Профессор Ермаченко В.М. и профессор Евсеев И.В.

Лекция 16.

Электромагнитное поле быстрой заряженной частицы, проходящей через прозрачную изотропную среду. Излучение Черенкова.

Рассмотрим задачу о нахождении характеристик электромагнитного поля, создаваемого быстрой частицей с зарядом e при её движении в прозрачной изотропной среде, магнитными свойствами которой, как и раньше, пренебрегаем: $\mu = 1$. Будем считать, что скорость частицы v постоянна и близка к предельно допустимому значению c. На самом деле её скорость изменяется, так как частица тратит энергию на возбуждение, ионизацию атомов среды, на излучение и т.п. Однако, если потери энергии частицы достаточно малы по сравнению с её энергией, то в первом приближении её движение можно считать равномерным. Таким образом, мы приходим к задаче о вычислении электромагнитного поля, создаваемого равномерно движущимся сторонним зарядом:

$$\rho_{cm}(\boldsymbol{r},t) = e\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t), \tag{16.1}$$

$$\boldsymbol{j}_{cm}(\boldsymbol{r},t) = e\boldsymbol{v}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t). \tag{16.2}$$

Система уравнений Максвелла с учётом сторонних зарядов имеет следующий вид:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}, \tag{16.3}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}_{cm} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}, \tag{16.4}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho_{cm}, \tag{16.5}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0. \tag{16.6}$$

К этим уравнениям нужно добавить уравнение связи (12.14) векторов $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$.

Для нахождения напряжённостей электромагнитного поля разложим все величины в интеграл Фурье по времени и координатам, например,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \int\frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3}\int\frac{d\omega}{2\pi}\exp(i\boldsymbol{kr} - i\omega t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega). \tag{16.7}$$

Для фурье-образов величин $\rho_{cm}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{j}_{cm}(\boldsymbol{r},t)$ получаем

$$\rho_{cm}(\boldsymbol{k},\omega) = 2\pi e\delta(\omega - \boldsymbol{kv}), \tag{16.8}$$

$$\boldsymbol{j}_{cm}(\boldsymbol{k},\omega) = 2\pi e\boldsymbol{v}\delta(\omega - \boldsymbol{kv}). \tag{16.9}$$

Из уравнения (16.3) находим связь между величинами $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k},\omega)$ и $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)$:

$$\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k},\omega) = \frac{c}{\omega}[\boldsymbol{k},\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)]. \tag{16.10}$$

Из уравнения (16.4) с учётом (16.9) получаем

$$\omega \boldsymbol{D}(\boldsymbol{k},\omega) = - c[\boldsymbol{k},\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k},\omega)] - 8\pi^2 ie\boldsymbol{v}\delta(\omega - \boldsymbol{kv}). \tag{16.11}$$

Аналогично, из уравнения (16.5) с учётом (16.8) имеем

$$(\boldsymbol{k}, \boldsymbol{D}(\boldsymbol{k},\omega)) = - 8\pi^2 ie\delta(\omega - \boldsymbol{kv}). \tag{16.12}$$

Уравнение связи (12.14) приводит к следующему соотношению между фурье-образами индукции и напряжённости электрического поля

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k},\omega) = \varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega). \tag{16.13}$$

Подставляя в уравнение (16.11) вместо $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k},\omega)$ выражение (16.10), а вместо $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k},\omega)$ выражение (16.13), получаем алгебраическое уравнение для определения величины $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)$. Решая его, имеем

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega) = 8\pi^2 ie \frac{\left(\frac{\omega \boldsymbol{v}}{c^2} - \frac{\boldsymbol{k}}{\varepsilon(\omega)}\right)}{\left(\boldsymbol{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right)} \delta(\omega - \boldsymbol{kv}). \tag{16.14}$$

Формула для фурье-образа $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{k},\omega)$ следует из соотношения (16.10) при подстановке в него выражения (16.14). Для нахождения зависимости напряжённостей от координат и времени необходимо подставить полученные выражения в соотношения типа (16.7) и вычислить соответствующие интегралы.

Используем полученные выражения для нахождения потери энергии частицы на черенковское излучение. Излучение Черенкова происходит при движении заряженной частицы в прозрачной среде со скоростью, превышающей фазовую скорость распространения электромагнитного поля,

$$v > \frac{c}{n}, \tag{16.15}$$

где $n = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$ - показатель преломления среды. Оно представляет собой излучение атомов среды, поляризованных проходящей частицей, и не связано с ускорением самой частицы, как при тормозном излучении, и, следовательно, не зависит от её массы, а определяется её скоростью, зарядом и свойствами среды.

Рассчитать потери энергии частицы на черенковское излучение можно разными способами. Например, найти асимптотические выражения для величин $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)$ на больших расстояниях от частицы. Вычисляя затем вектор Пойнтинга, получим интенсивность электромагнитного излучения - черенковского излучения. Здесь мы поступим иначе. Потери энергии частицы определяются работой силы, которая действует на неё со стороны индуцируемого ею поля. Пусть ось z выбрана по направлению скорости частицы $\boldsymbol{v}$. Тогда потеря энергии частицы W на единице пройденного расстояния определяется следующим выражением

$$\frac{dW}{dz} = - eE_z(\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}t, t), \qquad (16.16)$$

где напряжённость поля берётся в точке нахождения частицы. Используя выражения (16.14) и (16.7), получаем

$$\frac{dW}{dz} = - 8\pi^2 ie^2 \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\boldsymbol{k}}{(2\pi)^3} \frac{(\frac{\omega v}{c^2} - \frac{k_z}{\varepsilon(\omega)})}{(\boldsymbol{k}^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega))} \delta(\omega - k_z v). \qquad (16.17)$$

Для вычисления интеграла по переменной $\boldsymbol{k}$ переходим к цилиндрическим координатам k_z, q и φ, причём $d\boldsymbol{k} = dk_z q dq d\varphi$. Интеграл по переменной k_z вычисляется благодаря наличию δ - функции, интеграл по переменной φ даёт множитель 2π, так как подынтегральное выражение от φ не зависит. В результате получаем

$$\frac{dW}{dz} = \frac{ie^2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int q dq \frac{[\frac{\omega}{v^2 \varepsilon(\omega)} - \frac{\omega}{c^2}]}{[q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon(\omega) - \frac{c^2}{v^2})]}. \qquad (16.18)$$

Нас будет интересовать не просто потеря энергии на единице пройденного расстояния, а потеря энергии на черенковское излучение в единичный интервал частот в окрестности данного значения частоты ω, которую обозначим

$$\frac{d^2W(\omega)}{d\omega dz}.$$

Эта величина связана с $\frac{dW}{dz}$ соотношением

$$\frac{dW}{dz} = \int_0^{\infty} d\omega \frac{d^2W(\omega)}{d\omega dz}. \qquad (16.19)$$

Разбивая в выражении (16.18) интеграл по переменной ω на интервалы от - ∞ до 0 и от 0 до ∞ и делая замену $\omega \to -\ \omega$ в интеграле по отрицательным значениям ω, получаем следующее выражение для интересующей нас величины

$$\frac{d^2W(\omega)}{d\omega dz} = - \frac{ie^2\omega}{\pi c^2} \{[1 - \frac{c^2}{v^2\varepsilon(\omega)}] \int \frac{q dq}{[q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon(\omega) - \frac{c^2}{v^2})]} -$$

$$- [1 - \frac{c^2}{v^2\varepsilon(-\omega)}] \int \frac{q dq}{[q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(\varepsilon(-\omega) - \frac{c^2}{v^2})]} \}. \qquad (16.20)$$

При вычислении интеграла в (16.20) нужно иметь в виду следующее. Среда предполагается прозрачной, т.е. мнимая часть диэлектрической проницаемости $\varepsilon(\omega)$ считается достаточно малой. Поэтому в множителях перед интегралами в (16.20) комплексную величину $\varepsilon(\omega)$ можно заменить её реальной частью $\mathrm{Re}\varepsilon(\omega)$ и воспользоваться соотношениями из предыдущих лекций:

$$\mathrm{Re}\varepsilon(\omega) = \mathrm{Re}\varepsilon(-\omega) = n^2(\omega). \qquad (16.21)$$

Что касается величин $\varepsilon(\omega)$ и $\varepsilon(-\omega)$, входящих в подынтегральные выражения в (16.20), то в случае пренебрежения мнимой частью диэлектрической проницаемости $\mathrm{Im}\varepsilon(\omega)$ подынтегральные функции имеют особую точку, лежащую на пути интегрирования

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - \frac{c^2}{v^2}) \qquad (16.22)$$

при условии, если

$$\varepsilon(\omega) = n^2 > \frac{c^2}{v^2}. \qquad (16.23)$$

Если условие (16.23) не выполнено, то особая точка отсутствует и слагаемые в фигурных скобках выражения (16.20) тождественно равны друг другу. В этом случае

$$\frac{d^2W(\omega)}{d\omega dz} = 0$$

- черенковское излучение отсутствует. Поэтому условие (16.23) или эквивалентное ему условие(16.15) играет роль порогового условия для возникновения черенковского излучения.

Пусть условие (16.23) выполнено. Тогда результат интегрирования зависит от того, как совершается обход особой точки, лежащей на пути интегрирования. Для правильного обхода необходимо вспомнить о знаке малой мнимой части диэлектрической проницаемости $\varepsilon_2(\omega)$. Как показано в предыдущих лекциях, для среды, находящейся в состоянии термодинамического равновесия, $\varepsilon_2(\omega) > 0$ при $\omega > 0$. Поэтому особая точка подынтегральной функции первого слагаемого в выражении (16.20) не лежит на вещественной оси, а смещена вверх:

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - \frac{c^2}{v^2}) + i\delta,$$

где величина $\delta > 0$ и связана с мнимой частью диэлектрической проницаемости соотношением

$$\delta = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2(\omega).$$

С учётом того, что мнимая часть диэлектрической проницаемости нечётная функция частоты, т.е $\varepsilon_2(-\omega) = -\varepsilon_2(\omega)$, видим, что во втором интеграле особая точка лежит ниже вещественной оси:

$$q^2 = \frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - \frac{c^2}{v^2}) - i\delta.$$

Вводя вместо величины q новую переменную x соотношением

$$x = q^2 - \frac{\omega^2}{c^2}(n^2 - \frac{c^2}{v^2}),$$

получаем из (16.20) с учётом сделанных замечаний следующее выражение

$$\frac{d^2W(\omega)}{d\omega dz} = -\frac{ie^2\omega}{2\pi c^2}(1 - \frac{c^2}{v^2n^2})\{\int\frac{dx}{x-i\delta} - \int\frac{dx}{x+i\delta}\}.$$

Пользуясь тем, что

$$\int\frac{dx}{x\mp i\delta} = P\int\frac{dx}{x} \pm i\pi,$$

получаем

$$\frac{d^2W(\omega)}{d\omega dz} = \frac{e^2\omega}{c^2}(1 - \frac{c^2}{v^2n^2}). \qquad (16.24)$$

Как следует из (16.24), интенсивность излучения не зависит от массы пролетающей частицы, а определяется только её скоростью и зарядом, а также оптическими свойствами среды. Излучение, возникающее в данной точке траектории, распространяется под углом θ по отношению к скорости частицы, где

$$\cos\theta = \frac{c}{vn}. \qquad (16.25)$$

Соотношение (16.25) вытекает из того, что модуль k в случае выполнения неравенства (16.23) определяется особой точкой знаменателя в выражении (16.17)

$$k = \frac{\omega}{c}n(\omega), \qquad (16.26)$$

а значение величины $k_z = k\cos\theta$ получается из δ - функции: $k_z = \omega/v$.

Условие $v > c/n$ означает, что скорость движения частицы превышает фазовую скорость распространения электромагнитных возмущений в среде. Частица как бы отрывается от создаваемого ею поля, порождая свободное электромагнитное поле - излучение. Так как условие возникновения черенковского излучения может быть выполнено только при $n(\omega) > 1$, то оно приходится на видимую и ультрафиолетовую части спектра, поскольку именно для этих частот $n(\omega) > 1$. Специфические свойства черенковского излучения, о которых говорилось выше, привели, в частности, к созданию детекторов быстрых частиц - черенковских счётчиков, позволяющих определять модули и направление скорости быстрых частиц, их заряд.