

Профессор Ермаченко В.М. и профессор Евсеев И.В.

Лекция 12.

Быстропеременное электромагнитное поле. Частотная дисперсия диэлектрической проницаемости.

Быстропеременное электромагнитное поле. Общий подход к рассмотрению переменного электромагнитного поля в среде был изложен в предыдущей лекции. Здесь мы также рассматриваем поля, напряжённость которых гармонически зависит от времени:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t), \quad (12.1)$$

но в отличие от предыдущего не считаем частоту поля ω малой по сравнению с характерными частотами среды. Как и прежде, предполагаем, что сторонние заряды и токи отсутствуют, а также пренебрегаем магнитными свойствами среды:

$$\mu = 1. \quad (12.2)$$

В этом случае система уравнений Максвелла, введённая в лекции 1, принимает вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = \frac{i\omega}{c} \mathbf{H}, \quad (12.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\rho, \quad (12.4)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} - \frac{i\omega}{c} \mathbf{D}, \quad (12.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (12.6)$$

К этим уравнениям нужно добавить уравнения связи типа

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (12.7)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (12.8)$$

где σ и ε зависят от частоты поля (см. предыдущую лекцию).

В лекции 1 отмечалось, что уравнения Максвелла в среде являются феноменологическими и могут быть записаны по-разному в зависимости от типа рассматриваемых задач. В частности, вид уравнения (12.5) связан с разделением зарядов среды на свободные и связанные. Такое разделение имеет смысл для стационарных и медленноменяющихся полей. Для быстропеременных полей различие между свободными и связанными зарядами стирается. Под действием поля и те и другие заряды осциллируют в пространстве и, следовательно, могут быть описаны единым образом. Поэтому для описания быстропеременных полей в веществе удобно вместо (12.5) пользоваться другим уравнением. Для установления вида этого уравнения, используя (12.7) и (12.8), перепишем (12.5) следующим образом

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c}\left(\varepsilon + \frac{4\pi\sigma}{\omega}\right)\mathbf{E}. \quad (12.9)$$

Выражение, стоящее в правой части (12.9), содержит два слагаемых, одно из которых учитывает вклад связанных электронов, а другое - электронов проводимости. Для быстропеременных полей, когда деление зарядов на свободные и связанные становится условным, естественно описывать вклад всех зарядов в индукцию (поляризацию среды) одинаково, вводя, например, эффективную диэлектрическую проницаемость среды

$$\tilde{\varepsilon} = \varepsilon + \frac{4\pi\sigma}{\omega}. \quad (12.10)$$

Вводя индукцию $\tilde{\mathbf{D}} = \tilde{\varepsilon}\mathbf{E}$, перепишем уравнение (12.9) в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c}\tilde{\mathbf{D}}. \quad (12.11)$$

Итак, вследствие того, что в быстропеременных полях поведение проводников и диэлектриков становится одинаковым, электродинамические свойства среды можно описывать одной комплексной функцией $\tilde{\varepsilon}$. Заметим, что для переменных полей величина ε , входящая в $\tilde{\varepsilon}$, также становится комплексной. В дальнейшем значок «тильда» над величинами ε и \mathbf{D} , будет опущен, однако при этом подразумевается, что ε учитывает вклад как связанных электронов, так и электронов проводимости. Таким образом, для описания быстропеременных полей в веществе используются уравнения (12.3), (12.6), уравнение

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = -\frac{i\omega}{c}\mathbf{D}, \quad (12.12)$$

вытекающее из него уравнение

$$\operatorname{div}\mathbf{D} = 0 \quad (12.13)$$

и уравнение связи (12.7).

Частотная дисперсия диэлектрической проницаемости. Напомним, что в нашем рассмотрении зависимость напряжённости поля от времени предполагается гармонической. Поэтому оператор $\frac{\partial}{\partial t}$ здесь сводится к умножению на величину $-i\omega$. Если входящую в эти уравнения частоту ω заменить на оператор $i\frac{\partial}{\partial t}$, то перечисленные выше уравнения будут иметь смысл и для произвольной зависимости напряжённости поля от времени, но это будут уже сложные операторные уравнения, не дифференциальные в общем случае. Действительно, уравнение связи (12.7) в случае произвольной зависимости напряжённости поля от времени означает интегральную связь между индукцией \mathbf{D} в данный момент и напряжённостью электрического поля во все предыдущие моменты времени:

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^t f(t-t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') dt' = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_0^{\infty} f(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t-\tau) d\tau. \quad (12.14)$$

При написании (12.14) использован принцип причинности - индукция может зависеть только от напряжённости поля в предыдущие моменты времени. Физически это означает, что для переменных полей в общем случае поляризация среды не успевает следовать за напряжённостью поля. Вещественная функция $f(\tau)$ определяет вклад в поляризацию среды в момент времени t от поля, существовавшего в предыдущий момент времени $t-\tau$, т.е. определяет как бы «память» системы о том поле, которое существовало в предыдущие моменты времени. Формально выражение (12.14) может быть записано в виде

$$\mathbf{D} = \mathcal{E} \mathbf{E}, \quad (12.15)$$

где \mathcal{E} линейный интегральный оператор. Разложив $\mathbf{D}(t)$ и $\mathbf{E}(t)$ в интеграл Фурье, из (12.14) получим связь между фурье-компонентами $\mathbf{D}(\omega)$ и $\mathbf{E}(\omega)$ в виде (12.7), где

$$\varepsilon(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) \exp(i\omega\tau) d\tau. \quad (12.16)$$

О зависимости диэлектрической проницаемости от частоты ω говорят как о частотной дисперсии диэлектрической проницаемости. Записывая $\varepsilon(\omega)$ в виде

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_1(\omega) + i\varepsilon_2(\omega), \quad (12.17)$$

из (12.16) имеем для вещественной и мнимой частей диэлектрической проницаемости следующие выражения:

$$\varepsilon_1(\omega) = 1 + \int_0^{\infty} f(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau, \quad (12.18)$$

$$\varepsilon_2(\omega) = \int_0^{\infty} f(\tau) \sin(\omega\tau) d\tau. \quad (12.19)$$

Видно, что вещественная часть диэлектрической проницаемости - чётная функция частоты, а мнимая - нечётная:

$$\varepsilon_1(-\omega) = \varepsilon_1(\omega), \quad (12.20)$$

$$\varepsilon_2(-\omega) = -\varepsilon_2(\omega). \quad (12.21)$$

Соотношения (12.20) и (12.21) можно объединить:

$$\varepsilon(-\omega) = \varepsilon(\omega)^*. \quad (12.22)$$

При малых частотах функцию $\varepsilon(\omega)$ можно разложить в ряд по степеням ω . Разложение ε_1 содержит лишь чётные степени ω , а ε_2 - нечётные. В пределе $\omega \rightarrow 0$ в диэлектрике $\varepsilon(\omega)$ стремится к $\varepsilon(0)$ - статическому значению диэлектрической проницаемости. В проводни-

ках с учётом того, что теперь в величину ε включена и проводимость σ , при $\omega \rightarrow 0$ диэлектрическая проницаемость имеет полюс

$$\varepsilon_2(\omega) = \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad (12.23)$$

где σ обычная проводимость для постоянного тока.

Может возникнуть вопрос: существует ли вообще область значений частот, в которой уже существенны дисперсионные явления, но ещё допустимо макроскопическое описание? Наиболее быстрый механизм установления электрической поляризации - электронный. Его время релаксации порядка a/v , где a имеет величину порядка атомных размеров, а v - характерная скорость движения электронов в атоме. Дисперсия становится существенной, если

$$\omega \gg v/a. \quad (12.24)$$

С другой стороны, условие применимости макроскопического описания требует, чтобы длина, на которой существенно меняется напряжённость поля, значительно превосходила атомные размеры, т.е. $c/\omega \gg a$ или

$$\omega \ll c/a. \quad (12.25)$$

Так как характерная скорость движения электронов v много меньше c ($v/c \sim 1/137$), то неравенства (12.24) и (12.25) могут выполняться одновременно и, следовательно, указанная область частот существует.

При больших частотах диэлектрическая проницаемость всех веществ стремится к единице. Это следует из того, что при достаточно быстром изменении напряжённости поля процессы, приводящие к установлению отличной от E индукции D , вообще не успевают происходить. Если величина ω превышает все характерные частоты среды, то можно найти предельный вид функции $\varepsilon(\omega)$, справедливый для любых веществ. Действительно, в этом случае при вычислении плотности дипольного момента вещества электроны можно рассматривать как свободные, так как нас интересуют промежутки времени порядка $1/\omega$. Путь v/ω , проходимый электроном за это время, мал по сравнению с расстоянием c/ω , на котором существенно меняется напряжённость поля. Поэтому поле можно считать однородным при определении смещения электрона под действием силы со стороны поля. Из уравнения движения

$$m\ddot{\mathbf{r}} = e\mathbf{E},$$

где m масса электрона, e - его заряд, а $\mathbf{E} = \mathbf{E}(\omega)\exp(-i\omega t)$, получаем

$$\mathbf{r} = -\frac{e}{m\omega^2}\mathbf{E}.$$

Тогда плотность дипольного момента

$$\mathbf{P} = - \frac{Ne^2}{m\omega^2} \mathbf{E}, \quad (12.26)$$

где N - концентрация электронов. Из определения индукции $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$ и выражения (12.26) находим

$$\varepsilon(\omega) = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}, \quad (12.27)$$

где

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}. \quad (12.28)$$

Частоту ω_p обычно называют плазменной, так как выражение (12.27) часто используется для описания электродинамических явлений в плазме.

Итак, для описания быстропеременных полей в веществе в случае произвольной зависимости напряжённости поля от времени используется уравнение связи в виде (12.14), а вместо уравнений (12.3) и (12.12) - уравнения

$$\text{rot}\mathbf{E} = - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (12.3')$$

$$\text{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \quad (12.12')$$

Выясним теперь физический смысл мнимой части диэлектрической проницаемости. Напомним, что в нашем рассмотрении мнимая часть ε в проводнике в первую очередь связана с проводимостью и, следовательно, характеризует диссипацию энергии электромагнитного поля - её переход в теплоту. Можно ожидать, что в общем случае величина $\text{Im}\varepsilon$ также связана с потерями энергии электромагнитного поля в веществе. Умножая обе части уравнения (12.12') скалярно на \mathbf{E} , а обе части уравнения (12.3') - на \mathbf{H} и вычитая одно из другого, получаем

$$\text{div}\mathbf{S} = - \frac{1}{4\pi} \left(\mathbf{E} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{H} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \right), \quad (12.29)$$

где

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{E}, \mathbf{H}] \quad (12.30)$$

- вектор Пойнтинга. Посмотрим, что представляет собой правая часть выражения (12.29) для полей, напряжённость которых гармонически зависит от времени. Так как это выражение квадратично по напряжённостям полей, то необходимо подставлять в него реальную часть напряжённостей, записанных в комплексной форме (12.1). В результате там возникнут осциллирующие слагаемые, пропорциональные $\exp(\pm 2i\omega t)$, и слагаемые, не за-

висящие от времени. Осциллирующие слагаемые описывают обмен энергией между полем и средой: поле то разгоняет заряды, отдавая им энергию, то заряды, тормозясь, излучают, отдавая энергию полю. В среднем этот процесс не влияет на обмен энергией между средой и полем. Средний ход процесса такого обмена определяют слагаемые, не зависящие от времени. Поэтому, проводя усреднение по промежутку времени $T \gg 1/\omega$, получаем

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{S}} = - \frac{\omega \varepsilon_2}{8\pi} |\mathbf{E}|^2. \quad (12.31)$$

Итак, в зависимости от знака мнимой части диэлектрической проницаемости среда либо поглощает энергию электромагнитного поля, либо увеличивает её. В состоянии термодинамического равновесия среда всегда поглощает; следовательно,

$$\varepsilon_2 > 0 \quad (12.32)$$

(здесь подразумевается $\omega > 0$). В принципе, можно создать и такое состояние среды, при котором $\varepsilon_2 < 0$, и она будет усиливать проходящую электромагнитную волну. При некоторых значениях частоты мнимая часть диэлектрической проницаемости $\varepsilon_2 = 0$, и среда является прозрачной для такого излучения. Вообще, области частот, в которых величина ε_2 достаточно мала, называются областями прозрачности вещества.