Профессор Ермаченко В.М. и профессор Евсеев И.В.

Лекция 6.

Силы, действующие на жидкий диэлектрик в электрическом поле. Тензор напряжений. Тензорные свойства диэлектрической проницаемости.

Рассмотрим теперь силы, действующие на диэлектрик. Вопрос о вычислении сил, действующих на диэлектрик, находящийся в произвольном электрическом поле, достаточно сложен.

Наиболее простой случай - это случай жидких и газообразных диэлектриков. Главная особенность жидкости и газа - их изотропия: их локальные характеристики, являющиеся скалярами, сами зависят от скалярных величин. Например, диэлектрическая проницаемость ε зависит от плотности ρ и температуры T жидкости. В состоянии термодинамического равновесия T = const, и изменение ε определяется только изменением ρ. Существенно, что эти свойства жидкости остаются неизменными при любых деформациях. В отличие от твердых тел, где возможны деформации сдвига, меняющие внутреннюю симметрию, в жидкости все деформации сводятся к изменению ρ.

Рассмотрим случай, когда часть пространства заполнена жидким диэлектриком. Обозначим

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})dV \qquad (6.1)$$

силу, действующую на элемент объёма диэлектрика dV в окрестности точки $\boldsymbol{r}$ ($\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ плотность объёмных сил). Для нахождения $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r})$ поступим следующим образом. Предположим, что каждая точка жидкости сдвинулась на некоторое малое расстояние $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{r})$. Тогда, с одной стороны, работа, которую производят силы системы, равна

$$\int dV\boldsymbol{u}\boldsymbol{f},$$

а с другой стороны, она равна уменьшению свободной энергии системы $\delta\mathsf{F}$, т.е.

$$\delta\mathsf{F} = -\int dV\boldsymbol{u}\boldsymbol{f}. \qquad (6.2)$$

Посчитаем изменение свободной энергии F при таком сдвиге. При смещении происходит изменение ε в каждой точке. Это связано с тем, что в данную точку приходит жидкость с другим значением диэлектрической проницаемости, и с тем, что при смещении может произойти изменение плотности жидкости. Следовательно,

$$\delta\varepsilon = -\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad}\varepsilon + (\partial\varepsilon/\partial\rho)_T\delta\rho. \qquad (6.3)$$

Возникающее при изменении ε изменение свободной энергии определяется из выражения (5.42) и для изотропного вещества равно

$$\delta \mathsf{F} = -\frac{1}{8\pi}\int dVE^2\delta\varepsilon\,. \qquad (6.4)$$

Отметим, что вариация $\boldsymbol{D}$, возникающая при изменении ρ, не меняет свободную энергию при постоянных зарядах проводников, создающих поле.

Преобразуем второе слагаемое в (6.3), выражая δρ через смещение $\boldsymbol{u}$. Пусть элемент жидкости с массой m занимает объём V. После сдвига объём изменится на величину δV, а плотность жидкости $\rho = m/V$ – на величину

$\delta\rho = -\rho\delta V/V$.

Для вычисления δV предположим, что смещение $\boldsymbol{u}$ направлено по оси x. Пусть l_x длина элемента жидкости в этом направлении. Тогда одна сторона этого объёма сместилась на величину $u(x)$, а другая – на $u(x+ l_x) \approx u(x) + l_x\partial u/\partial x$. Поэтому изменение линейного размера в направлении x равно $l_x\partial u/\partial x$, а так как другие размеры не менялись, то

$\delta V = V\partial u/\partial x$.

Аналогично, в общем случае, разлагая смещение $\boldsymbol{u}$ по осям x, y, и z, имеем $\delta V = V\mathrm{div}\boldsymbol{u}$. Таким образом,

$$\delta\rho = -\rho\,\mathrm{div}\boldsymbol{u}. \qquad (6.5)$$

Подставляя (6.5) в (6.3), а затем (6.3) в (6.4), получаем

$$\delta \mathsf{F} = -\frac{1}{8\pi}\int dVE^2\,[\,-\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad}\varepsilon - \rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T\,\mathrm{div}\boldsymbol{u}]. \qquad (6.6)$$

Преобразуем второе слагаемое в (6.6):

$$\frac{1}{8\pi}\int dVE^2\,\rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T\,\mathrm{div}\boldsymbol{u} = \frac{1}{8\pi}\int dV\mathrm{div}[E^2\,\rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T\,\boldsymbol{u}] - \frac{1}{8\pi}\int dV\,\boldsymbol{u}\,\mathrm{grad}[E^2\rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T]. \qquad (6.7)$$

Первый интеграл в правой части (6.7) равен нулю, в чем нетрудно убедиться, преобразуя его к поверхностному интегралу и учитывая, что на поверхности, ограничивающей объём жидкого диэлектрика, $\boldsymbol{u} = 0$.

Следовательно,

$$\delta \mathsf{F} = -\frac{1}{8\pi}\int dV\,\boldsymbol{u}\{-E^2\,\mathrm{grad}\varepsilon + \mathrm{grad}[E^2\rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T]\}. \qquad (6.8)$$

Приравнивая (6.8) и (6.2) и требуя, чтобы это равенство выполнялось при произвольном значении $\boldsymbol{u}$, получаем следующее выражение для плотности объёмных сил:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}[\rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T\frac{E^2}{8\pi}] - \frac{E^2}{8\pi}\mathrm{grad}\varepsilon\,. \qquad (6.9)$$

Напомним, что это силы, связанные с поляризацией диэлектрика. Если жидкость заряжена, то к (6.9) нужно добавить ещё слагаемое $\rho_{cm}\boldsymbol{E}$, где ρ_{cm} - плотность сторонних зарядов.

В итоге, получаем окончательное выражение для плотности объёмных сил в жидком диэлектрике, действующих на него со стороны электростатического поля $\boldsymbol{E}$:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \mathrm{grad}[\rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T \frac{E^2}{8\pi}] - \frac{E^2}{8\pi}\mathrm{grad}\varepsilon + \rho_{cm}\boldsymbol{E}. \qquad (6.10)$$

Наиболее простой вид формула (6.9) принимает для газа. Диэлектрическую проницаемость газа ε можно разложить в ряд по степеням плотности ρ и ограничиться линейным членом. Тогда

$$\rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T = \varepsilon - 1. \qquad (6.11)$$

Подставляя (6.11) в (6.9), получаем плотность объёмных сил в газе:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = (\varepsilon - 1)\mathrm{grad}\frac{E^2}{8\pi}. \qquad (6.12)$$

Выражение (6.12) можно получить из простых соображений. Рассмотрим газ как среду, состоящую из отдельных атомов. Пусть $\boldsymbol{p}$ - дипольный момент отдельного атома, возникший под действием поля $\boldsymbol{E}$. Тогда энергия взаимодействия атома с полем равна - $(\boldsymbol{pE})/2$, а действующая на него сила

$$\boldsymbol{F} = \mathrm{grad}(\boldsymbol{pE})/2.$$

Если концентрация атомов n, то плотность объёмных сил $\boldsymbol{f}$ равна

$$\boldsymbol{f} = n\boldsymbol{F} = \mathrm{grad}(\boldsymbol{PE})/2,$$

где $\boldsymbol{P} = n\boldsymbol{p}$ - плотность дипольного момента газа. Учитывая, что

$$\boldsymbol{P} = (\varepsilon - 1)\boldsymbol{E}/4\pi,$$

приходим к выражению (6.12).

Формула (6.9) также имеет простой вид и для несжимаемой жидкости, плотность ρ которой постоянна. Поэтому последнее слагаемое в (6.9) обращается в нуль, а в первом под знаком градиента остается лишь E^2:

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{r}) = \rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T\mathrm{grad}\frac{E^2}{8\pi}. \qquad (6.13)$$

Основное выражение для плотности объемных сил (6.10) позволяет найти максвелловский тензор напряжений для поля в жидком диэлектрике. Действительно, сила, действующая на вещество в объёме dV, представляет собой изменение его импульса в единицу времени. Как указано в лекции 4, полный импульс, переданный объёму, может быть записан через интеграл от тензора напряжений T_{ik}, взятый по поверхности, окружающей этот объём.

Таким образом,

$$\int dV f_i = \oint T_{ik} dS_k.$$

Преобразуя интеграл в правой части этого равенства к объёмному и используя произвольность объёма интегрирования, получаем

$$f_i = \frac{\partial T_{ik}}{\partial x_k}. \quad (6.14)$$

Представим теперь выражение (6.10) в виде (6.14). Так как первое слагаемое выражения (6.10) уже имеет необходимый вид, дело сводится к преобразованию двух последних. Записывая, согласно уравнению Максвелла,

$\rho_{cm} = \mathrm{div}(\varepsilon \mathbf{E}/4\pi)$,

имеем от двух последних слагаемых выражения (6.10) следующий вклад в i-ю компоненту силы:

$$-\frac{E^2}{8\pi}\frac{\partial\varepsilon}{\partial x_i} + \frac{E_i}{4\pi}\frac{\partial(\varepsilon E_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\varepsilon E^2}{8\pi}\right) + \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\varepsilon E_i E_k}{4\pi}\right) + \frac{\varepsilon E_k}{4\pi}\left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i} - \frac{\partial E_i}{\partial x_k}\right).$$

Последнее слагаемое в правой части этого равенства обращается в нуль, так как $\mathrm{rot}\mathbf{E} = 0$. Поэтому выражение (6.10) может быть записано следующим образом:

$$f_i = \frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\frac{\varepsilon E_i E_k}{4\pi} - \frac{E^2}{8\pi}[\varepsilon - \rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T]\delta_{ik}\right\}. \quad (6.15)$$

Используя (6.14), для тензора напряжений T_{ik} получаем следующее выражение:

$$T_{ik} = \frac{\varepsilon E_i E_k}{4\pi} - \frac{E^2}{8\pi}[\varepsilon - \rho(\partial\varepsilon/\partial\rho)_T]\delta_{ik}. \quad (6.16)$$

Этот тензор обычно называют максвелловским тензором напряжений. Отметим, что выражение (6.16) переходит в (4.16), если $\varepsilon = 1$.

Обсудим теперь тензорную структуру диэлектрической проницаемости. Она проявляется во всех случаях, когда вещество обладает анизотропией. Примером анизотропного вещества являются кристаллы. В кристаллах тензорные свойства ε_{ik} определяются свойствами симметрии кристаллической решетки. Как уже отмечалось ранее, в общем случае диэлектрическая проницаемость является симметричным тензором второго ранга. Такой тензор имеет шесть независимых компонент. Как известно, симметричный тензор второго ранга всегда может быть приведён к главным осям. Именно в главных осях удобно рассматривать свойства этого тензора. Обозначая главные оси $x, y, z,$ запишем тензор ε_{ik} в виде

$$\varepsilon_{ik} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}.$$

Заметим, что шестью независимыми величинами, характеризующими тензор в главных осях, являются три диагональных элемента, называемых главными значениями тензора, и три угла, определяющие положение главных осей. При этом возможны следующие три случая:

1. $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz}$,

2. $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz}$,

3. $\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz} \neq \varepsilon_{xx}$.

Первый отвечает случаю изотропного диэлектрика. Тензор диэлектрической проницаемости здесь имеет вид

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon\delta_{ik} \tag{6.17}$$

Такой же вид ε_{ik} имеет и для кристаллов, решетка которых обладает кубической симметрией. В самом деле, если оси x, y, z направлены по кристаллографическим осям, то ясно, что они эквивалентны: при повороте на 90° вокруг любой из этих осей они переходят друг в друга, а в кубическом кристалле такой поворот не должен сказываться ни на каких физических величинах. Поэтому в кубическом кристалле $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon$. Таким образом, в системе осей, связанных с кристаллографическими осями кубического кристалла, $\varepsilon_{ik} = \varepsilon\delta_{ik}$. Так как при любом вращении единичный тензор δ_{ik} переходит сам в себя, то в кубическом кристалле ε_{ik} имеет такой вид в любых осях, как и в случае изотропного тела. Это связано с тем, что тензор второго ранга слишком «грубая» характеристика, чтобы учесть кубическую микроструктуру вещества.

Рассмотрим второй случай, в котором ось z выделена, а оси x и y эквивалентны. Подобно тому, как равенство всех трёх компонент тензора в предыдущем случае приводило к его эквивалентности изотропному телу, равенство компонент в плоскости xy эквивалентно изотропии тела в этой плоскости. Это означает, что любые оси в плоскости xy являются главными и вращение вокруг оси z не меняет вида тензора ε_{ik}. Такие кристаллы называются одноосными. Общий вид тензора диэлектрической проницаемости таких кристаллов удобно записывать, вводя $\boldsymbol{n}$ - единичный вектор физически выделенной главной оси z – оптической оси кристалла. Обозначая $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel}$, $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp}$, получаем в случае произвольно ориентированных координатных осей следующий вид тензора ε_{ik} одноосных кристаллов:

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{\parallel} n_i n_k + \varepsilon_{\perp}(\delta_{ik} - n_i n_k). \tag{6.18}$$

Нетрудно видеть, что когда координатная ось z совпадает с направлением оптической оси ($n_z = 1$, $n_x = n_y = 0$), тензор, определяемый выражением (6.18), диагонализуется.

В третьем случае все три главных значения ε_{xx}, ε_{yy} и ε_{zz} различны. Такие кристаллы называются двухосными. Электростатические задачи в двухосных кристаллах удобно решать, выбирая в качестве координатных осей главные оси тензора ε_{ik}. Для примера рассмотрим задачу о диэлектрическом анизотропном шаре в однородном внешнем поле $\mathbf{E}$. Используя принцип суперпозиции полей, можно решение этой задачи разбить на три отдельных случая, в каждом из которых присутствует только компонента поля, направленная вдоль одной из главных осей. В каждом из этих случаев задача не отличается от задачи об изотропном диэлектрике с соответствующей диэлектрической проницаемостью ε_{xx}, ε_{yy} или ε_{zz}.