы, так и от величин, характеризующих поле. Свойства частицы, определяющие её взаимодействие с полем, описываются всего одним параметром – зарядом частицы e . Свойства поля характеризуются 4-вектором A^i – четырехмерным потенциалом – компоненты которого являются функциями координат и времени.

Функционал действия S для заряда в заданном электромагнитном поле можно записать в виде

$$S = -mc \int_1^2 ds - \frac{e}{c} \int_1^2 A_i dx^i \quad (7.1)$$

где интегралы вычисляются вдоль мировой линии между двумя заданными событиями 1 и 2 – нахождением частицы в начальной \mathbf{r}_1 и конечной \mathbf{r}_2 точках пространства в моменты времени t_1 и t_2 . Такой вид функционала действия приводит в итоге к уравнениям, которые первоначально были сформулированы как результат обобщения экспериментальных данных.

Множитель $1/c$ введен для удобства. Выражение (7.1) представляет собой инвариант – 4-скаляр, поскольку функционал действия не должен зависеть от выбора той или иной инерциальной системы отсчёта.

Четырёхмерный потенциал поля A^i можно записать в виде

$$A^i = (\varphi, \mathbf{A}) \quad (7.2)$$

где нулевая ($i = 0$) компонента φ называется скалярным потенциалом, а три остальных компоненты ($i = 1 \div 3$) образуют трехмерный вектор \mathbf{A} , который называется векторным потенциалом.

С учётом (7.2) действие (7.1) можно представить в виде

$$S = -mc \int ds - e \int \varphi dt + \frac{e}{c} \int \mathbf{A} d\mathbf{r} \quad (7.3)$$

Вводя скорость $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, представим выражение (7.3) в виде интеграла по времени

$$S = \int \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} \right) dt \quad (7.4)$$

Тогда множитель перед dt по определению будет представлять собой функцию Лагранжа

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} - e\varphi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v} \quad (7.5)$$

Выражение (7.5) есть функция Лагранжа заряженной частицы в электромагнитном поле. Первый член в (7.5) есть функция Лагранжа свободной частицы, второй и третий члены описывают взаимодействие с полем.

Обобщённый импульс частицы в поле определяется выражением

$$\mathbf{P} = \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \quad (7.6)$$

Зная обобщённый импульс, найдём функцию Гамильтона заряженной частицы в поле

$$\mathcal{H} = \mathbf{v} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L = \sqrt{\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 + m^2 c^2} + e\varphi \quad (7.7)$$

Отметим, что функция Лагранжа (7.5) является функцией скорости частицы \mathbf{v} , координат \mathbf{r} и времени t (в формуле (7.5) функциями \mathbf{r} и t являются скалярный и векторный потенциалы $\varphi = \varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$). Независимыми переменными, от которых зависит функция Гамильтона \mathcal{H} , являются обобщённый импульс \mathbf{P} , радиус-вектор \mathbf{r} и время t .

В нерелятивистском пределе функция Лагранжа (7.5) переходит в выражение

$$L = \frac{mv^2}{2} - e\varphi + \frac{e}{c} \mathbf{A} \mathbf{v}, \quad (7.8)$$

а функция Гамильтона принимает вид

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\mathbf{P} - \frac{e}{c} \mathbf{A}\right)^2 + e\varphi \quad (7.9)$$

В выражениях (7.8), (7.9) мы опустили аддитивную постоянную mc^2 , которая не сказывается на уравнениях движения.

7.2 Уравнение движения заряженной частицы во внешнем электромагнитном поле

Будем считать, что скалярный и векторный потенциалы являются заданными функциями координат и времени; влиянием заряда на величину потенциалов можно пренебречь.

Чтобы найти конкретный вид уравнения движения заряженной частицы в поле нужно подставить функцию (7.5) в уравнение Лагранжа

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{r}} = 0 \quad (7.10)$$

где $L = L(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$.

Выпишем в явном виде отдельные члены этого уравнения. Первый член имеет вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} = \frac{d}{dt} \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A}\right) \quad (7.11)$$

где как и раньше используется обозначение импульса частицы

$$\mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (7.12)$$

Полная производная векторного потенциала по времени равна

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \\ &= \frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \left(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{A} \end{aligned} \quad (7.13)$$

Поэтому соотношение (7.11) принимает вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\mathbf{v}} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}\left(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{A} \quad (7.14)$$

Второй член в уравнении (7.10) есть

$$\frac{\partial L}{\partial\mathbf{r}} = -e\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} + \frac{e}{c}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{A}\mathbf{v}) \quad (7.15)$$

где при вычислении частной производной $\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}$ скорость \mathbf{v} считается постоянной. Подставляя (7.14) и (7.15) в уравнение (7.10), получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{p}}{dt} &= -e\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} - \frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \\ &+ \frac{e}{c}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{A}\mathbf{v}) - \left(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{A}\right) \end{aligned} \quad (7.16)$$

Последний член в (7.16) может быть записан с помощью двойного векторного произведения

$$\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}(\mathbf{A}\mathbf{v}) - \left(\mathbf{v}\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\right)\mathbf{A} = \left[\mathbf{v}\left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\mathbf{A}\right]\right] \quad (7.17)$$

Переходя в (7.16) и (7.17) к традиционным обозначениям

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{r}} \equiv \text{grad}\varphi, \quad \left[\frac{\partial}{\partial\mathbf{r}}\mathbf{A}\right] \equiv \text{rot}\mathbf{A},$$

перепишем уравнение (7.16) в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = -e \cdot \text{grad}\varphi - \frac{e}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}, \text{rot}\mathbf{A}] \quad (7.18)$$

Согласно (7.18), в уравнение движения входят не сами потенциалы, а только их производные по координатам и времени. Линейную комбинацию производных от потенциалов, определяющих первый и второй члены в правой части (7.18), называют напряженностью электрического поля,

$$\mathbf{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (7.19)$$

По своему определению напряженность \mathbf{E} равна силе, действующей на единичный заряд. Величину

$$\mathbf{H} = \text{rot}\mathbf{A} \quad (7.20)$$

называют напряженностью магнитного поля.

С учётом определений (7.19) и (7.20), уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле принимает вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \quad (7.21)$$

Величину в правой части (7.21) называют силой Лоренца. Она складывается из силы $e\mathbf{E}$, действующей на заряд в электрическом поле, и силы $\frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]$, которая действует на заряд со стороны магнитного поля. Первая - параллельна напряженности поля \mathbf{E} , вторая перпендикулярна напряженности магнитного поля \mathbf{H} и скорости частицы \mathbf{v} .

Отметим, что уравнение (7.21) сохраняет свой вид и при переходе к нерелятивистскому пределу. Все изменение касается только связи импульса со скоростью частицы (общее соотношение (7.12) переходит в нерелятивистскую формулу $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$).

Лекция 8

8.1 Движение заряда в постоянном однородном электрическом поле

Из уравнения движения заряда во внешнем электрическом поле нетрудно вывести формулу для изменения энергии частицы со временем. Имеем

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(c\sqrt{p^2 + m^2c^2} \right) = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}} \frac{d\mathbf{p}}{dt} \quad (8.1)$$

Учитывая далее, что

$$\frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}} = \mathbf{v}$$

и используя для $\frac{d\mathbf{p}}{dt}$ уравнение (7.21), получим

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{E}\mathbf{v} \quad (8.2)$$

Полученная формула связывает изменение энергии с работой, совершаемой в единицу времени силами поля.

Согласно (8.2), работу над зарядом совершает только электрическое поле. В связи с тем, что сила, действующая на частицу в магнитном поле, направлена перпендикулярно скорости частицы, магнитное поле работу не совершает.

Пусть скалярный φ и векторный \mathbf{A} потенциалы не зависят явно от времени. Тогда напряженности электрического и магнитного полей также не будут зависеть от времени, и

можно говорить о постоянном электромагнитном поле. В этой ситуации функция Лагранжа также не будет явно зависеть от времени и, как следствие этого, полная энергия будет сохраняться:

$$\mathcal{E} = \mathbf{v} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e\varphi(\mathbf{r}) = \text{const} \quad (8.3)$$

Таким образом, в присутствии поля к энергии $mc^2/\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ добавляется величина $e\varphi(\mathbf{r})$ – потенциальная энергия заряда во внешнем поле. Отметим, что энергия (8.3) зависит только от скалярного потенциала. Это отражает тот факт, что магнитное поле не может изменить энергию заряженной частицы, поскольку не производит над ней работу. Энергия частицы может меняться только под действием электрического поля.

Частный случай электромагнитного поля, в котором $\mathbf{E} \neq 0$, $\mathbf{H} = 0$ сводится к электрическому полю.

Рассмотрим движение заряженной частицы в однородном (не зависящим от координат) и постоянном во времени электрическом поле \mathbf{E} .

Электрическое поле можно описать с помощью только скалярного потенциала φ , полагая векторный потенциал равный нулю, $\mathbf{A} = 0$. Тогда из равенства

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi \quad (8.4)$$

с учетом того, что напряженность \mathbf{E} не зависит от координат, получаем

$$\varphi = \varphi_0 - \mathbf{E}\mathbf{r} \quad (8.5)$$

где φ_0 - произвольная постоянная.

Подставим выражение (8.5) в закон сохранения энергии (8.3) и получим

$$\frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - e\mathbf{E}\mathbf{r} = \text{const} \quad (8.6)$$

Это соотношение можно также записать через импульс частицы:

$$c\sqrt{p^2 + m^2c^2} - e\mathbf{E}\mathbf{r} = \text{const} \quad (8.7)$$

Соотношение (8.6) нетрудно также вывести непосредственно из формулы (8.2). В случае не зависящего от времени и координат электрического поля формулу (8.2) можно записать в виде

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{d}{dt} e\mathbf{E}\mathbf{r} \quad (8.8)$$

и интегрируя (8.8) по времени, получить соотношение (8.6).

Найдем решение уравнения движения заряда в однородном и постоянном электрическом поле. Считаем, что поле направлено по оси x , $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$. В начальный момент времени $t = 0$ частица находится в точке $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, а ее скорость равна $\mathbf{v}_0 = (v_{x_0}, v_{y_0}, v_{z_0})$.

Уравнение движения (7.21) в компонентах записывается так:

$$\frac{dp_x}{dt} = eE \quad \frac{dp_y}{dt} = 0 \quad \frac{dp_z}{dt} = 0 \quad (8.9)$$

Интегрируя эти уравнения, получим

$$p_x = p_{x_0} + eEt, \quad p_y = p_{y_0}, \quad p_z = p_{z_0} \quad (8.10)$$

где

$$p_{x_0} = \frac{mv_{x_0}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (8.11)$$

а p_{y_0} и p_{z_0} отличаются от (8.11) заменой v_{x_0} , соответственно, на v_{y_0} и v_{z_0} .

Зная импульс частицы, из соотношения (8.7) находим

$$c\sqrt{(p_{x_0} + eEt)^2 + p_{y_0}^2 + p_{z_0}^2 + m^2c^2} - eEx(t) = c\sqrt{p_{x_0}^2 + p_{y_0}^2 + p_{z_0}^2 + m^2c^2} - eEx_0 \quad (8.12)$$

Отсюда сразу получаем выражение для $x(t)$,

$$x(t) = x_0 + \frac{c}{eE} \left(\sqrt{(p_{x_0} + eEt)^2 + p_{y_0}^2 + p_{z_0}^2 + m^2c^2} - \sqrt{p_{x_0}^2 + p_{y_0}^2 + p_{z_0}^2 + m^2c^2} \right) \quad (8.13)$$

Значения $y(t)$ и $z(t)$ могут быть легко найдены из равенства

$$\mathbf{v} = \frac{c\mathbf{p}}{\sqrt{p^2 + m^2c^2}}$$

Запишем это равенство в компонентах и проинтегрируем по времени. Например, для $y(t)$

имеем

$$\frac{dy}{dt} = \frac{p_{y_0}c}{\sqrt{(p_{x_0} + eEt)^2 + p_{y_0}^2 + p_{z_0}^2 + m^2c^2}} \quad (8.14)$$

Интегрируя (8.14) по времени, находим $y(t)$,

$$y(t) = y_0 + \frac{p_{y_0}c}{eE} \ln \left[\frac{(p_{x_0} + eEt) + \sqrt{(p_{x_0} + eEt)^2 + p_{y_0}^2 + p_{z_0}^2 + m^2c^2}}{p_{x_0} + \sqrt{p_{x_0}^2 + p_{y_0}^2 + p_{z_0}^2 + m^2c^2}} \right] \quad (8.15)$$

При выводе формулы (8.15) мы воспользовались значением неопределенного интеграла

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln \left(u + \sqrt{u^2 + a^2} \right)$$

Выражение для $z(t)$ отличается от (8.15) только заменой y_0 на z_0 и p_{y_0} на p_{z_0} (перед знаком логарифма). Отметим, что из выражения для $y(t)$ и $z(t)$ следует, что

$$\frac{y - y_0}{p_{y_0}} = \frac{z - z_0}{p_{z_0}} \quad (8.16)$$

то есть движение заряженной частицы происходит в одной плоскости, параллельной оси x .

Как следует из формулы (8.15), электрическое поле влияет на характер движения частицы в направлении, перпендикулярном вектору \mathbf{E} . Это релятивистский эффект, который в классической – нерелятивистской – механике отсутствует.

Переход к нерелятивистскому случаю осуществляется следующим образом. В формулах (8.13) и (8.15) нужно считать, что импульсы (8.10) малы по сравнению с mc . Тогда из формулы (8.13) получаем

$$x(t) \approx x_0 + \frac{(p_{x_0} + eEt)^2 - p_{x_0}^2}{2meE} = x_0 + \frac{p_{x_0}}{m}t + \frac{1}{2} \frac{eE}{m}t^2, \quad (8.17)$$

а из формулы (8.15) –

$$y(t) \approx y_0 + \frac{p_{y_0}c}{eE} \ln \frac{p_{x_0} + eEt + mc}{p_{x_0} + mc} \approx y_0 + \frac{p_{y_0}c}{m}t \quad (8.18)$$

В ультрарелятивистском пределе, который достигается за счет действия поля ($eEt \gg mc$, $p_{x_0}, p_{y_0}, p_{z_0}$), из (8.13), (8.15) следует

$$\begin{aligned} x(t) &\approx x_0 + ct \\ y(t) &\approx y_0 + \frac{p_{y_0}c}{eE} \ln \frac{2eEt}{p_{x_0} + \sqrt{p_{x_0}^2 + p_{y_0}^2 + p_{z_0}^2 + m^2c^2}} \end{aligned} \quad (8.19)$$

Результат для $x(t)$ достаточно очевиден и отражает тот факт, что частица под действие поля разгоняется до скорости света c .

Лекция 9

9.1 Движение заряженной частицы в постоянном однородном магнитном поле

Найдем траекторию движения заряженной частицы в магнитном поле с напряженностью \mathbf{H} . Направление вектора \mathbf{H} примем за ось z . Будем искать решение уравнения движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \quad (9.1)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0, & y(0) &= y_0, & z(0) &= z_0 \\ \dot{x}(0) &= v_{x_0}, & \dot{y}(0) &= v_{y_0}, & \dot{z}(0) &= v_{z_0} \end{aligned} \quad (9.2)$$

В отсутствие электрического поля закон сохранения энергии сводится к

$$\mathcal{E} = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \text{const}$$

Поскольку энергия сохраняется, то используя равенство

$$\mathbf{p} = \frac{\mathcal{E}}{c^2} \mathbf{v}$$

представим уравнение (9.1) в следующем виде:

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2} \frac{d}{dt} \mathbf{v} = \frac{e}{c} [\mathbf{v}\mathbf{H}] \quad (9.3)$$

В компонентах уравнение (9.3) выглядит так

$$\dot{v}_x = \omega v_y, \quad \dot{v}_y = -\omega v_x, \quad \dot{v}_z = 0 \quad (9.4)$$

где частота ω равна

$$\omega = \frac{ecH}{\varepsilon} \quad (9.5)$$

Дифференцируя по времени первые два уравнения, получим

$$\ddot{v}_x + \omega^2 v_x = 0, \quad \ddot{v}_y + \omega^2 v_y = 0 \quad (9.6)$$

Каждое из этих уравнений по виду совпадает с уравнением для осциллятора. Решения уравнений (9.6) с учетом начальных условий (9.2) имеют вид

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x_0} \cos \omega t + A_x \sin \omega t \\ v_y(t) &= v_{y_0} \cos \omega t + A_y \sin \omega t \end{aligned} \quad (9.7)$$

где A_x, A_y - неизвестные пока постоянные. Их значения легко найти, воспользовавшись исходными уравнениями (9.4). Подставляя (9.7) в уравнение (9.4), получим

$$A_x = v_{y_0}, \quad A_y = -v_{x_0}$$

В итоге, для $v_x(t)$ и $v_y(t)$ имеем

$$\begin{aligned} v_x(t) &= v_{x_0} \cos \omega t + v_{y_0} \sin \omega t \\ v_y(t) &= v_{y_0} \cos \omega t - v_{x_0} \sin \omega t \end{aligned} \quad (9.8)$$

Теперь, после интегрирования выражений (9.8) по времени с учетом начальных условий (9.2), нетрудно найти $x(t)$ и $y(t)$,

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{v_{x_0}}{\omega} \sin \omega t - \frac{v_{y_0}}{\omega} \cos \omega t + \frac{v_{y_0}}{\omega} \\ y(t) &= y_0 + \frac{v_{y_0}}{\omega} \sin \omega t + \frac{v_{x_0}}{\omega} \cos \omega t - \frac{v_{x_0}}{\omega} \end{aligned} \quad (9.9)$$

Если формулы (9.9) переписать в виде

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 + \frac{v_{y_0}}{\omega} + \frac{\sqrt{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2}}{\omega} \sin(\omega t - \alpha) \\ y(t) &= y_0 - \frac{v_{x_0}}{\omega} + \frac{\sqrt{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2}}{\omega} \cos(\omega t - \alpha) \end{aligned}$$

где

$$\cos \alpha = \frac{v_{x_0}}{\sqrt{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2}}, \quad \sin \alpha = \frac{v_{y_0}}{\sqrt{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2}},$$

то становится ясно, что в плоскости (x, y) частица движется по окружности радиуса $\frac{1}{\omega} \sqrt{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2}$ с центром в точке $\left(x_0 + \frac{v_{y_0}}{\omega}, y_0 - \frac{v_{x_0}}{\omega}\right)$.

Третье из уравнений (9.4), которое описывает движение вдоль оси z , то есть вдоль вектора напряженности магнитного поля \mathbf{H} , дает

$$v_z = v_{z_0}, \quad z = z_0 + v_{z_0} t \quad (9.10)$$

Таким образом, из результатов (9.9), (9.10) следует, что в однородном магнитном поле заряженная частица движется по винтовой линии, ось которой параллельна \mathbf{H} , а радиус равен $\frac{1}{\omega} \sqrt{v_{x_0}^2 + v_{y_0}^2}$. Скорость частицы по абсолютной величине не меняется. Это следует из закона сохранения энергии и непосредственно из выражений (9.8) и (9.10). Частота ω (см. определение (9.5)) представляет собой частоту вращения частицы в плоскости (x, y) . Шаг винтовой линии - смещение вдоль оси z за период обращения - равен $2\pi \frac{v_{z_0}}{\omega}$.

Переход к нерелятивистскому пределу затрагивает только величину ω . При малых скоростях $\mathcal{E} \approx mc^2$ и $\omega \approx \frac{eH}{mc}$.

9.2 Уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Четырехмерная формулировка

Воспользуемся принципом наименьшего действия применительно к функционалу (7.1). Варьируя действие (7.1), получим

$$\delta S = - \int_1^2 mc \delta ds - \frac{e}{c} \int_1^2 \delta A_i dx^i - \frac{e}{c} \int_1^2 A_i \delta dx^i \quad (9.11)$$

Преобразуем каждый из трех интегралов в выражении (9.11).

Первый интеграл можно преобразовать следующим образом. Поскольку $ds = \sqrt{dx_i dx^i}$,

то

$$\delta ds = \delta \sqrt{dx_i dx^i} = \frac{1}{2} \frac{d \delta x_i dx^i + dx_i d \delta x^i}{\sqrt{dx_i dx^i}} = \frac{dx_i d \delta x^i}{ds} = u_i d \delta x^i$$

где $u_i = dx_i/ds$ - 4-скорость. Поэтому, интегрируя по частям, получим

$$\int_1^2 mc\delta ds = \int_1^2 mcu_i d\delta x^i = mcu_i \delta x^i \Big|_1^2 - \int_1^2 mc\delta x^i du_i = - \int_1^2 mc \frac{du_i}{ds} \delta x^i ds \quad (9.12)$$

В (9.12) мы учли, что вариация действия берется при заданных параметрах начальной (1) и конечной (2) точек в четырехмерном пространстве, $\delta x^i(1) = \delta x^i(2) = 0$.

Второй интеграл в (9.11) преобразуем, учитывая, что 4-потенциал есть заданная функция 4-координат,

$$\frac{e}{c} \int_1^2 \delta A_i dx^i = \frac{e}{c} \int_1^2 \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k dx^i = \frac{e}{c} \int_1^2 \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \delta x^k u^i ds = \frac{e}{c} \int_1^2 \frac{\partial A_k}{\partial x^i} u^k \delta x^i ds \quad (9.13)$$

Поскольку по повторяющимся индексам проводится суммирование, переобозначение i на k , а k на i , выполненное в последнем из равенств (9.13), не влияет на результат. Такое переобозначение индексов выполнено с таким расчетом, чтобы выделить во всех трех членах соотношения (9.11) величину δx^i как общий множитель.

Третий член в (9.11), как и первый, проинтегрируем по частям, учитывая, что $\delta x^i(1) = \delta x^i(2) = 0$,

$$\frac{e}{c} \int_1^2 A_i \delta dx^i = \frac{e}{c} \int_1^2 A_i d\delta x^i = -\frac{e}{c} \int_1^2 \delta x^i dA_i = -\frac{e}{c} \int_1^2 \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k \delta x^i = -\frac{e}{c} \int_1^2 \frac{\partial A_i}{\partial x^k} u^k \delta x^i ds \quad (9.14)$$

Собирая (9.12)-(9.14) вместе, представим соотношение (9.11) в виде

$$\delta S = \int_1^2 \left[mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right] \delta x^i ds \quad (9.15)$$

Согласно принципу наименьшего действия, истинная траектория определяется из условия $\delta S = 0$. Поскольку это условие должно выполняться при произвольной вариации δx^i , то из (9.15) следует, что

$$mc \frac{du_i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k = 0 \quad (9.16)$$

Полученное уравнение представляет собой четырехмерное уравнение движения заряженной частицы в электромагнитном поле. Уравнение (9.16) можно также записать в следующем виде:

$$mc \frac{du_i}{ds} = \frac{e}{c} F_{ik} u^k \quad (9.17)$$

где

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad (9.18)$$

антисимметричный 4-тензор второго ранга, который называют *тензором электромагнитного поля*. Компоненты тензора электромагнитного поля напрямую связаны с компонентами векторов напряженности электрического и магнитного полей. Чтобы найти эту связь в явном виде, подставим 4-потенциал $A_i = (\varphi, -\mathbf{A})$ в формулу (9.18) и сопоставим результаты вычислений по этой формуле с определениями векторов напряженности электрического и магнитного полей (7.19) и (7.20). В итоге получим

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & -H_z & H_y \\ -E_y & H_z & 0 & -H_x \\ -E_z & -H_y & H_x & 0 \end{pmatrix} \quad (9.19)$$

Определение (9.18) и явное выражение (9.19) относятся к ковариантным компонентам тензора электромагнитного поля. Контравариантные компоненты получаются по общему правилу путем поднятия и опускания индексов, соответственно, у 4-потенциала и 4-радиус-вектора. Явное выражение для 4-тензора F^{ik} будет отличаться от (9.19) только знаком перед компонентами вектора напряженности электромагнитного поля.

Уравнение (9.17) содержит в себе четыре отдельных уравнения, каждое из которых отвечает одному из четырех значений индекса i . Эти четыре уравнения не являются независимыми. В этом нетрудно убедиться, если умножить (9.17) на u^i . Тогда левая часть уравнения (9.17) обратится в нуль в силу того, что $\frac{d}{ds}u_i u^i = 0$, так как $u_i u^i = 1$. Правая часть уравнения (9.17) обратится в нуль как произведение антисимметричного тензора F_{ik} на симметричный $u^i u^k$.

Нетрудно убедиться непосредственным вычислением, что временная ($i = 0$) компонента уравнения (9.17) совпадает с уравнением (8.2). Имеем

$$mc \frac{du_0}{ds} = \frac{e}{c} F_{0k} u^k = \frac{e}{c^2} \mathbf{E} \frac{\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Поскольку $ds = c\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}dt$, то левая часть равна

$$mc \frac{du_0}{ds} = \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{c^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

В результате получаем (см. (8.2))

$$\frac{d}{dt} \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = e\mathbf{E}\mathbf{v}$$

Три пространственные ($i = 1, 2, 3$) компоненты уравнения (9.17) совпадают с соответствующими компонентами трехмерного уравнения движения (7.21). То, что четыре уравнения (9.17) не являются независимыми, отражает тот факт, что уравнение (8.2) есть следствие уравнения движения (7.21).

Лекция 10

10.1 Преобразование Лоренца для электромагнитного поля

Поскольку скалярный φ и векторный \mathbf{A} потенциалы являются компонентами 4-потенциала, $A^i = (\varphi, \mathbf{A})$, то при переходе от одной инерциальной системы к другой, они преобразуются как компоненты 4-вектора:

$$\begin{aligned}\varphi &= \frac{\varphi' + \frac{V}{c} A'_x}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, & A_x &= \frac{A'_x + \frac{V}{c} \varphi'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \\ A_y &= A'_y, & A_z &= A'_z\end{aligned}\tag{10.1}$$

Здесь, как и ранее, предполагаем, что система отсчета K' движется относительно системы отсчета K со скоростью V вдоль оси x .

Поскольку компоненты векторов напряженности электрического и магнитного полей являются компонентами 4-тензора электромагнитного поля, то при переходе от одной инерциальной системы к другой они преобразуются как компоненты антисимметричного 4-тензора второго ранга.

Учитывая, что компоненты тензора F_{ik} преобразуются как произведение двух компо-

нент 4-векторов, получим следующие соотношения. Для F^{01} имеем

$$F^{01} \sim A^0 B^1 = \frac{A^{0'} + \frac{V}{c} A^{1'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \frac{B^{1'} + \frac{V}{c} B^{0'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \sim \frac{F^{01'} + \frac{V}{c} F^{11'} + \frac{V}{c} F^{00'} + \frac{V^2}{c^2} F^{10'}}{1 - \frac{V^2}{c^2}} = F^{01'} \quad (10.2)$$

так как у антисимметричного тензора $F^{10'} = -F^{01'}$, а диагональные компоненты $F^{00'}$ и $F^{11'}$ равны нулю.

Из (10.2) следует, что

$$E_x = E'_x \quad (10.3)$$

Компоненты тензора F^{02} и F^{03} преобразуются как временная ($i = 0$) компонента 4-х вектора, поскольку компоненты 4-х вектора с $i = 2$ и $i = 3$ остаются неизменными. В связи с этим имеем

$$F^{02} = \frac{F^{02'} + \frac{V}{c} F^{12'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad F^{03} = \frac{F^{03'} + \frac{V}{c} F^{13'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (10.4)$$

и, как следствие равенств (10.4),

$$E_y = \frac{E'_y + \frac{V}{c} H'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad E_z = \frac{E'_z - \frac{V}{c} H'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (10.5)$$

Аналогичным образом можно показать, что

$$F^{23} = F^{23'}, \quad F^{12} = \frac{F^{12'} + \frac{V}{c} F^{02'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad F^{13} = \frac{F^{13'} + \frac{V}{c} F^{03'}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (10.6)$$

Следствием равенств (10.6) будут соотношения

$$H_x = H'_x, \quad H_y = \frac{H'_y - \frac{V}{c} E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad H_z = \frac{H'_z + \frac{V}{c} E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (10.7)$$

Формулы (10.3), (10.5) и (10.7) устанавливают правила преобразования напряженностей электрического и магнитного полей при переходе между инерциальными системами отсчета.

В нерелятивистском пределе, $V \ll c$, в формулах (10.5) и (10.7) знаменатель можно положить равным единице. Тогда формулы преобразования полей можно записать в следующем виде:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \frac{1}{c} [\mathbf{V}, \mathbf{H}'], \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}' + \frac{1}{c} [\mathbf{V}, \mathbf{E}'] \quad (10.8)$$

Рассмотрим снова тензор электромагнитного поля. Очевидно, что величина $F_{ik}F^{ik}$ — произведение ковариантного и контравариантного тензоров — представляет собой скаляр, то есть величину инвариантную относительно перехода от одной инерциальной системы отсчета к другой. Прямым вычислением можно убедиться, что

$$F_{ik}F^{ik} = 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2) \quad (10.9)$$

Таким образом, разность квадратов напряженностей электрического и магнитного полей остается неизменной при преобразовании Лоренца.

Существует еще одна комбинация, составленная из напряженностей \mathbf{E} и \mathbf{H} , которая также не меняется при переходах между инерциальными системами отсчета. Инвариантом оказывается скалярное произведение

$$\mathbf{E}\mathbf{H} \quad (10.10)$$

В этом легко убедиться, если воспользоваться формулами преобразования (10.3), (10.5) и (10.7).

10.2 Действие как функция координат

При формулировке принципа наименьшего действия мы рассматривали функционал действия S как интеграл, взятый вдоль траектории частицы между двумя заданными событиями, то есть между двумя заданными точками в четырехмерном пространстве. При варьировании действия сравнивались значения этого интеграла для различных траекторий, но проходящих через одни и те же начальную и конечную точки. Истинная траектория определялась из условия $\delta S = 0$.

Рассмотрим теперь интеграл действия с других позиций. Будем вычислять действие вдоль истинной траектории, которая соединяет заданную начальную точку с конечной

точкой, координаты которой будем рассматривать как переменные. Другими словами, будем рассматривать интеграл действия для истинных траекторий как функцию координат конечной точки. Тогда, повторяя все выкладки (9.1)-(9.14), но в предположении $\delta x^i(2) \neq 0$, получим

$$\delta S = \int_1^2 \left[mc \frac{du^i}{ds} - \frac{e}{c} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right] \delta x^i ds - m c u_i \delta x^i(2) - \frac{e}{c} A_i \delta x^i(2) \quad (10.11)$$

Интегральный член в (10.11) обращается в нуль для истинных траекторий, удовлетворяющих уравнению движения (9.16). Поэтому действие как функция координат конечной точки удовлетворяет соотношению

$$\delta S = - \left(m c u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \delta x^i \quad (10.12)$$

где $\delta x^i \equiv \delta x^i(2)$. Из (10.12) следует, что

$$-\frac{\partial S}{\partial x^i} = \left(m c u_i + \frac{e}{c} A_i \right) \quad (10.13)$$

Величина (10.13) представляет собой ковариантный 4-вектор (поднятием индекса можно получить соответствующий контравариантный 4-вектор). 4-вектор $-\frac{\partial S}{\partial x^i}$ (или $-\frac{\partial S}{\partial x_i}$) естественно называть 4-вектором обобщенного импульса частицы. Выпишем компоненты обобщенного импульса в явном виде. Для контравариантного 4-вектора, например, имеем

$$p^i = -\frac{\partial S}{\partial x_i} = \left(\frac{1}{c} \left(\frac{m c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + e \varphi \right), \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right) \quad (10.14)$$

Согласно (10.14) временная составляющая 4-вектора p^i с точностью до множителя $\frac{1}{c}$ совпадает с энергией заряда в электромагнитном поле, а пространственная составляющая совпадает с введенным ранее трехмерным обобщенным импульсом (7.6).

10.3 Калибровочная инвариантность

Как следует из полученных выше результатов, в уравнения движения (7.21) и (9.17) входят не сами потенциалы, а производные от потенциалов — напряженности электрического и

магнитного полей, \mathbf{E} и \mathbf{H} . Поскольку об электромагнитном поле можно судить по тому влиянию, которое оно оказывает на движение заряда, то необходимыми характеристиками поля являются напряженности \mathbf{E} и \mathbf{H} .

Возникает вопрос, насколько однозначно определены φ и \mathbf{A} при заданных значениях напряженности \mathbf{E} и \mathbf{H} . Иными словами, если заданное поле можно описать различными потенциалами, то насколько эти потенциалы отличаются друг от друга.

Ответить на этот вопрос проще всего, обратившись к тензору электромагнитного поля (9.18). Нетрудно видеть, что тензор электромагнитного поля не меняется, если 4-потенциал A_k заменить на

$$A'_k = A_k + \frac{\partial f}{\partial x^k} \quad (10.15)$$

где f — произвольная функция 4-радиус-вектора. Подставляя (10.15) в (9.18), получим

$$F'_{ik} = F_{ik} + \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x^k} \frac{\partial f}{\partial x^i} = F_{ik}$$

Преобразование (10.15) принято называть калибровочным (или градиентным), а инвариантность относительно этого преобразования, соответственно, калибровочной (или градиентной) инвариантностью.

При переходе от четырехмерных к обычным обозначениям, из (10.15) следует

$$\begin{aligned} \varphi' &= \varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t} \\ \mathbf{A}' &= \mathbf{A} - \text{grad } f \end{aligned} \quad (10.16)$$

Если подставить (10.16) в определения напряженностей электрического и магнитного полей, легко увидеть, что ни \mathbf{E} , ни \mathbf{H} не изменятся.

Неоднозначность потенциалов φ и \mathbf{A} дает возможность накладывать на них дополнительное — калибровочное — условие. Это дополнительное условие есть способ выбрать функцию f в (10.16). В частности, функцию f всегда можно выбрать так, чтобы скалярный потенциал был равен нулю.

Лекция 11

11.1 Объемная плотность заряда и тока. Четырехмерный ток

До сих пор мы рассматривали одну заряженную частицу, находящуюся в электромагнитном поле. В случае нескольких частиц функционал действия будет определяться суммой вкладов от отдельных частиц:

$$S = - \sum_a \int \left(m_a c ds + \frac{e_a}{c} A_i dx^i \right) \quad (11.1)$$

где индекс "a" нумерует частицы, а потенциал A_i берется в той точке четырехмерного пространства, в которой находится "a"-я частица.

Выражение (11.1) написано в предположении, что частицы точечные. Во многих случаях, однако, оказывается удобным описывать заряды не как точечные, а как распределенные в пространстве непрерывным образом.

Если считать заряд распределенным в некоторой области, то можно ввести объемную плотность заряда $\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$. Тогда $\rho(\mathbf{r}, t)dV$ есть заряд, расположенный в точке \mathbf{r} объема dV в момент времени t .

Перейти математически от точечных зарядов к объемной плотности $\rho(\mathbf{r}, t)$ можно с помощью δ -функции.

Рассмотрим систему расположенных в точках \mathbf{r}_a зарядов e_a . Радиус-вектор \mathbf{r}_a , который определяет положение "a"-ой заряженной частицы, в общем случае есть функция

времени, $\mathbf{r}_a = \mathbf{r}_a(t)$. Для такой системы плотность ρ равна нулю повсюду, кроме точек, где расположены заряды, а интеграл $\int_{\Delta V} \rho dV$ равен сумме зарядов внутри объема ΔV . Таким требованиям удовлетворяет выражение

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \quad (11.2)$$

Объемная плотность заряда ρ не является скаляром, она меняется при переходе от одной системы отсчета к другой. Скаляром является по своему определению заряд, то есть ρdV . Тогда величина $\rho dV dx^i$ представляет собой 4-вектор. Запишем равенство

$$\rho dV dx^i = \rho \frac{dx^i}{dt} dt dV \quad (11.3)$$

Величина $dt dV$ — с точностью до множителя c — элемент объема в четырехмерном пространстве. Она не меняется при преобразовании Лоренца,

$$d\Omega = d(ct) dV = J d\Omega' = d(ct') dV' \quad (11.4)$$

где J — якобиан преобразования; J есть определитель преобразования Лоренца, $J = 1$.

Таким образом, приходим к выводу, что $\rho \frac{dx^i}{dt}$ есть 4-вектор, который называют 4-вектором плотности тока

$$j^i = \rho \frac{dx^i}{dt} \quad (11.5)$$

Нулевая — временная — компонента 4-тока равна $c\rho$, а пространственная составляющая — $\mathbf{v}\rho$. Поэтому

$$j^i = (c\rho, \mathbf{v}\rho) \quad (11.6)$$

Используя 4-вектор плотности тока, можно преобразовать в действии (11.1) член, отвечающий за взаимодействие заряда с полем. Вместо суммы по зарядам воспользуемся интегрированием по объему с плотностью (11.2). Тогда получим

$$\sum_a \int \frac{e_a}{c} A_i dx^i = \frac{1}{c} \int \rho A_i dx^i dV \quad (11.7)$$

В справедливости (11.7) легко убедиться непосредственной подстановкой выражения (11.2) в правую часть равенства (11.7). Преобразуем полученный интеграл

$$\frac{1}{c} \int \rho A_i dx^i dV = \frac{1}{c^2} \int A_i \rho \frac{dx^i}{dt} dt dV = \frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega \quad (11.8)$$

В результате представим действие (11.1) в виде

$$S = - \sum_a \int m_a c ds - \frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega \quad (11.9)$$

11.2 Уравнение непрерывности

Рассмотрим выражение для ρ в виде суммы δ -функций (11.2). Тогда для плотности тока \mathbf{j} имеем

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)\rho(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \quad (11.10)$$

где $\mathbf{v}_a(t)$ — скорость " a "-го заряда. Вычисляя производную $\frac{\partial \rho}{\partial t}$, получим цепочку равенств

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) = \sum_a e_a \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_a} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \right] \frac{d\mathbf{r}_a}{dt} \\ &= - \sum_a e_a \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \right] \mathbf{v}_a(t) = -\text{div} \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) = -\text{div} \mathbf{j} \end{aligned}$$

Таким образом, приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \text{div} \mathbf{j} = 0 \quad (11.11)$$

В четырехмерной форме это уравнение выглядит так

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \quad (11.12)$$

то есть четырехмерная дивергенция 4-вектора плотности тока равна нулю.

Уравнение (11.11) принято называть уравнением непрерывности. По своему физическому смыслу оно отражает сохранение заряда. Поясним это с помощью интегральных соотношений баланса.

Рассмотрим некоторый объем ΔV . Изменение заряда этого объема в единицу времени есть

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} \rho dV \quad (11.13)$$

Изменение заряда (11.13) обусловлено перемещением заряда через границу объема ΔV .

Плотность потока заряда через единицу поверхности, ограничивающей объем ΔV , есть

$\mathbf{v}\rho$, где \mathbf{v} — скорость заряда в заданной точке поверхности в соответствующий момент времени. Заряд, вытекающий в единицу времени из всего объема ΔV , определяется интегралом

$$\oint \mathbf{v}\rho d\mathbf{f} \quad (11.14)$$

где интегрирование ведется по всей поверхности, ограничивающей объем ΔV , вектор $d\mathbf{f} = \mathbf{n} \cdot d\mathbf{f}$ направлен по внешней нормали \mathbf{n} к поверхности.

Учитывая, что выходящий через поверхность заряд приводит к уменьшению полного заряда в объеме ΔV , пишем соотношение баланса

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} \rho dV = - \oint \mathbf{v}\rho d\mathbf{f} \quad (11.15)$$

Уравнение (11.15) выражает закон сохранения заряда и называется уравнением непрерывности в интегральной форме. Из этого уравнения нетрудно получить и дифференциальное уравнение (11.11).

Используя теорему Остроградского-Гаусса можно записать

$$\oint \mathbf{v}\rho d\mathbf{f} = \int_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{v}\rho dV,$$

тогда из (11.15) следует

$$\int_{\Delta V} \left(\frac{\partial}{\partial t} \rho + \operatorname{div} \mathbf{v}\rho \right) dV = 0$$

Поскольку это равенство выполняется для любого ΔV , то подинтегральное выражение должно быть равно нулю. В итоге приходим к уравнению непрерывности (11.11).

11.3 Действие для поля в отсутствие зарядов

До сих пор мы интересовались движением зарядов в заданном электромагнитном поле. Именно для этого случая записаны функционалы действия (11.1) и (11.9).

Теперь рассмотрим вклад в действие, который определяется только самим электромагнитным полем, то есть действие для поля в ситуации, когда заряды отсутствуют. В

той постановке задачи, которую мы обсуждали до сих пор, этот вклад не был важен. Мы искали траекторию движения заряда, а поле предполагалось заданным. Однако, знание этого вклада в действие необходимо, если мы ищем само поле.

Искомый — полевой — вклад в действие должен удовлетворять ряду условий.

Из опыта следует, что электромагнитное поле подчиняется принципу суперпозиции. Напряженность поля, создаваемого системой источников (например, зарядов), есть векторная сумма напряженностей от каждого отдельного источника. Известно, что принцип суперпозиции действует для линейных уравнений — сумма решений также является решением. Поэтому уравнения для поля, которые мы предполагаем вывести, должны быть линейными.

Чтобы получить линейные относительно напряженности поля уравнения, соответствующий вклад в действие должен быть пропорционален квадрату напряженности. Тогда после варьирования напряженности поля мы получим в итоге линейные уравнения.

Учитывая также, что действие должно быть скаляром, можно заключить, что полевой вклад в действие должен быть пропорционален величине

$$\int F_{ik}F^{ik}d\Omega \quad (11.16)$$

где интеграл по координатам вычисляется по всему пространству, а по времени — от начального (t_1) до конечного (t_2) моментов времени.

Знак перед вкладом (11.16) должен быть отрицательным. Так как $F_{ik}F^{ik} = 2(\mathbf{H}^2 - \mathbf{E}^2)$ (см. (10.9)), то интеграл (11.16) будет содержать член $-(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t})^2$. Быстрым изменением векторного потенциала со временем вклад (11.16) можно было бы сделать отрицательным и сколь угодно большим по абсолютной величине. В результате вклад (11.16) не имел бы минимума, необходимого для принципа наименьшего действия.

Численный коэффициент перед (11.16) определяется выбором системы единиц (в дальнейшем используется гауссова система единиц).

В итоге, выражение для функционала действия, которое описывает электромагнитное поле и движущиеся в нем частицы, можно представить в виде

$$S = - \sum_a \int m_a c ds - \frac{1}{c^2} \int A_i j^i d\Omega - \frac{1}{16\pi c} \int F_{ik}F^{ik}d\Omega \quad (11.17)$$

Лекция 12

12.1 Уравнения Максвелла

Из определения напряженностей электрического и магнитного полей

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ \mathbf{H} &= \text{rot } \mathbf{A}\end{aligned}\tag{12.1}$$

можно получить уравнения относительно только \mathbf{E} и \mathbf{H} . Вычисляя $\text{rot } \mathbf{E}$, получим

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\text{rot grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

так как $\text{rot grad } \varphi = 0$. Таким образом,

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\tag{12.2}$$

Поскольку дивергенция ротора векторной функции есть нуль, то из (12.1) следует

$$\text{div } \mathbf{H} = 0\tag{12.3}$$

Уравнения (12.2), (12.3) представляют собой два первых *уравнения Максвелла*.

Два других уравнения, которые определяют электромагнитное поле по заданным объемным плотностям заряда и тока, выведем с помощью принципа наименьшего действия. Искомые уравнения получаются из условия $\delta S = 0$ при варьировании входящих в (11.17) величин, которые характеризуют поле. Такими величинами в (11.17) являются 4-потенциалы.

При варьировании предполагаем, что в начальный и конечный моменты времени значения 4-потенциала заданы. При интегрировании по объему считаем, что поле на бесконечности отсутствует.

Первый член в (11.17) вообще не дает вклад в δS , а второй и третий члены приводят к выражению

$$\delta S = -\frac{1}{c^2} \int j^i \delta A_i d\Omega - \frac{1}{8\pi c} \int F^{ik} \delta F_{ik} d\Omega \quad (12.4)$$

Преобразуем (12.4), подставляя δF_{ik} в явном виде,

$$\begin{aligned} \delta S &= -\frac{1}{c^2} \int j^i \delta A_i d\Omega - \frac{1}{8\pi c} \int F^{ik} \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_k - \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i \right) d\Omega \\ &= -\frac{1}{c^2} \int j^i \delta A_i d\Omega + \frac{1}{4\pi c} \int F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i d\Omega \end{aligned} \quad (12.5)$$

где мы воспользовались равенствами

$$F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \delta A_k \equiv F^{ki} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i = -F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i$$

Интегрируя второй член в (12.5) по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi c} \int F^{ik} \frac{\partial}{\partial x^k} \delta A_i d\Omega &= \frac{1}{4\pi c} \int F^{i0} \delta A_i \Big|_{t_1}^{t_2} dx dy dz + \\ &\left(\frac{1}{4\pi c} \int F^{i1} \delta A_i \Big|_{-\infty}^{+\infty} c dt dy dz + \dots \right) - \frac{1}{4\pi c} \int \left(\frac{\partial}{\partial x^k} F^{ik} \right) \delta A_i d\Omega \end{aligned} \quad (12.6)$$

В (12.6) все члены, кроме последнего, обращаются в нуль. На пределах интегрирования по времени равна нулю вариация 4-потенциала, $\delta A_i(t_1) = \delta A_i(t_2) = 0$. В соответствии с принципом наименьшего действия, мы считаем, что 4-потенциал в начальный и конечный моменты времени задан. Пределами интегрирования по координатам являются $\pm\infty$, где поле исчезает. Подставляя (12.6) в (12.5), приходим к выражению

$$\delta S = -\frac{1}{c^2} \int j^i \delta A_i d\Omega - \frac{1}{4\pi c} \int \left(\frac{\partial}{\partial x^k} F^{ik} \right) \delta A_i d\Omega \quad (12.7)$$

Приравнявая δS нулю и учитывая произвольное значение вариации δA_i , получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x^k} F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} j^i \quad (12.8)$$

Уравнение (12.8) можно рассматривать как уравнение, которое определяет поле (точнее, напряженность поля) по заданному 4-вектору плотности тока (или объемным плотностям заряда и тока).

Нулевая — временная — компонента уравнения (12.8) сразу дает

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (12.9)$$

Пространственная ($i = 1, 2, 3$) составляющая уравнения (12.8) выглядит следующим образом. Для $i = 1$ из уравнения (12.8) следует

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} F^{10} + \frac{\partial}{\partial y} F^{12} + \frac{\partial}{\partial z} F^{13} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_x - \frac{\partial}{\partial y} H_z + \frac{\partial}{\partial z} H_y = -\frac{4\pi}{c} j_x$$

или

$$(\operatorname{rot} \mathbf{H})_x = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} E_x + \frac{4\pi}{c} j_x$$

Такой же вид будут иметь уравнения для $i = 2, 3$. Объединяя их, находим

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (12.10)$$

Уравнения (12.9), (12.10) вместе с установленными ранее уравнениями (12.2) и (12.3) представляют собой четыре *уравнения Максвелла*. Они являются *основными уравнениями электродинамики*.

Уравнения Максвелла можно также записать в интегральной форме.

Используя теорему Стокса, преобразуем левую часть уравнения (12.2). Имеем

$$\int \operatorname{rot} \mathbf{E} d\mathbf{f} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} \quad (12.11)$$

где левая часть равенства есть интеграл по поверхности, а правая часть — интеграл по замкнутому контуру, огибающему эту поверхность. Таким образом, из (12.2) следует

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} d\mathbf{f} \quad (12.12)$$

то есть циркуляция электрического поля по контуру определяется производной по времени от потока магнитного поля через поверхность внутри контура.

Интегрируя (12.3) по некоторому объему ΔV и используя теорему Остроградского-Гаусса, получим

$$\int_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{H} dV = \oint \mathbf{H} d\mathbf{f} = 0 \quad (12.13)$$

где второй интеграл вычисляется по замкнутой поверхности, охватывающей объем ΔV . Согласно (12.13), поток вектора напряженности магнитного поля через замкнутую поверхность равен нулю.

Если проинтегрировать уравнение (12.9) по объему ΔV

$$\int_{\Delta V} \operatorname{div} \mathbf{E} dV = 4\pi \int_{\Delta V} \rho dV,$$

то, воспользовавшись теоремой Остроградского-Гаусса, приходим к равенству

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{f} = 4\pi \int_{\Delta V} \rho dV \quad (12.14)$$

Согласно (12.14), поток вектора напряженности электрического поля через поверхность, ограничивающую некоторый объем, пропорционален заряду, находящемуся в этом объеме.

Интегрируя уравнение (12.10) по ограниченной контуром поверхности и используя теорему Стокса, получим

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \left(\mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right) d\mathbf{f} \quad (12.15)$$

Это равенство гласит, что циркуляция магнитного поля по замкнутому контуру пропорциональна току, протекающему через поверхность внутри контура. Величину $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ называют током смещения.

Из четырехмерного уравнения (12.8) и уравнений Максвелла (12.9) и (12.10) нетрудно вывести уравнение непрерывности (в форме (11.11) или (11.12)).

В четырехмерном виде уравнение непрерывности сразу следует из (12.8). Дифференцируя (12.8), получим

$$\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} F^{ik} = -\frac{4\pi}{c} \frac{\partial}{\partial x^i} j^i$$

Левая часть этого равенства равна нулю как произведение симметричного тензора на антисимметричный. Отсюда сразу следует уравнение (11.12).

Если взять дивергенцию от уравнения (12.10) и учесть, что дивергенция ротора векторной функции есть нуль, получим

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} + \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

Заменяя $\operatorname{div} \mathbf{E}$ на $4\pi\rho$ (см. уравнение (12.9)), получим уравнение непрерывности в форме (11.11).

12.2 Плотность и плотность потока энергии электромагнитного поля

Рассмотрим величину

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) = \frac{1}{c} \mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c} \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

Производные по времени от напряженностей электрического и магнитного полей выразим с помощью уравнений Максвелла (12.2) и (12.10). Тогда получим

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \mathbf{E} - (\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H}) \quad (12.16)$$

Комбинацию в круглых скобках в правой части (12.16) преобразуем следующим образом. Запишем это выражение через антисимметричный тензор $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= H_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial r_\beta} E_\gamma - E_\alpha \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial r_\beta} H_\gamma = \\ &= \varepsilon_{\beta\gamma\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial r_\beta} E_\gamma \right) H_\alpha + \varepsilon_{\beta\gamma\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial r_\beta} H_\alpha \right) E_\gamma \end{aligned}$$

где во втором члене мы провели переобозначение, α заменили на γ , а γ — на α , и переставили соответствующим образом индексы у тензора $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Теперь получим

$$\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} - \mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial}{\partial r_\beta} \varepsilon_{\beta\gamma\alpha} E_\gamma H_\alpha = \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}]$$

Подставляя полученный результат в равенство (12.16), приходим к соотношению

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2) = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \mathbf{E} - \operatorname{div} [\mathbf{E}\mathbf{H}] \quad (12.17)$$

Проинтегрируем равенство (12.17) по некоторому объему ΔV и преобразуем вклад от последнего члена с помощью теоремы Остроградского-Гаусса. Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} dV = - \int_{\Delta V} \mathbf{j} \mathbf{E} dV - \oint \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}] d\mathbf{f} \quad (12.18)$$

Если распространить интегрирование на все пространство, то интеграл по поверхности обратится в нуль (предполагаем, что на бесконечности электромагнитное поле отсутствует). Оставшийся член в правой части (12.18) преобразуем, используя выражение для плотности тока (11.10),

$$\int \mathbf{j} \mathbf{E} dV = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \mathbf{E}(\mathbf{r}_a(t), t) = \frac{d}{dt} \sum_a \varepsilon_a$$

где $\varepsilon_a = \frac{m_a c^2}{\sqrt{1 - \frac{v_a^2}{c^2}}}$.

В результате получим

$$\frac{d}{dt} \left(\int \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} dV + \sum_a \varepsilon_a \right) = 0 \quad (12.19)$$

то есть для системы, состоящей из электромагнитного поля и частиц, величина, стоящая в скобках, сохраняется. Поскольку вклад от частиц представляет собой их суммарную энергию (кинетическую и энергию покоя), то полевой вклад в (12.19) естественно считать энергией электромагнитного поля. Поэтому величина

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} \quad (12.20)$$

представляет собой плотность энергии электромагнитного поля.

Вернемся к соотношению (12.18) и напомним его в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{\Delta V} W dV + \sum_a \varepsilon_a \right) = - \oint \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}] d\mathbf{f}$$

В левой части этого равенства стоит изменение полной энергии поля и частиц в объеме ΔV в единицу времени. Поэтому интеграл в правой части есть поток энергии поля через поверхность, ограничивающую объем ΔV . Вектор

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E} \mathbf{H}] \quad (12.21)$$

представляет собой плотность потока энергии поля. Вектор (12.21) называют вектором Пойнтинга.

Лекция 13

13.1 Постоянное электрическое поле

Рассмотрим ситуацию, когда заряды покоятся, и электромагнитное поле не зависит от времени. Тогда уравнения Максвелла принимают вид

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (13.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 \quad (13.2)$$

Магнитное поле отсутствует, $\mathbf{H} = 0$. Это случай электростатики.

Электрическое поле можно выразить только через скалярный потенциал

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \quad (13.3)$$

Тогда уравнение (13.2) удовлетворяется автоматически, а из уравнения (13.1) получим

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \quad (13.4)$$

Это уравнение называется уравнением Пуассона. В отсутствие плотности заряда оно сводится к уравнению Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \quad (13.5)$$

Найдем поле, создаваемое точечным зарядом. Для этого воспользуемся уравнением (13.1), записанным в интегральной форме (см. (12.14)). Из симметрии задачи ясно, что напряженность электрического поля будет направлена вдоль радиус-вектора, соединяющего точку

наблюдения и заряд. Если мы хотим определить электрическое поле в точке \mathbf{r} , а заряд расположен в точке \mathbf{r}_0 , то \mathbf{E} будет направлено вдоль вектора $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$. Абсолютная величина напряженности на одинаковом удалении от заряда должна быть одной и той же, поэтому она может зависеть только от $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$. Напряженность электрического поля \mathbf{E} следует искать в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = E(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (13.6)$$

где $E(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$ — неизвестная пока функция. Подставим выражение (13.6) в уравнение (12.14) и проинтегрируем по сферической поверхности радиусом $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$ с центром в точке \mathbf{r}_0 . Для левой части (12.14) получим

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{f} = \oint E(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} d\mathbf{f} = 4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^2 E(|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|) \quad (13.7)$$

Стоящий в правой части (12.14) интеграл по объему равен

$$4\pi \int \rho dV = 4\pi e \quad (13.8)$$

Приравнявая (13.7) и (13.8), получим закон Кулона

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = e \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (13.9)$$

Согласно (13.9), абсолютная величина напряженности электрического поля убывает как квадрат расстояния до заряда.

Зная напряженность электрического поля, нетрудно найти выражение для потенциала φ . Интегрируя соотношение (13.3) с учетом (13.9), находим

$$\varphi = \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} + \varphi_0 \quad (13.10)$$

где φ_0 — постоянная интегрирования. Значение φ_0 удобно выбрать равным нулю, чтобы на бесконечности обращались в нуль не только напряженность поля, но и потенциал.

Из полученного результата следует полезная математическая формула. Поскольку потенциал (13.10), очевидно, является решением уравнения Пуассона для точечного заряда, то подставляя в это уравнение потенциал (13.10) и выражение для объемной плотности заряда

$$\rho(\mathbf{r}) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

получим искомую формулу

$$\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (13.11)$$

До сих пор мы рассматривали один заряд. Если имеется система зарядов, то в силу линейности уравнений Максвелла, т.е. в силу принципа суперпозиции, напряженность результирующего поля будет определяться суммой полей от каждого заряда. Такое же утверждение справедливо и для потенциала системы зарядов,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_a \frac{e_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} \quad (13.12)$$

где e_a — заряд a -ой частицы, \mathbf{r}_a — радиус-вектор, определяющий ее положение в пространстве. Если ввести объемную плотность заряда

$$\rho(\mathbf{r}) = \sum_a e_a \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a) \quad (13.13)$$

то выражение (13.12) можно записать в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (13.14)$$

Формула (13.14) есть решение уравнения Пуассона (13.4). Она остается справедливой для любой объемной плотности заряда $\rho(\mathbf{r})$. В этом легко убедиться, если подставить (13.14) в уравнение (13.4) и воспользоваться математической формулой (13.11). Имеем

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}) = \int \left(\Delta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \rho(\mathbf{r}') dV' = \int (-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \rho(\mathbf{r}') dV' = -4\pi\rho(\mathbf{r})$$

13.2 Энергия системы зарядов

Система заряженных частиц создает электрическое поле, энергию которого мы будем отождествлять с электростатической энергией зарядов. Поскольку $\mathbf{H} = 0$, то энергия системы зарядов равна

$$U = \int \frac{\mathbf{E}^2(\mathbf{r})}{8\pi} dV \quad (13.15)$$

где \mathbf{E} — напряженность, создаваемая зарядами электрического поля, интеграл вычисляется по всему пространству.

Преобразуем (13.15), используя (13.3) и (13.1),

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{E}(\mathbf{r}) (-\text{grad } \varphi(\mathbf{r})) dV = \\
 &= -\frac{1}{8\pi} \int \text{div} (\mathbf{E}(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r})) dV + \frac{1}{8\pi} \int \varphi(\mathbf{r}) \text{div} \mathbf{E}(\mathbf{r}) dV = \\
 &= -\frac{1}{8\pi} \oint \mathbf{E}(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) d\mathbf{f} + \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) dV
 \end{aligned}$$

Первый интеграл берется по поверхности, охватывающей объем интегрирования, в данном случае — по бесконечно удаленной поверхности. На бесконечности поле отсутствует, поэтому первый интеграл равен нулю. В итоге получаем

$$U = \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) dV \quad (13.16)$$

Если подставить сюда потенциал $\varphi(\mathbf{r})$ в представлении (13.14), то формулу (13.16) можно записать в виде

$$U = \frac{1}{2} \int \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV'$$

Из (13.16) нетрудно вывести соотношение для энергии взаимодействия двух систем. Подставляя в (13.16) ρ и φ в виде $\rho = \rho_1 + \rho_2$ и $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$, находим $U = U_1 + U_2 + U_{12}$, где

$$U_{12} = \int \rho_1(\mathbf{r})\varphi_2(\mathbf{r}) dV = \int \rho_2(\mathbf{r})\varphi_1(\mathbf{r}) dV = \int \int \frac{\rho_1(\mathbf{r})\rho_2(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV' \quad (13.17)$$

Для системы точечных зарядов, когда для $\rho(\mathbf{r})$ можно записать выражение (13.13), интегрирование в (13.16) входящих в (13.13) δ -функций приводит к следующему результату:

$$U = \frac{1}{2} \sum_a e_a \varphi(\mathbf{r}_a)$$

Подставляя сюда $\varphi(\mathbf{r}_a)$ из (13.12), получим

$$U = \frac{1}{2} \sum_a \sum_b \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} \quad (13.18)$$

Сумму (13.18) можно разбить на две части. Одна часть содержит слагаемые с $a \neq b$ и зависит от взаимного расположения заряженных частиц. Другая часть суммы, состоящая из слагаемых с $a = b$, представляет собой сумму бесконечно больших слагаемых.

Каждое из бесконечно больших слагаемых есть энергия заряда в своем собственном поле. К бесконечности приводит предположение о точечности частицы. Это означает, что электродинамика на малых расстояниях не работает (теория становится внутренне противоречивой). Оценить расстояния, на которых теория теряет применимость, можно с помощью размерных соображений. Единственная величина, имеющая размерность энергии, например, для электрона, — это энергия покоя $m_e c^2$. Поэтому пространственный масштаб, на котором электродинамика теряет применимость, можно оценить из условия, когда электростатическая энергия становится порядка энергии покоя. В результате получаем $r \sim \frac{e^2}{m_e c^2}$ (величину $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$ принято называть классическим радиусом электрона). Полученный масштаб определяет границы применимости электродинамики на малых расстояниях. В действительности, однако, классическая электродинамика теряет справедливость на масштабах, существенно превышающих найденный. Происходит это из-за квантовых явлений.

В дальнейшем, говоря об электростатической энергии зарядов, будем интересоваться только частью, зависящей от положения зарядов в пространстве, т.е. суммой по $a \neq b$,

$$U = \frac{1}{2} \sum_{a \neq b} \sum_b \frac{e_a e_b}{|\mathbf{r}_a - \mathbf{r}_b|} \quad (13.19)$$

13.3 Потенциал системы зарядов на далеких расстояниях

Рассмотрим потенциал (3.3) на расстояниях, намного превышающих размер системы зарядов.

Будем считать, что система зарядов находится в ограниченной области пространства (рис. 13.1). Характерный линейный размер этой области L . Положение системы как целого определим радиус-вектором \mathbf{R} (\mathbf{R} — радиус-вектор некоторой точки O' внутри системы зарядов). Тогда радиус-вектор заряда e_a представим в виде

$$\mathbf{r}_a = \mathbf{R} + \mathbf{R}_a$$

где \mathbf{R}_a определяет положение заряда относительно O' .

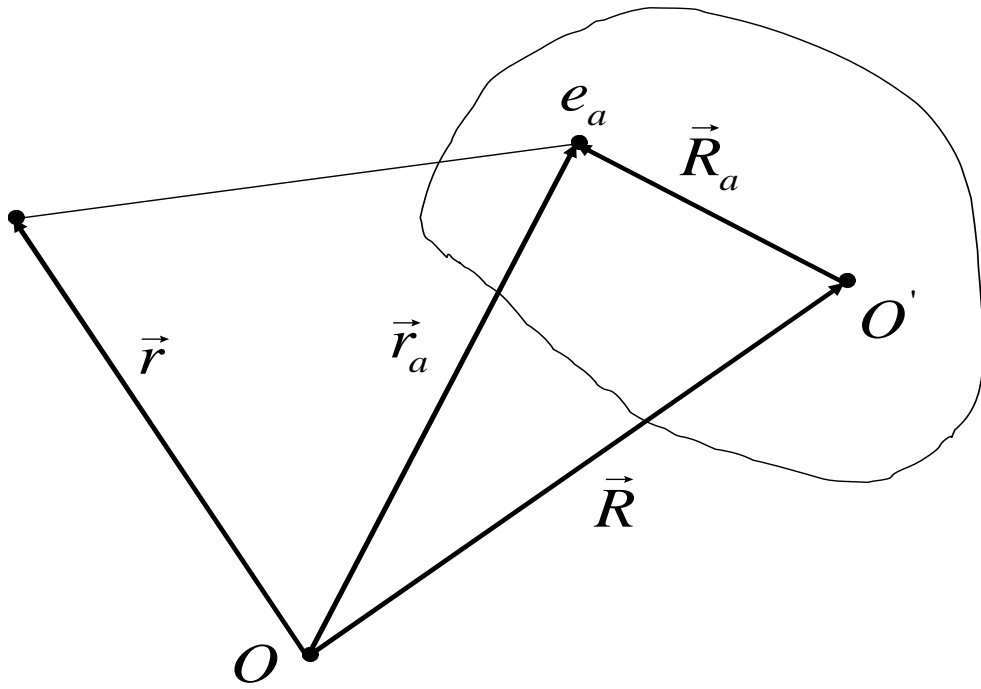


Рис. 13.1:

Выражение (3.3) для потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ запишем через \mathbf{R} и \mathbf{R}_a ,

$$\varphi(\mathbf{r}) = \sum_a \frac{e_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a|} = \sum_a \frac{e_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{R} - \mathbf{R}_a|} \quad (13.20)$$

Расстояние от системы зарядов как целого до точки наблюдения есть $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$. Поэтому под большими расстояниями следует понимать

$$|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \gg L > |\mathbf{R}_a|$$

Таким образом, для нахождения потенциала $\varphi(\mathbf{r})$ на далеких расстояниях требуется разложить выражение (13.20) в ряд по относительно малой величине \mathbf{R}_a .

Первые члены разложения имеют вид

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + \dots = \\ &= \frac{\sum_a e_a}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} - \left(\sum_a e_a \mathbf{R}_a \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_a e_a (\mathbf{R}_a)_\alpha (\mathbf{R}_a)_\beta \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right)_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right)_\beta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} + \dots \end{aligned} \quad (13.21)$$

Первый член в разложении (13.21) определяется полным зарядом системы и убывает обратно пропорционально расстоянию. Второй и третий члены убывают, соответственно, как $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2}$ и $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}$ и определяются, по сравнению с полным зарядом, более сложными характеристиками распределения заряда в системе.

Лекция 14

14.1 Дипольный момент. Электрическое поле диполя

Рассмотрим отдельно второе слагаемое в разложении потенциала (13.21),

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = -\mathbf{d} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} = \frac{\mathbf{d} (\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \quad (14.1)$$

где

$$\mathbf{d} = \sum_a e_a \mathbf{R}_a \quad (14.2)$$

Величину \mathbf{d} называют дипольным моментом системы зарядов, а выражение (14.1) — дипольным вкладом в разложение потенциала на далеких расстояниях. Если сумма зарядов системы $\sum_a e_a$ равна нулю, то дипольный вклад (14.1) оказывается главным.

Обсудим свойства дипольного момента. Если полный заряд системы равен нулю, то дипольный момент является характеристикой системы — он не зависит от выбора системы координат. Смещение начала координат на любой вектор \mathbf{R}_0 не меняет значение дипольного момента,

$$\mathbf{d} = \sum_a e_a (\mathbf{R}_a + \mathbf{R}_0) = \sum_a e_a \mathbf{R}_a$$

Если система состоит из двух одинаковых, но противоположных по знаку зарядов, то

$$\mathbf{d} = e\mathbf{R}_+ + (-e)\mathbf{R}_- = e(\mathbf{R}_+ - \mathbf{R}_-) \quad (14.3)$$

Аналогичное соотношение можно написать и в случае, когда система состоит из большого числа разноименно заряженных частиц. В этом случае "e" есть суммарный заряд

одного знака, а \mathbf{R}_+ и \mathbf{R}_- представляют собой радиус-векторы "центров" положительных и отрицательных зарядов.

Напряженность электрического поля диполя определяется выражением

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \frac{\mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} = \frac{3(\mathbf{d}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \quad (14.4)$$

где $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r} - \mathbf{R}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}$ — единичный вектор, направленный от диполя в точку наблюдения. Поясним вывод формулы (14.4).

Потенциал $\varphi^{(1)}(\mathbf{r})$ запишем в виде (см. (14.1))

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = -d_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \quad (14.5)$$

Поэтому электрическое поле есть

$$(E)_\alpha = \frac{\partial}{\partial r_\alpha} d_\beta \frac{\partial}{\partial r_\beta} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} = d_\beta \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \frac{\partial}{\partial r_\beta} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \quad (14.6)$$

Выполняя дифференцирование, получим

$$\frac{\partial}{\partial r_\alpha} \frac{\partial}{\partial r_\beta} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} = \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{R})_\alpha (\mathbf{r} - \mathbf{R})_\beta}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \quad (14.7)$$

После подстановки (14.7) в (14.6), приходим к формуле (14.4).

Проанализируем результат (14.4). Если направление \mathbf{d} выбрать за ось z , то в цилиндрической и сферической системах координат поле не будет зависеть от азимутального угла φ . В цилиндрической системе координат имеем

$$E_r = \frac{3d \cos \theta \sin \theta}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}, \quad E_z = d \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \quad (14.8)$$

где θ — угол между \mathbf{d} и \mathbf{n} . В сферической системе координат компоненты поля равны

$$E_r = \mathbf{E}\mathbf{n} = \frac{2d \cos \theta}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}, \quad E_\theta = \frac{d \sin \theta}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \quad (14.9)$$

Таким образом, если полный заряд системы равен нулю, то на больших расстояниях потенциал системы убывает как $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2}$, а напряженность электрического поля — как $\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}$. Пространственная зависимость напряженности поля обладает азимутальной симметрией относительно направления дипольного момента.

14.2 Квадрупольный вклад в потенциал на далеких расстояниях

Третий член в разложении потенциала (13.21)

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_a e_a (\mathbf{R}_a)_\alpha (\mathbf{R}_a)_\beta \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \frac{\partial}{\partial r_\beta} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \quad (14.10)$$

называют квадрупольным вкладом в потенциал. Этот вклад оказывается ведущим, если полный заряд и дипольный момент системы зарядов равны нулю.

Выражение (14.10) можно переписать в следующем виде:

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_a e_a \left((\mathbf{R}_a)_\alpha (\mathbf{R}_a)_\beta - \frac{1}{3} \delta_{\alpha\beta} \mathbf{R}_a^2 \right) \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \frac{\partial}{\partial r_\beta} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \quad (14.11)$$

Добавление пропорционального $\delta_{\alpha\beta}$ слагаемого не меняет значение $\varphi^{(2)}(\mathbf{r})$. Воспользовавшись формулой (14.7), имеем

$$\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \frac{\partial}{\partial r_\beta} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} = \delta_{\alpha\beta} \left(\frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{R})_\alpha (\mathbf{r} - \mathbf{R})_\beta}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \right) = 0$$

Этот результат справедлив при $\mathbf{r} - \mathbf{R} \neq 0$ (в точке $\mathbf{r} = \mathbf{R}$ он нарушается, см. (13.11)).

Формулу (14.11) принято записывать в виде

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{6} \mathcal{D}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \frac{\partial}{\partial r_\beta} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \quad (14.12)$$

или, после вычисления производных (см. (14.7)), в виде

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \mathcal{D}_{\alpha\beta} n_\alpha n_\beta \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \quad (14.13)$$

где

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \sum_a e_a \left(3(\mathbf{R}_a)_\alpha (\mathbf{R}_a)_\beta - \mathbf{R}_a^2 \delta_{\alpha\beta} \right) \quad (14.14)$$

тензор квадрупольного момента системы зарядов. Если ввести объемную плотность заряда, то (14.14) можно переписать следующим образом:

$$\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \int \rho(\mathbf{R}') \left(3(\mathbf{R}')_\alpha (\mathbf{R}')_\beta - \mathbf{R}'^2 \delta_{\alpha\beta} \right) dV'$$

Согласно (14.14), $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ является симметричным тензором, $\mathcal{D}_{\alpha\beta} = \mathcal{D}_{\beta\alpha}$, с равным нулю следом (суммой диагональных элементов), $\mathcal{D}_{\alpha\alpha} = 0$.

Поскольку $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ является симметричным тензором, то он может быть диагонализирован, то есть приведен к главным осям. След тензора $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ равен нулю, $\mathcal{D}_{xx} + \mathcal{D}_{yy} + \mathcal{D}_{zz} = 0$. Поэтому в общем случае только два из трех главных значений оказываются независимыми.

14.3 Энергия системы зарядов во внешнем поле

Пусть система заряженных частиц находится во внешнем электрическом поле (собственное поле будем считать пренебрежимо малым по сравнению с внешним). Потенциал внешнего электрического поля обозначим $\varphi(\mathbf{r})$. Тогда энергия каждого из зарядов во внешнем поле будет равна $e_a\varphi(\mathbf{r}_a)$, где \mathbf{r}_a радиус-вектор заряда e_a . Полная энергия системы равна (см. также (13.17))

$$U = \sum_a e_a\varphi(\mathbf{r}_a) \quad (14.15)$$

Как и ранее (см. рис. 13.1) запишем \mathbf{r}_a в виде $\mathbf{r}_a = \mathbf{R} + \mathbf{R}_a$, где \mathbf{R} определяет положение системы зарядов как целого. Предполагая, что потенциал внешнего поля мало меняется на размерах системы, разложим $\varphi(\mathbf{r}_a)$ в ряд

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}_a) &= \varphi(\mathbf{R} + \mathbf{R}_a) = \varphi(\mathbf{R}) + \mathbf{R}_a \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \varphi(\mathbf{R}) + \\ &+ \frac{1}{2} (\mathbf{R}_a)_\alpha (\mathbf{R}_a)_\beta \frac{\partial}{\partial R_\alpha} \frac{\partial}{\partial R_\beta} \varphi(\mathbf{R}) + \dots \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned} U &= \sum_a e_a\varphi(\mathbf{r}_a) = \left(\sum_a e_a \right) \varphi(\mathbf{R}) + \left(\sum_a e_a \mathbf{R}_a \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \varphi(\mathbf{R}) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\sum_a e_a (\mathbf{R}_a)_\alpha (\mathbf{R}_a)_\beta \right) \frac{\partial}{\partial R_\alpha} \frac{\partial}{\partial R_\beta} \varphi(\mathbf{R}) + \dots = \\ &= Q\varphi(\mathbf{R}) - \mathbf{d}\mathbf{E}(\mathbf{R}) + \frac{1}{6} \mathcal{D}_{\alpha\beta} \frac{\partial}{\partial R_\alpha} \frac{\partial}{\partial R_\beta} \varphi(\mathbf{R}) \end{aligned} \quad (14.16)$$

В (14.16) Q — полный заряд системы зарядов, \mathbf{d} — дипольный момент, $\mathcal{D}_{\alpha\beta}$ — квадрупольный момент. При выводе мы учли, что $\mathbf{E}(\mathbf{R}) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{R})$ — напряженность внешнего

электрического поля, а также, что потенциал внешнего поля $\varphi(\mathbf{R})$ удовлетворяет уравнению Лапласа (13.15), то есть источник внешнего поля находится за пределами рассматриваемой системы зарядов.

Проанализируем ситуацию, когда полный заряд $Q = 0$ и ведущим является дипольный вклад в (14.16). Вычислим силу, действующую на систему зарядов. Имеем

$$\mathbf{F} = -\text{grad } U = \text{grad}(\mathbf{d}\mathbf{E}(\mathbf{R})). \quad (14.17)$$

Вычисляя градиент от скалярного произведения, получим

$$\begin{aligned} F_\alpha &= \frac{\partial}{\partial R_\alpha} d_\beta E_\beta(\mathbf{R}) = -d_\beta \frac{\partial}{\partial R_\alpha} \frac{\partial}{\partial R_\beta} \varphi(\mathbf{R}) = \\ &= d_\beta \frac{\partial}{\partial R_\beta} \left(-\frac{\partial}{\partial R_\alpha} \varphi(\mathbf{R}) \right) = \left(\mathbf{d} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) E_\alpha(\mathbf{R}) \end{aligned}$$

или окончательно

$$\mathbf{F} = \left(\mathbf{d} \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} \right) \mathbf{E}(\mathbf{R}) \quad (14.18)$$

Полученное выражение определяет силу, действующую на диполь во внешнем поле. Эта сила отлична от нуля, только если внешнее поле является неоднородным.

Рассмотрим теперь момент сил, действующих на систему зарядов. В предположении $Q = 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sum_a [\mathbf{r}_a, e_a \mathbf{E}(\mathbf{r}_a)] \approx \sum_a [\mathbf{r}_a, e_a \mathbf{E}(\mathbf{R})] = \\ &= \sum_a [\mathbf{R}_a, e_a \mathbf{E}(\mathbf{R})] = [\mathbf{d}, \mathbf{E}(\mathbf{R})] \end{aligned} \quad (14.19)$$

В отличие от (14.18), момент сил, действующих на диполь, остается отличным от нуля и в однородном внешнем электрическом поле.

Лекция 15

15.1 Поле равномерно движущегося заряда

Найдем потенциал и напряженность поля заряженной частицы, движущейся с постоянной скоростью \mathbf{V} . Систему отсчета, в которой находится наблюдатель, обозначим K , систему отсчета, в которой заряд покоится – K' . Предполагаем, как и раньше, что ось x совпадает с направлением движения частицы и, соответственно, системы K' .

В системе отсчета K' заряд покоится и мы имеем дело с электростатическим случаем. Поле описывается скалярным потенциалом, векторный потенциал и напряженность магнитного поля равны нулю. Считая, что заряд находится в начале координат системы K' , можем записать

$$\varphi'(\mathbf{r}') = \frac{e}{r'}, \quad \mathbf{E}'(\mathbf{r}') = \frac{e\mathbf{r}'}{r'^3}, \quad \mathbf{A}' = 0, \quad \mathbf{H}' = 0 \quad (15.1)$$

где $\mathbf{r}' = (x', y', z')$.

Теперь, чтобы найти потенциал и напряженность поля в системе K , воспользуемся формулами преобразования Лоренца. Для скалярного потенциала находим (см. (10.1))

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{\varphi'(\mathbf{r}')}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (15.2)$$

где радиус-вектор r' должен быть выражен через координаты и время в K -системе. Используя формулы преобразования Лоренца для перехода из системы K в K'

$$x' = \frac{x - Vt}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad (15.3)$$

находим

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \frac{\sqrt{(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (15.4)$$

Тогда

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{\sqrt{(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)}} \quad (15.5)$$

Для векторного потенциала в системе K преобразование Лоренца для потенциалов (10.1) дает

$$A(\mathbf{r}, t) = \frac{\mathbf{V}}{c} \varphi(\mathbf{r}, t) \quad (15.6)$$

Чтобы найти напряженность электрического и магнитного полей в системе K можно поступить двумя способами. Можно подставить выражения для скалярного и векторного потенциалов, (15.5) и (15.6), непосредственно в формулы, связывающие напряженности полей \mathbf{E} и \mathbf{H} с потенциалами. Другой способ состоит в нахождении \mathbf{E} и \mathbf{H} с помощью преобразования Лоренца для компонент поля.

Согласно (10.3), (10.5) и (10.7), имеем

$$E_x(\mathbf{r}, t) = E'_x = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{e(x - Vt)}{\left[(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right]^{3/2}} \quad (15.7)$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = \frac{E'_y}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{e \cdot y}{\left[(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right]^{3/2}} \quad (15.8)$$

$$E_z(\mathbf{r}, t) = \frac{E'_z}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \frac{e \cdot z}{\left[(x - Vt)^2 + \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)(y^2 + z^2)\right]^{3/2}} \quad (15.9)$$

Выражение для магнитного поля можно представить в виде (см. (10.7))

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} [\mathbf{V}\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \quad (15.10)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ определяется формулами (15.7)-(15.9).

Проанализируем полученные результаты. Введем радиус-вектор от заряда до точки наблюдения $\mathbf{R} = (x - Vt, y, z)$ и угол θ между \mathbf{R} и скоростью заряда \mathbf{V} (или осью x). Тогда

$$(x - Vt)^2 = R^2 \cos^2 \theta, \quad y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \theta$$

и формулы (15.7)-(15.9) можно объединить в одну,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \theta\right)^{3/2}} \quad (15.11)$$

На фиксированном расстоянии R от частицы напряженность поля зависит от угла θ . Это релятивистский эффект, который исчезает в нерелятивистском пределе (при $V \ll c$ поле изотропно). Анизотропия электрического поля выражена тем сильнее, чем скорость частицы ближе к скорости света.

Минимальное значение напряженности достигается для направлений вперед ($\theta = 0$) и назад ($\theta = \pi$) и равно

$$E_{min} = \frac{e}{R^2} \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right) \quad (15.12)$$

Максимум достигается в плоскости, перпендикулярной скорости частицы ($\theta = \frac{\pi}{2}$),

$$E_{max} = \frac{e}{R^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{1/2}} \quad (15.13)$$

Отношение

$$\frac{E_{max}}{E_{min}} = \left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^{-3/2} \quad (15.14)$$

характеризует анизотропию поля. Оно растет с увеличением скорости частицы. Это означает, что электрическое поле "сплющивается" в направлении V .

При больших скоростях напряженность поля оказывается отличной от нуля в узком угловом интервале в окрестности $\theta = \frac{\pi}{2}$. Перепишем (15.11), вводя обозначение $\Delta\theta = \frac{\pi}{2} - \theta$

и полагая, что $1 - \frac{V^2}{c^2} \ll 1$,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} + \frac{V^2}{c^2} \sin^2 \Delta\theta\right)^{3/2}} \approx \frac{e\mathbf{R}}{R^3} \frac{1 - \frac{V^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{V^2}{c^2} + \sin^2 \Delta\theta\right)^{3/2}} \quad (15.15)$$

Из-за знаменателя в (15.15) угловая зависимость \mathbf{E} имеет явно выраженный максимум при $\Delta\theta = 0$. Характерная ширина максимума по порядку величины равна

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \ll 1 \quad (15.16)$$

Оценка (15.16) определяет тот угловой интервал в окрестности $\theta = \frac{\pi}{2}$, где сосредоточено поле.

15.2 Постоянное магнитное поле. Векторный потенциал и напряженность магнитного поля системы токов

Рассмотрим ситуацию, когда система зарядов движется в ограниченной области пространства. Предполагаем, что движение имеет стационарный характер.

Будем искать усредненное по времени магнитное поле, которое возникает благодаря движению зарядов. Усредненное по времени поле будет только функцией координат. Таким образом, мы будем иметь дело с постоянным во времени магнитным полем.

Усредняя по времени уравнения Максвелла

$$\langle \operatorname{div} \mathbf{H} \rangle = 0, \quad \langle \operatorname{rot} \mathbf{H} \rangle = \left\langle \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \right\rangle$$

где среднее от зависящей от времени функции $F(t)$ определяется как

$$\langle F \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(t) dt,$$

получим

$$\operatorname{div} \langle \mathbf{H} \rangle = 0, \quad \operatorname{rot} \langle \mathbf{H} \rangle = \frac{4\pi}{c} \langle \mathbf{j} \rangle \quad (15.17)$$

Среднее от производной по времени напряженности электрического поля обращается в нуль,

$$\left\langle \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_0^T \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\mathbf{E}(T) - \mathbf{E}(0)}{T} = 0$$

поскольку напряженность электрического поля меняется в конечных пределах, а T неограниченно возрастает.

Уравнения (15.17) являются исходными уравнениями для нахождения постоянного магнитного поля $\langle \mathbf{H} \rangle$ по заданной объемной плотности тока $\langle \mathbf{j} \rangle$. В дальнейшем, имея в виду, что мы работаем с усредненными по времени величинами, знак усреднения $\langle \dots \rangle$ опускаем.

Воспользуемся векторным потенциалом и преобразуем второе из уравнений (15.17). Получаем

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

Поскольку потенциалы, в частности, векторный потенциал, определены неоднозначно, можно наложить на них дополнительное — калибровочное — условие. Выберем калибровочное условие в виде

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \tag{15.18}$$

Это условие всегда может быть удовлетворено калибровочным преобразованием (10.16) и надлежащим выбором функции f , входящей в (10.16). В калибровке (15.18) уравнение для векторного потенциала имеет вид

$$\Delta \mathbf{A} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \tag{15.19}$$

Полученное уравнение представляет собой совокупность трех уравнений, каждое из которых по виду совпадает с уравнением Пуассона (13.4) для потенциала φ . Используя решение уравнения Пуассона в виде (13.14), находим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \tag{15.20}$$

Выражение (15.20) есть решение уравнения (15.19). Оно определяет векторный потенциал по заданному распределению плотности тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$.

Чтобы найти напряженность магнитного поля $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ нужно вычислить ротор от выражения (15.20). Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}, \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right] = \\ &= \frac{1}{c} \int \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}, \mathbf{j}(\mathbf{r}') \right] dV' = -\frac{1}{c} \int \frac{[(\mathbf{r} - \mathbf{r}'), j(\mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV'\end{aligned}$$

Таким образом, магнитное поле, создаваемое плотность тока $\mathbf{j}(\mathbf{r})$, определяется выражением

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \int \frac{[j(\mathbf{r}'), (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] }{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \quad (15.21)$$

Формула (15.21) называется законом Био и Савара.

Полученные результаты позволяют вычислить энергию магнитного поля системы движущихся зарядов (или токов). Вычисления аналогичны выполненным для электростатической энергии системы зарядов (см. (13.15), (13.16)). По определению (см. (12.20)) искомая энергия равна

$$U = \int \frac{\mathbf{H}^2}{8\pi} dV$$

Это выражение нетрудно преобразовать следующим образом:

$$U = \frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{A} dV = \frac{1}{8\pi} \int (\operatorname{div} [\mathbf{H}\mathbf{A}] + \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{H}) dV$$

Интеграл от дивергенции преобразуется по теореме Остроградского-Гаусса в интеграл по бесконечно удаленной поверхности, который обращается в нуль, поскольку на бесконечности поле отсутствует. В результате, учитывая (15.17) и (15.20), получаем

$$U = \frac{1}{2c} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{A}(\mathbf{r}) dV = \frac{1}{2c^2} \int \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV dV'$$

Лекция 16

16.1 Магнитное поле на больших расстояниях от системы. Магнитный момент

Обратимся к выражению (15.20) и выясним, как ведет себя векторный потенциал, создаваемый системой движущихся зарядов, на далёких расстояниях.

Введём плотность тока точечных зарядов (см. (11.10))

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)) \quad (16.1)$$

Вспоминая, что формула (15.20) относится к усреднённым по времени величинам, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{1}{c} \int \frac{\langle \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \rangle}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' = \\ &\left\langle \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \right\rangle = \left\langle \frac{1}{c} \sum_a \frac{e_a \mathbf{v}_a(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_a(t)|} \right\rangle \end{aligned} \quad (16.2)$$

Для дальнейших преобразований введём систему радиус-векторов, аналогичную показанной на рис.13.1. Обозначим радиус-вектором \mathbf{R} положение системы движущихся зарядов как целое. Тогда запишем $\mathbf{r}_a(t)$ в виде $\mathbf{r}_a(t) = \mathbf{R} + \mathbf{R}_a(t)$ и представим формулу (16.2) в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \left\langle \frac{1}{c} \sum_a \frac{e_a \mathbf{v}_a(t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{R} - \mathbf{R}_a(t)|} \right\rangle \quad (16.3)$$

На больших расстояниях, $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \gg R_a$, разложим выражение (16.3) по \mathbf{R}_a . Первые

два члена разложения имеют вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \frac{\langle \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \rangle}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} - \frac{1}{c} \left\langle \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \left(\mathbf{R}_a(t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \right) \right\rangle + \dots \quad (16.4)$$

Первый член обращается в нуль после усреднения как среднее значение производной по времени от величины, меняющейся в конечных пределах,

$$\left\langle \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \right\rangle = \left\langle \frac{d}{dt} \sum_a e_a \mathbf{R}_a(t) \right\rangle = 0$$

Поэтому ведущим будет второе слагаемое в (16.4),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{c} \frac{\langle \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) (\mathbf{R}_a(t) (\mathbf{r} - \mathbf{R})) \rangle}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \quad (16.5)$$

Преобразуем выражение, стоящее в числителе под знаком суммы. Имеем (с учётом $\mathbf{v}_a(t) = \dot{\mathbf{R}}_a(t)$)

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_a(t) (\mathbf{R}_a(t) (\mathbf{r} - \mathbf{R})) &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{R}_a(t) (\mathbf{R}_a(t) (\mathbf{r} - \mathbf{R})) + \\ &\frac{1}{2} \dot{\mathbf{R}}_a(t) (\mathbf{R}_a(t) (\mathbf{r} - \mathbf{R})) - \frac{1}{2} \mathbf{R}_a(t) (\dot{\mathbf{R}}_a(t) (\mathbf{r} - \mathbf{R})) = \\ &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \mathbf{R}_a(t) (\mathbf{R}_a(t) (\mathbf{r} - \mathbf{R})) + \frac{1}{2} [(\mathbf{r} - \mathbf{R}) [\dot{\mathbf{R}}_a(t), \mathbf{R}_a(t)]] \end{aligned} \quad (16.6)$$

Тогда

$$\frac{1}{c} \left\langle \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) (\mathbf{R}_a(t) (\mathbf{r} - \mathbf{R})) \right\rangle = \frac{1}{2c} \left[\left\langle \sum_a e_a [\mathbf{R}_a(t), \dot{\mathbf{R}}_a(t)] \right\rangle, (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \right] \quad (16.7)$$

Первое слагаемое в (16.6) обращается в нуль после усреднения как среднее от производной по времени от ограниченной величины (значение $\mathbf{R}_a(t)$ ограничено размерами системы).

Таким образом, на далёких расстояниях векторный потенциал приобретает вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{[\mathbf{m}, (\mathbf{r} - \mathbf{R})]}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \quad (16.8)$$

где величина

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \left\langle \sum_a e_a [\mathbf{R}_a(t), \mathbf{v}_a(t)] \right\rangle \quad (16.9)$$

называется магнитным моментом системы движущихся зарядов.

Выражение (16.9) можно переписать в несколько ином виде. Переходя от суммирования по зарядам к интегрированию по объёму системы, получим

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2c} \left\langle \int [\mathbf{R}', \mathbf{j}(\mathbf{R}', t)] dV' \right\rangle = \frac{1}{2c} \int [\mathbf{R}', \mathbf{j}(\mathbf{R}')] dV' \quad (16.10)$$

где

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}') = \langle \mathbf{j}(\mathbf{R}', t) \rangle$$

Выражение (16.10) удобно для вычисления магнитного момента системы в случае, когда задано объёмное распределение плотности тока.

Теперь обратимся к вычислению магнитного поля на далёких расстояниях. Для вычисления ротора от выражения (16.8) воспользуемся антисимметричным тензором $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$. Кроме того, запишем через этот тензор векторное произведение в выражении (16.8). Представим формулу (16.8) в виде

$$A_\gamma = \varepsilon_{\gamma\lambda\mu} \frac{\partial}{\partial r_\lambda} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} m_\mu$$

Для напряженности магнитного поля получим

$$H_\alpha = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial r_\beta} A_\gamma = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \frac{\partial}{\partial r_\beta} \varepsilon_{\gamma\lambda\mu} \frac{\partial}{\partial r_\lambda} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} m_\mu$$

Выпишем отдельные результаты для входящих в это соотношение сомножителей. Имеем

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\gamma\lambda\mu} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\lambda\mu\gamma} = \delta_{\alpha\lambda} \delta_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu} \delta_{\beta\lambda} \quad (16.11)$$

Согласно (14.7),

$$\frac{\partial}{\partial r_\beta} \frac{\partial}{\partial r_\lambda} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} = \frac{3(\mathbf{r} - \mathbf{R})_\beta (\mathbf{r} - \mathbf{R})_\lambda}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^5} - \frac{\delta_{\beta\lambda}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3}$$

В результате, собирая все сомножители вместе, находим

$$H_\alpha = \frac{3(\mathbf{m}(\mathbf{r} - \mathbf{R}))(\mathbf{r} - \mathbf{R})_\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^5} - \frac{m_\alpha}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \quad (16.12)$$

Отметим, что второй – отрицательный – член в (16.11) даёт нулевой вклад в (16.12). В обычных векторных обозначениях формула (16.12) выглядит так

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \frac{3(\mathbf{m}\mathbf{n})\mathbf{n} - \mathbf{m}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \quad (16.13)$$

где $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{R})/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$. Нетрудно видеть, что полученный результат по своему виду совпадает с формулой (14.4) для электрического поля дипольного момента.

16.2 Электромагнитные волны. Волновое уравнение

До сих пор мы рассматривали электрические и магнитные поля, создаваемые зарядами и токами. Возникает вопрос, может ли существовать поле в отсутствие зарядов и токов, т.е. существуют ли нетривиальные решения уравнений Максвелла при $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$. Оказывается, что такие решения существуют и называются они *электромагнитными волнами*.

Рассмотрим уравнения Максвелла в отсутствие зарядов и токов. Они имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0 \end{aligned} \quad (16.14)$$

Выведем сначала уравнения для потенциалов электромагнитного поля. Подставляя

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}, \quad \mathbf{H} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

во второе уравнение (16.14), получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

Наложим на скалярный и векторный потенциал дополнительное – калибровочное – условие. Воспользуемся так называемой *лоренцевой калибровкой*

$$\operatorname{div} \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0 \quad (16.15)$$

В результате приходим к следующему уравнению для векторного потенциала:

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = 0 \quad (16.16)$$

Уравнение (16.16) называется *волновым уравнением*.

Аналогичное уравнение нетрудно вывести и для скалярного потенциала. Для этого воспользуемся третьим уравнением (16.14). Из этого уравнения следует

$$-\Delta \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

Подставляя сюда $\operatorname{div} \mathbf{A}$ из калибровочного условия (16.15), получим волновое уравнение для скалярного потенциала

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \quad (16.17)$$

Если теперь вспомнить связь \mathbf{E} и \mathbf{H} с потенциалами, то, комбинируя (16.16) и (16.17), нетрудно получить точно такие же волновые уравнения для электрического и магнитного полей.

Для существования электромагнитных волн обязательным условием является зависимость потенциалов и, соответственно, напряженностей поля от времени. Если производные по времени равны нулю, то мы возвращаемся к уравнениям для постоянного поля, но без источников, $\rho = 0$ и $\mathbf{j} = 0$. Поэтому эти уравнения будут иметь тривиальные – нулевые – решения.

Волновые уравнения (16.16) и (16.17) можно вывести, основываясь на четырёхмерном уравнении для тензора электромагнитного поля (12.8). В отсутствие зарядов и токов уравнение (12.8) имеет вид

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k} = 0 \quad (16.18)$$

Воспользуемся далее определением тензора электромагнитного поля (9.18) и калибровочным условием (16.15). В результате получаем

$$\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial A^k}{\partial x_i} - \frac{\partial A^i}{\partial x_k} \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial A^k}{\partial x^k} - \frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = 0$$

В четырёхмерном виде условие (16.15) выглядит так:

$$\frac{\partial A^i}{\partial x^i} = 0 \quad (16.19)$$

Поэтому уравнение для 4-потенциала будет иметь следующий вид:

$$-\frac{\partial^2 A^i}{\partial x_k \partial x^k} = 0 \quad (16.20)$$

Это уравнение представляет собой волновое уравнение для 4-потенциала,

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x^k} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (16.21)$$

Временная ($i = 0$) компонента этого уравнения совпадает с (16.17), а пространственная составляющая ($i = 1, 2, 3$) – с (16.16).

Отметим, что лоренцево калибровочное условие (16.15) (или (16.19)) является инвариантом относительно преобразования Лоренца, т.е. относительно перехода от одной инерциальной системы отсчёта к другой. Это видно непосредственно из выражения (16.19) – калибровочное условие представляет собой 4-скаляр (четырёхмерную дивергенцию 4-вектора).

Лекция 17

17.1 Плоские электромагнитные волны

Плоской волной принято называть решение волнового уравнения, зависящее от времени и только от одной координаты.

Пусть решение волнового уравнения зависит от координаты x , тогда само уравнение выглядит так:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) f(x, t) = 0 \quad (17.1)$$

Под функцией $f(x, t)$ мы можем подразумевать любую из величин, удовлетворяющих волновому уравнению (скалярный потенциал, любую из компонент векторного потенциала или напряженностей поля).

Сделаем замену переменных. Вместо x и t введём новые переменные

$$t_- = t - \frac{x}{c}, \quad t_+ = t + \frac{x}{c}$$

Тогда

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) = -\frac{4}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t_+ \partial t_-}$$

и уравнение (17.1) приобретает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial t_+ \partial t_-} f(x, t) = 0 \quad (17.2)$$

Решением этого уравнения является сумма двух функций

$$f(t_+, t_-) = f_-(t_-) + f_+(t_+) \quad (17.3)$$

где f_- и f_+ – произвольные функции.

Возвращаясь к исходным переменным, запишем решение уравнения (17.1) в виде

$$f(x, t) = f_- \left(t - \frac{x}{c} \right) + f_+ \left(t + \frac{x}{c} \right) \quad (17.4)$$

Проанализируем полученный результат. Если x и t удовлетворяют условию $t - x/c = \text{const}$, то для таких x и t вклад f_- в (17.4) остаётся неизменным. Это фиксированное значение f_- перемещается по оси x со скоростью c . Это означает, что вклад $f_-(t - x/c)$ в (17.4) описывает плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x . Точно так же можно прийти к выводу, что вклад $f_+(t + x/c)$ соответствует плоской волне, распространяющейся в противоположном направлении.

Воспользуемся теперь представлениями о плоских волнах применительно к электромагнитному полю. Ради определённости будем рассматривать плоскую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x . Все величины в такой волне (потенциалы, напряженности поля) будут зависеть только от $t - x/c$.

Подставим $\varphi = \varphi(t - x/c)$ и $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t - x/c)$ в калибровочное условие (16.15). В результате получим

$$\dot{A}_x = \dot{\varphi} \quad (17.5)$$

где точка означает дифференцирование по аргументу. Учитывая соотношение (17.5), для напряжённости электрического поля находим

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \dot{\mathbf{A}}_{\perp} = -\frac{1}{c} \left(\dot{\mathbf{A}} - \mathbf{n}(\mathbf{n}\dot{\mathbf{A}}) \right) \quad (17.6)$$

где $\mathbf{A}_{\perp} = (A_y, A_z)$, единичный вектор \mathbf{n} направлен вдоль оси x , т.е. указывает направление распространения волны. Напряжённость магнитного поля равна

$$\mathbf{H} = -\frac{1}{c} [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{A}}] \quad (17.7)$$

и может быть выражена через напряжённость электрического поля

$$\mathbf{H} = [\mathbf{n}, \mathbf{E}] \quad (17.8)$$

Соотношение (17.8) означает, что в плоской волне напряжённости электрического и магнитного полей взаимно ортогональны и равны по абсолютной величине. Кроме того, векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} перпендикулярны \mathbf{n} – направлению распространения волны. Поэтому электромагнитные волны называют поперечными.

Отметим, что приведенные выше соотношения не нарушаются при переходе от одной инерциальной системы к другой.

Вектор Пойнтинга – плотность потока энергии – в плоской электромагнитной волне равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n}(\mathbf{E})^2 = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n}(\mathbf{H})^2 \quad (17.9)$$

т.е. направление распространения потока энергии совпадает с \mathbf{n} . Учитывая, что плотность энергии в плоской волне есть

$$W = \frac{\mathbf{E}^2 + \mathbf{H}^2}{8\pi} = \frac{\mathbf{E}^2}{4\pi} = \frac{\mathbf{H}^2}{4\pi}$$

вектор Пойнтинга можно записать как

$$\mathbf{S} = c\mathbf{n}W \quad (17.10)$$

Закон преобразования плотности энергии при переходе от одной инерциальной системы к другой нетрудно установить, если воспользоваться формулами преобразования Лоренца для напряжённости поля (см. (10.3), (10.5) и (10.7)). Согласно этим формулам,

$$W = \frac{1 - \frac{V}{c}}{1 + \frac{V}{c}} W'$$

где W' – плотность энергии в системе отсчёта, которая движется относительно исходной (т.е. той, в которой определена плотность W) со скоростью V по оси x .

17.2 Плоские монохроматические волны

Если функции f_{\pm} в (17.3) зависят от своих аргументов по гармоническому закону, например,

$$f_{-}(t_{-}) = a \cos(\omega t_{-} + \alpha) = \operatorname{Re} f_{-}^{(0)} \exp(-i\omega t_{-}) \quad (17.11)$$

то такие плоские волны называются монохроматическими. Величина ω представляет собой частоту волны.

В плоской электромагнитной волне все величины зависят от времени и координат подобно (17.11). Например, векторный потенциал имеет вид

$$\mathbf{A} = \mathbf{A} \left(t - \frac{x}{c} \right) = \operatorname{Re} \mathbf{A}_0 \exp \left(-i\omega \left(t - \frac{x}{c} \right) \right) \quad (17.12)$$

где \mathbf{A}_0 – постоянный комплексный вектор.

Введём волновой вектор

$$\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \quad (17.13)$$

где \mathbf{n} – единичный вектор в направлении распространения волны. С помощью (17.13) величину $\omega x/c$ можно записать как

$$\frac{\omega}{c} x = \mathbf{k} \mathbf{r}.$$

Тогда соотношение (17.12) приобретает вид, не зависящий от выбора системы координат,

$$\mathbf{A} = \operatorname{Re} \mathbf{A}_0 \exp (i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t)) \quad (17.14)$$

Пока мы не вычисляем квадратичных по полю величин, можно не писать знак действительной части и все промежуточные действия проводить с комплексными величинами.

Рассмотрим полученные выше соотношения (17.5)-(17.8) применительно к монохроматической волне. Лоренцево калибровочное условие будет выглядеть так:

$$\mathbf{k} \mathbf{A} = \frac{\omega}{c} \varphi \quad \text{или} \quad \mathbf{n} \mathbf{A} = \varphi \quad (17.15)$$

Формулы для напряжённостей электрического и магнитного полей имеют вид

$$\mathbf{E} = ik \mathbf{A}_\perp = ik (\mathbf{A} - \mathbf{n}(\mathbf{n} \mathbf{A})), \quad \mathbf{H} = i[\mathbf{k}, \mathbf{A}] \quad (17.16)$$

Связь между \mathbf{E} и \mathbf{H} (17.8) остаётся без изменений.

Остановимся кратко на вопросе о поляризации электромагнитной волны. Ради определённости рассмотрим направление вектора напряжённости электрического поля. Величину

$$\mathbf{E} = \operatorname{Re} \mathbf{E}_0 \exp (i(\mathbf{k} \mathbf{r} - \omega t))$$

всегда можно представить как суперпозицию

$$E_y = E_{y0} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t), \quad E_z = E_{z0} \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t + \alpha).$$

Если сдвиг фаз α равен нулю или π , то вектор напряжённости поля колеблется вдоль заданного направления в плоскости yz . Такую волну называют линейно поляризованной. Если $E_{y0} = E_{z0}$ и сдвиг фаз $\alpha = \pm\pi/2$, то вектор напряжённости электрического поля вращается в плоскости yz . Его абсолютная величина не меняется. Такая волна называется циркулярно поляризованной. Можно показать, что в общем случае конец вектора напряжённости описывает эллипс в плоскости yz . Параметры эллипса зависят от E_{y0} , E_{z0} и сдвига фаз α .

Рассмотрим теперь плоскую монохроматическую электромагнитную волну в четырёхмерных обозначениях. Будем искать решение уравнения (16.20) в виде

$$A^i = A_0^i \exp(-ik_j x^j) \quad (17.17)$$

Подставляя (17.17) в (16.20), получим

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x^k} A_0^i \exp(-ik_j x^j) = k_k k^k A_0^i \exp(-ik_j x^j) = 0$$

т.е.

$$k_k k^k = 0. \quad (17.18)$$

Из (17.18) следует, что величина k^i (или k_i) представляет собой волновой 4-вектор. Поскольку его временная – нулевая – компонента известна (мы рассматриваем волну заданной частоты), то мы можем записать

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \mathbf{k} \right) \quad (17.19)$$

где, согласно (17.18), $\mathbf{k}^2 = \omega^2/c^2$.

Результат (17.19) возволяет решить вопрос об изменении частоты волны при переходе от одной инерциальной системы отсчёта к другой.

Пусть в системе отсчёта K_0 распространяются плоские волны с частотой ω_0 (две волны во взаимно противоположных направлениях). Система K_0 движется относительно системы отсчёта K со скоростью V в направлении оси x . Найдём закон преобразования частоты ω_0 при переходе из системы K_0 в систему K .

Используя преобразование Лоренца для компонент 4-вектора, для нулевой компоненты получим

$$\frac{\omega_0}{c} = \frac{k^0 - \frac{V}{c}k^1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

где k^0 и k^1 – компоненты волнового 4-вектора в системе K , $k^0 = \omega/c$, $k^1 = \pm\omega/c$ (знак плюс для волны, распространяющейся в положительном направлении оси x , знак минус для волны, распространяющейся в противоположном направлении). В итоге имеем

$$\omega = \omega_0 \sqrt{\frac{1 \pm \frac{V}{c}}{1 \mp \frac{V}{c}}} \quad (17.20)$$

Таким образом, для волны, бегущей вдоль оси x (K_0 движется на наблюдателя в K -системе) частота ω превышает ω_0 . Отличие частоты ω от ω_0 представляет собой так называемый эффект Доплера.

Лекция 18

18.1 Поле движущихся зарядов. Запаздывающие потенциалы

Рассмотрим электромагнитное поле, которое создается движущимися зарядами. Чтобы вывести уравнение для потенциалов, повторим вывод волновых уравнений, представленный выше (см. (16.14)-(16.17)), но только учтём присутствие зарядов и токов. Подставим определения электрического и магнитного полей через потенциалы в уравнение Максвелла (12.10),

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \frac{1}{c} \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}$$

Предполагая, что потенциалы выбраны в лоренцевой калибровке (16.15), получим

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j} \quad (18.1)$$

Уравнение для скалярного потенциала найдем, используя уравнение Максвелла (12.9).

Имеем

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\Delta \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{A} = 4\pi \rho$$

Подставляя сюда $\operatorname{div} \mathbf{A}$ из условия (16.15), получим

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi \rho \quad (18.2)$$

В случае постоянных, не зависящих от времени, потенциалов, уравнения (18.1) и (18.2) превращаются в полученные ранее уравнения, (15.19) и (13.4), соответственно. Если ис-

точники – объёмные плотности зарядов и токов – в уравнениях (18.1) и (18.2) отсутствуют, то приходим к волновым уравнениям (16.16) и (16.17).

Решение неоднородного линейного уравнения (18.1) и (18.2) есть сумма общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения с заданной правой частью. Для нахождения этого частного решения воспользуемся понятием функции Грина.

Для определённости будем рассматривать уравнение (18.2) для скалярного потенциала. Частное решение этого уравнения может быть записано в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \rho(\mathbf{r}', t') dV' dt' \quad (18.3)$$

где функция Грина $G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t')$ есть решение уравнения

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = -4\pi \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \quad (18.4)$$

Таким образом, поиск частного решения уравнения с заданной объёмной плотностью зарядов сводится к вычислению функции Грина.

Установим явный вид решения уравнения (18.4). Введём новые переменные $\tau = t - t'$, $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$. Тогда вместо (18.4) имеем

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) G(\mathbf{R}, \tau) = -4\pi \delta(\mathbf{R}) \delta(\tau) \quad (18.5)$$

Поскольку источник в уравнении (18.5) находится в начале координат, то решение будет обладать центральной симметрией. Функция Грина будет зависеть только от абсолютной величины радиус-вектора, $G = G(R, \tau)$.

При $\tau \neq 0$ и $R \neq 0$ уравнение (18.5) будет иметь вид

$$\left(\Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) G(R, \tau) = \left(\frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} R^2 \frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) G(R, \tau) = 0$$

Запишем функцию G в виде

$$G = \frac{g}{R}$$

Тогда для функции g получим одномерное волновое уравнение

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} \right) g = 0$$

решение которого представляет собой суперпозицию двух плоских волн

$$g(R, \tau) = g_- \left(\tau - \frac{R}{c} \right) + g_+ \left(\tau + \frac{R}{c} \right) \quad (18.6)$$

Ограничимся волной g_- , которая распространяется в направлении возрастающих значений R , т.е. от центра. В тех физических задачах, с которыми нам придется иметь дело в дальнейшем, достаточно этой составляющей частного решения.

Таким образом, функция Грина G может быть записана в виде

$$G(R, \tau) = \frac{1}{R} \cdot g_- \left(\tau - \frac{R}{c} \right) \quad (18.7)$$

где g_- – пока неизвестная функция. Полученное выражение описывает расходящуюся от центра, т.е. распространяющуюся в направлении возрастающих R , сферическую волну.

Явный вид функции g нетрудно найти, если подставить выражение (18.7) в уравнение (18.5) и учесть неоднородный член в правой части этого уравнения. Поскольку источник в уравнении (18.5) находится в начале координат, при вычислении ΔG следует воспользоваться формулой (13.11). Учитывая, что

$$\Delta ab = b\Delta a + a\Delta b + 2 \frac{\partial a}{\partial R} \frac{\partial b}{\partial R}$$

где $a = a(R)$, $b = b(R)$, получим

$$\begin{aligned} \Delta G &= \frac{1}{R} \cdot \Delta g_- \left(\tau - \frac{R}{c} \right) + g_- \left(\tau - \frac{R}{c} \right) \Delta \frac{1}{R} + 2 \left(\frac{\partial}{\partial R} \frac{1}{R} \right) \left(\frac{\partial}{\partial R} g_- \left(\tau - \frac{R}{c} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{R} \frac{\partial^2}{\partial R^2} g_- \left(\tau - \frac{R}{c} \right) - 4\pi \delta(\mathbf{R}) g_-(\tau) \end{aligned} \quad (18.8)$$

Подставляя теперь (18.8) в (18.5) и сокращая подобные члены, приходим к равенству

$$-4\pi \delta(\mathbf{R}) g_-(\tau) = -4\pi \delta(\mathbf{R}) \delta(\tau)$$

откуда следует, что

$$g_-(\tau) = \delta(\tau) \quad (18.9)$$

Возвращаясь к исходным переменным, окончательно находим

$$G(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta \left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c} \right) \quad (18.10)$$

Таким образом, частное решение уравнения (18.2) имеет вид

$$\begin{aligned}\varphi(\mathbf{r}, t) = & \int \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \rho(\mathbf{r}', t') dV' dt' = \\ & \int \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'\end{aligned}\quad (18.11)$$

Подобным образом выглядит и соответствующее решение уравнения (18.1),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int \frac{\mathbf{j}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (18.12)$$

Полученные выражения, (18.11) и (18.12), называются запаздывающими потенциалами. Такое название связано с тем, что потенциалы в данный момент времени определяются значениями объёмных плотностей заряда и тока в моменты времени, предшествующие данному.

Отметим, что в случае, когда объёмные плотности зарядов и токов не зависят от времени, выражения (18.11) и (18.12) превращаются в найденные ранее решения, (13.14) и (15.20), соответственно.

18.2 Потенциалы Лиенара-Вихерта

Пусть точечный заряд движется по заданной траектории $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(t)$. Определим скалярный и векторный потенциалы поля, создаваемого этим зарядом.

Проще всего найти потенциалы, если воспользоваться формулами (18.11) и (18.12) и подставить в них объёмные плотности заряда и тока, отвечающие рассматриваемому заряду.

Объёмная плотность заряда, движущегося по заданной траектории, есть

$$\rho(\mathbf{r}, t) = e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t))$$

Подставляя это выражение в (18.11), находим

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} e\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t')) dV' dt'$$

Выполнив интегрирование по объёму, приходим к формуле

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = e \int \frac{\delta\left(t - t' - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')|} dt'$$

в которой остаётся выполнить интегрирование по t' . Чтобы проделать это, учтём соотношение

$$\delta(f(t')) = \frac{\delta(t' - t_0)}{|f'(t_0)|}$$

где t_0 – нуль функции $f(t')$. В результате находим

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)|} \frac{1}{|f'(t_0)|} \quad (18.13)$$

где в нашем случае

$$\begin{aligned} f(t') &= t - t' - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t')| \\ f'(t_0) &= -1 + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)) \cdot \mathbf{v}(t_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)| c} \end{aligned} \quad (18.14)$$

а величина $t_0 = t_0(\mathbf{r}, t)$ есть корень уравнения

$$t - t_0 - \frac{1}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)| = 0 \quad (18.15)$$

Подставляя (18.14) в (18.13), представим скалярный потенциал в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)| - \frac{1}{c} ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)) \cdot \mathbf{v}(t_0))} \quad (18.16)$$

При выводе (18.16) мы учли, что $|f'(t_0)| = -f'(t_0)$, поскольку $f'(t_0) < 0$.

Аналогичным образом можно найти векторный потенциал создаваемого зарядом поля.

Для этого нужно подставить в (18.12) объёмную плотность тока

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}, t) = e \mathbf{v}_0(t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t)) \quad (18.17)$$

Выражение для векторного потенциала будет иметь вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{e}{c} \frac{\mathbf{v}_0(t_0)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)| - \frac{1}{c} ((\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_0)) \cdot \mathbf{v}(t_0))} \quad (18.18)$$

где $t_0(\mathbf{r}, t)$ по-прежнему определяется из уравнения (18.15).

Поясним физический смысл результатов (18.16), (18.18). Потенциалы в точке \mathbf{r} определяются тем участком траектории частицы, сигнал от которого приходит в точку \mathbf{r} в момент времени t . Время t_0 – момент испускания сигнала, $\mathbf{r}_0(t_0)$ – радиус-вектор положения частицы в этот момент времени.

Найденные выражения для потенциалов (18.16) и (18.18) называются потенциалами Лиенара-Вихерта.

18.3 Спектральное разложение зависящих от времени функций

В дальнейшем нам потребуется представлять переменное во времени поле в виде суперпозиции монохроматических волн с различными частотами. Для этого мы воспользуемся разложением зависящих от времени функций в интеграл Фурье.

Будем рассматривать действительную функцию $f(t)$, которая стремится к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$. Предполагаем, что все возникающие в процессе вычислений интегралы являются сходящимися.

Разложение в интеграл Фурье имеет вид

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} \quad (18.19)$$

Компонента Фурье $f(\omega)$ определяется через $f(t)$ следующим образом:

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \exp(i\omega t) dt \quad (18.20)$$

Поскольку $f^*(t) = f(t)$, то $f^*(\omega) = f(-\omega)$. Это свойство позволяет нам получить важное соотношение для квадратичных величин. Вычисляя интеграл от $f^2(t)$ по времени, находим

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) \exp(-i\omega t) \frac{d\omega}{2\pi} \right) dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) f(-\omega) \frac{d\omega}{2\pi}$$

Под интегралом стоит чётная функция ω . Поэтому можно перейти к интегрированию по ω от нуля до бесконечности. В результате получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)f(-\omega)\frac{d\omega}{2\pi} = 2 \int_0^{\infty} |f(\omega)|^2\frac{d\omega}{2\pi} \quad (18.21)$$

Выведенное соотношение потребуется нам ниже для перехода от временного к спектральному описанию энергии электромагнитных волн.

Лекция 19

19.1 Запаздывающие потенциалы на больших расстояниях от системы зарядов

Проанализируем выражения (18.11) и (18.12) для запаздывающих потенциалов на расстояниях, превышающих размеры системы зарядов.

Вычисления проведём по схеме, аналогичной уже использованной ранее для потенциала системы покоящихся зарядов (см. (13.20), (13.21)). Введём систему радиус-векторов, аналогичную показанной на рис. 13.1. Обозначим радиус-вектором \mathbf{R} положение системы зарядов как целое. Тогда запишем радиус-вектор \mathbf{r}' в виде $\mathbf{r}' = \mathbf{R} + \mathbf{R}'$ и представим, например, скалярный потенциал (18.11) в виде

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \int \frac{\rho\left(\mathbf{R}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R} - \mathbf{R}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{R} - \mathbf{R}'|} dV' \quad (19.1)$$

где интегрирование ведётся по \mathbf{R}' , т.е. по объёму системы зарядов. На больших расстояниях от системы, $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \gg |\mathbf{R}'|$, разложим входящую в (19.1) величину $|\mathbf{r} - \mathbf{R} - \mathbf{R}'|$ по \mathbf{R}' . Имеем

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{R} - \mathbf{R}'| &= |\mathbf{r} - \mathbf{R}| - \mathbf{R}' \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R})}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} + \frac{1}{2} R'_\alpha R'_\beta \frac{\partial}{\partial r_\alpha} \frac{\partial}{\partial r_\beta} |\mathbf{r} - \mathbf{R}| + \dots = \\ &= |\mathbf{r} - \mathbf{R}| - \mathbf{nR}' + \frac{1}{2|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \left(\mathbf{R}'^2 - (\mathbf{nR}')^2 \right) + \dots \end{aligned} \quad (19.2)$$

где $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{R})/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ – единичный вектор, направленный от системы зарядов в точку

наблюдения. В окончательной формуле (19.2) мы учли, что

$$\frac{\partial}{\partial r_\alpha} \frac{\partial}{\partial r_\beta} |\mathbf{r} - \mathbf{R}| = \frac{\delta_{\alpha\beta}}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} - \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{R})_\alpha (\mathbf{r} - \mathbf{R})_\beta}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|^3} \quad (19.3)$$

С ростом расстояния от системы зарядов до точки наблюдения второй член в разложении (19.2) не меняется, а третий убывает как $1/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$.

При $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \gg |\mathbf{R}'|$ знаменатель в (19.1) можно положить равным просто $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$. Что касается запаздывания $|\mathbf{r} - \mathbf{R} - \mathbf{R}'|/c$ в аргументе объёмной плотности зарядов, то здесь пренебрегать дополнительными к $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ членами разложения в (19.2), вообще говоря, нельзя. Пусть T – характерный масштаб изменения объёмной плотности заряда ρ как функции времени. Тогда для того, чтобы пренебречь каким-либо из членов разложения (19.2) при подстановке в аргумент ρ , требуется, чтобы его вклад в запаздывание был много меньше T .

Третий член в разложении (19.2) по порядку величины есть $L^2/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ (L – характерный линейный размер рассматриваемой системы зарядов). Пренебречь его вкладом в запаздывание можно при условии

$$\frac{L^2}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \ll T$$

т.е. на расстояниях от системы зарядов

$$|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \gg \frac{L^2}{cT} \quad (19.4)$$

При $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \gg \max(L, L^2/cT)$ для потенциала $\varphi(\mathbf{r}, t)$ получаем выражение

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \int \rho \left(\mathbf{R}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{R}'}{c} \right) dV' \quad (19.5)$$

Величина запаздывания во временном аргументе объёмной плотности заряда состоит из двух слагаемых. Величина $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|/c$ определяет запаздывание, равное времени распространения сигнала от системы как целого (точка O' на рис.13.1) до точки наблюдения. Величина $\mathbf{n}\mathbf{R}'/c$ характеризует время распространения сигнала внутри системы зарядов.

Векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ вычисляется в полной аналогии с $\varphi(\mathbf{r}, t)$. В результате получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \int \mathbf{j} \left(\mathbf{R}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{R}'}{c} \right) dV' \quad (19.6)$$

Область применимости у выражения (19.6) такая же, как и у (19.5).

19.2 Поле излучения

Воспользуемся формулами (19.5), (19.6) для вычисления напряжённостей электрического и магнитного полей. Подставим (19.5) и (19.6) в соотношения, связывающие \mathbf{E} и \mathbf{H} с потенциалами и получим следующие результаты.

Оставляя только наиболее медленно убывающие слагаемые (т.е. убывающие как $1/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$) и учитывая, что φ и \mathbf{A} выбраны в лоренцевой калибровке, для электрического поля находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\text{grad}\varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{\mathbf{n}}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \\ &= -\mathbf{n} \text{div} \mathbf{A} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\mathbf{n}}{c} \left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \end{aligned} \quad (19.7)$$

где

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \int \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{j} \left(\mathbf{R}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{R}'}{c} \right) dV' \quad (19.8)$$

Для магнитного поля в том же приближении имеем

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{rot} \mathbf{A} = -\frac{1}{c} \left[\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right] = [\mathbf{n}, \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] \quad (19.9)$$

Полученные соотношения, (19.7) и (19.9), совпадают с результатами для электрического и магнитного полей в плоской волне (см. (17.6) и (17.7)). Это означает, что на больших расстояниях от системы электромагнитное поле в заданной точке пространства можно рассматривать как плоскую волну, распространяющуюся в направлении $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{R})/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$.

Напряженность поля на больших расстояниях от системы убывает обратно пропорционально $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$. Такая медленно убывающая составляющая напряженности поля возникает благодаря тому, что заряды в рассматриваемой системе двигаются с ускорением. Чтобы убедиться в этом, проанализируем выражение (19.8). Для простоты рассмотрим движение одной заряженной частицы,

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}', t) = e\mathbf{v}_0(t)\delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_0(t))$$

Подставляя это выражение для плотности тока в (19.8), находим

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \frac{\partial}{\partial t} \frac{e\mathbf{v}_0(t_0)}{1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_0(t_0)/c} \quad (19.10)$$

где $t_0 = t_0(\mathbf{r}, t)$ есть корень уравнения

$$t - t_0 - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{R}_0(t_0)}{c} = 0 \quad (19.11)$$

Величина (19.10) отлична от нуля, только если скорость \mathbf{v}_0 зависит от времени, т.е. движение заряда происходит с ускорением.

Отметим, что результаты (19.10), (19.11) могут быть также получены непосредственно из потенциала Лиенара-Вихерта (18.18), если перейти в этой формуле к пределу больших расстояний (т.е. записать $\mathbf{r}_0(t_0)$ в виде $\mathbf{r}_0(t_0) = \mathbf{R} + \mathbf{R}_0(t_0)$ и перейти к пределу $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \gg |\mathbf{R}_0(t_0)|$).

Составляющая напряжённости электромагнитного поля, убывающая обратно пропорционально расстоянию от системы зарядов, называется *полем излучения*.

Излучаемые системой электромагнитные волны уносят энергию. Плотность потока энергии определяется вектором Пойнтинга, который в данном случае будет равен

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}\mathbf{H}] = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n}\mathbf{E}^2 = \frac{c}{4\pi} \mathbf{n}\mathbf{H}^2 \quad (19.12)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} определяются формулами (19.7)-(19.9). Энергия излучения в единицу времени в элемент телесного угла $d\Omega$ определяется как поток энергии через элемент поверхности $df = |\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2 d\Omega$ на сфере с центром в излучающей системе (точка O' на рис.13.1) и радиусом $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$:

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt d\Omega} = \frac{c}{4\pi} \mathbf{E}^2 |\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2 d\Omega = \frac{c}{4\pi} \mathbf{H}^2 |\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2 d\Omega \quad (19.13)$$

Так как напряженность поля излучения убывает как $1/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$, определённая соотношением (19.13) величина $d\varepsilon/dt d\Omega$ не меняется с расстоянием. Составляющие электромагнитного поля системы зарядов, которые убывают быстрее, чем $1/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$, не дают на далёких расстояниях вклад в (19.13). Указанные составляющие поля оказываются "привязанными" к системе зарядов, в отличие от поля излучения, которое "отрывается" от системы.

19.3 Спектральное представление запаздывающих потенциалов

Перейдём от временного описания к частотному. Представим переменное во времени поле как суперпозицию монохроматических волн с различными частотами. Найдём спектральное представление запаздывающих потенциалов.

Фурье-компонента скалярного потенциала (18.11) равна

$$\varphi(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t) dt = \int \frac{\rho(\mathbf{r}', \omega) \exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (19.14)$$

где

$$\rho(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t) dt$$

– компонента Фурье объёмной плотности заряда. Аналогичное соотношение нетрудно написать и для $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)$.

На больших расстояниях от системы зарядов выражение (19.14) преобразуется следующим образом. Подставляя разложение (19.2) в (19.14), получим

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}, \omega) &= \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \int dV' \rho(\mathbf{R}', \omega) \\ &\exp\left(i\frac{\omega}{c} \left(|\mathbf{r} - \mathbf{R}| - \mathbf{nR}' + \frac{1}{2|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} (\mathbf{R}'^2 - (\mathbf{nR}')^2) + \dots \right)\right) \end{aligned} \quad (19.15)$$

где предполагается, что $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \gg L > |\mathbf{R}'|$ (L – линейный размер системы). Если дополнительно предположить, что

$$|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \gg \frac{L^2}{\lambda} \quad (19.16)$$

где $\lambda = 2\pi c/\omega$ – длина волны, то из (19.15) следует

$$\varphi(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{R}|\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \int dV' \rho(\mathbf{R}', \omega) \exp\left(-i\frac{\omega}{c}\mathbf{nR}'\right) \quad (19.17)$$

Соответствующее выражение для векторного потенциала имеет вид

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{\exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{R}|\right)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \int dV' \mathbf{j}(\mathbf{R}', \omega) \exp\left(-i\frac{\omega}{c}\mathbf{nR}'\right) \quad (19.18)$$

Выражения для фурье-компонент напряжённостей электрического и магнитного полей могут быть получены из (19.17) и (19.18) с помощью соотношений, связывающих напряжённости с потенциалами. Для $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ имеем

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = -\text{grad } \varphi(\mathbf{r}, \omega) + i\frac{\omega}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)$$

Оставляя только члены, убывающие как $1/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$, и учитывая лоренцеву калибровку потенциалов

$$i\frac{\omega}{c}\varphi(\mathbf{r}, \omega) = \text{div}\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega),$$

получим

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\frac{\omega}{c}\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega) - i\frac{\omega}{c}\mathbf{n}(\mathbf{n}\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)) = i\frac{\omega}{c}\mathbf{A}_{\perp}(\mathbf{r}, \omega) \quad (19.19)$$

Предположение о ведущей роли членов, убывающих как $1/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$, оправдано только при условии $\omega|\mathbf{r} - \mathbf{R}|/c \gg 1$. Поэтому для применимости результата (19.19) расстояние от системы зарядов до точки наблюдения должно быть большим по сравнению с длиной волны,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \gg \lambda$$

Эта область называется *волновой зоной*.

В том же приближении, в каком было выведено соотношение (19.19), формула для магнитного поля имеет вид

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = i\frac{\omega}{c}[\mathbf{n}, \mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)] \quad (19.20)$$

где $\mathbf{A}(\mathbf{r}, \omega)$ определяется выражением (19.18).

Отметим, что спектральные составляющие напряжённостей электромагнитного поля на далёких расстояниях удовлетворяют тем же соотношениям, какие были справедливы для монохроматической плоской волны (см. (17.16)).

Лекция 20

20.1 Спектральное распределение энергии излучения

Если проинтегрировать величину $d^2\varepsilon/dtd\Omega$ по t от $-\infty$ до ∞ , получим полное количество энергии, которое излучает система за всё время движения зарядов,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\varepsilon}{dtd\Omega} dt = \frac{c}{4\pi} |\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) dt \quad (20.1)$$

Ту же величину, основываясь на равенстве (18.21), мы можем представить как интеграл по частотам

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}^2(\mathbf{r}, t) dt = 2 \int_0^{\infty} (|E_x(\mathbf{r}, \omega)|^2 + |E_y(\mathbf{r}, \omega)|^2 + |E_z(\mathbf{r}, \omega)|^2) \frac{d\omega}{2\pi} = 2 \int_0^{\infty} |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \frac{d\omega}{2\pi} \quad (20.2)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ – фурье-компонента напряжённости электрического поля.

Таким образом

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^2\varepsilon}{dtd\Omega} dt = \int_0^{\infty} \frac{c}{4\pi^2} |\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2 |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2 d\omega \quad (20.3)$$

Величину, стоящую под знаком интеграла по частотам, естественно называть спектральным распределением энергии излучения,

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega d\Omega} = \frac{c}{4\pi^2} |\mathbf{r} - \mathbf{R}|^2 |\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2 \quad (20.4)$$

Величина (20.4) определяет энергию, излучённую за всё время движения зарядов, в единичный интервал частот на частоте ω .

В зависимости от рассматриваемой физической задачи мы будем интересоваться энергией излучения в единицу времени или спектральным распределением энергии излучения (т.е. энергией, приходящейся на единичный интервал частот).

20.2 Дипольное излучение

Как было показано выше, на далёких расстояниях напряжённости электрического и магнитного полей удовлетворяют соотношениям, справедливым для плоской волны, и выражаются через векторный потенциал поля излучения (см. (19.7)-(19.9)),

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \int \mathbf{j} \left(\mathbf{R}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} + \frac{\mathbf{nR}'}{c} \right) dV' \quad (20.5)$$

Рассмотрим условия, когда в (20.5) можно пренебречь вкладом \mathbf{nR}'/c в запаздывание сигнала.

Пусть T – характерный масштаб изменения объёмной плотности тока как функции времени, L – линейный масштаб излучающей системы. Тогда членом \mathbf{nR}'/c в (20.5) можно пренебречь, если

$$T \gg \frac{L}{c} \quad (20.6)$$

т.е. за время распространения электромагнитной волны внутри системы расположение зарядов не успевают измениться. Неравенство (20.6) можно записать и в несколько ином виде, если оценить T как $T \sim L/v$, где v – характерная скорость перемещения зарядов. Тогда из (20.6) получим

$$v \ll c \quad (20.7)$$

т.е. вкладом \mathbf{nR}'/c в запаздывание можно пренебречь, если заряды внутри системы перемещаются с нерелятивистскими скоростями.

Пренебрегая \mathbf{nR}'/c в аргументе плотности тока в (20.5), получим выражение для векторного потенциала в виде

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \int \mathbf{j} \left(\mathbf{R}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \right) dV' \quad (20.8)$$

Подставляя в (20.8) плотность тока в виде

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}', t') = \sum_a e_a \mathbf{v}_a(t) \delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_a(t))$$

находим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \sum_a e_a \mathbf{v}_a \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \right) = \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \dot{\mathbf{d}} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \right) \quad (20.9)$$

где $\mathbf{d}(t) = \sum_a e_a \mathbf{R}_a(t)$ – дипольный момент системы зарядов.

Воспользовавшись формулами (19.7) и (19.9), вычислим напряженности $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c^2|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} [\mathbf{n}[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}]] \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c^2|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}] \end{aligned} \quad (20.10)$$

где $\ddot{\mathbf{d}} = \ddot{\mathbf{d}} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \right)$.

В условиях (20.6) (или (20.7)), когда мы можем пренебречь вкладом $\mathbf{n}\mathbf{R}'/c$ в (20.5), поле излучения (20.10) определяется только дипольным моментом системы. Поэтому рассматриваемое приближение обычно называют дипольным приближением, а возникающее в таких условиях излучение – дипольным излучением.

Отметим, что напряжённости (20.10) пропорциональны второй производной \mathbf{d} по времени, т.е., как мы уже утверждали ранее, система излучает, только если заряды движутся с ускорением.

Основываясь на (20.10), найдем энергию излучения системы. Подставляя любое из выражений (20.10) в (19.13), получим

$$\frac{d^2\varepsilon}{dt d\Omega} = \frac{1}{4\pi c^3} [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}]^2 \quad (20.11)$$

Формула (20.11) определяет энергию излучения в единицу времени и в единичный телесный угол, в момент времени $t - |\mathbf{r} - \mathbf{R}|/c$ и в направлении \mathbf{n} . Мгновенное угловое распределение излучения пропорционально $\sin^2 \theta$, где θ – угол между направлением \mathbf{n} и вектором $\ddot{\mathbf{d}} = \ddot{\mathbf{d}} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \right)$.

Если проинтегрировать (20.11) по направлениям, получим ($d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \int \frac{1}{4\pi c^3} [\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}]^2 d\Omega = \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{c^3} \quad (20.12)$$

При выводе (20.12) мы учли, что

$$\int \sin^2 \theta \, d\Omega = \int_0^\pi \sin^3 \theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{8\pi}{3} \quad (20.13)$$

Выведем теперь соотношения для спектрального распределения энергии излучения в дипольном приближении.

По аналогии с проведённым выше анализом, обратимся к выражению для фурье-компоненты векторного потенциала (19.18). Пренебrecь в этом приближении величиной \mathbf{nR}'/c можно при выполнении условия

$$\frac{\omega}{c}L \ll 1 \quad \text{или} \quad L \ll \lambda \quad (20.14)$$

т.е. размер системы должен быть много меньше длины волны. Условие (20.14) согласуется с (20.6), поскольку характерную частоту излучения системы можно оценить как $\omega \sim 1/T$.

При выполнении неравенства (20.14) можно воспользоваться фурье-компонентой любого из выражений (20.10) и определением (20.4). В результате для спектрального распределения энергии излучения в дипольном приближении находим

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega d\Omega} = \frac{1}{4\pi^2 c^3} |[\mathbf{n}\ddot{\mathbf{d}}(\omega)]|^2 \quad (20.15)$$

где $\ddot{\mathbf{d}}(\omega)$ – фурье-компонента временной зависимости второй производной дипольного момента системы.

Если проинтегрировать формулу (20.15) по направлениям, получим

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \frac{2}{3\pi} \frac{|\ddot{\mathbf{d}}(\omega)|^2}{c^3} \quad (20.16)$$

Формулы (20.15) и (20.16) можно дополнительно преобразовать в предположении, что существует (т.е. сходится соответствующий интеграл по времени) не только $\ddot{\mathbf{d}}(\omega)$, но и фурье-компонента самого дипольного момента $\mathbf{d}(\omega)$. Тогда, интегрируя выражение для фурье-компоненты $\ddot{\mathbf{d}}(\omega)$ два раза по частям, получим связь $\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = -\omega^2 \mathbf{d}(\omega)$, и вместо, например, (20.16) будем иметь

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \frac{2}{3\pi} \omega^4 \frac{|\mathbf{d}(\omega)|^2}{c^3} \quad (20.17)$$

20.3 Торможение излучением

Если частица излучает, то тем самым теряет свою энергию. Эту потерю энергии можно описать как действие некоторой силы – силы радиационного трения.

Рассмотрим нерелятивистскую заряженную частицу, которая движется с ускорением. Тогда в дипольном приближении, которое справедливо для данного – нерелятивистского – случая, энергия излучения в единицу времени равна (см. (20.12))

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{r}}^2$$

Поскольку излучение приводит к уменьшению энергии частицы, то

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\frac{d\varepsilon}{dt}.$$

Рассмотрим движение заряженной частицы между двумя точками, в которых, будем считать, ускорение обращается в нуль. Тогда уменьшение энергии частицы благодаря излучению будет равно

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathcal{E}}{dt} dt = - \int_{t_1}^{t_2} \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{r}}^2 dt \quad (20.18)$$

С другой стороны, изменение энергии частицы можно рассматривать как работу, производимую силой радиационного трения. Тогда

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{d\mathcal{E}}{dt} dt = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{f} \dot{\mathbf{r}} dt = \int_1^2 \mathbf{f} d\mathbf{r} \quad (20.19)$$

Приравнявая эти выражения и интегрируя (20.18) по частям, находим

$$\int_1^2 \mathbf{f} d\mathbf{r} = - \int_1^2 \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \ddot{\mathbf{r}} d\dot{\mathbf{r}} = \int_1^2 \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^3\mathbf{r}^2}{dt^3} d\mathbf{r}$$

Отсюда

$$\mathbf{f} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} \quad (20.20)$$

Сила радиационного трения описывает обратное действие излучения на движение заряженной частицы.

Отметим, что введённая таким образом сила должна быть мала по сравнению с силами, приводящими к ускоренному движению заряда.

Рассмотрим движение нерелятивистской частицы во внешних полях с учётом силы торможения излучением

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}\mathbf{H}] + \mathbf{f}$$

Выясним условия, при выполнении которых сила \mathbf{f} оказывается малой по сравнению с силами, возникающими из-за внешнего поля. Имеем

$$m\frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} = e\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{c}[\ddot{\mathbf{r}}\mathbf{H}] + \frac{e}{c}[\dot{\mathbf{r}}\dot{\mathbf{H}}] \approx e\dot{\mathbf{E}} + \frac{e}{c}\left[\frac{e}{m}\mathbf{E}, \mathbf{H}\right]$$

где вместо $\ddot{\mathbf{r}}$ мы подставили в первом приближении

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e}{m}\mathbf{E}.$$

Таким образом,

$$\mathbf{f} = \frac{2e^3}{3m^3}\dot{\mathbf{E}} + \frac{2e^4}{3m^2c^4}[\mathbf{E}, \mathbf{H}] \quad (20.21)$$

Если ввести характерную частоту изменения электрического поля ω , то условие малости первого члена в (20.21) по сравнению с $e\mathbf{E}$ будет выглядеть так

$$\lambda \sim \frac{c}{\omega} \gg \frac{e^2}{mc^2}$$

Условие малости второго члена в (20.21) по сравнению с $e\mathbf{E}$ можно записать в виде

$$\lambda_H \sim \frac{c}{\omega_H} \gg \frac{e^2}{mc^2}$$

где $\omega_H = eH/mc$ – частота вращения заряда в магнитном поле. Как следует из полученных неравенств, проведённое выше рассмотрение справедливо, пока характерные длины волн, λ и λ_H , превышают величину порядка e^2/mc^2 (в действительности из-за квантовых эффектов электродинамика становится неприменимой на больших расстояниях).

Лекция 21

21.1 Рассеяние электромагнитных волн. Рассеяние свободным зарядом

Пусть на заряженную частицу падает электромагнитная волна. Тогда под действием поля частица начинает двигаться с ускорением и излучать электромагнитные волны. Направление распространения излучаемых частицей волн будет отличаться от направления распространения падающей волны. Таким образом, возникает рассеяние исходной волны.

Процесс рассеяния принято характеризовать сечением рассеяния. Дифференциальное сечение рассеяния определим следующим образом. Введем усреднённую по времени энергию излучения заряда в единичный телесный угол в единицу времени

$$\left\langle \frac{d^2\varepsilon}{dt d\Omega} \right\rangle.$$

Тогда дифференциальное сечение рассеяния равно отношению

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{\langle S \rangle} \left\langle \frac{d^2\varepsilon}{dt d\Omega} \right\rangle \quad (21.1)$$

где $\langle S \rangle$ – усреднённая по времени плотность потока энергии (усреднённое значение вектора Пойнтинга) в падающей на заряд волне. Полное сечение рассеяния есть интеграл от (21.1) по $d\Omega$. Определённое равенством (21.1) сечение имеет размерность площади (что объясняет термин "сечение").

Рассмотрим рассеяние плоской монохроматической волны на одиночном заряде. Элек-

трическое поле в падающей волне запишем в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) = \text{Re}\mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)) \quad (21.2)$$

где \mathbf{E}_0 – постоянный действительный вектор, т.е. волна линейно поляризована. Усреднённая по времени плотность потока энергии в падающей волне будет равна

$$\langle S \rangle = \frac{c}{8\pi} \mathbf{E}_0^2 \quad (21.3)$$

(дополнительный множитель $1/2$ возникает при усреднении по времени квадрата косинуса).

Предполагаем, что скорость, которую приобретает заряженная частица под действием поля, намного меньше скорости света. Тогда можно ограничиться только учётом силы $e\mathbf{E}$, действующей на частицу со стороны электрического поля. Действием силы $(e/c)[\mathbf{v}\mathbf{H}]$, которая оказывается в v/c раз меньше, следует пренебречь. Тогда уравнение движения заряженной частицы принимает вид

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t) \quad (21.4)$$

Скорость, которую приобретает заряд под действием поля, по порядку величины равна $eE_0/(m\omega)$. Поэтому говорить о нерелятивистской ситуации можно при условии $eE_0/(m\omega) \ll c$. При таком условии характерное смещение заряда $eE_0/(m\omega^2)$ оказывается много меньше длины волны падающего поля $\lambda = 2\pi c/\omega$, и можно пренебречь влиянием движения заряда на величину действующего на него поля, т.е. положить в правой части (21.4) в аргументе косинуса $\mathbf{k}\mathbf{r} \approx \mathbf{k}\mathbf{r}_0$, где \mathbf{r}_0 – радиус-вектор точки, около которой колеблется заряженная частица.

Таким образом, из (21.4) следует, что

$$\ddot{\mathbf{d}} = e\ddot{\mathbf{r}} = \frac{e^2}{m} \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{k}\mathbf{r}_0 - \omega t) \quad (21.5)$$

Предположение о нерелятивистском характере движения заряда делает законным использование дипольного приближения. В результате получаем

$$\left\langle \frac{d^2\epsilon}{dt d\Omega} \right\rangle = \frac{e^4}{8\pi m^2 c^3} [\mathbf{n}\mathbf{E}_0]^2 \quad (21.6)$$

Отношение (21.6) к (21.3) даёт

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \sin^2 \theta \quad (21.7)$$

где θ – угол между направлением распространения рассеянной волны и вектором напряжённости электрического поля \mathbf{E}_0 в падающей волне.

Полное сечение получается из (21.7) интегрированием по углам. С учётом (20.13) находим

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \quad (21.8)$$

Следует отметить, что сечение рассеяния свободным зарядом не зависит от частоты. В случае рассеяния на электроне формулу (21.8) можно записать как

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2$$

где $r_e = e^2/(m_e c^2)$ – так называемый классический радиус электрона.

На практике часто встречается ситуация, когда волна не поляризована. Для того, чтобы вычислить дифференциальное сечение для неполяризованной волны, необходимо усреднить (21.7) по направлениям вектора \mathbf{E}_0 . Введём сферическую систему координат, в которой полярный угол отсчитывается от направления волнового вектора \mathbf{k} падающей волны (т.е. ось z направлена по \mathbf{k}). Тогда, поскольку вектор \mathbf{E}_0 лежит в плоскости, перпендикулярной вектору \mathbf{k} , $\mathbf{E}_0 = E_0(\cos \varphi_0, \sin \varphi_0, 0)$. В этой системе координат единичный вектор \mathbf{n} , указывающий направление распространения рассеянной волны, равен $\mathbf{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$, где ϑ – угол между \mathbf{k} и \mathbf{n} . Косинус угла θ между векторами \mathbf{E}_0 и \mathbf{n} будет равен

$$\cos \theta = \sin \vartheta (\cos \varphi \cos \varphi_0 + \sin \varphi \sin \varphi_0) = \sin \vartheta \cos(\varphi - \varphi_0)$$

Соответственно, входящий в (21.7) множитель $\sin^2 \theta$ есть

$$\sin^2 \theta = 1 - \sin^2 \vartheta \cos^2(\varphi - \varphi_0)$$

Усреднение по направлениям вектора \mathbf{E}_0 означает усреднение по φ_0 . Таким образом, получаем

$$\langle \sin^2 \theta \rangle = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \vartheta = \frac{1}{2} (1 + \cos^2 \vartheta) \quad (21.9)$$

Подставляя (21.9) в (21.7), находим дифференциальное сечение рассеяния неполяризованной волны

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{2} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 (1 + \cos^2 \vartheta) \quad (21.10)$$

Если проинтегрировать (21.10) по углам, придём к результату (21.8).

21.2 Рассеяние электромагнитной волны осциллятором

До сих пор мы рассматривали рассеяние свободной частицей. Обобщим полученные результаты на случай, когда рассеяние происходит на связанном заряде. В качестве примера рассмотрим рассеяние на осцилляторе.

В тех же предположениях, что и раньше, вместо уравнения (21.4) будем иметь следующее уравнение:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega_0^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \frac{e}{m} \mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{kr} - \omega t) \quad (21.11)$$

где \mathbf{r}_0 – радиус-вектор точки, относительно которой происходят колебания частицы в осцилляторе. Далее, предполагая, что смещение заряда много меньше длины волны, положим $\mathbf{kr} \approx \mathbf{kr}_0$. После этого решение уравнения (21.11) легко находится,

$$\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_0 = \frac{e\mathbf{E}_0 \cos(\mathbf{kr}_0 - \omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$$

Интересующая нас производная дипольного момента будет иметь вид

$$\ddot{\mathbf{d}} = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2 - \omega^2} \frac{e^2 \mathbf{E}_0}{m} \cos(\mathbf{kr}_0 - \omega t) \quad (21.12)$$

Сравнивая с (21.5), видим, что всё отличие (21.12) от (21.5) сводится к появлению зависящего от частоты множителя. Поэтому для дифференциального и полного сечений рассеяния можем сразу записать

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \sin^2 \theta \\ \sigma &= \frac{8\pi}{3} \left(\frac{e^2}{mc^2} \right)^2 \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2} \end{aligned} \quad (21.13)$$

При больших частотах $\omega \gg \omega_0$ заряд не успевает почувствовать действие "связывающей" его упругой силы. Рассеяние волны происходит как на свободной частице. При частотах

ω близких к ω_0 из-за близости резонанса возрастает амплитуда колебаний. Соответственно, возрастает и сечение рассеяния. При низких частотах $\omega \ll \omega_0$ сечение оказывается пропорциональным ω^4 .

21.3 Рассеяние системой зарядов

Проанализируем теперь рассеяние волн на системе зарядов. Наша цель – понять, как влияет на сечение рассеяния взаимное расположение рассеивающих падающую волну частиц.

Воспользуемся формулой (19.8) для производной по времени от векторного потенциала и подставим в неё объёмную плотность тока системы движущихся зарядов. Предполагая, как и выше, что заряды движутся с нерелятивистскими скоростями, получим

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \sum_a e_a \dot{\mathbf{v}}_a \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{R}_a^{(0)}}{c} \right) \quad (21.14)$$

Как и при рассмотрении рассеяния на отдельном заряде, мы считаем, что можно не учитывать смещение заряда под действием поля и положить в запаздывании $\mathbf{R}_a(t) \approx \mathbf{R}_a^{(0)}$. Для входящей в (21.14) величины $e_a \dot{\mathbf{v}}_a$ можно сразу воспользоваться результатом (21.5) и записать

$$e_a \dot{\mathbf{v}}_a \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{R}_a^{(0)}}{c} \right) = \frac{e^2}{m} \mathbf{E}_0 \cos \left(\mathbf{k}(\mathbf{R} + \mathbf{R}_a^{(0)}) - \omega \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{R}_a^{(0)}}{c} \right) \right) \quad (21.15)$$

Подставим (21.15) в (21.14) и, вычисляя затем напряжённость поля, получим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d^2 \varepsilon}{dt d\Omega} \right\rangle &= \frac{[\mathbf{n}\mathbf{E}_0]^2}{4\pi c^3} \cdot \left\langle \sum_a \frac{e_a^2}{m_a} \cos \left(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \right) + \left(\mathbf{k} - \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \right) \mathbf{R}_a^{(0)} \right) \right. \\ &\quad \left. \sum_b \frac{e_b^2}{m_b} \cos \left(\mathbf{k}\mathbf{R} - \omega \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \right) + \left(\mathbf{k} - \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \right) \mathbf{R}_b^{(0)} \right) \right\rangle \quad (21.16) \end{aligned}$$

Усредняя произведение косинусов по времени, приходим к выражению

$$\left\langle \frac{d^2 \varepsilon}{dt d\Omega} \right\rangle = \frac{[\mathbf{n}\mathbf{E}_0]^2}{8\pi c^3} \sum_a \sum_b \frac{e_a^2 e_b^2}{m_a m_b} \cos \left(\mathbf{k} - \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \right) \left(\mathbf{R}_a^{(0)} - \mathbf{R}_b^{(0)} \right) \quad (21.17)$$

Если разделить (21.17) на $\langle S \rangle$ (21.3), то получим дифференциальное сечение рассеяния электромагнитной волны системой зарядов. Проанализируем выражение для сечения,

предполагая, что все частицы одинаковые. Тогда

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \theta \sum_a \sum_b \cos\left(\mathbf{k} - \frac{\omega}{c}\mathbf{n}\right) \left(\mathbf{R}_a^{(0)} - \mathbf{R}_b^{(0)}\right) \quad (21.18)$$

Представляет интерес рассмотреть полученный результат в двух предельных случаях больших (по сравнению с линейным размером системы L) и малых длин волн.

При $\lambda \gg L$ аргумент косинуса всегда мал. Поэтому

$$\cos\left(\mathbf{k} - \frac{\omega}{c}\mathbf{n}\right) \left(\mathbf{R}_a^{(0)} - \mathbf{R}_b^{(0)}\right) \approx 1$$

и

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = N^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \theta \quad (21.19)$$

где N – число заряженных частиц в системе. То, что $d\sigma/d\Omega \sim N^2$, означает, что рассеянное поле представляет собой сумму рассеянных отдельными зарядами полей, сдвиги фаз между которыми малы.

При $\lambda \ll L$ ситуация иная. Аргумент косинуса в (21.18) при $a \neq b$ нельзя считать малым. При случайном взаимном расположении зарядов суммирование слагаемых с $a \neq b$ даст нуль. Основной вклад в (21.18) дадут слагаемые с $a = b$,

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = N \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \theta \quad (21.20)$$

Результат (21.20) означает, что заряды рассеивают независимо и сечение есть сумма сечений рассеяния отдельным зарядом. Исключением является ситуация, когда рассеяние происходит в направлении, близком к направлению распространения падающей волны. В этом случае

$$\left|\mathbf{k} - \frac{\omega}{c}\mathbf{n}\right| \approx \frac{\omega}{c}\vartheta$$

и при $\vartheta \ll \lambda/L$ аргумент косинуса в (21.18) всегда мал. Поэтому, при $\vartheta \ll \lambda/L$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = N^2 \left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \sin^2 \theta$$

т.е. при рассеянии под малыми углами складываются поля (сдвиги фаз между ними малы), а не сечения.

Таким образом, при $\lambda \gg L$ дифференциальное сечение рассеяния системой зарядов имеет резкий максимум в направлении, близком к направлению распространения падающей волны. Характерная угловая ширина максимума порядка λ/L . При $\vartheta > \lambda/L$ дифференциальное сечение быстро убывает до значений (21.20).

Лекция 22

22.1 Магнитно-дипольное и квадрупольное излучение

Обратимся к выражению (20.5) для векторного потенциала на далёких расстояниях от системы движущихся зарядов. Предполагаем, что выполнено условие (20.6) и вклад \mathbf{nR}'/c в запаздывание сигнала является малой величиной. Разложим (20.5) в ряд по \mathbf{nR}'/c

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \int \mathbf{j} \left(\mathbf{R}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|}{c} \right) dV' \\ &\frac{1}{c^2|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{j} \left(\mathbf{R}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|}{c} \right) (\mathbf{nR}') dV' + \dots \end{aligned} \quad (22.1)$$

Первый член в разложении (22.1) представляет собой уже рассмотренный выше дипольный вклад в поле излучения. Нас будет интересовать второй член в разложении (22.1).

Подставляя в (22.1) обычное выражение для объёмной плотности тока системы точечных зарядов, получим

$$\int \mathbf{j} \left(\mathbf{R}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|}{c} \right) (\mathbf{nR}') dV' = \sum_a e_a \mathbf{v}_a \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|}{c} \right) \left(\mathbf{nR}_a \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|}{c} \right) \right) \quad (22.2)$$

Преобразуем произведение векторов, стоящее под знаком суммы

$$\mathbf{v}_a(\mathbf{nR}_a) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}_a(\mathbf{nR}_a) + \frac{1}{2} \mathbf{v}_a(\mathbf{nR}_a) - \frac{1}{2} \mathbf{R}_a(\mathbf{nv}_a) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}_a(\mathbf{nR}_a) + \frac{1}{2} [\mathbf{n}[\mathbf{v}_a \mathbf{R}_a]] \quad (22.3)$$

Возвращаясь к (22.2), получим сумму двух вкладов. Один вклад в (22.2) равен

$$\frac{1}{2} \sum_a [\mathbf{n}[\mathbf{v}_a \mathbf{R}_a]] = c \left[\mathbf{m} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}'|}{c} \right), \mathbf{n} \right] \quad (22.4)$$

где

$$\mathbf{m}(t) = \frac{1}{2c} \sum_a [\mathbf{R}_a(t), \mathbf{v}_a(t)]$$

магнитный момент системы зарядов.

Второй вклад в (22.2) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{2} \sum_a e_a \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{R}_a(\mathbf{nR}_a) = \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial t} \sum_a e_a (3\mathbf{R}_a(\mathbf{nR}_a) - \mathbf{n}(\mathbf{R}_a)^2) = \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \right) \quad (22.5)$$

где вектор \mathbf{D} выражается через определённый ранее (см. (14.14)) тензор квадрупольного момента $D_{\alpha\beta}$,

$$D_\alpha = D_{\alpha\beta} n_\beta, \quad D_{\alpha\beta} = \sum_a e_a (3(\mathbf{R}_a)_\alpha (\mathbf{R}_a)_\beta - \mathbf{R}_a^2 \delta_{\alpha\beta}) \quad (22.6)$$

В (22.5) мы добавили к $\mathbf{R}_a(\mathbf{nR}_a)$ член $(\mathbf{R}_a)^2 \mathbf{n}/3$, который не должен повлиять на окончательный результат, так как напряжённости поля \mathbf{E} и \mathbf{H} выражаются через векторное произведение \mathbf{n} и $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$.

Таким образом, окончательно имеем

$$\int \mathbf{j} \left(\mathbf{R}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \right) (\mathbf{nR}') dV' = c \left[\mathbf{m} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \right), \mathbf{n} \right] + \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{D} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \right) \quad (22.7)$$

Подставляя этот результат в (22.1), получим

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \left(\dot{\mathbf{d}} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \right) + \left[\dot{\mathbf{m}} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \right), \mathbf{n} \right] + \frac{1}{6c} \ddot{\mathbf{D}} \left(t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \right) \right) \quad (22.8)$$

После того, как векторный потенциал $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ найден, по формулам (19.7), (19.9) нетрудно вычислить напряжённости электрического и магнитного полей и затем определить интенсивность излучения, т.е. энергию излучения в единичный телесный угол в единицу времени.

Наиболее компактно выглядит выражение для $d\varepsilon/dt$, т.е. получающееся в результате интегрирования $d^2\varepsilon/dtd\Omega$ по направлениям \mathbf{n} . При интегрировании по направлениям обращаются в нуль все перекрестные слагаемые, возникающие в выражении для квадрата напряженности поля от произведений различных членов в формуле (22.8). Остаётся только сумма квадратов отдельных членов, входящих в формулу (22.8). Таким образом,

энергия излучения в единицу времени представляет собой сумму вкладов, имеющих независимое происхождение,

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{d}}^2}{c^3} + \frac{2}{3} \frac{\ddot{\mathbf{m}}^2}{c^3} + \frac{1}{180c^5} \left(\frac{\partial^3 D_{\alpha\beta}}{\partial t^3} \right)^2 \quad (22.9)$$

Значения всех производных берутся в момент времени $t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}{c}$.

Три отдельных вклада в (22.9) называются дипольным, магнитно-дипольным и квадрупольными вкладами в излучение системы.

Дипольный вклад в (22.9) был уже получен раньше. Вычисление магнитно-дипольного вклада (22.9) также не представляет затруднений (вычисления аналогичны нахождению дипольного вклада). Поясним способ вычисления квадрупольного вклада.

Зная выражение для векторного потенциала, нетрудно найти соответствующий вклад в магнитное поле (следим только за квадрупольным слагаемым)

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{6c^3|\mathbf{r}-\mathbf{R}|} \left[\mathbf{n}, \left(\frac{\partial^3 \mathbf{D}}{\partial t^3} \left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{R}|}{c} \right) \right) \right]$$

В результате для $d^2\varepsilon/dtd\Omega$ находим

$$\frac{d^2\varepsilon}{dtd\Omega} = -\frac{1}{144\pi c^5} \left[\mathbf{n}, \frac{\partial^3 \mathbf{D}}{\partial t^3} \right]^2 \quad (22.10)$$

Используя запись векторного произведения через инвариантный антисимметричный тензор $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$, перепишем (22.10) в виде

$$\frac{d^2\varepsilon}{dtd\Omega} = -\frac{1}{144\pi c^5} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} n_\beta \frac{\partial^3 D_{\gamma\delta}}{\partial t^3} n_\delta \varepsilon_{\alpha\beta_1\gamma_1} n_{\beta_1} \frac{\partial^3 D_{\gamma_1\delta_1}}{\partial t^3} n_{\delta_1} \quad (22.11)$$

В (22.11) входит величина

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \varepsilon_{\alpha\beta_1\gamma_1} = \delta_{\beta\beta_1} \delta_{\gamma\gamma_1} - \delta_{\beta\gamma_1} \delta_{\beta_1\gamma}$$

Интегрирование (22.11) по направлениям сводится к вычислению интеграла

$$\int n_\beta n_\delta n_{\beta_1} n_{\delta_1} d\Omega \quad (22.12)$$

Этот интеграл проще всего вычислить следующим образом. Очевидно, что (22.12) должен быть инвариантным (т.е. не зависящим от выбора системы координат) симметричным

тензором четвертого ранга. Такой тензор может быть образован только симметричным попарным произведением тензоров $\delta_{\alpha\beta}$:

$$\int n_\beta n_\delta n_{\beta_1} n_{\delta_1} d\Omega = A (\delta_{\beta\delta} \delta_{\beta_1 \delta_1} + \delta_{\beta\beta_1} \delta_{\delta\delta_1} + \delta_{\beta\delta_1} \delta_{\beta_1 \delta}) \quad (22.13)$$

Постоянную A легко найти, умножив обе части равенства, например, на $\delta_{\beta\delta} \delta_{\beta_1 \delta_1}$. Тогда получим

$$\int d\Omega = 4\pi = 15A$$

т.е. $A = 4\pi/15$. Подставляя этот результат в выражение

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{144\pi c^5} (\delta_{\beta\beta_1} \delta_{\gamma\gamma_1} - \delta_{\beta\gamma_1} \delta_{\beta_1 \gamma}) \frac{\partial^3 D_{\gamma\delta}}{\partial t^3} \frac{\partial^3 D_{\gamma_1 \delta_1}}{\partial t^3} \int n_\beta n_\delta n_{\beta_1} n_{\delta_1} d\Omega$$

и учитывая, что тензор квадрупольного момента является симметричным тензором с равным нулю следом, приходим к выражению для квадрупольного вклада в $d\varepsilon/dt$, которое совпадает с третьим членом в (22.9).

22.2 Тормозное излучение низких частот

При столкновении заряженные частицы движутся с ускорением. Поэтому столкновение частиц сопровождается излучением, которое называют тормозным излучением.

Рассмотрим столкновение частицы с некоторым силовым центром. До столкновения скорость частицы равна \mathbf{v} , после столкновения $-\mathbf{v}'$. Найдём для этого случая спектральное распределение энергии тормозного излучения при низких частотах. Оценку границы частот, которые следует считать низкими, проще всего сделать в нерелятивистском случае. Если ввести время столкновения $\tau \sim \rho/v$, где ρ – прицельный параметр, то низкими следует считать частоты, меньшие $1/\tau$. В ультрарелятивистском случае соответствующая граница сдвигается в сторону больших значений (более подробно мы рассмотрим этот вопрос при анализе спектра излучения быстро движущегося заряда).

Рассмотрим фурье-компоненту напряжённости магнитного поля излучения (см. (19.9))

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \exp(i\omega t) dt = -\frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathbf{n}, \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right] \exp(i\omega t) dt \quad (22.14)$$

Если характерное время изменения $\mathbf{H}(\mathbf{r}, t)$ или $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ много меньше, чем $1/\omega$, то экспоненту под знаком интеграла можно заменить на не зависящий от времени фазовый множитель $\exp(i\omega t_0)$, где t_0 – момент соударения (значение t_0 можно выбрать равным нулю). Тогда

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = [\mathbf{n}, \mathbf{A}(\mathbf{r}, t = \infty) - \mathbf{A}(\mathbf{r}, t = -\infty)] \quad (22.15)$$

Значения $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t = \pm\infty)$ легко найти из формул для потенциалов Лиенара-Вихерта. Интересующее нас выражение уже было получено ранее (см. формулу (19.10)). Поэтому для $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t = \pm\infty)$ можем записать

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t = \pm\infty) = \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \cdot \frac{e\mathbf{v}(t = \pm\infty)}{1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}(t = \pm\infty)}{c}} \quad (22.16)$$

Значения скорости $\mathbf{v}(t = \pm\infty)$ совпадают со значениями скорости частицы после и до столкновения, т.е. с \mathbf{v}' и \mathbf{v} . Считаем, что размеры области, где происходит столкновение, малы по сравнению с расстоянием $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ до точки наблюдения.

Подставляя (22.15), (22.16) в формулу для $d^2\varepsilon/d\omega d\Omega$ (20.4) (учтём, что $|\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)|^2 = |\mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)|^2$), получим

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} \left(\frac{[\mathbf{n}\mathbf{v}']}{1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}'}{c}} - \frac{[\mathbf{n}\mathbf{v}]}{1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}}{c}} \right)^2 \quad (22.17)$$

В нерелятивистском пределе из (22.17) следует

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} [\mathbf{n}, \mathbf{v}' - \mathbf{v}]^2 \quad (22.18)$$

Как и должно быть при $v \ll c$, формула (22.17) совпадает с формулой дипольного приближения. При низких частотах

$$\ddot{\mathbf{d}}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\mathbf{d}}(t) \exp(i\omega t) dt \approx \dot{\mathbf{d}}(\infty) - \dot{\mathbf{d}}(-\infty) = e(\mathbf{v}' - \mathbf{v})$$

Подставляя $\ddot{\mathbf{d}}(\omega)$ в (20.15), получим (22.18)).

Отметим, что результат (22.17) не зависит от частоты ω , т.е. спектральное распределение энергии тормозного излучения при низких частотах стремится к постоянной величине.

В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим спектральное распределение энергии излучения при испускании заряженной частицы, движущейся со скоростью \mathbf{v}' . Такая физическая ситуация возникает, например, при β -распаде.

Испускание частицы можно рассматривать как очень быстрое изменение скорости от нуля до \mathbf{v}' . Поэтому в (22.17)) нужно оставить только один член с \mathbf{v}' ,

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} \frac{v'^2 \sin^2 \theta}{\left(1 - \frac{v'}{c} \cos \theta\right)^2} \quad (22.19)$$

В нерелятивистском пределе угловая зависимость (22.19)) описывается множителем $\sin^2 \theta$. В ультрарелятивистском случае ($1 - v'/c \ll 1$) существенную роль в (22.19) играет знаменатель. Излучение сосредоточено в области малых углов,

$$\theta < \sqrt{1 - \frac{v'}{c}} \sim \sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}.$$

В направлении вперёд (т.е. под углом $\theta = 0$) из-за множителя $\sin^2 \theta$ излучение отсутствует. Максимум углового распределения (22.19) наблюдается при

$$\theta_{max} = \sqrt{2 \left(1 - \frac{v'}{c}\right)} \approx \sqrt{1 - \left(\frac{v'}{c}\right)^2}.$$

Интегрируя (22.19)) по направлениям ($d\Omega = \sin \theta d\theta d\varphi$), получим

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \frac{e^2}{\pi v'} \left(\ln \frac{1 + \frac{v'}{c}}{1 - \frac{v'}{c}} - 2 \frac{v'}{c} \right) \quad (22.20)$$

В нерелятивистском пределе отсюда следует результат дипольного приближения

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2 v'^2}{c^3}$$

В ультрарелятивистском случае формулу (22.20)) можно записать в виде

$$\frac{d\varepsilon}{d\omega} = 2 \frac{e^2}{\pi} \ln \frac{\mathcal{E}}{mc^2} \quad (22.21)$$

Т.е. $d\varepsilon/d\omega$ растёт как логарифм энергии частицы \mathcal{E} .

Лекция 23

23.1 Излучение частицы при большой скорости движения

Для анализа особенностей излучения заряда при скорости движения, сопоставимой со скоростью света, воспользуемся потенциалами Лиенара-Вихерта.

Выведем выражение для напряжённости электрического поля излучения. Для этого, согласно (19.7), достаточно найти производную по времени от векторного потенциала на больших расстояниях от излучающего заряда.

Перейдём в формуле для векторного потенциала (18.18) к пределу больших расстояний. Запишем $\mathbf{r}_0(t_0)$ в виде $\mathbf{r}_0(t_0) = \mathbf{R} + \mathbf{R}_0(t_0)$, где \mathbf{R} – радиус-вектор некоторого участка траектории частицы, относительно которого смещение частицы за время наблюдения мало по сравнению с расстоянием $|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ до наблюдателя, т.е. $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \gg |\mathbf{R}_0(t_0)|$. Тогда из (18.18) получаем

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \cdot \frac{e\mathbf{v}_0(t_0)}{1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0(t_0)}{c}} \quad (23.1)$$

где $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{R})/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$, $t_0 = t_0(\mathbf{r}, t)$ при условии $|\mathbf{r} - \mathbf{R}| \gg |\mathbf{R}_0(t_0)|$ есть корень уравнения

$$t - t_0 - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} + \frac{\mathbf{n}\mathbf{R}_0(t_0)}{c} = 0 \quad (23.2)$$

Продифференцируем (23.1) по времени и получим

$$\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \frac{e}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \left(\frac{\dot{\mathbf{v}}_0(t_0)}{1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0(t_0)}{c}} + \frac{\dot{\mathbf{v}}_0(t_0)}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0(t_0)}{c}\right)^2} \cdot \left(\frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}_0(t_0)}{c}\right) \right) \frac{\partial t_0}{\partial t} \quad (23.3)$$

Значения $\partial t_0/\partial t$ найдем, дифференцируя (23.2),

$$1 - \frac{\partial t_0}{\partial t} + \frac{\mathbf{nv}_0(t_0)}{c} \frac{\partial t_0}{\partial t} = 0$$

В результате имеем

$$\frac{\partial t_0}{\partial t} = \frac{1}{1 - \frac{\mathbf{nv}_0(t_0)}{c}} \quad (23.4)$$

Подставляя теперь (23.3),(23.4) в выражение для напряжённости электрического поля (19.7), находим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{1}{c} \left(\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} - \mathbf{n} \left(\mathbf{n} \frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right) \right) = \\ &= -\frac{e}{c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathbf{nv}_0}{c}\right)^3} \left(\dot{\mathbf{v}}_0 \left(1 - \frac{\mathbf{nv}_0}{c}\right) + \mathbf{v}_0 \left(\frac{\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}_0}{c}\right) - \mathbf{n}(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}_0) \right) = \\ &= \frac{e}{c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathbf{nv}_0}{c}\right)^3} \left[\mathbf{n} \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}_0}{c}\right) \dot{\mathbf{v}}_0 \right] \right] \end{aligned} \quad (23.5)$$

Таким образом, если заряд движется с ускорением, то возникает убывающая как $1/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$ составляющая электрического поля (23.5), которая представляет собой поле излучения.

Подставим результат (23.5) в (19.3) и запишем выражение для $d^2\varepsilon/dtd\Omega$ в виде

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varepsilon}{dtd\Omega} &= \frac{e^2}{4\pi c^3} \cdot \\ &\left(\frac{\dot{\mathbf{v}}_0^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{nv}_0}{c}\right)^4} + \frac{2(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}_0) \left(\frac{\mathbf{v}_0 \dot{\mathbf{v}}_0}{c}\right)}{\left(1 - \frac{\mathbf{nv}_0}{c}\right)^5} - \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) \cdot \frac{(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}_0)^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{nv}_0}{c}\right)^6} \right) \end{aligned} \quad (23.6)$$

где $\dot{\mathbf{v}}_0$ и \mathbf{v}_0 берутся в момент времени $t_0 = t_0(\mathbf{r}, t)$.

В нерелятивистском предельном случае в выражении (23.6) главными оказываются первое и последнее слагаемые. Формула (23.6) переходит в полученный ранее результат дипольного приближения (20.11), где $\ddot{\mathbf{d}} = e\dot{\mathbf{v}}_0$.

Достаточно громоздкое в общем случае выражение (23.6) приобретает более компактный вид, если скорость \mathbf{v}_0 и ускорение $\dot{\mathbf{v}}_0$ частицы параллельны друг другу или взаимно ортогональны. В первом случае имеем

$$\frac{d^2\varepsilon}{dtd\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \cdot \frac{\dot{\mathbf{v}}_0^2 - (\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}_0)^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{nv}_0}{c}\right)^6}, \quad (23.7)$$

а во втором –

$$\frac{d^2\varepsilon}{dtd\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \cdot \left(\frac{\dot{\mathbf{v}}_0^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)^4} - \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) \cdot \frac{(\mathbf{n}\dot{\mathbf{v}}_0)^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)^6} \right) \quad (23.8)$$

Угловое распределение излучения в ультрарелятивистском предельном случае ($1 - v_0/c \ll 1$) вытянуто вперёд, в направлении движения частицы. Эта особенность связана со степенями величины $(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_0/c)$ в знаменателе (23.6) (и, соответственно, в (23.7), (23.8)). Множители вида $(1 - \mathbf{n}\mathbf{v}_0/c)^{-k}$, где $k = 4 \div 6$, имеют резкий максимум в направлении вперёд. Угловая ширина максимума по порядку величины есть

$$\Delta\theta = \sqrt{1 - \frac{v_0}{c}} \sim \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}.$$

Аналогичную особенность мы уже обсуждали применительно к спектру излучения низких частот (22.19).

Детали углового распределения излучения зависят от взаимной ориентации скорости и ускорения. В случае, когда скорость и ускорение параллельны (см. (23.7)), величина $d^2\varepsilon/dtd\Omega$ имеет ярко выраженный максимум при

$$\theta_{max} = \sqrt{\frac{2}{5} \left(1 - \frac{v_0}{c}\right)} \approx \sqrt{\frac{1}{5} \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)},$$

а в направлении движения частицы ($\theta = 0$) $d^2\varepsilon/dtd\Omega$ обращается в нуль. Когда скорость и ускорение взаимно ортогональны (см. (23.8)), угловое распределение зависит не только от угла θ между направлением \mathbf{n} распространения излучения и скоростью \mathbf{v}_0 , но и от угла между направлением \mathbf{n} и ускорением $\dot{\mathbf{v}}_0$. Угловое распределение излучения в плоскости, образованной \mathbf{v}_0 и $\dot{\mathbf{v}}_0$, имеет максимум в направлении $\theta = 0$, обращается в нуль при

$$\theta = \sqrt{2 \left(1 - \frac{v_0}{c}\right)} \approx \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}$$

и имеет второй, но существенно более низкий максимум, при

$$\theta_{max} = 2\sqrt{1 - \frac{v_0}{c}} \approx \sqrt{2 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)}.$$

В плоскости, перпендикулярной рассмотренной выше, имеется только максимум в направлении $\theta = 0$ с характерной шириной

$$\Delta\theta \sim \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}.$$

Чтобы найти полную энергию излучения за всё время движения заряженной частицы, следует проинтегрировать (23.6) по времени и по направлениям. Поскольку все величины в (23.6) зависят от t_0 , то от интегрирования по времени t удобно, с помощью равенства $dt = (1 - \mathbf{nv}_0/c)dt_0$ (см. (23.4)), перейти к интегрированию по t_0 . Интегрирование по $d\Omega$ выполняется элементарно. Результат интегрирования каждого из трёх слагаемых в (23.6) (с учётом дополнительного множителя $(1 - \mathbf{nv}_0/c)$) выглядит следующим образом:

$$\Delta\varepsilon = \frac{e^2}{2c^3} \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \left[\frac{2\dot{\mathbf{v}}_0^2}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^2} + \frac{16}{3c^2} \frac{(\mathbf{v}_0\dot{\mathbf{v}}_0)^2}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^3} - \left(\frac{4}{c^2} \frac{(\mathbf{v}_0\dot{\mathbf{v}}_0)^2}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^3} + \frac{2}{3} \frac{\dot{\mathbf{v}}_0^2}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^2} \right) \right] \quad (23.9)$$

Приводя в (23.9) подобные члены, окончательно находим,

$$\Delta\varepsilon = \frac{2e^2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \left[\frac{\dot{\mathbf{v}}_0^2}{\left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^2} + \frac{(\mathbf{v}_0\dot{\mathbf{v}}_0)^2}{c^2 \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)^3} \right] \quad (23.10)$$

Если заряженная частица движется через внешние электрическое и магнитное поля, то в соотношение (23.10) можно подставить явное выражение для ускорения.

Выразить ускорение через напряжённости полей нетрудно, если подставить в уравнение движения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}]$$

импульс в виде $\mathbf{p} = \mathbf{v}\mathcal{E}/c^2$, а производную по времени от энергии определить из уравнения

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = e\mathbf{v}\mathbf{E}.$$

Тогда для ускорения получаем следующее выражение:

$$\dot{\mathbf{v}} = \frac{e}{m} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}] - \frac{1}{c^2}\mathbf{v}(\mathbf{v}\mathbf{E}) \right) \quad (23.11)$$

Обратим внимание на то, что в ультрарелятивистском случае составляющая ускорения, направленная по скорости частицы, оказывается подавленной:

$$(\dot{\mathbf{v}})_{\parallel} \sim \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{3/2} (\mathbf{v}\mathbf{E}), \quad (\dot{\mathbf{v}})_{\perp} \sim \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} (\mathbf{E})_{\perp}.$$

С ростом скорости отношение $|\dot{\mathbf{v}}_{\parallel}|/|\dot{\mathbf{v}}_{\perp}|$ меняется по закону

$$\frac{|\dot{\mathbf{v}}_{\parallel}|}{|\dot{\mathbf{v}}_{\perp}|} \sim 1 - \frac{v^2}{c^2}$$

Подставим теперь выражение (23.11) в формулу для энергии излучения (23.10). В итоге получим

$$\Delta\varepsilon = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \frac{(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}\mathbf{H}])^2 - \frac{1}{c^2}(\mathbf{v}\mathbf{E})^2}{(1 - \frac{v^2}{c^2})} \quad (23.12)$$

Согласно (23.12), при движении в электрическом поле ($\mathbf{H} = 0$) вдоль поля ($\mathbf{v}\mathbf{E} = vE$)

$$\Delta\varepsilon = \frac{2e^4}{3m^2c^3} \int_{-\infty}^{\infty} dt_0 \mathbf{E}^2 \quad (23.13)$$

т.е. энергия излучения не зависит от скорости частицы. Что касается общего случая, то, как следует из (23.13), энергия излучения пропорциональна $(1 - v^2/c^2)^{-1}$, т.е. квадрату энергии частицы.

Лекция 24

24.1 Спектральное распределение энергии излучения релятивистского заряда

Обсудим теперь вопрос об особенностях спектрального распределения энергии излучения релятивистской заряженной частицы. Воспользуемся выражением (23.5) для $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ и вычислим фурье-компоненту поля излучения.

Будем отсчитывать время t_0 от того момента, когда двигающаяся по заданной траектории частица проходит через точку с радиус-вектором \mathbf{R} , т.е. $\mathbf{r}_0(t_0) = \mathbf{R}$ или $\mathbf{R}_0(t_0 = 0) = 0$. Тогда для участка траектории в окрестности радиус-вектора \mathbf{R} можно приближенно записать $\mathbf{R}_0(t_0) = \mathbf{v}_0 t_0$, где $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_0(0)$. Подставляя эти соотношения в (23.2), получим

$$t = t_0 \left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right) + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{R}|}{c} \quad (24.1)$$

Переходя, далее, при вычислении фурье-компоненты поля излучения от интегрирования по t к интегрированию по t_0 , запишем $\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{e}{c^2 |\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \cdot \frac{\exp\left(i\frac{\omega}{c} |\mathbf{r} - \mathbf{R}|\right)}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)^2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\mathbf{n} \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}_0}{c} \right), \dot{\mathbf{v}}_0(t_0) \right] \right] \exp\left(i\omega t_0 \left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)\right) dt_0 \quad (24.2)$$

Использованные при выводе этой формулы приближения отвечают ситуации, когда ускорение, являющееся причиной излучения, в то же время не приводит к заметному изменению скорости частицы. Такая ситуация характерна для ультрарелятивистского движения.

Подставляя (24.2) в определение (20.4), для спектрального распределения энергии находим

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi^2 c^3} \cdot \frac{1}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)^2} \left[\mathbf{n} \left[\left(\mathbf{n} - \frac{\mathbf{v}_0}{c}\right), \dot{\mathbf{v}}_0 \left(\omega \left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)\right) \right] \right] \quad (24.3)$$

где

$$\dot{\mathbf{v}}_0 \left(\omega \left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)\right)$$

– фурье-компонента ускорения для значения частоты, равного $\omega \left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)$.

Проанализируем полученное выражение.

При низких частотах, когда аргумент фурье-компоненты ускорения можно положить равным нулю, из (24.3) следует

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \cdot \left(\frac{(\Delta\mathbf{v})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)^2} - \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right) \cdot \frac{(\mathbf{n}\Delta\mathbf{v})^2}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)^4} \right) \quad (24.4)$$

где мы учли, что $\dot{\mathbf{v}}(\omega = 0) = \Delta\mathbf{v}$ – изменение скорости за всё время действия ускорения, которое перпендикулярно самому вектору скорости $(\mathbf{v}_0 \cdot \Delta\mathbf{v}) = 0$. Выражение, совпадающее с (24.4), нетрудно получить и из общей формулы (22.17) для тормозного излучения низких частот. Раскладывая результат (22.17) в ряд по малой величине $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$ и полагая $\mathbf{v}_0 = (\mathbf{v}' + \mathbf{v})/2$, имеем

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2}{4\pi c^3} \cdot \left(\frac{[\mathbf{n}\Delta\mathbf{v}]}{1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}} + \frac{[\mathbf{n}\mathbf{v}_0/c][\mathbf{n}\Delta\mathbf{v}]}{\left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)^2} \right)^2 \quad (24.5)$$

После возведения в квадрат и приведения подобных членов из (24.5) следует формула (24.4).

Если характерное время, в течение которого действует ускорение, есть τ , то характерная частота в спектральном распределении (24.3) по порядку величины равна

$$\omega_0 \sim \frac{1}{\tau \left(1 - \frac{\mathbf{n}\mathbf{v}_0}{c}\right)} \quad (24.6)$$

Это обусловлено значением аргумента фурье-компоненты ускорения.

Поскольку излучение сосредоточено в основном в узкой угловой области $\Delta\theta \sim \sqrt{1 - v/c}$ вблизи направления движения частицы, то из (24.6) следует

$$\omega_0 \sim \frac{1}{\tau \left(1 - \frac{v_0}{c}\right)} \sim \frac{1}{\tau \left(1 - \frac{v_0^2}{c^2}\right)} \quad (24.7)$$

При $\omega \ll \omega_0$ можно говорить о спектральном распределении в пределе низких частот, а при $\omega \gg \omega_0$ фурье-компонента ускорения и, соответственно, спектральное распределение (24.3) обращаются в нуль. Поэтому основная часть излучения приходится на область частот $\omega \sim \omega_0$.

Выведем формулу для спектрального распределения энергии излучения без использования приближений, лежащих в основе результатов (22.17) и (24.3).

Подставим плотность тока

$$\mathbf{j}(\mathbf{R}', t') = e\dot{\mathbf{R}}_0(t)\delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_0(t))$$

в выражение для фурье-компоненты векторного потенциала на далёких расстояниях

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}, \omega) = \frac{\exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{R}|\right)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \int \exp\left(-i\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\mathbf{R}'\right) \mathbf{j}(\mathbf{R}', \omega) dV'$$

где $\mathbf{n} = (\mathbf{r} - \mathbf{R})/|\mathbf{r} - \mathbf{R}|$, $\mathbf{j}(\mathbf{R}', \omega)$ – фурье-компонента плотности тока. В результате получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{R}, \omega) &= \frac{\exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{R}|\right)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \int \exp\left(-i\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\mathbf{R}'\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\omega t) e\dot{\mathbf{R}}_0(t)\delta(\mathbf{R}' - \mathbf{R}_0(t)) dt dV' = \\ &= \frac{e \exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r} - \mathbf{R}|\right)}{c|\mathbf{r} - \mathbf{R}|} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{\mathbf{R}}_0(t) \exp\left(i\omega t - i\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\mathbf{R}_0(t)\right) dt \end{aligned}$$

Учитывая, что в интересующем нас случае далёких расстояний $\mathbf{H}(\mathbf{R}, \omega) = i\frac{\omega}{c}[\mathbf{n}, \mathbf{A}(\mathbf{R}, \omega)]$, для спектрального распределения энергии излучения находим

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega d\Omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3} \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{R}}_0(t)] \exp\left(i\omega t - i\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\mathbf{R}_0(t)\right) dt \right|^2 \quad (24.8)$$

При выводе этой формулы не использовались никакие приближения, кроме предела больших расстояний для $\mathbf{A}(\mathbf{R}, \omega)$ и $\mathbf{H}(\mathbf{R}, \omega)$. Полученные ранее результаты (например, (22.17)) следуют из неё как частные случаи.

Формула (24.8) содержит скорость частицы $\dot{\mathbf{R}}_0(t)$ и, на первый взгляд, может показаться, что из (24.8) следует вывод о возможности излучения равномерно движущегося

заряда. Но это не так. Если частица движется с постоянной скоростью \mathbf{v}_0 , то $\mathbf{R}_0(t) = \mathbf{v}_0 t$.

Тогда интеграл в (24.8) будет равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n}, \mathbf{v}_0] \exp\left(i\omega t - i\frac{\omega}{c} \mathbf{n} \mathbf{v}_0 t\right) dt = [\mathbf{n}, \mathbf{v}_0] \delta\left(\omega - \frac{\omega}{c} \mathbf{n} \mathbf{v}_0\right) \quad (24.9)$$

Аргумент δ -функции,

$$\omega\left(1 - \frac{\mathbf{n} \mathbf{v}_0}{c}\right) = \omega\left(1 - \frac{v_0}{c} \cos \theta\right),$$

никогда не обращается в нуль. Поэтому δ -функция в (24.9) и само выражение (24.9) равны нулю и излучение отсутствует.

Если вычислить интеграл (24.9) в конечных пределах $-\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2}$, то получим ненулевой результат:

$$\int_{-T/2}^{T/2} [\mathbf{n}, \mathbf{v}_0] \exp\left(i\omega t - i\frac{\omega}{c} \mathbf{n} \mathbf{v}_0 t\right) dt = 2 [\mathbf{n}, \mathbf{v}_0] \frac{\sin \omega\left(1 - \frac{\mathbf{n} \mathbf{v}_0}{c}\right) \frac{T}{2}}{\omega\left(1 - \frac{\mathbf{n} \mathbf{v}_0}{c}\right)} \quad (24.10)$$

Выражение (24.10) при $T \rightarrow \infty$ стремится к δ -функции (24.9) (т.е. обращается в нуль). Физически это означает, что поле излучения от конечного участка траектории частицы отлично от нуля, но при сложении полей со всех участков траектории поля гасятся и результирующее поле будет равно нулю.

Преобразуем общую формулу (24.8) и проинтегрируем её по направлениям. Имеем

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} [\mathbf{n}, \dot{\mathbf{R}}_0(t)] \exp\left(i\omega t - i\frac{\omega}{c} \mathbf{n} \mathbf{R}_0(t)\right) dt \right|^2 = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 [\mathbf{n}, \mathbf{v}_1] [\mathbf{n}, \mathbf{v}_2] \exp(i\omega(t_1 - t_2) - i\mathbf{g} \mathbf{n}) = \\ & \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 \left(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 + \left(\mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}} \right) \left(\mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}} \right) \right) \exp(i\omega(t_1 - t_2) - i\mathbf{g} \mathbf{n}) \quad (24.11) \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{v}_1 = \dot{\mathbf{R}}_0(t_1), \quad \mathbf{v}_2 = \dot{\mathbf{R}}_0(t_2), \quad \mathbf{g} = \frac{\omega}{c} (\mathbf{R}_0(t_1) - \mathbf{R}_0(t_2))$$

Интегрирование общей формулы (24.8) по $d\Omega$ сводится к вычислению интеграла

$$\int d\Omega \exp(-i\mathbf{g} \mathbf{n}) = 4\pi \frac{\sin g}{g}$$

Тогда, для спектрального распределения энергии излучения находим

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\omega} = \frac{e^2\omega^2}{4\pi^2c^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dt_1 dt_2 G(t_1, t_2) \exp(i\omega(t_1 - t_2)) \quad (24.12)$$

где $G = G(t_1, t_2)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} G = & \left(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 + \left(\mathbf{v}_1 \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}} \right) \left(\mathbf{v}_2 \frac{\partial}{\partial \mathbf{g}} \right) \right) 4\pi \frac{\sin g}{g} = \\ & 4\pi \left\{ \frac{\sin g}{g} \left(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 - \left(\mathbf{v}_1 \frac{\mathbf{g}}{g} \right) \left(\mathbf{v}_2 \frac{\mathbf{g}}{g} \right) \right) + \right. \\ & \left. \left(\frac{\cos g}{g^2} - \frac{\sin g}{g^3} \right) \left(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 - 3 \left(\mathbf{v}_1 \frac{\mathbf{g}}{g} \right) \left(\mathbf{v}_2 \frac{\mathbf{g}}{g} \right) \right) \right\} \end{aligned} \quad (24.13)$$

Проанализируем полученную формулу в случае заряда ультрарелятивистской энергии (противоположный, нерелятивистский, предельный случай интереса не представляет, поскольку сводится к формуле дипольного излучения).

Имеем

$$g_{eff} = \frac{\omega}{c} |\mathbf{R}_0(t_1) - \mathbf{R}_0(t_2)|_{eff} \sim \frac{\omega}{c} v \Delta t_{eff}$$

Тогда, как следует из (24.12), (24.13) (см. также (24.7)),

$$\omega \Delta t_{eff} \left(1 - \frac{v}{c} \right) \sim 1$$

Поэтому в ультрарелятивистском случае g_{eff} можно оценить как

$$g_{eff} \sim \frac{1}{1 - \frac{v}{c}} \sim \left(\frac{\mathcal{E}}{mc^2} \right)^2 \gg 1 \quad (24.14)$$

В условиях (24.14) величина G будет определяться первым членом (24.13):

$$G = 4\pi \frac{\sin g}{g} \left(\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 - \frac{1}{g^2} (\mathbf{v}_1 \mathbf{g}) (\mathbf{v}_2 \mathbf{g}) \right) \quad (24.15)$$

Отметим, что результат (24.12), (24.13) получен без использования каких-либо предположений о характере движения частицы и позволяет провести расчёт спектрального распределения энергии излучения, если известно уравнение траектории.