Профессор Ермаченко В.М. и профессор Евсеев И.В.

Лекция 15.

Рассеяние электромагнитных волн. Рэлеевское рассеяние.

В предыдущих лекциях было показано, что в однородной прозрачной среде могут распространяться электромагнитные волны. При этом предполагалось, что среда находится в состоянии термодинамического равновесия и все её макроскопические характеристики соответствуют термодинамически средним значениям. Из статистической физики известно, что макроскопические величины испытывают флуктуации - отклонения от термодинамически средних значений. Существование этих флуктуации при распространении монохроматических электромагнитных волн через макроскопически однородную прозрачную среду приводит к явлению рассеяния, которое заключается в появлении в ней слабых волн, частоты и направления которых отличаются от соответствующих величин проходящей волны.

Микроскопический механизм рассеяния состоит в изменении движения зарядов среды под действием поля проходящей волны и излучении ими рассеянных волн. В терминах квантовой механики это означает поглощение средой кванта основной волны с частотой ω и испускание другого кванта с частотой ω'. Принято называть рассеяние стоксовым, если $\omega' < \omega$, и антистоксовым, если $\omega' > \omega$. Например, при рассеянии в газе на отдельных молекулах изменение частоты может происходить за счёт перехода молекулы на другой уровень энергии или за счёт изменения кинетической энергии её движения как целого. Кроме таких процессов, возможны ещё процессы, когда под влиянием кванта $\hbar\omega$ система излучает два кванта: $\hbar\omega$ и $\hbar\omega'$, т.е. происходит вынужденное излучение. При этом у среды отбирается большая по сравнению с предыдущим случаем энергия $\hbar(\omega + \omega')$, и в обычных условиях такие процессы маловероятны. По характеру изменения частоты различают два типа рассеяния: комбинационное рассеяние (Рамана - Мандельштама), приводящее к возникновению в рассеянном свете новых линий, смещённых по частоте относительно падающего излучения, и рэлеевское рассеяние, происходящее без существенного изменения частоты. Изучением микроскопического механизма рассеяния занимается квантовая механика. Мы ограничимся лишь макроскопическим описанием рассеяния электромагнитных волн.

Пусть монохроматическая волна проходит через прозрачную однородную и изотропную среду. Через ω, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, и $\boldsymbol{D}$ обозначим характеристики этой волны (магнитными свойствами среды пренебрегаем: $\mu = 1$). В состоянии термодинамического равновесия индукция и напряжённость электрического поля связаны соотношением

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}. \tag{15.1}$$

Обозначим $\boldsymbol{E}'$, $\boldsymbol{H}'$ и $\boldsymbol{D}'$ характеристики рассеянной волны с частотой ω'. Появление рассеянной волны, как отмечалось выше, связано с отклонением характеристик среды от их термодинамически равновесных значений. Поэтому при написании соотношения типа (15.1) для рассеянной волны следует предполагать, что термодинамическое усреднение выполнено не полностью, в частности не проведено усреднение по переменным, ответственным за рассеяние. Например, газ - однородная среда, средняя плотность которой $\rho = N/V$, где V – объём, занимаемый газом, а N - число молекул газа. Мгновенное значение плотности в окрестности точки $\boldsymbol{r}$ отличается от этой величины на $\delta\rho$, причем $\overline{\delta\rho} = 0$, где черта сверху означает термодинамическое усреднение. Мгновенное значение плотности определяется расположением молекул в пространстве и, следовательно, зависит от их движения. Поэтому в данном примере переменные, описывающие движение молекул в пространстве, и являются переменными, ответственными за рассеяние. Если газ состоит из анизотропных молекул, то существуют и локальные отклонения его свойств от свойств изотропной среды - флуктуации анизотропии. Переход к термодинамически равновесному изотропному распределению осуществляется в этом случае усреднением по переменным, характеризующим вращение молекулы как целого. Итак, пусть q - совокупность переменных ответственных за рассеяние. Тогда для рассеянной волны вместо соотношения (15.1) запишем

$$D_i' = \varepsilon(\omega')E_i' + \delta\varepsilon_{ik}(\omega', \omega, \boldsymbol{r}, q)E_k, \tag{15.2}$$

где $\delta\varepsilon_{ik}$ - локальное отклонение диэлектрических свойств среды от равновесного значения за счет флуктуации плотности, анизотропии и т.п., причём $\overline{\delta\varepsilon_{ik}} = 0$. Второе слагаемое в (15.2) описывает связь рассеянной волны с проходящей. При написании этого соотношения пренебреженно процессами вынужденного излучения.

Из системы уравнений Максвелла, учитывая гармоническую зависимость всех величин от времени, получаем следующее уравнение

$$\mathrm{rotrot}\boldsymbol{E}' = \left(\frac{\omega'}{c}\right)^2\boldsymbol{D}'. \tag{15.3}$$

Из соотношения (15.2) выразим $\boldsymbol{E}'$ через $\boldsymbol{D}'$ и подставим в (15.3). В результате приходим к уравнению, определяющему вектор индукции рассеянной волны:

$$\Delta\boldsymbol{D}' + (k')^2\boldsymbol{D}' = -\,\mathrm{rotrot}(\delta\hat{\varepsilon}\,\boldsymbol{E}). \tag{15.4}$$

При получении (15.4) использовано уравнение

$\mathrm{div}\boldsymbol{D}' = 0$

и введены обозначения

$$(k')^2 = \left(\frac{\omega'}{c}\right)^2\varepsilon(\omega'), \quad (\delta\hat{\varepsilon}\,\boldsymbol{E})_i = \delta\varepsilon_{ik}E_k.$$

Правая часть уравнения (15.4) играет роль источника рассеянного излучения. Она отлична от нуля в тех областях среды, где имеются отклонения её свойств от равновесных значений, т.е. там, где происходят флуктуации плотности, ориентации молекул и т.п. Между флуктуациями в различных областях среды обычно отсутствует какая-либо корреляция, поэтому рассеянное излучение, исходящее из отдельных участков среды, некогерентно. Следовательно, можно рассматривать рассеяние от одного участка, полагая, что в остальном объёме волна распространяется без рассеяния.

Частное решение уравнения (15.4), затухающее на больших расстояниях от области среды, где происходит флуктуация, имеет следующий вид:

$$\boldsymbol{D}'(\boldsymbol{r}) = \frac{1}{4\pi}\int dV' \frac{\exp(ik'|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{rot}_{r'}\mathrm{rot}_{r'}(\delta\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E})\,. \tag{15.5}$$

Считая, что точка наблюдения находится на большом расстоянии по сравнению с размерами флуктуирующей области, и, выделяя из (15.5) поле излучения, получаем

$$\boldsymbol{D}'(\boldsymbol{r}) = \frac{\exp(ik'r)}{4\pi r}\int dV' \exp(-i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}')\mathrm{rot}_{r'}\mathrm{rot}_{r'}(\delta\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E})\,, \tag{15.6}$$

где $\boldsymbol{k}' = k'\boldsymbol{r}/r$ - волновой вектор рассеянной волны, направленный на точку наблюдения. Дальнейшие преобразования состоят в интегрировании (15.6) по частям с использованием тождества

$\varphi\mathrm{rot}\boldsymbol{A} = \mathrm{rot}(\varphi\boldsymbol{A}) - [\mathrm{grad}\varphi,\boldsymbol{A}]$

и того факта, что на границе объёма, в котором происходит флуктуация, $(\delta\hat{\varepsilon}\,\boldsymbol{E}) = 0$. В результате из (15.6) получаем

$$\boldsymbol{D}'(\boldsymbol{r}) = -\frac{\exp(ik'r)}{4\pi r}[\boldsymbol{k}',[\boldsymbol{k}',\int dV' \exp(-i\boldsymbol{k}'\boldsymbol{r}')(\delta\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E})]]. \tag{15.7}$$

Напряжённость поля падающей волны запишем в виде

$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_0\exp(i\boldsymbol{k}\boldsymbol{r})$

и введём вектор $\boldsymbol{G}$, характеризующий рассеивающие свойства среды

$$\boldsymbol{G} = \int dV' \exp(-i\boldsymbol{\kappa}\boldsymbol{r}')(\delta\hat{\varepsilon}\boldsymbol{E}_0)\,, \tag{15.8}$$

где $\boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{k}' - \boldsymbol{k}$. Окончательно для напряжённости электрического поля рассеянной волны имеем следующее выражение:

$$\boldsymbol{E}'(\boldsymbol{r}) = -\frac{\exp(ik'r)}{4\pi r\varepsilon(\omega')}[\boldsymbol{k}',[\boldsymbol{k}',\boldsymbol{G}]]. \tag{15.9}$$

Знание этой величины позволяет рассчитать интенсивность рассеянного излучения.

Рассеяние принято характеризовать коэффициентом экстинкции h, равным отношению полной интенсивности рассеянного по всем направлениям излучения к плотности потока падающего излучения, отнесённому к единице объёма среды:

$$h = \frac{1}{V|\boldsymbol{E}|^2}\int d\Omega r^2\overline{|\boldsymbol{E}'|^2}, \tag{15.10}$$

где V - объём рассеивающей среды, а черта сверху над подынтегральной функцией означает усреднение по переменным q, ответственным за рассеяние.

Рассмотрим для примера рэлеевское рассеяние, когда $|\omega' - \omega| << \omega$. Используя (15.9) и заменяя ω' на ω, получаем

$$h = \frac{\omega^4}{16\pi^2c^4V|\boldsymbol{E}_0|^2}\int d\Omega\sin^2\theta\overline{|\boldsymbol{G}|^2}, \tag{15.11}$$

где θ - угол между векторами $\boldsymbol{G}$ и $\boldsymbol{k}'$.

Рассмотрим отдельно выражение для величины $\overline{|\boldsymbol{G}|^2}$. Из определения (15.8) имеем

$$\overline{|\boldsymbol{G}|^2} = E_{0l}E_{0m}\iint dV_1dV_2\exp(-i\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_2))\,\overline{\delta\varepsilon_{il}(\boldsymbol{r}_1,q)\delta\varepsilon_{im}(\boldsymbol{r}_2,q)}. \tag{15.12}$$

При написании (15.12) учтена прозрачность среды, т.е. вещественность величины $\delta\varepsilon_{ik}$. Функция

$$f_{lm} = \overline{\delta\varepsilon_{il}(\boldsymbol{r}_1,q)\delta\varepsilon_{im}(\boldsymbol{r}_2,q)} \tag{15.13}$$

характеризует корреляцию между флуктуациями в различных точках рассеивающей среды и зависит только от расстояния между рассматриваемыми точками, т.е. от $r = |\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$. Обычно она затухает на расстояниях порядка межмолекулярных a. Поэтому показатель экспоненты в выражении (15.12) мал для тех значений переменных интегрирования, которые существенны при вычислении интеграла:

$|\boldsymbol{\kappa},(\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2)| \le a/\lambda << 1$,

где λ - длина волны излучения. С учётом этого в дальнейших вычислениях экспонента заменяется единицей. Затем, переходя при интегрировании от переменных $\boldsymbol{r}_1$ и $\boldsymbol{r}_2$ к переменным $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2$ и $(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)/2$, получаем

$$\overline{|\boldsymbol{G}|^2} = E_{0l}E_{0m}V\int dVf_{lm}(\boldsymbol{r}), \tag{15.14}$$

где множитель V возник от интегрирования по переменной $(\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2)/2$, от которой подынтегральная функция не зависит. Учтём ещё, что тензор f_{lm} характеризует свойства изотропной среды, а потому имеет вид

$$f_{lm} = f\delta_{lm}, \tag{15.15}$$

где

$$f = \mathrm{Sp} f_{lm}/3 = \overline{\delta\varepsilon_{il}(\boldsymbol{r}_1, q)\delta\varepsilon_{il}(\boldsymbol{r}_2, q)}/3.$$

Вводя для сокращения записи обозначение

$$\overline{(\delta\varepsilon_{il})_V^2} = \frac{1}{V}\int dV\, \overline{\delta\varepsilon_{il}\delta\varepsilon_{il}}, \tag{15.16}$$

получаем

$$\overline{|\boldsymbol{G}|^2} = |\boldsymbol{E}_0|^2 V^2 \overline{(\delta\varepsilon_{il})_V^2}/3. \tag{15.17}$$

Так как в данном приближении $\overline{|\boldsymbol{G}|^2}$ не зависит от направления распространения рассеянной волны, то, выполняя в (15.11) интегрирование по углам, получаем

$$h = \frac{\omega^4}{18\pi c^4} V\overline{(\delta\varepsilon_{il})_V^2}. \tag{15.18}$$

Отметим, что в рассматриваемом приближении коэффициент экстинкции не зависит от поляризации падающего излучения и рассеяние происходит на неоднородностях среды, возникающих за счёт флуктуации.

Рассмотрим рассеяние на флуктуациях плотности. Флуктуации плотности и температуры являются независимыми. Поэтому при флуктуации плотности $\delta\rho$ флуктуация диэлектрической проницаемости равна

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \delta\rho.$$

Учитывая, что

$$\delta\varepsilon_{ik} = \delta\varepsilon\delta_{ik},$$

получаем

$$\overline{(\delta\varepsilon_{il})_V^2} = 3\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 \overline{(\delta\rho)_V^2}. \tag{15.19}$$

Среднеквадратичная флуктуация плотности равна

$$\overline{(\delta\rho)_V^2} = \frac{\rho T}{V}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T, \tag{15.20}$$

где p - давление. В результате для коэффициента экстинкции получаем выражение, найденное А. Эйнштейном:

$$h = \frac{\omega^4}{6\pi c^4} T\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T^2 \left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T. \tag{15.21}$$

Подчеркнём, что величина h не зависит от объёма системы. Для газа отличие ε от единицы мало, поэтому имеем приближённо

$$\rho\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial\rho}\right)_T \approx \varepsilon - 1 = n^2 - 1 \approx 2(n - 1), \qquad (15.22)$$

где n показатель преломления газа. Подставляя (15.22) в (15.21), получаем

$$h = \frac{2\omega^4(n-1)^2 T}{3\pi c^4 \rho}\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T .$$

Воспользовавшись уравнением состояния идеального газа для вычисления производной

$$\left(\frac{\partial\rho}{\partial p}\right)_T ,$$

приходим к формуле Рэлея

$$h = \frac{2\omega^4(n-1)^2}{3\pi c^4 N_0} ,$$

где N_0 - концентрация молекул газа. Обратим внимание, что зависимость коэффициента экстинкции от частоты излучения определяется в основном множителем ω^4. Поэтому в видимой области сильнее всего атмосферой рассеивается фиолетовая часть спектра излучения Солнца, с чем и связан голубой цвет неба.