Профессор Ермаченко В.М. и профессор Евсеев И.В.

Лекция 3.

Электростатика проводников. Различные постановки задачи по определению поля. Коэффициенты ёмкости и электростатической индукции. Тензор поляризуемости проводника.

Эта глава посвящена рассмотрению стационарных задач электродинамики, т.е. задач, в которых плотности заряда и тока не зависят от времени. Очевидно, что создаваемые этими зарядами и токами поля также не зависят от времени, так что уравнения Максвелла принимают следующий вид:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = 0, \tag{3.1}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 4\pi(\rho + \rho_{cm}), \tag{3.2}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0, \tag{3.3}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{cm}). \tag{3.4}$$

Видно, что эта система уравнений разбивается на две отдельные системы. Уравнения (3.1) и (3.2) вместе с уравнением связи (2.8) и граничными условиями (2.2) и (2.5) позволяют по заданным зарядам найти напряжённость электрического поля. В диэлектриках свободных зарядов нет ($\rho = 0$), а распределение сторонних зарядов задается внешними условиями; следовательно, задача является математически замкнутой. В случае проводников плотность свободных зарядов не может быть задана произвольно, так как она сама зависит от напряжённости поля. Для нахождения напряжённости электрического поля внутри проводника необходимо использовать уравнение непрерывности (1.24) и закон Ома (2.13). В стационарном случае из (1.24) получаем уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\sigma_{ik}E_k) = 0\,. \tag{3.5}$$

Оно заменяет уравнение (3.2) для областей внутри проводников. Уравнение (3.2) должно быть использовано для нахождения плотности свободных зарядов по найденной напряжённости электрического поля. Характер решения задачи в области внутри проводников может быть установлен из следующих рассуждений.

Электрическое поле, вызывающее ток в проводнике, производит над перемещающимися свободными зарядами работу. При этом энергия поля диссипируется в проводнике, переходя в теплоту. Следовательно, электрическое поле внутри проводника с течением времени будет затухать, а единственным стационарным состоянием будет состояние с напряжённостью поля, равной нулю.

Сделанный вывод о невозможности стационарного тока в проводнике справедлив не всегда. Система проводников может содержать элементы, в которых ток поддерживается силами неэлектрического происхождения. Такими элементами могут быть аккумуляторы, гальванические элементы, участки с градиентом температуры и т.д. Следует иметь в виду, что в области этих элементов закон Ома в форме (2.13) неприменим. Положительная работа над зарядами неэлектрических сил в этих элементах компенсирует уменьшение энергии на джоулеву теплоту в проводниках. Конечно, уменьшение внутренней энергии в этих элементах означает, что в действительности процесс протекания тока не стационарен. Однако это уменьшение обычно происходит столь медленно, что в ряде случаев им можно пренебречь.

Таким образом, в стационарном случае все задачи можно разбить на два класса. В задачах первого класса стационарные токи отсутствуют, и речь идет о нахождении характеристик электрического поля. Совокупность таких задач называется задачами электростатики. В задачах второго класса имеются стационарные токи, и речь идет о нахождении характеристик стационарного магнитного поля. В этом параграфе рассмотрены задачи электростатики проводников.

Рассмотрим систему проводников, помещенную в вакуум (электромагнитные свойства вакуума: $\varepsilon = 1$, $\mu = 1$, $\rho + \rho_{cm} = 0$, $\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{cm} = 0$). Будем искать напряжённость электрического поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$, создаваемого этими проводниками, предполагая их заряженными. Обозначим e_a заряд a-го проводника (a - номер проводника). Предположим, что все проводники находятся в термодинамическом равновесии. Как было показано выше, напряжённость поля $\boldsymbol{E}$ внутри каждого проводника равна нулю. Поэтому задача сводится к отысканию $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ в пространстве между проводниками. Уравнение (3.2) в этой области имеет вид

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0. \qquad (3.6)$$

С учетом того, что внутри проводника напряжённость поля равна нулю, из уравнения (3.2) следует, что объёмная плотность зарядов в проводнике равна нулю, т.е. заряды в проводнике распределены по его поверхности. При решении уравнений (3.1) и (3.6) удобно вместо векторной функции $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$ выбрать скалярную функцию $\varphi(\boldsymbol{r})$, связанную с $\boldsymbol{E}$ соотношением

$$\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\varphi. \qquad (3.7)$$

При подстановке (3.7) в (3.1) это уравнение обращается в тождество. Из (3.6) получаем, что в пространстве между проводниками функция $\varphi(\boldsymbol{r})$ удовлетворяет уравнению Лапласа:

$$\Delta\varphi = 0. \qquad (3.8)$$

Функция φ называется скалярным потенциалом. Он имеет смысл потенциальной энергии единичного точечного заряда в электрическом поле, в частности, разность значений φ в точках 1 и 2 дает работу сил поля при перемещении единичного заряда из точки 1 в точку 2. Нетрудно видеть, что скалярный потенциал определён с точностью до произвольной постоянной. Обычно её определяют, требуя обращения в нуль потенциала на бесконечности. Это требование может быть выполнено, когда заряды расположены в ограниченной области пространства. В противном случае, например, в поле бесконечной заряженной плоскости или нити, отсутствуют общепринятые требования выбора произвольной постоянной.

Предполагая, что система проводников занимает ограниченную область пространства, нормируем потенциал так, чтобы

$$\lim_{r\to\infty} \varphi(\boldsymbol{r}) = 0. \tag{3.9}$$

На поверхностях проводников должны выполняться граничные условия, вытекающие из (2.2) и (2.5). Из условия непрерывности $\boldsymbol{E}_t$ с учетом того, что внутри проводника $\boldsymbol{E} = 0$, следует, что потенциал φ постоянен вдоль поверхности проводника, т.е.

$$\varphi\,|_{S_a} = \varphi_a = \text{const}. \tag{3.10}$$

Аналогично, из условия (2.5) имеем

$$E_n\,|_{S_a} = -\,\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,|_{S_a} = 4\pi\sigma_a, \tag{3.11}$$

где σ_a - плотность поверхностных зарядов *a*-го проводника. Так как полный заряд проводника

$$e_a = \oint_{S_a} \sigma_a dS_a\,, \tag{3.12}$$

то, интегрируя (3.11) по поверхности *a*-го проводника, получаем

$$e_a = -\,\frac{1}{4\pi}\oint_{S_a} \frac{\partial\varphi}{\partial n} dS_a\,. \tag{3.13}$$

Уравнение (3.8) с соответствующими граничными условиями имеет единственное решение. Единственность решения является обоснованием применения специальных методов и приёмов, используемых в отдельных задачах электростатики.

Как известно, функции, удовлетворяющие уравнению Лапласа, называются гармоническими. Напомним некоторые свойства этих функций.

Для определения гармонической функции достаточно задать её значения на границе области (задача Дирихле). В рассматриваемом случае границей являются поверхности проводников и бесконечно удаленная точка. Таким образом, задание потенциалов проводников (3.10) и нормировка потенциала (3.9) полностью определяют потенциал $\varphi(\boldsymbol{r})$. При найденном потенциале $\varphi(\boldsymbol{r})$, используя соотношение (3.11), можно найти распределение плотности поверхностных зарядов σ_a и полный заряд каждого проводника e_a. Видно, что распределение плотности поверхностных зарядов σ_a полностью определяется заданием потенциалов проводников. Этот результат физически очевиден: заряды должны распределиться по поверхности так, чтобы обеспечить обращение в нуль электрического поля внутри проводника. Следовательно, распределение поверхностных зарядов на проводнике не может быть задано произвольно.

Гармоническая функция $\varphi(\boldsymbol{r})$ в пространстве между проводниками меньше, чем наибольший из потенциалов проводников φ_a, и больше, чем наименьший. Если наименьший из потенциалов проводников положителен, то скалярный потенциал больше нуля, так как наименьшего значения, равного нулю, он достигает в бесконечно удаленной точке. Функция $\varphi(\boldsymbol{r})$ не имеет максимумов и минимумов в пространстве между проводниками. Физически это означает, что пробный заряд не может находиться в состоянии устойчивого равновесия в точке, лежащей в области между проводниками.

Получим некоторые следствия, вытекающие из сформулированных выше свойств гармонических функций. Из них следует, что заряды проводников e_a однозначно определяются заданием потенциалов проводников φ_a. Более того, из-за линейности уравнения (3.8) и граничных условий (3.10) и (3.9) можно утверждать, что потенциал $\varphi(\boldsymbol{r})$, а, следовательно, и заряды e_a являются линейными функциями потенциалов проводников φ_a:

$$e_a = \sum_b C_{ab}\varphi_b \,. \tag{3.14}$$

Диагональные элементы матрицы C_{aa} называются коэффициентами ёмкости, величины C_{ab} при $a \neq b$ называются коэффициентами электростатической индукции. Элементы матрицы C_{ab} зависят от формы, размеров и взаимного расположения проводников. Аналогично можно написать соотношение, выражающее потенциалы проводников через их заряды. Решая (3.14), имеем

$$\varphi_a = \sum_b (C^{-1})_{ab} e_b \,. \tag{3.15}$$

Коэффициенты $(C^{-1})_{ab}$ образуют матрицу, обратную матрице C_{ab}. Нетрудно видеть, что коэффициенты C_{ab} имеют размерность длины. Можно показать, что матрица коэффициентов C_{ab} симметрична, причём коэффициенты ёмкости $C_{aa} > 0$, а коэффициенты электростатической индукции $C_{ab} < 0$ $(a \neq b)$.

Рассмотрим теперь общие постановки задач электростатики проводников. Потенциалы проводников φ_a и их заряды e_a связаны между собой соотношениями (3.14) и (315). Поэтому можно задавать произвольно либо потенциалы, либо заряды проводников. В соответствии с этим имеем две следующие постановки задачи.

1. Задаются потенциалы φ_a всех проводников. Решается уравнение

$$\Delta\varphi = 0$$

для определения потенциала с граничными условиями

$$\varphi|_{S_a} = \varphi_a, \quad \lim_{r\to\infty}\varphi(\boldsymbol{r}) = 0.$$

Затем по найденному потенциалу находятся заряды проводников по соотношению (3.13).

2. Задаются заряды e_a проводников. Решается уравнение

$$\Delta\varphi = 0.$$

Для решения необходимо привлечь условие постоянства потенциала на поверхностях всех проводников и условие (3.9). Конечно, значения этих постоянных φ_a неизвестны, и их нужно определить из решения. Можно поступить следующим образом. Произвольно зададём значения потенциалов проводников

$$\varphi|_{S_a} = \varphi'_a = \text{const}.$$

Решаем задачу в первой постановке и находим соответствующие этим потенциалам значения зарядов e'_a проводников. Если случайно окажется, что $e'_a = e_a$, то задача решена. В общем случае, зная e'_a и φ'_a из соотношения

$$e'_a = \sum_b C_{ab}\varphi'_b,$$

находим C_{ab} и $(C^{-1})_{ab}$. Затем из (3.15) по заданным зарядам e_a определяем потенциалы проводников φ_a, и для нахождения $\varphi(\boldsymbol{r})$ решаем задачу в первой постановке.

Физически первую постановку задачи можно представить следующим образом. Рассматриваемые проводники соединены с какими-то источниками («резервуарами»), которые поддерживают их потенциалы постоянными: $\varphi_a = \text{const}$. В этом случае система проводников не замкнута, так как она может обмениваться зарядами (энергией) с резервуарами. Во второй постановке задачи можно считать, что заряды e_a на проводниках появились за счет того, что проводники на какое-то время были соединены с источниками, а затем отсоединены. В этом случае система замкнута.

Напряжённость поля, создаваемого системой проводников, существенно меняется на расстояниях порядка размеров системы L. Предположим, что вдали от системы, т. е. на расстоянии $R >> L$, имеется еще один незаряженный проводник. Пусть размеры этого проводника малы по сравнению с длиной, на которой существенно меняется напряжённость поля. Такое поле называется квазиоднородным. Так мы приходим к третьей постановке задачи: незаряженный проводник во внешнем квазиоднородном поле E. Требуется найти распределение поля $\boldsymbol{E}$ в пространстве, т.е. найти отличие $\boldsymbol{E}$ от E, связанное с присутствием во внешнем поле рассматриваемого незаряженного проводника. Если бы проводник был заряженным, то, вследствие линейности уравнений поля, результирующее изменение можно было бы записать в виде суммы изменения напряжённости поля, связанного с зарядом проводника при отсутствии внешнего поля, и изменения от незаряженного проводника во внешнем поле. Задача нахождения полей, создаваемых заряженными проводниками, была рассмотрена выше.

При помещении незаряженного проводника во внешнее поле он поляризуется, и полная напряженность $\boldsymbol{E}$ поля складывается из внешнего и поля зарядов, выходящих на поверхность рассматриваемого проводника. Обозначим потенциал этого добавочного поля φ'. Так как $\boldsymbol{E} = -\,\mathrm{grad}\varphi$, то запишем потенциал в виде

$$\varphi = -(\boldsymbol{r},\mathbf{E}) + \varphi'. \qquad (3.16)$$

При получении формулы (3.16) поле $\mathbf{E}$ считалось однородным. Так как потенциал φ удовлетворяет уравнению Лапласа, то для потенциала φ' с учетом (3.16) получаем

$$\Delta\varphi' = 0. \qquad (3.17)$$

Для определения φ' нужно задать граничные условия: поведение φ' в бесконечно удаленной точке и на поверхности проводника. Так как проводник не заряжен, то на бесконечности потенциал φ' должен убывать быстрее, чем потенциал заряда, т.е.

$$\lim_{r\to\infty} r\varphi'(\boldsymbol{r}) = 0. \qquad (3.18)$$

На поверхности проводника потенциал φ должен быть постоянным. Соответствующим выбором начала отсчета эта константа может быть обращена в нуль. Тогда на поверхности проводника потенциал φ' будет удовлетворять условию

$$\varphi'\big|_S = (\boldsymbol{r},\mathbf{E})\big|_S. \qquad (3.19)$$

Таким образом, для решения поставленной задачи нужно решить уравнение (3.17) с граничными условиями (3.18) и (3.19). На больших расстояниях от проводника $\varphi'(\boldsymbol{r})$ можно разложить в ряд по мультиполям и ограничиться первым неисчезающим приближением

$$\varphi'(\boldsymbol{r}) = (\boldsymbol{r},\mathbf{P})/r^3, \qquad (3.20)$$

где $\mathbf{P}$ - полный дипольный момент, возникающий в проводнике под действием внешнего поля $\mathbf{E}$. Для проводника, когда объёмная плотность заряда равна нулю, дипольный момент выражается через поверхностную плотность заряда σ следующим образом:

$$\mathbf{P} = \oint \sigma \boldsymbol{r} dS\,. \qquad (3.21)$$

Вследствие линейности уравнения для $\varphi'(\boldsymbol{r})$, граничных условий и соотношения (3.20) величины $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ связаны между собой линейно. Нетрудно видеть, что коэффициент пропорциональности между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ имеет размерность куба длины, поэтому связь между компонентами $\mathbf{P}$ и $\mathbf{E}$ можно представить в виде

$$P_i = V\alpha_{ik}E_k\,, \tag{3.22}$$

где V - объём проводника, α_{ik} - тензор поляризуемости проводника. Выделение объёма в виде отдельного множителя имеет смысл, когда размеры проводника соизмеримы между собой. Тогда безразмерный тензор α_{ik} зависит в основном от формы проводника. Тензор α_{ik} является симметричным. Практическое вычисление тензора поляризуемости для тела произвольной формы представляет сложную задачу, которая может быть просто решена только в отдельных случаях. Например, для шара $\alpha_{ik} = 3\delta_{ik}/4\pi$.