Профессор Ермаченко В.М. и профессор Евсеев И.В.

Лекция 13.

Плоские электромагнитные волны в изотропных средах. Поперечные и продольные волны. Пространственная дисперсия диэлектрической проницаемости.

Плоские электромагнитные волны в изотропных средах. Рассмотрим теперь электромагнитные поля, напряжённость которых зависит по гармоническому закону и от координат и от времени, например,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{E}_0\exp(i\boldsymbol{kr} - i\omega t). \qquad (13.1)$$

В случае вакуума волновой вектор $\boldsymbol{k}$ и частота ω плоской электромагнитной волны связаны соотношением $\omega = ck$, а амплитуды $\boldsymbol{E}_0$ и $\boldsymbol{H}_0$ электромагнитного поля взаимно ортогональны и ортогональны вектору $\boldsymbol{k}$. Посмотрим, какие соотношения между характеристиками плоской электромагнитной волны возникают при её распространении в веществе. Как и прежде, ограничимся рассмотрением веществ, магнитными свойствами которых можно пренебречь: $\mu = 1$. Вещество предполагается однородным, и сначала исследуются изотропные вещества, когда связь между напряжённостью электрического поля и индукцией

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{D}_0\exp(i\boldsymbol{kr} - i\omega t) \qquad (13.2)$$

даётся соотношением

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}, \qquad (13.3)$$

где $\varepsilon(\omega)$ - комплексная диэлектрическая проницаемость (см. предыдущую лекцию). В этом случае операции дивергенции и ротора сводятся к скалярным и векторным произведениям вектора $i\boldsymbol{k}$ на дифференцируемую величину, и уравнения (12.12), (12.13), (12.3) и (12.6) принимают следующий вид:

$$[\boldsymbol{k},\boldsymbol{H}] = -\frac{\omega}{c}\varepsilon(\omega)\boldsymbol{E}, \qquad (13.4)$$

$$\varepsilon(\omega)(\boldsymbol{k},\boldsymbol{E}) = 0, \qquad (13.5)$$

$$[\boldsymbol{k},\boldsymbol{E}] = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{H}, \qquad (13.6)$$

$$(\boldsymbol{k},\boldsymbol{H}) = 0. \qquad (13.7)$$

Из уравнения (13.7) следует, что векторы $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{H}$ взаимно ортогональны. Уравнение (13.5) указывает на существование двух решений, одно из которых связано с условием $\varepsilon(\omega) = 0$, а второе с - $(\boldsymbol{k},\boldsymbol{E}) = 0$.

Поперечные электромагнитные волны. Исследуем сначала случай, когда

$$\varepsilon(\omega) \neq 0. \tag{13.8}$$

Тогда из (13.5) следует, что векторы $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{E}$ также взаимно ортогональны, а из (13.4), (13.6) вытекает взаимная ортогональность векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$. Таким образом, в этом случае, так же как и в вакууме, электромагнитные волны поперечные. Подставляя вытекающее из (13.6) выражение

$$\boldsymbol{H} = \frac{c}{\omega}[\boldsymbol{k},\boldsymbol{E}] \tag{13.9}$$

в (13.4), с учётом ортогональности векторов $\boldsymbol{k}$ и $\boldsymbol{E}$ получаем уравнение для определения вектора $\boldsymbol{E}$

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega)\right)\boldsymbol{E} = 0. \tag{13.10}$$

Из уравнения (13.10) следует, что поперечные электромагнитные волны в изотропной среде могут распространяться, только если их волновой вектор связан с частотой соотношением

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon(\omega). \tag{13.11}$$

В случае прозрачного вещества, т.е. когда $\varepsilon_2(\omega) = 0$, из (13.11) получаем

$$k = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon(\omega)}\,. \tag{13.12}$$

Для волн оптического диапазона входящая в (13.12) величина $\sqrt{\varepsilon(\omega)} = \sqrt{\varepsilon_1(\omega)}$ является показателем преломления вещества. При $\varepsilon_2(\omega) \neq 0$ волновой вектор $\boldsymbol{k}$ становится комплексным:

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_1 + i\boldsymbol{k}_2, \tag{13.13}$$

где $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ - вещественные величины. В общем случае, если направления векторов $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ различны, нельзя говорить о плоской волне в общепринятом смысле, так как поверхности постоянной фазы ортогональны вектору $\boldsymbol{k}_1$, а поверхности постоянной амплитуды - $\boldsymbol{k}_2$. Из соотношения (13.11) следует, что для термодинамически равновесных сред ($\varepsilon_2(\omega) > 0$) угол между $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ должен быть острым. Действительно, разделяя в (13.11) вещественную и мнимую части, имеем уравнения

$$k_1^2 - k_2^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_1, \tag{13.14}$$

$$2\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2 = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_2, \tag{13.15}$$

откуда и следует высказанное утверждение. Отметим, что для двух векторов $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ имеется всего лишь два скалярных уравнения и, следовательно, большая свобода в выборе этих векторов. Если векторы $\boldsymbol{k}_1$ и $\boldsymbol{k}_2$ направлены одинаково, то соотношения (13.14) и (13.15) однозначно определяют модули этих векторов. В этом случае запишем вектор $\boldsymbol{k}$ в виде

$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}k, \tag{13.16}$$

где $\boldsymbol{e}$ - вещественный единичный вектор, а комплексную величину k представим следующим образом

$$k = \frac{\omega}{c}(n + i\kappa). \tag{13.17}$$

При таком определении n имеет смысл показателя преломления, а κ - коэффициента поглощения вещества. Для них нетрудно получить следующие выражения:

$$n = \sqrt{(|\varepsilon| + \varepsilon_1)/2}, \tag{13.18}$$

$$\kappa = \sqrt{(|\varepsilon| - \varepsilon_1)/2}, \tag{13.19}$$

где

$$|\varepsilon| = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}. \tag{13.20}$$

Продольные электромагнитные волны. Исследуем теперь случай, когда вместо условия (13.8) при некотором значении частоты ω_0 имеем

$$\varepsilon(\omega_0) = 0. \tag{13.21}$$

Нетрудно видеть, что при условии (13.21) рассматриваемая система уравнений допускает решение с $\boldsymbol{H} = 0$ и вектором $\boldsymbol{E}$, параллельным вектору $\boldsymbol{k}$. Следовательно, в среде могут существовать чисто электрические переменные поля, называемые продольными волнами. Отметим, что в нашем рассмотрении не возникает никакой связи между волновым вектором $\boldsymbol{k}$ и частотой ω. Однако, такая связь возникает, если наряду с частотной дисперсией диэлектрической проницаемости учесть еще и её пространственную дисперсию. Тогда диэлектрическая проницаемость будет функцией не только частоты, но и волнового вектора, а условие, заменяющее (13.21), установит связь частоты и волнового вектора в продольной волне.

Пространственная дисперсия диэлектрической проницаемости. При рассмотрении полей, напряжённость которых изменяется во времени, была показана необходимость интегральной связи между индукцией и напряжённостью электромагнитного поля. Как правило, напряжённости таких полей существенно меняются и в пространстве. При этом если характерная длина L, на которой изменяется напряжённость поля, станет, например, порядка длины свободного пробега электрона в веществе, то локальная связь между индукцией и напряжённостью электромагнитного поля нарушается. В этом случае индукция зависит не только от напряжённости поля в рассматриваемой точке $\boldsymbol{r}$, но и от напряжённости поля в некоторой окрестности этой точки, размеры которой определяются характером установления поляризации вещества. В рамках рассматриваемой линейной электродинамики общая связь между векторами $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ для однородной среды может быть записана в виде

$$D_i(\boldsymbol{r},t) = E_i(\boldsymbol{r},t) + \int_0^{\infty} d\tau \int dV' f_{ik}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\tau) E_k(\boldsymbol{r}',t-\tau), \qquad (13.22)$$

где вещественная функция $f_{ik}(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}',\tau)$ определяется свойствами среды. Если характерная длина l, на которой изменяется функция f_{ik}, мала по сравнению с величиной L, на которой изменяется напряжённость поля, то в первом приближении в (13.22) можно вынести величину $\boldsymbol{E}$ из-под знака интеграла по переменной $\boldsymbol{r}'$ в точке $\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r}$, и мы придём к локальной связи типа (12.14). При написании (13.22) учтена анизотропия среды. Дело в том, что когда нелокальность становится существенной, т.е. когда напряжённость поля $\boldsymbol{E}$ изменяется достаточно быстро в пространстве в указанном выше смысле, то даже для изотропной среды функция f_{ik} оказывается тензором, не сводящимся к произведению скаляра на единичный тензор $f\delta_{ik}$ из-за того, что направление наиболее быстрого изменения напряжённости поля в пространстве является выделенным для микроскопического механизма установления поляризации.

Проводя разложение величин $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ в интеграл Фурье по координатам и времени, из (13.22) получим уравнение связи между фурье-образами $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k},\omega)$ и $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega)$ в виде

$$D_i(\boldsymbol{k},\omega) = \varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k},\omega)E_j(\boldsymbol{k},\omega), \qquad (13.23)$$

где

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k},\omega) = \delta_{ij} + \int_0^{\infty} d\tau \int dV f_{ij}(\boldsymbol{r},\tau)\exp(i\omega\tau - i\boldsymbol{kr}). \qquad (13.24)$$

Зависимость ε_{ij} от $\boldsymbol{k}$ называется пространственной дисперсией диэлектрической проницаемости. Соотношение (13.24) является обобщением выражения (12.16) на случай нелокальной пространственной связи между индукцией и напряжённостью поля.

При разложении в интеграл Фурье поля, напряжённость которого меняется в пространстве на расстоянии L, существенны фурье-образы со значениями $k \le 1/L$. Поэтому если

$$l/L << 1, \qquad (13.25)$$

то в (13.24) при вычислении интеграла по $\boldsymbol{r}$ можно разложить в ряд функцию $\exp(-i\boldsymbol{kr})$. В этом случае выражение для величины $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k},\omega)$ будет представлено в виде ряда по степеням компонент вектора $\boldsymbol{k}$. Отметим, что поправки, связанные с учётом пространственной дисперсии в тензоре ε_{ij}, могут приводить к качественно новым эффектам при распространении электромагнитных волн, например, в прозрачных средах. Так, естественная оптическая активность изотропного тела, приводящая к тому, что при распространении в нём линейно поляризованной волны плоскость её поляризации поворачивается, объясняется учётом в ε_{ij} членов, пропорциональных первой степени $\boldsymbol{k}$.

В оптически неактивных средах разложение $\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k},\omega)$ начинается с квадратичных по $\boldsymbol{k}$ слагаемых. В кубическом кристалле, например, это приводит к появлению оптической анизотропии - возможности существования двух волн с одинаковым направлением $\boldsymbol{k}$, но различными поляризациями и показателями преломления.

В случае изотропной среды с центром инверсии тензор ε_{ij} может быть составлен из единичного тензора δ_{ij} и компонент вектора $\boldsymbol{k}$:

$$\varepsilon_{ij}(\boldsymbol{k},\omega) = \varepsilon_t(k,\omega)(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}) + \varepsilon_l(k,\omega)\frac{k_i k_j}{k^2}, \qquad (13.26)$$

где функции ε_t и ε_l зависят только от модуля k и ω. Они называются поперечной и продольной проницаемостями, соответственно, так как если $\boldsymbol{E} \perp \boldsymbol{k}$, то

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k},\omega) = \varepsilon_t(k,\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega),$$

а при $\boldsymbol{E} \parallel \boldsymbol{k}$

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{k},\omega) = \varepsilon_l(k,\omega)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{k},\omega).$$

Вернемся теперь к рассмотренной выше задаче распространения плоских волн в изотропной среде. Фигурирующая там величина $\varepsilon(\omega)$ связана с $\varepsilon_t(k,\omega)$ и $\varepsilon_l(k,\omega)$ соотношением

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_t(0,\omega) = \varepsilon_l(0,\omega). \qquad (13.27)$$

Для поперечных волн роль диэлектрической проницаемости играет, как указано выше, величина $\varepsilon_t(k,\omega)$, которую в случае слабой пространственной дисперсии можно заменить на $\varepsilon(\omega)$. Тогда связь волнового вектора с частотой поперечной волны определяется, по-прежнему, соотношением (13.11). Для продольных волн роль диэлектрической проницаемости играет величина $\varepsilon_l(k,\omega)$, поэтому вместо уравнения (13.21) для определения связи волнового вектора и частоты волны имеем

$$\varepsilon_l(k,\omega) = 0.$$

В случае слабой пространственной дисперсии, записывая продольную проницаемость в виде

$$\varepsilon_l(k,\omega) = \varepsilon(\omega) + \alpha k^2, \qquad (13.28)$$

получаем уравнение для определения связи волнового вектора и частоты продольной волны

$$\varepsilon(\omega) + \alpha k^2 = 0.$$

Отсюда следует, что групповая скорость распространения продольной волны $\frac{\partial\omega}{\partial\boldsymbol{k}}$ пропорциональна $\boldsymbol{k}$.

Диэлектрическая проницаемость с учётом пространственной дисперсии широко используется, например, при рассмотрении различных электромагнитных явлений в плазме, так как электроны плазмы обладают большой подвижностью и легко может реализоваться ситуация, когда их свободный пробег станет сравнимым с характерной длиной изменения электромагнитного поля.