Профессор Ермаченко В.М. и профессор Евсеев И.В.

Лекция 14.

Электромагнитные волны в прозрачных анизотропных средах. Обыкновенная и необыкновенная волны.

Рассмотрим теперь электромагнитные волны в прозрачных анизотропных диэлектриках. Как и в предыдущей лекции, рассматриваем электромагнитные поля, напряжённость которых зависит от координат и от времени по гармоническому закону, например,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0\exp(i\boldsymbol{kr} - i\omega t). \tag{14.1}$$

Как и прежде, ограничимся рассмотрением однородных веществ, магнитными свойствами которых можно пренебречь: $\mu = 1$. В анизотропной среде вместо уравнения связи (13.3) имеем

$$D_i = \varepsilon_{ik}(\omega)E_k, \tag{14.2}$$

где в общем случае симметричный тензор диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ik}(\omega)$ комплексный. Можно показать, что условие прозрачности вещества

$$\mathrm{div}\,\overline{\boldsymbol{S}} = 0 \tag{14.3}$$

сводится к требованию вещественности тензора диэлектрической проницаемости. Поэтому в дальнейшем тензор $\varepsilon_{ik}(\omega)$ считается вещественным. В случае анизотропной среды уравнения (13.6) и (13.7) сохраняют свой вид

$$[\boldsymbol{k},\boldsymbol{E}] = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{H}, \tag{14.4}$$

$$(\boldsymbol{k},\boldsymbol{H}) = 0. \tag{14.5}$$

Однако теперь вместо уравнений (13.4) и (13.5) из (12.12) и (12.13) получаем

$$\boldsymbol{D} = -\frac{c}{\omega}[\boldsymbol{k},\boldsymbol{H}], \tag{14.6}$$

$$(\boldsymbol{k},\boldsymbol{D}) = 0. \tag{14.7}$$

Из уравнений (14.6) и (14.7) следует, что векторы $\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{D}$, и $\boldsymbol{H}$ образуют тройку взаимно ортогональных векторов. Обратим внимание, что в анизотропной среде при наличии связи (14.2) направления векторов $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ в общем случае не совпадают, и, следовательно, векторы $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{E}$ не взаимно ортогональны. Поэтому направление вектора Пойнтинга

$$\boldsymbol{S} = \frac{c}{4\pi}[\boldsymbol{E}, \boldsymbol{H}], \tag{14.8}$$

ортогонального плоскости, в которой лежат векторы $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, не совпадает с направлением волнового вектора $\boldsymbol{k}$. Отметим, что угол между векторами $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{S}$ равен углу между векторами $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{E}$ (рис. 6).

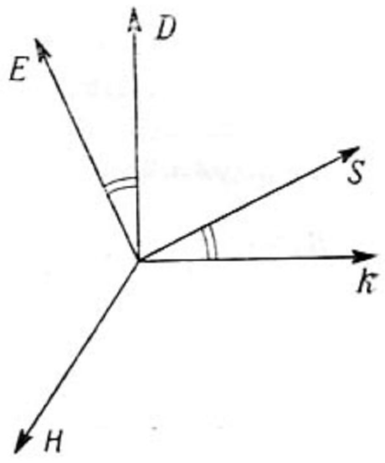

Рис. 6 Взаимное расположение векторов $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{S}$ при распространении плоских электромагнитных волн в анизотропной среде.

Для установления связи между частотой и волновым вектором введём вместо $\boldsymbol{k}$ вектор $\boldsymbol{n}$ следующим соотношением

$$\boldsymbol{k} = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{n}. \tag{14.9}$$

Как видно из (14.9), направление $\boldsymbol{n}$ совпадает с направлением $\boldsymbol{k}$, а его модуль равен показателю преломления среды. В отличие от случая прозрачной изотропной среды, в которой

$$n = \sqrt{\varepsilon(\omega)}$$

(см. (13.18) для случая прозрачной среды), в анизотропной прозрачной среде в данном направлении могут распространяться две плоские волны с одинаковой частотой, но разными, в общем случае, показателями преломления. Чтобы показать это, обратимся к уравнениям (14.4) и (14.6). Подставляя полученное из (14.4) выражение

$$\boldsymbol{H} = \frac{c}{\omega}[\boldsymbol{k},\boldsymbol{E}] \tag{14.10}$$

в (14.6), получаем векторное уравнение

$$\boldsymbol{D} = n^2\boldsymbol{E} - \boldsymbol{n}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{E}). \tag{14.11}$$

Используя уравнение связи (14.2), приходим к системе трех однородных линейных алгебраических уравнений для определения компонент вектора $\boldsymbol{E}$

$$(n^2\delta_{ik} - n_i n_k - \varepsilon_{ik})E_k = 0. \tag{14.12}$$

Как известно, система однородных линейных алгебраических уравнений имеет нетривиальное решение, если

$$\det| n^2\delta_{ik} - n_i n_k - \varepsilon_{ik} | = 0. \qquad (14.13)$$

Уравнение (14.13) устанавливает связь частоты с волновым вектором и в кристаллооптике называется уравнением Френеля. Оно определяет модуль вектора ***n*** при его заданном направлении по отношению к фиксированным осям координат, например, главным осям тензора диэлектрической проницаемости. Это алгебраическое уравнение относительно n^2, старшие члены которого есть n^4 (члены n^6 сокращаются). Следовательно, в общем случае есть два решения, отвечающие двум независимым поляризациям электромагнитной волны. Так как модуль n играет роль показателя преломления среды, то в кристалле в данном направлении могут распространяться два типа волн, каждому из которых соответствуют свой показатель преломления среды и своя поляризация. Отметим, что в общем случае показатель преломления зависит от направления распространения волны.

Рассмотрим для примера случай одноосного кристалла. Напомним, что в главных осях тензор диэлектрической проницаемости диагонален, и для одноосного кристалла имеются следующие соотношения между его главными значениями

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{\perp}, \quad \varepsilon_{zz} = \varepsilon_{\parallel}. \qquad (14.14)$$

При написании соотношений (14.14) ось z выбрана по физически выделенному направлению одноосного кристалла – его оптической оси. Из уравнения (14.13), записанного в главных осях тензора диэлектрической проницаемости, для одноосного кристалла получаем следующее уравнение

$$(n^2 - \varepsilon_{\perp})[\varepsilon_{\parallel} n_z^2 + \varepsilon_{\perp}(n_x^2 + n_y^2) - \varepsilon_{\perp}\varepsilon_{\parallel}] = 0. \qquad (14.15)$$

Отсюда непосредственно видно, что в одноосном кристалле могут распространяться два типа волн. Для одного из них показатель преломления не зависит от направления распространения волны и равен

$$n_0 = \sqrt{\varepsilon_{\perp}}\,. \qquad (14.16)$$

Такие волны называются обыкновенными. Для волн второго типа показатель преломления зависит от направления распространения волны. Вводя угол θ между оптической осью кристалла и направлением распространения волны, из (14.15) получаем, приравнивая нулю выражение в квадратных скобках,

$$n_e = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\theta}{\varepsilon_{\perp}} + \dfrac{\sin^2\theta}{\varepsilon_{\parallel}}}}\,. \qquad (14.17)$$

Такие волны называются необыкновенными. Отметим, что при распространении волн вдоль оптической оси ($\theta = 0$) показатели преломления для обоих типов волн одинаковы.

Поляризации обыкновенной и необыкновенной волн линейны и взаимно ортогональны. Покажем это для случая, когда волны распространяются в направлении ортогональном оптической оси, например, вдоль оси x. В этом случае $n_y = n_z = 0$, $n_x = n$, а $n_e = \sqrt{\varepsilon_\parallel}$. Обратимся к системе уравнений (14.12) для отыскания отличных от нуля компонент вектора $\boldsymbol{E}$, определяющих поляризацию волны. Запишем эти три уравнения сначала для обыкновенной волны. Они выглядят следующим образом:

$$- \varepsilon_\perp E_x = 0, \quad (\varepsilon_\perp - \varepsilon_\parallel)E_z = 0, \quad (\varepsilon_\perp - \varepsilon_\perp)E_y = 0. \qquad (14.18)$$

Из (14.18) следует, что $E_x = E_z = 0$, а $E_y \neq 0$, т.е. обыкновенная волна линейно поляризована вдоль оси y. Для случая необыкновенной волны уравнения (14.12) имеют вид:

$$- \varepsilon_\perp E_x = 0, \quad (\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\parallel)E_z = 0, \quad (\varepsilon_\parallel - \varepsilon_\perp)E_y = 0. \qquad (14.19)$$

Из (14.19) следует, что $E_x = E_y = 0$, а $E_z \neq 0$, т.е. необыкновенная волна линейно поляризована вдоль оптической оси.

Наряду с одноосными кристаллами в кристаллооптике широко используются двухосные кристаллы, у которых все три главных значения тензора диэлектрической проницаемости отличны друг от друга

$$\varepsilon_{xx} \neq \varepsilon_{yy} \neq \varepsilon_{zz} \neq \varepsilon_{xx}. \qquad (14.20)$$

По отношению к главным осям тензора диэлектрической проницаемости направление распространения электромагнитной волны задаётся двумя углами θ и φ так, что

$$n_x = n\sin\theta\cos\varphi, \quad n_y = n\sin\theta\sin\varphi, \quad n_z = n\cos\theta. \qquad (14.21)$$

Уравнение Френеля (14.13) для определения величины показателя преломления n в этом случае имеет следующий вид

$$A_1(n^2)^2 - A_2n^2 + A_3 = 0, \qquad (14.22)$$

где коэффициенты A_1, A_2 и A_3 равны

$$A_1 = \varepsilon_{zz}\cos^2\theta + (\varepsilon_{xx}\cos^2\varphi + \varepsilon_{yy}\sin^2\varphi)\sin^2\theta, \qquad (14.23)$$

$$A_2 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\sin^2\theta + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}(1 - \sin^2\theta\sin^2\varphi) + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}(1 - \sin^2\theta\cos^2\varphi), \qquad (14.24)$$

$$A_3 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}. \qquad (14.25)$$

Два значения показателя преломления, являющиеся решением уравнения (14.22), можно записать в виде

$$n_{1,2}^2 = \frac{A_2}{2A_1}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4A_1A_3}{A_2^2}}\right). \qquad (14.26)$$

Решения (14.26) включают в себя как частный случай результаты (14.16), (14.17), полученные для одноосного кристалла. Для одноосного кристалла коэффициенты A_1, A_2 и A_3 с учётом (14.14) имеют вид

$$A_1 = \varepsilon_{\|}\cos^2\theta + \varepsilon_{\perp}\sin^2\theta, \tag{14.27}$$

$$A_2 = \varepsilon_{\perp}^2\sin^2\theta + \varepsilon_{\perp}\varepsilon_{\|}(1 + \cos^2\theta), \tag{14.28}$$

$$A_3 = \varepsilon_{\perp}^2\varepsilon_{\|}. \tag{14.29}$$

Подставляя эти коэффициенты в (14.26), видим, что решение со знаком плюс в скобках приводит к результату (14.16), соответствующему показателю преломления обыкновенной волны, а решение со знаком минус в скобках приводит к результату (14.17), соответствующему показателю преломления необыкновенной волны.

Для случая двухосного кристалла, когда волна распространяется в плоскости ортогональной главной оси z, т.е. $\theta = \pi/2$, решения (14.26) приводят к следующему результату

$$n_1 = \frac{1}{\sqrt{\dfrac{\cos^2\varphi}{\varepsilon_{yy}} + \dfrac{\sin^2\varphi}{\varepsilon_{xx}}}}, \tag{14.30}$$

$$n_2 = \sqrt{\varepsilon_{zz}}. \tag{14.31}$$

Эти результаты аналогичны (14.17) и (14.16), соответственно.