Профессор Ермаченко В.М. и профессор Евсеев И.В.

Лекция 5.

Электростатика диэлектриков. Различные постановки задачи по определению поля. Тензор поляризуемости диэлектрика. Термодинамика диэлектриков.

Рассмотрим, как и прежде, систему заряженных проводников, но теперь пространство между ними будем считать заполненным диэлектриком. Диэлектрик в общем случае может быть неоднородным или кусочно-однородным, в части пространства диэлектрик может отсутствовать. В этом случае для определения напряжённости электростатического поля нужно решать систему уравнений (3.1) и (3.2) с уравнением связи (2.14) и граничными условиями (2.2) и (2.5). В дальнейшем считаем, что сторонние заряды отсутствуют и поля создаются заряженными проводниками. В лекции 3 было показано, что в статическом случае объёмная плотность свободных зарядов $\rho = 0$ и заряды располагаются на поверхности проводников так, что напряжённость поля внутри них равна нулю. Таким образом, необходимо решать лишь внешнюю по отношению к проводникам электростатическую задачу с граничными условиями на поверхностях проводников:

$$\boldsymbol{E}_{\boldsymbol{t}} = 0, \tag{5.1}$$

$$D_n = 4\pi\sigma. \tag{5.2}$$

При решении этой задачи в случае кусочно-однородных диэлектриков появляется граница раздела двух диэлектриков. Граничные условия на такой поверхности имеют вид

$$\boldsymbol{E}_{1\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{E}_{2\boldsymbol{t}}\,, \tag{5.3}$$

$$D_{1n} = D_{2n}\,. \tag{5.4}$$

Ради простоты в дальнейшем рассматриваются изотропные диэлектрики, для которых уравнение связи (2.14) принимает вид

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}\,. \tag{5.5}$$

Для решения задачи определения поля удобно, как и прежде, ввести скалярный потенциал φ равенством $\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\varphi$. Из уравнения $\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 0$, используя (5.5), получаем уравнение, которому удовлетворяет потенциал φ в области между проводниками:

$$\mathrm{div}\varepsilon\,\mathrm{grad}\varphi = 0. \tag{5.6}$$

Перепишем граничные условия через потенциал φ. Из условия (5.3) следует, что

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial\tau} = \frac{\partial\varphi_2}{\partial\tau}\,,$$

где производная берётся по касательной к поверхности раздела в любом направлении, φ_1 и φ_2 - предельные значения потенциала на поверхности раздела со стороны сред 1 и 2, соответственно. Отсюда имеем

$\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}.$

Значение этой постоянной не сказывается на значении напряжённости поля $\boldsymbol{E}$. Однако, если потенциал связывать с энергией, то эту постоянную следует принять равной нулю, так как при переносе заряда с одной «стороны» поверхности на другую совершаемая работа равна нулю:

$e(\varphi_1 - \varphi_2) = 0.$

Таким образом, на поверхности раздела двух диэлектриков имеем

$$\varphi_1|_S = \varphi_2|_S . \qquad (5.7)$$

Условие (5.4) с учетом (5.5) даёт

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n}|_S = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}|_S , \qquad (5.8)$$

а условие (5.2) принимает вид

$$\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial n}|_S = -4\pi\sigma . \qquad (5.9)$$

Как отмечалось в лекции 3, условие (5.1) приводит к постоянству потенциала на поверхности проводников. Можно показать, что рассматриваемая задача допускает единственное решение без условия (5.9). Оно должно использоваться для определения σ по найденному потенциалу.

Так же как и в лекции 3, можно сформулировать следующие три постановки задачи об определении поля в рассматриваемой системе.

1. Задаются потенциалы всех проводников:

$$\varphi_a = \text{const}. \qquad (5.10)$$

2. Задаются заряды всех проводников.

3. Задача о диэлектрике во внешнем квазиоднородном поле **E**.

В первой постановке решается уравнение (5.6), которое для кусочно-однородных диэлектриков принимает вид

$$\Delta\varphi = 0, \qquad (5.11)$$

с граничными условиями

$$\varphi|_{S_a} = \varphi_a \qquad (5.12)$$

на поверхностях проводников и граничными условиями (5.7) и (5.8) на границе раздела различных диэлектриков. Найдя потенциал и используя (5.2), определяем заряды проводников:

$$e_a = -\frac{1}{4\pi}\oint_{S_a}\varepsilon\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS_a, \tag{5.13}$$

где $\boldsymbol{n}$ - внешняя нормаль по отношению к проводнику.

Из линейности граничных условий и уравнения следует, что заряды и потенциалы проводников связаны линейно:

$$e_a = \sum_b C_{ab}\varphi_b. \tag{5.14}$$

В данном случае коэффициенты C_{ab} зависят не только от геометрических параметров – формы, расположения, размеров проводников и диэлектриков, но и от электрических свойств диэлектриков - значений их диэлектрических проницаемостей ε.

Рассмотрим следующий пример. Пусть пространство между проводниками заполнено диэлектриком с ε = const. Тогда при заданных потенциалах проводников решение уравнения (5.11) такое же, как и в вакууме с этими граничными условиями. Следовательно, напряжённость поля при наличии диэлектрика останется прежней, но заряды проводников e_a будут в ε раз больше по сравнению с зарядами, которые были на проводниках, находящихся в вакууме (см. (5.13)). Тогда из соотношения (5.14) вытекает, что

$$C_{ab} = \varepsilon\, C_{ab}^{(0)}, \tag{5.15}$$

где $C_{ab}^{(0)}$ - соответствующая матрица для той же самой системы проводников, находящихся в вакууме.

Рассмотрим вторую постановку задачи, когда заданы заряды проводников e_a = const. Можно решать задачу в первой постановке с произвольными значениями $\varphi_a^{'}$. Затем, найдя коэффициенты ёмкости и электростатической индукции и вычисляя обратную матрицу $(C^{-1})_{ab}$, определим потенциалы проводников при данном значении их зарядов e_a из соотношения

$$\varphi_a = \sum_b (C^{-1})_{ab}e_b. \tag{5.16}$$

Предположим опять, что пространство между проводниками заполнено однородным изотропным диэлектриком. Из (5.15) следует, что

$$(C^{-1})_{ab} = \frac{1}{\varepsilon}(C^{(0)^{-1}})_{ab} \tag{5.17}$$

Тогда из (5.16) с учетом (5.17) получаем

$$\varphi_a = \frac{1}{\varepsilon}\varphi_a^{(0)},$$

где $\varphi_a^{(0)}$ - потенциалы проводников при тех же самых зарядах e_a, когда в пространстве между проводниками отсутствует диэлектрик. Таким образом, при заполнении пространства между проводниками диэлектриком при заданном значении зарядов проводников напряжённость поля уменьшается в ε раз. Ослабление напряженности поля в ε раз можно понять как экранировку зарядов проводников связанными зарядами, возникающими при поляризации диэлектрика. Формально можно представить себе ситуацию, когда экранировка будет полной, т.е. напряжённость поля внутри диэлектрика обратится в нуль. Поэтому предельным переходом $\varepsilon \to \infty$ можно из решения задачи о диэлектрике получить результаты задачи о проводнике той же формы и размеров. Действительно, перепишем условие (5.8) в виде

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\Big|_S = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}\frac{\partial \varphi_2}{\partial n}\Big|_S ,$$

и при $\varepsilon_1 \to \infty$ получим

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial n}\Big|_S = 0 .$$

Решение уравнения $\Delta\varphi = 0$ с таким граничным условием дает $\varphi = \text{const}$ внутри рассматриваемой области, как это и должно быть внутри проводника.

Рассмотрим третью постановку задачи. Пусть во внешнем квазиоднородном поле $\mathbf{E}$ находится незаряженный изотропный диэлектрик. Постановка задачи аналогична той, вторая была рассмотрена для проводника во внешнем поле. Как и прежде, потенциал полного поля $\boldsymbol{E}$ записываем в виде суммы:

$$\varphi = -(\boldsymbol{r},\mathbf{E}) + \varphi'. \qquad (5.18)$$

Потенциал φ' удовлетворяет уравнению

$$\Delta\varphi_e' = 0 \qquad (5.19)$$

в области вне данного диэлектрика и уравнению

$$\Delta\varphi_i' = 0 \qquad (5.20)$$

внутри диэлектрика. На границе диэлектрика из (5.7) получаем

$$\varphi'_e|_S = \varphi'_i|_S. \qquad (5.21)$$

Условие (5.8) в данном случае имеет вид

$$\varepsilon\frac{\partial}{\partial n}(\varphi_i' - \boldsymbol{r}\mathbf{E})\Big|_S = \frac{\partial}{\partial n}(\varphi_e' - \boldsymbol{r}\mathbf{E})\Big|_S , \qquad (5.22)$$

где ε диэлектрическая проницаемость диэлектрика, причём считаем, что вне диэлектрика вакуум. На больших расстояниях от диэлектрика

$$\varphi_e' = (\boldsymbol{r},\mathbf{P})/r^3, \qquad (5.23)$$

где $\mathbf{P}$ полный дипольный момент диэлектрика. Вследствие линейности уравнений и граничных условий дипольный момент линейно связан с $\mathbf{E}$, т.е.

$$\mathsf{P}_i = V\alpha_{ik}\mathsf{E}_k\,, \tag{5.24}$$

где V объём диэлектрика. Тензор поляризуемости диэлектрика α_{ik} зависит не только от геометрии, но и от электрических свойств диэлектрика. Вычислить тензор поляризуемости до конца удаётся только в простейших случаях. Например, если

$$|\varepsilon - 1| << 1, \tag{5.25}$$

то задача вычисления α_{ik} упрощается. В этом случае напряжённость поля внутри диэлектрика мало отличается от внешнего поля:

$$|\mathbf{E} - \boldsymbol{E}| << \mathsf{E}\,. \tag{5.26}$$

По определению

$$\mathbf{P} = \int dV\boldsymbol{P}\,,$$

где $\boldsymbol{P}$ - плотность дипольного момента. С другой стороны, $\boldsymbol{P} = \kappa\boldsymbol{E}$, где $\kappa = (\varepsilon - 1)/4\pi$ - диэлектрическая восприимчивость. Следовательно,

$$\mathbf{P} = \int_V dV\kappa\boldsymbol{E}\,.$$

Учитывая (5.26), в этом выражении можно в первом приближении заменить величину $\boldsymbol{E}$ на $\mathbf{E}$ (фактически это разложение по параметру (5.25)). Так как поле $\mathbf{E}$ квазиоднородно, а диэлектрик однороден, то

$$\mathbf{P} = V\kappa\mathbf{E}. \tag{5.27}$$

Сравнивая это выражение с (5.24), получаем

$$\alpha_{ik} = \kappa\delta_{ik}\,. \tag{5.28}$$

Если диэлектрик анизотропен ($P_i = \kappa_{ik}E_k$), то вместо (5.28) имеем

$$\alpha_{ik} = \kappa_{ik}\,. \tag{5.29}$$

Рассмотрим теперь термодинамические соотношения системы, состоящей из проводников, диэлектриков и электрического поля. Как и раньше, считаем, что сторонние заряды отсутствуют, а поля создаются заряженными проводниками. Поэтому в качестве внешнего параметра могут быть выбраны заряды проводников или их потенциалы. Кроме того, рассмотрим случай, когда проводники расположены на большом расстоянии от диэлектрика и диэлектрик можно считать находящимся во внешнем квазиоднородном поле $\mathbf{E}$. В этом случае внешним параметром будет напряжённость $\mathbf{E}$ этого поля. Термодинамические функции, соответствующие этим трём возможностям, обозначаются также как и в термодинамике проводников, например, свободная энергия системы

$$\mathsf{F}(T,V,e), \quad \tilde{\mathsf{F}}(T,V,\varphi), \quad \hat{\mathsf{F}}(T,V,\mathbf{E})\,.$$

В отличие от вывода, приведённого в лекции 4, здесь не будет использовано выражение для энергии поля в диэлектрике

$$W = \frac{1}{8\pi}\int \boldsymbol{ED}dV\,, \qquad (5.30)$$

так как при выводе (5.30) учитывалась связь $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$, имеющая смысл «уравнения состояния» рассматриваемой термодинамической системы. Поэтому формула (5.30) справедлива только в состоянии термодинамического равновесия. Сейчас будут получены дифференциальные термодинамические тождества, справедливые в общем случае.

Для получения искомых термодинамических соотношений рассмотрим выражение для работы, производимой внешними телами над системой, которая является замкнутой в случае, когда внешние параметры - заряды e_a проводников. Пусть потенциалы проводников равны φ_a. Тогда работа, затраченная на изменение зарядов проводников на de_a, равна

$$dR = \sum_a \varphi_a de_a\,. \qquad (5.31)$$

Выразим эту работу непосредственно через характеристики поля. Изменение зарядов на de_a вызывает изменение индукции $\boldsymbol{D}$ во всём пространстве на $\delta\boldsymbol{D}$, причём

$$de_a = \frac{1}{4\pi}\oint_{S_a}\delta D_n dS\,,$$

где δD_n - проекция $\delta\boldsymbol{D}$ на внешнюю нормаль по отношению к проводнику. Считая нормаль внутренней, перепишем это соотношение в виде

$$de_a = -\frac{1}{4\pi}\oint_{S_a}\delta\boldsymbol{D}d\boldsymbol{S}\,.$$

Так как на поверхности проводника потенциал $\varphi = \varphi_a = \mathrm{const}$, то (5.31) можно представить в виде интеграла по объему:

$$dR = -\frac{1}{4\pi}\sum_a\oint_{S_a} d\boldsymbol{S}\varphi\delta\boldsymbol{D} = -\frac{1}{4\pi}\int_{V_e} dV\mathrm{div}(\varphi\delta\boldsymbol{D})\,. \qquad (5.32)$$

Интеграл в (5.32) берется по области пространства вне проводников. При написании последнего равенства учтено, что соответствующий интеграл по бесконечно удаленной поверхности равен нулю. Используя связь φ с $\boldsymbol{E}$, получаем

$$dR = \frac{1}{4\pi}\int dV\boldsymbol{E}\delta\boldsymbol{D}\,. \qquad (5.33)$$

Интегрирование в (5.33) можно распространить на всё пространство, так как внутри проводников напряжённость поля равна нулю. Как видно из (5.31) и (5.33), заряды проводников и индукция во всём пространстве являются эквивалентными внешними параметрами. В дальнейшем в качестве внешнего параметра используется индукция $\boldsymbol{D}$.

Работа, произведённая над теплоизолированной системой, равна изменению энергии этой системы. Следовательно, для изменения внутренней энергии $U(S,V,\boldsymbol{D})$ системы можно написать выражение

$$\delta U = T\delta S - p\delta V + \frac{1}{4\pi}\int dV \boldsymbol{E}\delta\boldsymbol{D}\,, \qquad (5.34)$$

где S - энтропия. Соответственно, для свободной энергии имеем

$$\delta \mathsf{F} = - S\delta T - p\delta V + \frac{1}{4\pi}\int dV \boldsymbol{E}\delta\boldsymbol{D}\,. \qquad (5.35)$$

При получении аналогичных соотношений для $\tilde{U}$ и $\mathsf{F}^{\sim}$ заметим, что внешним параметром, эквивалентным потенциалам φ_a, является напряжённость $\boldsymbol{E}$ электрического поля, так как φ и $\boldsymbol{E}$ связаны соотношением $\boldsymbol{E}$ = - gradφ. Поэтому достаточно провести в формулах (5.34) и (5.35) формальное преобразование от вариации $\boldsymbol{D}$ к вариации $\boldsymbol{E}$. В результате получаем, например,

$$\delta \mathsf{F}^{\sim} = - S\delta T - p\delta V - \frac{1}{4\pi}\int dV \boldsymbol{D}\delta\boldsymbol{E}\,, \qquad (5.36)$$

причем

$$\mathsf{F}^{\sim} = \mathsf{F} - \frac{1}{4\pi}\int dV \boldsymbol{E}\boldsymbol{D}\,. \qquad (5.37)$$

Третье слагаемое в (5.36) можно выразить через $\delta\varphi_a$ - изменения потенциалов проводников. Для этого достаточно сделать замену $\delta\boldsymbol{E}$ = - grad$\delta\varphi$ и преобразовать этот интеграл к интегралу по поверхности. Аналогично, разность $\mathsf{F}^{\sim} - \mathsf{F}$ может быть преобразована к виду $-\sum_a e_a\varphi_a$.

Она представляет собой переменную часть энергии резервуаров, поддерживающих постоянными потенциалы проводников. Вводя плотности соответствующих термодинамических функций соотношениями типа

$$\mathsf{F} = \int dV F\,, \quad \mathsf{F}^{\sim} = \int dV \tilde{F}\,,$$

получаем, например, при постоянной плотности ρ вещества,

$$dF = - s dT + (\boldsymbol{E} d\boldsymbol{D})/4\pi. \qquad (5.38)$$

$$d\tilde{F} = - s dT - (\boldsymbol{D} d\boldsymbol{E})/4\pi, \qquad (5.39)$$

где s - плотность энтропии. Отметим, что при выводе дифференциальных термодинамических тождеств не использовалось уравнение связи векторов $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$, следовательно, они справедливы и для неравновесных состояний системы. С помощью полученных соотношений легко доказать симметричность тензора ε_{ik}. Из (5.39) следует , что

$$D_i = - 4\pi(\partial \tilde{F}/\partial E_i)_{T,\rho}, \qquad (5.40)$$

а из уравнения связи $D_i = \varepsilon_{ik} E_k$ получаем

$$\varepsilon_{ik} = (\partial D_i/\partial E_k)_{T,\rho}. \tag{5.41}$$

Подставляя (5.40) в (5.41), убеждаемся в симметричности тензора $\varepsilon_{ik} = \varepsilon_{ki}$.

Для равновесных состояний, используя связь $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$, получаем выражения и для термодинамических функций:

$$\mathsf{F}\,(T,V,\boldsymbol{D}) = \mathsf{F}_0(T,V) + \frac{1}{8\pi}\int dV \varepsilon_{ik}^{-1} D_i D_k \ , \tag{5.42}$$

$$\mathsf{F}^{\sim}(T,V,\boldsymbol{E}\,) = \mathsf{F}_0(T,V) - \frac{1}{8\pi}\int dV \varepsilon_{ik} E_i E_k \ , \tag{5.43}$$

где $\mathsf{F}_0(T,V)$ - свободная энергия диэлектрика при отсутствии поля.

В третьей постановке задачи, когда внешним параметром является квазиоднородное поле $\mathbf{\mathsf{E}}$, термодинамические функции определяем также как и в лекции 4:

$$\mathsf{F}^{\frown}(T,V,\mathbf{\mathsf{E}}\,) = \mathsf{F}_0(T,V) + \frac{1}{8\pi}\int dV(\boldsymbol{ED} - \mathbf{\mathsf{E}}^{\,2})\,. \tag{5.44}$$

При таком определении из системы исключается то поле, которое было при отсутствии диэлектрика. Преобразуем второе слагаемое в (5.44):

$$\frac{1}{8\pi}\int dV(\boldsymbol{ED} - \mathbf{\mathsf{E}}^{\,2}) = \frac{1}{8\pi}\int dV(\boldsymbol{E} + \mathbf{\mathsf{E}}\,)(\boldsymbol{D} - \mathbf{\mathsf{E}}\,) - \frac{1}{8\pi}\int dV\mathbf{\mathsf{E}}\,(\boldsymbol{D} - \boldsymbol{E}) =$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int dV(\boldsymbol{D} - \mathbf{\mathsf{E}}\,)\mathrm{grad}(\varphi + \varphi_0) - \frac{1}{2}\int dV\boldsymbol{P}\mathbf{\mathsf{E}} \ , \tag{5.45}$$

где φ и φ_0 - потенциалы полей $\boldsymbol{E}$ и $\mathbf{\mathsf{E}}$, соответственно Первое слагаемое в правой части (5.45) обращается в нуль, в чём можно убедиться, преобразовывая интеграл к поверхностному и учитывая, что поля $\boldsymbol{E}$ и $\mathbf{\mathsf{E}}$ создаются одними и теми же заряженными проводниками. Используя квазиоднородность поля $\mathbf{\mathsf{E}}$, получаем

$$\mathsf{F}^{\frown}(T,V,\mathbf{\mathsf{E}}\,) = \mathsf{F}_0(T,V) - (\mathbf{\mathsf{P}},\mathbf{\mathsf{E}}\,)/2 = \mathsf{F}_0(T,V) - V\alpha_{ik}\mathsf{E}_i\mathsf{E}_k/2\,, \tag{5.46}$$

$$\delta\,\mathsf{F}^{\frown}(T,V,\mathbf{\mathsf{E}}\,) = -S\delta T - p\delta V - \mathbf{\mathsf{P}}\,\delta\mathbf{\mathsf{E}}\ . \tag{5.47}$$

Дифференцируя (5.47) по $\mathbf{\mathsf{E}}$, находим

$$\mathbf{\mathsf{P}} = -(\partial\,\mathsf{F}^{\frown}/\partial\mathbf{\mathsf{E}}\,)_{T,V}\,.$$

Отметим, что аналогично тому, как доказывалась симметричность тензора ε_{ik}, можно доказать и симметричность тензора α_{ik}.