Профессор Ермаченко В.М. и профессор Евсеев И.В.

Лекция 4.

Энергия электростатического поля проводников. Силы, действующие на проводник в электростатическом поле.

Рассмотрим теперь энергию электростатического поля, создаваемого заряженными проводниками. Как следует из (2.19), плотность энергии электростатического поля имеет вид

$$w = \frac{1}{8\pi}\boldsymbol{ED}. \tag{4.1}$$

Так как внутри проводников $\boldsymbol{E}$ = 0, а вне $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E}$, то энергия поля

$$W = \frac{1}{8\pi}\int E^2 dV, \tag{4.2}$$

где интегрирование ведется по области пространства вне проводников. Преобразуем выражение (4.2) так, чтобы энергия W явно выражалась через заряды e_a и потенциалы φ_a проводников, создающих это поле. Используя (3.7), запишем $E^2 = -\boldsymbol{E}\mathrm{grad}\varphi$ и преобразуем (4.2) к виду

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int div(\varphi\boldsymbol{E})dV. \tag{4.3}$$

Затем интеграл в (4.3) преобразуем в интеграл по поверхности, охватывающей объём интегрирования:

$$W = -\frac{1}{8\pi}\oint \varphi\boldsymbol{E}d\boldsymbol{S}. \tag{4:4}$$

Эта поверхность состоит из бесконечно удалённой поверхности и суммы поверхностей проводников. Интеграл по бесконечно удалённой поверхности обращается в нуль из-за достаточно быстрого убывания напряжённости поля и потенциала на бесконечности. Остаются интегралы по поверхностям проводников. Напомним, что нормаль к поверхности в (4.4) есть внешняя нормаль по отношению к объёму интегрирования в (4.3), т.е. нормаль направлена внутрь проводников. Если, как обычно, считать нормаль внешней по отношению к объёму проводников, то из (4.4) с учетом (3.10) - (3.12) получаем

$$W = \frac{1}{2}\sum_a e_a\varphi_a \tag{4.5}$$

Отметим, что выражение (4.5) имеет такой же вид, как и выражение для энергии системы точечных зарядов. Используя соотношение (3.15), можно (4.5) переписать в виде:

$$W = \frac{1}{2}\sum_{a,b}(C^{-1})_{ab}e_a e_b\,. \tag{4.6}$$

Выражение (4.6) представляет собой квадратичную форму зарядов. Так как исходное выражение для энергии (4.2) положительно, то из условий положительности квадратичной формы следует ряд неравенств, которым должны удовлетворять элементы матрицы C_{ab}.

Перейдем теперь к обсуждению обстоятельства, важного для всей макроскопической электродинамики. Рассматриваемая здесь система включает в себя не только электромагнитное поле, но и совокупность проводников. Последние, как макроскопические тела, подчиняются законам термодинамики. Поэтому следует рассматривать изучаемую систему как термодинамическую, а величины, характеризующие ее, как термодинамические функции. До включения поля термодинамическая система характеризуется температурой T и двумя переменными V и p (V - объём, p - давление). После включения поля добавляются две новые характеристики: e_a и φ_a. Одна из них может быть выбрана как внешний параметр, тогда другая будет внутренним параметром. Как известно, в состоянии термодинамического равновесия внутренние параметры являются функциями внешних и температуры. При отсутствии поля эта зависимость связывает между собой величины V, p и T, т.е. представляет обычное уравнение состояния вещества. Для новых переменных e_a и φ_a роль такого «уравнения состояния» играет соотношение (3.14) или (3.15).

Появление при наличии поля новых переменных расширяет возможность выбора внешних параметров. Так для одного проводника в качестве внешних параметров могут быть выбраны следующие пары: (V, e); (V, φ); (p, e); (p, φ). Наряду с этими переменными термодинамические функции должны зависеть либо от температуры, либо от энтропии S. Нетрудно видеть, что выражение для W (см. (4.6)) представляет собой связанную с полем добавку к термодинамическим потенциалам в переменных S, V, e, либо в переменных T, V, e. В самом деле, рассматриваемая система является замкнутой при фиксированных зарядах проводников, поэтому только при выборе e в качестве внешних параметров W представляет собой энергию замкнутой системы. Что касается V, то, как указывалось ранее, именно от геометрических характеристик проводников зависят элементы матрицы C_{ab} (в данном случае под V понимается совокупность переменных, характеризующих объём, форму и взаимное расположение проводников). Наконец, W не зависит ни от температуры, ни от энтропии, поэтому выбор между этими переменными может быть сделан любым образом. Добавляя к выражению (4.6) U_0 - внутреннюю энергию проводников при отсутствии поля, запишем полную энергию рассматриваемой системы в виде

$$U(S,V,e) = U_0(S,V) + \frac{1}{2}\sum_{a,b}(C^{-1})_{ab}e_a e_b\,. \tag{4.7}$$

Дифференцируя (4.7) по e_a, получаем

$$\left(\frac{\partial U}{\partial e_a}\right)_{S,V} = \varphi_a.$$

Таким образом, потенциал φ_a имеет смысл обобщенной силы, относящейся к обобщенной координате e_a. Нетрудно осуществить формальный переход к термодинамическому потенциалу в переменных S, V, φ. Этот потенциал будем обозначать $\tilde{U}$:

$$\tilde{U}(S,V,\varphi) = U - \sum_a e_a \varphi_a. \tag{4.8}$$

Используя (4.7) и (3.14), получаем

$$\tilde{U}(S,V,\varphi) = U_0(S,V) - \frac{1}{2}\sum_{a,b} C_{ab}\varphi_a\varphi_b. \tag{4.9}$$

Легко видеть что добавки, связанные с электрическим полем, в (4.7) и (4.9) равны между собой по величине и имеют противоположные знаки. Энергия $\tilde{U}$ имеет непосредственный физический смысл. Как было указано ранее, система с заданными потенциалами проводников не является замкнутой. Для поддержания потенциалов проводников постоянными проводники необходимо соединить с какими-то «резервуарами», т.е. с проводниками, обладающими большой ёмкостью. Заряжаясь зарядом e_a, проводник отбирает у «резервуара» энергию $e_a\varphi_a$. Поэтому переменная часть энергии «резервуаров» - $\sum_a e_a\varphi_a$. Следовательно, $\tilde{U}$ - энергия замкнутой системы, состоящей из проводников, поля и «резервуаров». Проводя различные преобразования Лежандра, можно перейти к свободной энергии F и другим термодинамическим потенциалам. Полученные выражения могут быть использованы для решения обычных термодинамических задач. Для примера найдем избыточное давление на поверхность отдельного проводника, вызванное его зарядом. Как следует из (4.7), в случае одного проводника изменение его свободной энергии, связанное с зарядом, равно

$$\Delta\mathsf{F} = \frac{1}{2}\frac{e^2}{C}$$

где C - его ёмкость. Используя термодинамическое соотношение $p = -(\partial\mathsf{F}/\partial V)_{T,e}$, получаем

$$\Delta p = -(\partial\Delta\mathsf{F}/\partial V)_{T,e} = -\frac{e^2}{2}\frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{1}{C}\right).$$

Например, для шара радиуса R имеем

$$C = R = (3/4\pi)^{1/3}V^{1/3}, \quad \Delta p = e^2/(6CV).$$

Выражения для энергий $\tilde{U}$ и U соответствуют первым двум постановкам задач электростатики проводников. Полезно получить выражение для энергии, отвечающее третьей постановке. Напомним, что в этом случае внешним параметром является электрическое поле $\mathbf{E}$, и нужно преобразовать выражение для энергии так, чтобы явно выделить эту зависимость. Для этого удобно исходить из первоначального определения энергии (4.2), записав его следующим образом:

$$W = \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - \mathcal{E}^2)dV + \frac{1}{8\pi}\int \mathcal{E}^2 dV\,. \tag{4.10}$$

Интегралы в (4.10) распространим и на область внутри проводника. Тогда второе слагаемое в (4.10) не зависит от присутствия проводника и может быть опущено. При этом изменится определение рассматриваемой термодинамической системы, так как из нее исключается то поле, которое существовало бы в пространстве при отсутствии проводника. Энергию этой системы, как функцию внешнего поля, обозначим

$$\tilde{U}(S,V,\mathcal{E}) = U_0(S,V) + \frac{1}{8\pi}\int (E^2 - \mathcal{E}^2)dV\,. \tag{4.11}$$

Проведем следующие преобразования интеграла в (4.11). Пусть φ и φ_0 - потенциалы полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}$, соответственно; V_i и V_e - объёмы внутри и вне рассматриваемого проводника. Тогда получаем

$$\frac{1}{8\pi}\int (E^2 - \mathcal{E}^2)dV = \frac{1}{8\pi}\int_{V_e} (E^2 - \mathcal{E}^2)dV - \frac{1}{8\pi}\int_{V_i} \mathcal{E}^2 dV =$$

$$- \frac{1}{8\pi}\int_{V_e} (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\mathcal{E}})\nabla(\varphi + \varphi_0)dV + \frac{1}{8\pi}\int_{V_i} \boldsymbol{\mathcal{E}}\,\nabla\varphi_0 dV\,.$$

Преобразуя полученные интегралы к интегралам по поверхности проводника с учетом того, что div$\boldsymbol{E}$ = 0 и div$\boldsymbol{\mathcal{E}}$ = 0, получаем

$$\frac{1}{8\pi}\int (E^2 - \mathcal{E}^2)dV = \frac{1}{8\pi}\oint_S (\boldsymbol{E} - \boldsymbol{\mathcal{E}})(\varphi + \varphi_0)d\boldsymbol{S} + \frac{1}{8\pi}\oint_S d\boldsymbol{S}\varphi_0\boldsymbol{\mathcal{E}}$$

Потенциал φ постоянен на поверхности проводника и может быть вынесен за знак интеграла. Возникающие при этом интегралы от $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ по замкнутой поверхности равны нулю из-за отсутствия зарядов внутри этой поверхности. Таким образом,

$$\frac{1}{8\pi}\int (E^2 - \mathcal{E}^2)dV = \frac{1}{8\pi}\oint_S \boldsymbol{E}\varphi_0 d\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\oint_S \sigma\varphi_0 dS\,. \tag{4.12}$$

Так как интеграл в (4.12) берется по поверхности проводника, то можно воспользоваться квазиоднородностью поля $\boldsymbol{\mathcal{E}}$ и записать

$$\varphi_0 = -(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\mathcal{E}}). \tag{4.13}$$

Подставляя (4.13) в (4.12) и используя определение дипольного момента $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ (см. (3.21), а затем и (3.22)), получаем окончательно

$$\tilde{U}(S,V,\mathcal{E}) = U_0(S,V) - (\boldsymbol{\mathcal{P}},\boldsymbol{\mathcal{E}})/2 = U_0(S,V) - V\alpha_{ik}\mathcal{E}_i\mathcal{E}_k/2. \tag{4.14}$$

Дифференцируя (4.14) по $\mathcal{E}_i$, имеем

$(\partial \tilde{U} / \partial \mathsf{E}_i)_{S,V} = - \mathsf{P}_i$. (4.15)

Как известно, энергия постоянного диполя $\mathbf{P}$ во внешнем поле равна - ($\mathbf{P}$,$\mathbf{E}$). Коэффициент 1/2 в формуле (4.14) связан с тем, что в данном случае дипольный момент не постоянен, а пропорционален напряженности внешнего поля $\mathbf{E}$.

Установим знак изменения энергии незаряженного проводника во внешнем поле. Для этого обратимся к выражению (4.11). Интеграл, стоящий там, можно рассматривать как изменение энергии поля, возникшее в результате установления стационарного состояния при внесении проводника в электрическое поле. Установление этого состояния, как отмечалось ранее, связано с диссипацией энергии поля - переходом части этой энергии в джоулеву теплоту. Следовательно, энергия поля в конечном стационарном состоянии меньше, чем энергия в начальном состоянии, т.е. при отсутствии проводника. Таким образом, добавка к энергии проводника при помещении его во внешнее поле всегда отрицательна. Отсюда следует, что квадратичная форма в правой части равенства (4.14) положительна: $\alpha_{ik}\mathsf{E}_i\mathsf{E}_k > 0$, т.е. главные значения тензора α_{ik} положительны.

Сила, действующая на проводник, как известно, есть производная потенциальной энергии по координатам проводника, взятая со знаком минус. Напомним, что потенциальная энергия - это та часть энергии замкнутой системы, которая зависит от взаимного положения тел. В первой постановке задачи, когда заданы потенциалы проводников, энергией замкнутой системы является величина $\tilde{U}$ (S,V,φ), во второй - $U(S,V,e)$. В третьей постановке задачи сила, действующая на незаряженный проводник со стороны поля, равна

$\boldsymbol{F} = V\alpha_{ik}\,\mathrm{grad}\mathsf{E}_i\mathsf{E}_k/2$.

Так как добавка к энергии незаряженного проводника во внешнем поле отрицательна, то он будет двигаться в направлении увеличения напряжённости поля, т.е. будет втягиваться в электрическое поле.

Для неподвижных проводников в электростатическом поле на первый план выступают эффекты, связанные с деформацией тела - электрострикция. Для расчета электрострикционных эффектов необходимо сначала найти силы, действующие на поверхность проводников, а затем, используя теорию упругости, определить деформацию тела под действием этих сил. Возможность такого подхода связана с относительно малой деформацией проводников. В этом разделе ограничимся только вычислением сил.

Сила, действующая на проводник со стороны поля, равна приращению импульса проводника в единицу времени. Это приращение равно импульсу поля, втекающему внутрь проводника через его поверхность. Как известно, поток импульса это тензор, образованный пространственными компонентами четырёхмерного тензора энергии-импульса поля.

Здесь вместо тензора потока импульса используется тензор напряжений Максвелла T_{ik} , равный тензору потока импульса с обратным, знаком:

$$T_{ik} = \frac{1}{4\pi}(E_i E_k - \frac{1}{2}E^2\delta_{ik}). \tag{4.16}$$

При таком определении сила, действующая на проводник со стороны поля, равна

$$\mathsf{F}_i = \oint T_{ik}\,dS_k\,, \tag{4.17}$$

где $d\boldsymbol{S}$ - элемент площади с внешней нормалью. Вводя единичный вектор $\boldsymbol{n}$ внешней нормали, перепишем (4.17) в виде

$$\mathbf{F} = \oint \boldsymbol{F}\,dS\,, \tag{4.18}$$

где с учетом того, что на поверхности проводника $\boldsymbol{E} = E\boldsymbol{n}$, для величины $\boldsymbol{F}$ имеем:

$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{n}E^2/(8\pi) = \sigma\boldsymbol{E}/2$.

Как следует из (4.18), $\boldsymbol{F}$ – это сила, действующая на единицу площади проводника. Например, для заряженного шара $|\boldsymbol{F}|$ совпадает с выражением для Δp , полученным выше.