Профессор Ермаченко В.М. и профессор Евсеев И.В.

Лекция 8

Магнитное поле постоянных токов. Система линейных токов. Коэффициенты индуктивности и взаимной индуктивности проводников. Свойства магнитной восприимчивости.

Рассмотрим систему, состоящую из проводников и диэлектриков. Пусть сторонние токи и заряды отсутствуют, а по проводникам течёт ток проводимости, плотность которого $\boldsymbol{j}$ не зависит от времени. Тогда получается стационарная картина. В дальнейшем нас будет интересовать только магнитное поле и оказываемое им влияние на магнетики- проводники и диэлектрики. При такой постановке задачи плотность тока $\boldsymbol{j}$, создаваемого некоторыми источниками (аккумуляторы, электрические батареи и т.п.), предполагается известной и постоянной. Так как для поддержания стационарного состояния необходимо присутствие внешних источников, то система (магнетики + магнитное поле) не является замкнутой. Такая постановка задачи в какой-то степени аналогична той постановке задачи электростатики, когда постоянными считались потенциалы проводников.

Таким образом, необходимо определить характеристики магнитного поля $\boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{B}$ из уравнений

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}, \tag{8.1}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0, \tag{8.2}$$

к которым добавлено уравнение связи

$$\boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}\,. \tag{8.3}$$

Уравнение связи (8.3) записано для изотропной неферромагнитной и несверхпроводящей среды. Рассмотрим случай, когда диэлектрики и проводники кусочно-однородны. Поэтому уравнения (8.1)-(8.3) будем рассматривать по отдельности в каждой из областей пространства, где

$$\mu = \mathrm{const}, \tag{8.4}$$

а на границе раздела будем проводить сшивание решений, используя граничные условия (2.3) и (2.4). Обычно плотность поверхностных токов равна нулю, и условие (2.3) даёт непрерывность тангенциальных компонент вектора $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{H}_{2t} = \boldsymbol{H}_{1t}\,. \tag{8.5}$$

Удобно от системы уравнений (8.1), (8.2) перейти к уравнению для векторного потенциала $\boldsymbol{A}$, который вводится соотношением

$$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\boldsymbol{A}. \tag{8.6}$$

Ясно, что соотношение (8.6) определяет векторный потенциал не однозначно, а лишь с точностью до градиента произвольной функции $f(\boldsymbol{r})$, так как rotgrad$f$ = 0. Это позволяет наложить на величину $\boldsymbol{A}$ дополнительное условие, называемое калибровкой потенциала. В дальнейшем будем считать, что векторный потенциал удовлетворяет условию

$$\mathrm{div}\boldsymbol{A} = 0. \qquad (8.7)$$

Такая калибровка называется кулоновской. Даже с учетом условия (8.7) потенциал определён с точностью до произвольной постоянной. Её мы определим, требуя, чтобы потенциал обращался в нуль на бесконечности. При подстановке (8.6) в (8.2) это уравнение превращается в тождество. Подстановка (8.6) в (8.1) с учетом (8.3), (8.4) и (8.7) даёт

$$\Delta\boldsymbol{A} = -\frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}. \qquad (8.8)$$

Это векторное уравнение эквивалентно трём скалярным для компонент вектора $\boldsymbol{A}$ в декартовых координатах:

$$\Delta A_i = -\frac{4\pi\mu}{c}j_i, \quad (i = x, y, z). \qquad (8.9)$$

На границах раздела сред векторный потенциал должен удовлетворять граничным условиям, которые вытекают из (8.5) и (2.4). Из условия (2.4) с учетом того, что индукция $\boldsymbol{B}$ конечна на границе раздела, вытекает непрерывность тангенциальных компонент вектора $\boldsymbol{A}$. Из (8.5) следует равенство тангенциальных компонент вектора rot$\boldsymbol{A}/\mu$.

При произвольной форме граничных поверхностей полученные уравнения для вектора $\boldsymbol{A}$ достаточно сложны для решения. Ниже рассмотрен ряд случаев, допускающих дальнейшее упрощение этих уравнений.

Рассмотрим однородную (следовательно, и бесконечную) в одном направлении среду, например линейный проводник с током в однородном веществе. Направим ось z по этому физически выделенному направлению. Обозначая $\boldsymbol{k}$ единичный вектор по оси z, представим плотность тока $\boldsymbol{j}$ в виде

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k}j(x, y), \qquad (8.10)$$

где скалярная функция j не зависит от z из-за однородности среды в этом направлении. Как следует из уравнений (8.8), (8.9), векторный потенциал в этом случае можно искать в виде

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{k}A(x, y). \qquad (8.11)$$

При этом условие (8.7) выполняется тождественно, а для определения скалярной функции $A(x, y)$ получаем уравнение

$$\Delta A = -\frac{4\pi\mu}{c}j. \qquad (8.12)$$

Условия (8.5) и (2.4) приводят к непрерывности функций $A(x, y)$ и $(\partial A/\partial n)/\mu$. Подставляя (8.11) в (8.6), получаем

$$\boldsymbol{B} = [\mathrm{grad}A, \boldsymbol{k}]. \tag{8.13}$$

Из (8.13) следует, что вектор $\boldsymbol{B}$ лежит в плоскости x, y.

Если распределение плотности тока симметрично относительно оси z, т.е. j зависит только от $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ (расстояния от оси z), функция A также зависит только от r. Поэтому в данной точке r вектор $\boldsymbol{B}$ направлен по касательной к окружности радиуса r. Таким образом, линии напряжённости магнитного поля представляют собой окружности. Если ввести цилиндрические координаты r, z и φ, то функция $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})$, например, может быть записана в виде

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{e}_\varphi H(r), \tag{8.14}$$

где $\boldsymbol{e}_\varphi$ - единичный вектор, соответствующий координате φ. Скалярную функцию $H(r)$ проще всего определить непосредственно из уравнения (8.1). Действительно, проинтегрируем обе части этого уравнения по поверхности, натянутой на окружность радиуса r. Обозначая полный ток, протекающий через эту поверхность,

$$I(r) = \int \boldsymbol{j}d\boldsymbol{S}$$

и используя теорему Стокса

$$\int rot\boldsymbol{H}d\boldsymbol{S} = \oint \boldsymbol{H}d\boldsymbol{l},$$

с учётом (8.14) получаем

$$H(r) = 2I(r)/(cr).$$

Исходные уравнения допускают существенные упрощения, если можно пренебречь магнитными свойствами среды, т. е. везде считать $\mu = 1$. Тогда для векторного потенциала не нужно ставить никаких граничных условий, кроме требования стремления его к нулю на достаточно больших расстояниях от системы токов. Удовлетворяющее этому требованию решение уравнения (8.8) имеет вид

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int dV' \frac{\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|}. \tag{8.15}$$

Взяв ротор от этого выражения, получаем

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int dV' \frac{[\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}'), (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}')]}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}'|^3}. \tag{8.16}$$

Предположим, что мы интересуемся распределением поля только в области вне проводников, а сами проводники достаточно тонкие, так что направление тока в данной точке совпадает с направлением $d\boldsymbol{l}$ - элемента длины проводника. Такую систему принято называть системой линейных токов. Тогда, выполняя интегрирование по поперечному сечению проводников в (8.15) и (8.16), получаем

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \sum_a \frac{I_a}{c}\int \frac{d\boldsymbol{l}_a}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a|}\ , \tag{8.17}$$

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r}) = \sum_a \frac{I_a}{c}\int \frac{[d\boldsymbol{l}_a,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a|^3}, \tag{8.18}$$

где I_a полный ток, протекающий по a-му проводнику Выражение (8.18) представляет собой закон Био-Савара. Соотношения (8.17) и (8.18) формально получаются из (8.15) и (8.16) заменой

$$\boldsymbol{j}dV \leftrightarrow Id\boldsymbol{l}\ . \tag{8.19}$$

Для системы линейных токов ответ можно написать также и в том случае, когда окружающая среда имеет некоторое постоянное значение магнитной проницаемости μ. Тогда опять никаких поверхностей раздела нет, так как проводники в этом приближении есть просто особые линии для поля. В результате имеем

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \mu\sum_a \frac{I_a}{c}\int \frac{d\boldsymbol{l}_a}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a|}\ , \tag{8.20}$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \mu\sum_a \frac{I_a}{c}\int \frac{[d\boldsymbol{l}_a,(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)]}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a|^3}. \tag{8.21}$$

Таким образом, наличие магнитной проницаемости изменяет индукцию в μ раз по сравнению со случаем, когда $\mu = 1$, тогда как напряжённость $\boldsymbol{H}$ при этом не меняется.

Рассмотрим теперь магнитное поле на достаточно больших расстояниях от области, занятой токами. Тогда, если L - характерный размер системы, то, например, выражение (8.15) можно разложить в ряд по параметру L/r <<1 и ограничиться первым неисчезающим приближением:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{c}\int dV'\,\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')[\frac{1}{r}+\frac{(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')}{r^3}+\ldots]. \tag{8.22}$$

Покажем, что

$$\int dV\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})\ = 0. \tag{8.23}$$

Для этого интеграл (8.23) умножим скалярно на произвольный постоянный вектор $\boldsymbol{c}$. Внося $\boldsymbol{c}$ под знак интеграла и используя тождество $\boldsymbol{c}$ = grad($\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{r}$), имеем ^

($\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{j}$) = ($\boldsymbol{j}$, grad($\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{r}$)) = div($\boldsymbol{j}$($\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{r}$)) - ($\boldsymbol{c}$,$\boldsymbol{r}$)div$\boldsymbol{j}$.

Так как в стационарном случае div$\boldsymbol{j}$ = 0, то по теореме Гаусса рассматриваемый интеграл сводится к поверхностному, который равен нулю вследствие того, что токи сосредоточены в ограниченной области пространства, т.е. $j_n|_S = 0$. В силу произвольности вектора $\boldsymbol{c}$ из полученного результата следует равенство (8.23). Итак, с учетом (8.23) имеем

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{cr^3}\int dV' \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}')(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\,, \tag{8.24}$$

или

$$A_i(\boldsymbol{r}) = \frac{x_k}{cr^3}\int dV' j_i(\boldsymbol{r}')x_k'\,. \tag{8.25}$$

Преобразуем выражения (8.24), (8.25) так, чтобы векторный потенциал выражался через магнитный момент распределения токов:

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2c}\int dV[\boldsymbol{r},\boldsymbol{j}]\,. \tag{8.26}$$

Для этого покажем, что

$$\int dV' j_i(\boldsymbol{r}')x_k' = -\int dV' j_k(\boldsymbol{r}')x_i'\,. \tag{8.27}$$

Рассмотрим следующий тождественно равный нулю интеграл:

$$\int dV x_i x_k \mathrm{div}\boldsymbol{j} = 0 \tag{8.28}$$

(в стационарном случае $\mathrm{div}\boldsymbol{j} = 0$). Подынтегральное выражение в (8.28) представим в виде

$$x_i x_k \mathrm{div}\boldsymbol{j} = \mathrm{div}(x_i x_k \boldsymbol{j}) - (x_i j_k + x_k j_i). \tag{8.29}$$

Проинтегрируем (8.29) по объёму системы. Интеграл от первого слагаемого в правой части (8.29) преобразуем в поверхностный, который равен нулю, так как $j_n|_S = 0$ (ток не выходит из системы). Таким образом,

$$\int dV(x_i j_k + x_k j_i) = 0,$$

т.е. соотношение (8.27) доказано. С учетом (8.27) выражение (8.25) можно записать следующим образом:

$$A_i(\boldsymbol{r}) = \frac{x_k}{2cr^3}\int dV'(j_i(\boldsymbol{r}')x_k' - j_k(r')x_i')\,. \tag{8.30}$$

В векторной записи (8.30) имеет вид

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{2cr^3}[\boldsymbol{r},\int dV'[\boldsymbol{r}',\boldsymbol{j}(r')]],$$

или, вводя полный магнитный момент $\mathbf{M}$ системы (7.26), получаем

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = [\mathbf{M},\boldsymbol{r}]/r^3. \tag{8.31}$$

Вычисление магнитного момента $\mathbf{M}$ для произвольной системы токов представляет собой сложную задачу. Простой результат получается для плоского замкнутого линейного тока:

$$\mathbf{M} = \frac{I}{2c}\oint[\boldsymbol{r},d\boldsymbol{l}]\,. \tag{8.32}$$

Как видно из (8.32), вектор $\mathbf{M}$ направлен перпендикулярно плоскости витка с током, а по модулю равен

$$\mathbf{M} = IS/c, \tag{8.33}$$

где S - площадь части плоскости, охваченная витком.

Рассмотрим более подробно систему линейных токов, сосредоточенных в ограниченной области пространства. При такой постановке задачи все линейные токи представляют собой замкнутые витки. Подобно тому, как в электростатике проводник характеризовался своим потенциалом φ_a или зарядом e_a, здесь важной характеристикой витка является не только ток I_a, но и магнитный поток через контур витка

$$\Phi_a = \int \boldsymbol{B} d\boldsymbol{S}_a = \oint \boldsymbol{A} d\boldsymbol{l}_a \ . \tag{8.34}$$

Подставляя (8.17) в (8.34), видим, что величины Φ_a и I_a связаны между собой линейно:

$$\Phi_a = \frac{1}{c}\sum_b L_{ab} I_b \ , \tag{8.35}$$

где L_{ab} ($a \neq b$) - взаимная индуктивность, L_{aa} - индуктивность проводников:

$$L_{ab} = \oint\oint \frac{d\boldsymbol{l}_a d\boldsymbol{l}_b}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|}$$

Вводя матрицу $(L^{-1})_{ab}$ обратную L_{ab}, можно переписать формулу (8.35) в виде

$$I_a = c\sum_b (L^{-1})_{ab} \Phi_b \ . \tag{8.36}$$

Коэффициенты L_{ab} зависят от геометрии системы: формы, размеров и взаимного расположения проводников. Если пространство между проводниками заполнено однородным магнетиком с магнитной проницаемостью μ то, используя вместо (8.17) выражение (8.20), получаем

$$L_{ab} = \mu \oint\oint \frac{d\boldsymbol{l}_a d\boldsymbol{l}_b}{|\boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{r}_b|} \ . \tag{8.37}$$

Оценим величину магнитной восприимчивости магнетиков. Упомянутая ранее теория возмущений может быть применена и для вычисления магнитной восприимчивости среды. Важное отличие постоянного магнитного поля от постоянного электрического заключается в том, что гамильтониан взаимодействия заряженной частицы с магнитным полем содержит не только линейные по характеристикам поля слагаемые, но и квадратичное:

$$\widehat{V} = -\frac{e}{mc}\widehat{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{A} - \frac{e\hbar}{mc}\widehat{\boldsymbol{S}}\boldsymbol{H} + \frac{e^2}{2mc^2}\boldsymbol{A}^2 \ , \tag{8.38}$$

где $\boldsymbol{A}$ - векторный потенциал магнитного поля, e - заряд, m - масса, $\boldsymbol{S}$ - спин частицы. Квадратичное по характеристикам поля слагаемое даёт вклад в энергию уже в первом порядке теории возмущений, и этот вклад положителен. Линейные слагаемые, как и в случае постоянного электрического поля, дают вклад во втором порядке теории возмущений, и их вклад отрицателен. Поэтому в отличие от диэлектриков, где диэлектрическая восприимчивость к всегда положительна, магнитная восприимчивость χ может быть как положительной, так и отрицательной. Если вклад от линейных по характеристикам поля слагаемых больше, чем от квадратичных, то $\chi > 0$. Такие магнетики называются парамагнетиками. В противоположном случае $\chi < 0$, и они называются диамагнетиками.

В отличие от диэлектриков, где величина к бывает значительно больше единицы (например, у воды), у магнетиков магнитная восприимчивость всегда мала: $|\chi| << 1$ (здесь не рассматриваются вещества с особыми магнитными свойствами - ферромагнетики и сверхпроводники). Эта малость связана с тем, что мы живём в нерелятивистском мире, т.е. скорости движения частиц в телах малы – $v << c$. Поэтому при равных напряжённостях электрического и магнитного полей сила, действующая на заряд со стороны магнитного поля $e[\boldsymbol{v},\boldsymbol{H}]/c$ в c/v раз меньше силы $e\boldsymbol{E}$, действующей на заряд со стороны электрического поля. Характерные скорости движения электронов в веществе по порядку величины равны $v \sim e^2/\hbar$, т.е. $v/c \sim 1/137$. Следовательно, изменение движения частиц под действием магнитного поля значительно слабее, чем под действием электрического. Под действием магнитного поля возникает магнитный момент $\mu \sim ve\delta r_H/c$, где δr_H - изменение координаты частицы под действием поля $\boldsymbol{H}$. Это изменение пропорционально действующей со стороны магнитного поля силе, т.е. $\delta r_H \sim vH/c$. Таким образом, магнитная восприимчивость имеет порядок величины $\chi \sim \mu/H \sim (v/c)^2$.

Рассмотрим для примера одноатомный идеальный газ. 0бозначим J, L, S полный момент, полный орбитальный и полный спиновый моменты атома, соответственно. Разберём следующие случаи.

1. $J = L = S = 0$. Этот случай соответствует инертным газам. Здесь все матричные элементы от линейных по полю слагаемых оператора $\hat{V}$ (8.38) равны нулю. Поэтому вклад в магнитную восприимчивость даёт только квадратичное по характеристикам магнитного поля слагаемое $\sim \boldsymbol{A}^2$ и, следовательно, $\chi < 0$, т.е. инертные газы являются диамагнетиками.
2. $J = 0$, $L = S \neq 0$. В этом случае в магнитную восприимчивость вносят вклад слагаемые обоих типов, но вклад линейных по характеристикам поля слагаемых больше. Это связано с тем, что во второе приближение теории возмущений от линейных по характеристикам поля слагаемых вносят вклад переходы между уровнями тонкой структуры, расстояние между которыми мало. Таким образом, здесь $\chi > 0$ - это парамагнетики.
3. $J \neq 0$. Если при этом фактор Ланде отличен от нуля, то у атома и в отсутствие поля имеется магнитный момент пропорциональный J. Однако так как при этом направления магнитных моментов отдельных атомов распределены хаотично, то при $H = 0$ магнитный момент всей системы равен нулю. При наложении поля магнитные моменты отдельных атомов начинают ориентироваться преимущественно по линиям напряжённости поля. Таким

образом, в этом случае $\chi > 0$, т.е. среда парамагнитна. Однако, если в первых двух случаях χ не зависит от температуры, то здесь χ существенно зависит от неё. Эта зависимость возникает от того, что числа атомов с магнитными моментами, направленными по и против поля, отличаются друг от друга больцмановскими множителями $\exp(\pm\mu H/T)$, где μ - магнитный момент отдельного атома. Если, например, $\mu H/T \ll 1$, то $\chi \sim 1/T$.