

Профессор Ермаченко В.М. и профессор Евсеев И.В.

Лекция 2.

Граничные условия. Уравнения связи. Энергия и поток энергии электромагнитного поля в веществе.

Граничные условия. Рассмотрим сначала граничные условия. Ясно, что при микроскопическом подходе такого понятия, как «граница раздела», вообще не существует. Оно возникает при рассмотрении вещества как сплошной среды. Микроскопически граница раздела представляет собой некоторую область, в которой свойства вещества резко меняются. Эту область часто называют переходным слоем. Для конденсированных сред толщина переходного слоя порядка атомных размеров. При макроскопическом описании граница раздела считается геометрической поверхностью, т.е. предполагается, что при переходе через некоторую поверхность физические свойства вещества меняются скачком.

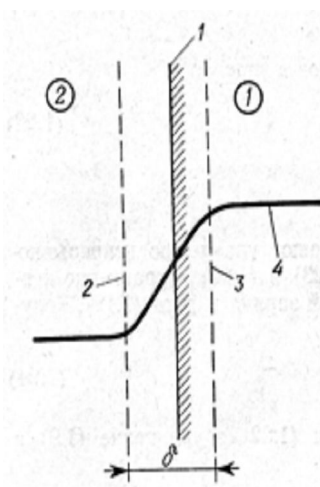


Рис. 1. Схематическое изображение границы раздела между средами 1 и 2: 1 - геометрическая граница раздела между средами 1 и 2; 2 и 3 - границы переходного слоя толщиной δ ; 4 - кривая, схематично показывающая изменение каких-либо физических свойств вещества при переходе из среды 1 в среду 2 при микроскопическом подходе.

Формально переход к резкой границе можно совершить, устремляя к нулю толщину переходного слоя δ (рис. 1). Если при этом в переходном слое был конечный заряд, то в результате такого перехода он будет сосредоточен на геометрической поверхности раздела. Так мы приходим к понятию поверхностного заряда. Плотность поверхностного заряда σ связана с величиной заряда e соотношением

$$e = \int \sigma dS ,$$

где dS - элемент поверхности границы раздела. Аналогично возникает и понятие поверхностного тока, плотность которого обозначим i . Направление i совпадает с направлением объёмного тока j , протекающего в переходном слое, а величина i выбирается так, чтобы поверхностный ток через линию, в которую превращается при $\delta \rightarrow 0$ площадь, выбранная в переходном слое (см. рис. 2), был равен объёмному току через эту площадь.

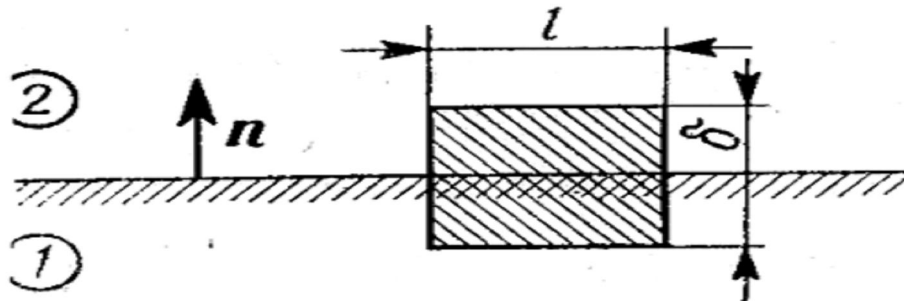


Рис. 2. Область интегрирования при получении граничных условий: n - единичный вектор нормали к геометрической границе раздела между средами; δ - толщина переходного слоя.

При переходе к геометрической поверхности раздела величины P и M , характеризующие свойства вещества, станут разрывными функциями. Поэтому удобно решать систему уравнений для нахождения макроскопических электромагнитных полей отдельно для каждого из участков пространства, занятого одним веществом. На границах раздела сред нужно производить сшивание решений, используя соответствующие граничные условия. Совокупность этих граничных условий вытекает непосредственно из системы уравнений Максвелла.

Проинтегрируем, например, уравнение (1.31) по поверхности бесконечно малого прямоугольника, расположенного в переходной области так, как показано на рис. 2:

$$\int \text{rot} \mathbf{E} d\mathbf{S} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} d\mathbf{S} .$$

Используя теорему Стокса, получаем

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{B} d\mathbf{S} .$$

Так как стороны прямоугольника l и δ малы по сравнению с длинами, на которых существенно изменяются величины \mathbf{B} и \mathbf{E} , то интегралы можно вычислить по теореме о среднем.

Например,

$$\int \mathbf{B} d\mathbf{S} = B_{n_1} l \delta ,$$

где B_{n_1} - проекция \mathbf{B} на нормаль \mathbf{n}_1 к поверхности прямоугольника. Переходя затем к геометрической границе раздела, т.е. устремляя δ к нулю, имеем

$$(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2)\mathbf{l} = 0, \quad (2.1)$$

где \mathbf{E}_1 - напряженность электрического поля на границе раздела при подходе к ней со стороны среды 1, а \mathbf{E}_2 - напряженность поля при подходе со стороны среды 2. При предельном переходе $\delta \rightarrow 0$ направление \mathbf{l} совпадает с направлением одной из касательных к поверхности раздела. Поэтому из условия (2.1) следует, что для произвольной точки \mathbf{r} на границе раздела сред должно выполняться условие

$$\mathbf{E}_{1t} = \mathbf{E}_{2t}, \quad (2.2)$$

где \mathbf{E}_t - проекция вектора \mathbf{E} на направление касательной к границе раздела сред.

Аналогично, из уравнения (1.34), интегрируя его по той же области, получаем

$$\oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{cm})d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{D}d\mathbf{S}$$

Используя теорему о среднем и переходя к пределу $\delta \rightarrow 0$, получаем следующие выражения для отдельных слагаемых этого соотношения:

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int \mathbf{D}d\mathbf{S} = \lim_{\delta \rightarrow 0} D_{n_1} l\delta = 0,$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \oint \mathbf{H}d\mathbf{l} = (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\mathbf{l},$$

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{cm})d\mathbf{S} = i_{n_1} l.$$

Здесь i_{n_1} - проекция плотности поверхностного тока на нормаль к поверхности интегрирования, т.е. на направление касательной \mathbf{n}_1 , ортогональной \mathbf{l} . Подставляя эти выражения в исходное соотношение, получаем

$$(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} i_{n_1} \mathbf{l}.$$

Это равенство можно записать в векторном виде, не зависящем явно от выбора направления касательной \mathbf{l} , вводя единичный вектор нормали к поверхности раздела \mathbf{n} , направленный внутрь среды 2:

$$[\mathbf{n}, \mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{i}. \quad (2.3)$$

Проинтегрируем уравнение (1.32) по объёму бесконечно малого цилиндра, расположенного в переходном слое так, что его высота δ есть толщина переходного слоя, а площадь основания ΔS параллельна возникающей при $\delta \rightarrow 0$ границе раздела:

$$\int \operatorname{div} \mathbf{B}dV = 0.$$

Используя теорему Гаусса - Остроградского и переходя к пределу $\delta \rightarrow 0$, имеем

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int \operatorname{div} \mathbf{B} dV = \lim_{\delta \rightarrow 0} \oint \mathbf{B} dS = (B_{2n} - B_{1n}) \Delta S = 0,$$

откуда получаем

$$B_{1n} = B_{2n}, \quad (2.4)$$

где B_n - проекция \mathbf{B} на нормаль \mathbf{n} к границе раздела сред. Индексы 1 и 2, как и раньше, означают, что соответствующие значения B_n в точках границы раздела получаются при подходе к границе со стороны сред 1 и 2, соответственно.

Аналогично поступаем с уравнением (1.33). Имеем

$$\int \operatorname{div} \mathbf{D} dV = \oint \mathbf{D} dS = 4\pi \int (\rho + \rho_{\text{ст}}) dV.$$

Переходя в этом выражении к пределу $\delta \rightarrow 0$ и вводя поверхностную плотность заряда σ соотношением

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int (\rho + \rho_{\text{ст}}) dV = \int \sigma dS,$$

получаем

$$D_{2n} - D_{1n} = 4\pi\sigma. \quad (2.5)$$

Соотношения (2.2) - (2.5) должны выполняться в любой точке границы раздела сред и представляют собой граничные условия, с помощью которых должно производиться сшивание решений системы уравнений Максвелла, получаемых в соприкасающихся между собой различных средах.

Уравнения связи. Как уже отмечалось, система уравнений (1.31) - (1.34) не является замкнутой. Её нужно дополнить уравнениями, связывающими между собой величины \mathbf{H} , \mathbf{D} , \mathbf{j} с \mathbf{B} и \mathbf{E} . При этом удобно установить связь напряжённостей поля с векторами \mathbf{P} и \mathbf{M} , так как эти величины имеют более наглядный физический смысл.

Для решения поставленной задачи феноменологическая электродинамика вынуждена снова обратиться к микроскопическим теориям. Действительно, для того чтобы найти необходимую связь, нужно рассмотреть движение микрочастиц во внешних макроскопических полях \mathbf{B} , \mathbf{E} и вычислить средние плотности электрического и магнитного дипольных моментов вещества, т.е. решить квантово-механическую и статистическую задачи. В точной постановке эти задачи очень сложны для решения. Однако в тех случаях, когда макроскопические поля не слишком велики, результат можно получить сравнительно просто. В самом деле, в случае малых полей для расчёта можно использовать квантово-механическую теорию возмущений по величине взаимодействия с макроскопическими полями. Как известно, поправки к волновым функциям при этом пропорциональны величине возмущения, а средние значения физических величин в этом приближении будут линейными функциями величины возмущения:

$$P_i = P_{0i} + \kappa_{ik} E_k, \quad (2.6)$$

$$M_i = M_{0i} + \chi_{ik} H_k. \quad (2.7)$$

(По повторяющимся тензорным индексам везде подразумевается суммирование от 1 до 3.) Отметим, что в выражении (2.7) физически более последовательно было бы записать \mathbf{M} в виде линейной функции \mathbf{B} . Однако, в рассматриваемом приближении величины \mathbf{B} и \mathbf{H} линейно связаны друг с другом, поэтому обе записи математически эквивалентны. Принято выражать \mathbf{M} через \mathbf{H} . Величины \mathbf{P}_0 и \mathbf{M}_0 представляют собой плотности дипольных электрического и магнитного моментов вещества при отсутствии внешних полей. Их называют спонтанным электрическим и спонтанным магнитным моментами, соответственно. Вещества, у которых $\mathbf{P}_0 \neq 0$, называются пьезоэлектриками. Для большинства веществ $\mathbf{P}_0 = 0$. Аналогично, для большинства веществ, за исключением ферромагнетиков, $\mathbf{M}_0 = 0$.

Величина κ_{ik} называется тензором диэлектрической восприимчивости (поляризуемости) вещества, χ_{ik} - тензором магнитной восприимчивости. Используя выражения (2.6), (2.7) и (1.27), (1.28), получаем

$$D_i = D_{0i} + \varepsilon_{ik} E_k, \quad (2.8)$$

$$B_i = B_{0i} + \mu_{ik} H_k, \quad (2.9)$$

где

$$\varepsilon_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\kappa_{ik}, \quad (2.10)$$

$$\mu_{ik} = \delta_{ik} + 4\pi\chi_{ik}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{D}_0 = 4\pi\mathbf{P}_0, \quad \mathbf{B}_0 = 4\pi\mathbf{M}_0. \quad (2.12)$$

Величина ε_{ik} называется тензором диэлектрической проницаемости вещества, а μ_{ik} - тензором магнитной проницаемости. Рассматриваемое приближение допускает также наличие в формуле (2.8) члена линейного по напряженности магнитного поля, а в (2.9) - линейного по напряженности электрического поля. Такого рода слагаемые могут существовать лишь в веществах, обладающих определенными свойствами внутренней симметрии. Наличие этих слагаемых приводило бы, однако, к ряду явлений, которые до сих пор не обнаружены. Поэтому в дальнейшем формулы (2.8) и (2.9) используются при рассмотрении любых веществ.

Рассуждения, которые привели к формулам (2.6) и (2.7), позволяют установить критерий применимости линейного приближения. Оно основано на использовании теории возмущений, условием применимости которой является малость макроскопического поля по сравнению с внутренними полями. Например, для среды, поляризация которой есть результат деформации электронных оболочек отдельных атомов, напряжённость поля \mathbf{E}

должна быть малой по сравнению с напряжённостью внутриатомных полей, порядок которых 10^{10} В/см.

Установим теперь связь между плотностью электрического тока \mathbf{j} и напряжённостью электрического поля \mathbf{E} . Для этого в принципе нужно решить кинетическую задачу о поведении системы электронов проводника во внешнем электрическом поле. При этом существенны процессы взаимодействия электронов с кристаллической решеткой, в которых они теряют свой импульс. Решение квантово-механической задачи о движении электрона в периодическом поле кристаллической решетки показывает, что среднее значение его импульса в отсутствие внешнего поля остается постоянным. Точно также не изменяется импульс системы электронов вследствие их взаимодействия между собой. Поэтому процессами, в которых электроны теряют импульс, являются столкновения электронов с примесными атомами и возбуждение электронами колебаний атомов кристаллической решетки. Эти процессы приводят к торможению электронов. В итоге устанавливается стационарное движение электронов, при котором сила, действующая со стороны электрического поля, компенсируется тормозящей силой. Скорость установившегося движения, а следовательно, и плотность тока пропорциональны напряжённости электрического поля \mathbf{E} :

$$j_i = \sigma_{ik} E_k. \quad (2.13)$$

Соотношение (2.13) называют законом Ома в дифференциальной форме, а σ_{ik} - тензором проводимости. Следует иметь в виду, что ток в веществе может возникать не только под действием внешнего электрического поля, но и за счёт других причин, например, градиента температуры (термоэлектродвижущая сила). Рассмотрение таких вопросов выходит за рамки этого курса.

Формулы (2.8), (2.9), и (2.13) решают задачу, которая была поставлена в этом параграфе: они устанавливают необходимую связь различных величин, характеризующих макроскопическое электромагнитное поле. Эти связи содержат два вектора и три тензора. В дальнейшем будет показано, что эти тензоры являются симметричными. В частном случае изотропных сред они принимают вид

$$\varepsilon_{ik} = \varepsilon \delta_{ik}, \quad \mu_{ik} = \mu \delta_{ik}, \quad \sigma_{ik} = \sigma \delta_{ik}.$$

Скалярные величины ε , μ , и σ называются диэлектрической проницаемостью, магнитной проницаемостью и проводимостью вещества, соответственно. Все величины \mathbf{B}_0 , \mathbf{D}_0 , ε_{ik} , μ_{ik} , и σ_{ik} зависят только от свойств вещества и его термодинамического состояния. Эти утверждения справедливы лишь для постоянных или медленноменяющихся полей. При быстром изменении поля величины ε_{ik} , μ_{ik} , σ_{ik} перестают быть постоянными и начинают зависеть от частоты поля. Физический смысл этой зависимости и следствия будут рассмотрены далее.

Отметим, что феноменологические уравнения (1.31) - (1.34) правильно описывают поведение электромагнитного поля при отсутствии вещества. Действительно, в этом случае плотности свободных зарядов ρ и токов \mathbf{j} равны нулю, а $\varepsilon_{ik} = \delta_{ik}$, $\mu_{ik} = \delta_{ik}$. Таким образом, в этих условиях получаются уравнения, описывающие поведение электромагнитного поля в вакууме, источником которого являются отдельные заряды (сторонние заряды). Следовательно, феноменологические уравнения (1.31) - (1.34) можно рассматривать как обобщение уравнений электродинамики в вакууме.

Энергия и поток энергии электромагнитного поля в веществе. Одним из важнейших следствий уравнений макроскопической электродинамики является закон, связывающий плотность энергии и плотность потока энергии электромагнитного поля в макроскопических телах. Для простоты ограничимся случаем непирозлектрического и неферромагнитного вещества, так что уравнения связи (2.8), (2.9) имеют вид

$$D_i = \varepsilon_{ik} E_k, \quad (2.14)$$

$$B_i = \mu_{ik} H_k. \quad (2.15)$$

Умножим обе части уравнения (1.34) скалярно на \mathbf{E} и вычтем из полученного выражения уравнение (1.31), скалярно умноженное на \mathbf{H} :

$$\mathbf{E} \operatorname{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{cm}) \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{H}. \quad (2.16)$$

Рассмотрим теперь случай медленноменяющихся полей, когда тензоры ε_{ik} и μ_{ik} можно считать постоянными величинами. Тогда с учетом симметричности этих тензоров последние два слагаемых в правой части (2.16) можно записать следующим образом:

$$\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \mathbf{H} = \frac{1}{2c} \frac{\partial (\mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{H}\mathbf{B})}{\partial t}. \quad (2.17)$$

Введем обозначения

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}], \quad (2.18)$$

$$w = \frac{1}{8\pi} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}). \quad (2.19)$$

В этих обозначениях равенство (2.16) принимает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{S} = - (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{cm}) \mathbf{E}. \quad (2.20)$$

В случае равенства нулю правой части соотношение (2.20) имеет вид закона сохранения некоторой физической величины, причём w имеет смысл плотности, а \mathbf{S} - плотности потока этой величины. Отметим, что эта величина есть не что иное, как энергия электромагнитного поля. В самом деле, выражение $(\mathbf{j} + \mathbf{j}_{cm}) \mathbf{E}$, являющееся в соотношении (2.20) стоком рассматриваемой величины, представляет собой работу, совершаемую силами элект-

ромагнитного поля над зарядами, т.е. уменьшение энергии электромагнитного поля. Это же следует из предельного перехода к вакууму: \mathbf{S} представляет собой плотность потока энергии электромагнитного поля, а w - плотность энергии. Обратим внимание, что выражения для плотности потока энергии поля в среде и в вакууме имеют один и тот же вид. Физический смысл этого становится ясным при рассмотрении потока энергии поля сквозь границу вакуум - среда. Действительно, при отсутствии поверхностных токов нормальная компонента вектора S_n не должна претерпевать разрыва на границе. Сопоставляя выражение для вектора \mathbf{S} в пустоте с граничными условиями, выражающими непрерывность тангенциальных составляющих \mathbf{E} и \mathbf{H} , приходим к выводу, что \mathbf{S} имеет в среде тот же вид. Вектор \mathbf{S} называется вектором Пойнтинга, а соотношение (2.20) - теоремой Пойнтинга.

В заключение отметим, что проведенный вывод опирался на предположение о постоянстве величин ε_{ik} и μ_{ik} . Для быстропеременных полей понятие энергии электромагнитного поля можно ввести при некоторых ограничениях.