Профессор Ермаченко В.М. и профессор Евсеев И.В.

Лекция 11.

Квазистационарное электромагнитное поле. Токи Фуко и скин-эффект.

Квазистационарное электромагнитное поле. До сих пор рассматривались стационарные поля. Перейдём теперь к исследованию полей, напряжённость которых зависит от времени, для чего обратимся снова к системе уравнений Максвелла (1.31) - (1.34). Будем считать, что сторонние токи и заряды отсутствуют. Учитывая линейность уравнений Максвелла, разложим все величины в интеграл Фурье по времени, например,

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \exp(-i\omega t)\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega). \tag{11.1}$$

В дальнейшем для сокращения записи используется обозначение

$$\boldsymbol{E}_\omega = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\omega). \tag{11.2}$$

Подставляя в уравнения (1.31) - (1.34) для всех величин разложения типа (11.1), получаем уравнения для Фурье-компонент $\boldsymbol{E}_\omega$, $\boldsymbol{H}_\omega$, и т.д. Решив их, можно найти $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)$ и другие характеристики электромагнитного поля. Поэтому для исследования общего случая достаточно рассмотреть ситуацию, когда напряжённость поля зависит от времени по гармоническому закону с фиксированной частотой ω, например,

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_\omega \exp(-i\omega t). \tag{11.3}$$

Обратим внимание на то, что в (11.3) $\boldsymbol{E}$ - комплексная величина. До тех пор, пока соотношения линейные, это не приведёт ни к каким недоразумениям. В окончательных ответах и при вычислениях различных нелинейных комбинаций нужно использовать реальные части выражений типа (11.3).

При решении задач в каждом конкретном случае частота поля ω должна сопоставляться с характерными частотами ω_0 рассматриваемой задачи. Если $\omega \gg \omega_0$, то поля называют высокочастотными (быстропеременными), если $\omega \ll \omega_0$ - низкочастотными (медленноменяющимися).

Для выяснения того, какие именно величины играют роль характерных частот, обратимся к уравнениям связи (см. Лекцию 2), которые добавляются к системе уравнений Максвелла. Как известно, в стационарном случае, т.е. при $\omega = 0$, для не слишком сильных полей уравнения связи имеют вид

$$\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}, \quad \boldsymbol{B} = \mu\boldsymbol{H}, \quad \boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}. \tag{11.4}$$

Ради простоты эти соотношения записаны для случая изотропных непироэлектрических и неферромагнитных сред. Оценки, проведённые в лекции 8, показывают, что в отличие от диэлектрической проницаемости магнитная проницаемость таких сред мало отличается от единицы, поэтому в дальнейшем рассматриваются вещества, магнитными свойствами которых можно пренебречь, т.е. принимается

$$\mu = 1. \qquad (11.5)$$

Если аналогичные уравнения связи записывать для переменных полей ($\omega \neq 0$), то при $\omega << \omega_0$ величины ε, μ и σ с хорошей точностью совпадают со своими статическими значениями, отвечающими $\omega = 0$.

Рассмотрим для примера связь $\boldsymbol{D} = \varepsilon\boldsymbol{E}$. Как указано в Лекции 2, величина ε определяется поляризацией среды, т.е. смещением связанных зарядов под действием поля. Если поле изменяется достаточно медленно (адиабатически), то эти смещения успевают следовать за напряжённостью поля, и величина ε не изменяется по сравнению со статическим значением. Медленность изменения напряжённости поля означает, что $\omega << \omega_0 = 1/\tau$, где τ -характерное время установления поляризации в веществе. Например, в твёрдом теле поляризация определяется электронами и $\omega_0 \sim \Delta E/\hbar \sim 10^{15} c^{-1}$, где $\Delta E \sim 1$ эВ - порядок расстояния между энергетическими полосами. Для газа полярных молекул τ - время релаксации макроскопического дипольного момента, т.е. время, необходимое для выстраивания молекулярных диполей по направлению линий напряжённости поля. При рассмотрении связи $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$ роль характерной частоты ω_0 играет величина $1/\tau$, где τ - время свободного пробега электрона, так как проводимость σ определяется тем, насколько свободно электроны могут перемещаться в веществе. Для хороших металлов величина $1/\tau$ порядка 10^{13} c^{-1}, и при $\omega << 1/\tau$ значение σ практически совпадает со своим статическим значением, так как поле в этих случаях не нарушает микроскопического механизма проводимости.

В дальнейшем в этой главе предполагается, что с течением времени напряжённость поля меняется достаточно медленно, а потому величины ε и σ совпадают со своими статическими значениями. Медленность изменения во времени напряжённости электромагнитного поля позволяет упростить систему уравнений Максвелла. Для рассмотрения огромного числа задач электро- и радиотехники, задач о распределении переменного тока по сечению проводника, о возникновении токов в проводниках, находящихся в переменном магнитном поле, и других достаточно квазистационарного приближения.

Электромагнитное поле называется квазистационарным, если в уравнении Максвелла (1.34) пренебрегается величиной

$$\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} = \varepsilon \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \qquad (11.6)$$

В этом случае вместо уравнения (1.34) имеем

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j}. \qquad (11.7)$$

Обсудим ограничения, позволяющие использовать вместо (1.34) уравнение (11.7). В области внутри проводника при наличии тока проводимости пренебрежение величиной (11.6) (током смещения) не внесёт существенной ошибки, если

$$j = \sigma E >> \varepsilon \frac{\partial E}{\partial t} \sim \varepsilon\omega E,$$

т.е. при

$$\omega << \sigma/\varepsilon. \qquad (11.8)$$

Для хороших металлов, полагая $\sigma \sim 10^{17} c^{-1}$, $\varepsilon = 1$, видим, что условие (11.8) является более слабым, чем отмеченное выше условие адиабатичности, требующее $\omega << 10^{13} c^{-1}$. В области вне проводника $\boldsymbol{j} = 0$, и возможность пренебрежения током смещения оценивается из сравнения пространственных и временных производных напряжённостей поля, а именно: мы хотим в уравнении

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \qquad (11.9)$$

где для простоты положено $\varepsilon = 1$, пренебречь правой частью, т.е. считать скорость изменения напряжённости поля во времени малой по сравнению со скоростью её изменения в пространстве. Оценивая левую и правую части в уравнении (11.9), приходим к неравенству

$$H/l >> \omega E/c, \qquad (11.10)$$

где l - характерная длина изменения напряжённости электромагнитного поля в пространстве. Из уравнения

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}$$

получаем оценку, связывающую между собой величины $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$:

$$E/l \sim \omega H/c. \qquad (11.11)$$

Исключая из (11.10) величину E с помощью (11.11), приходим к условию

$$l << \lambda, \qquad (11.12)$$

которое определяет применимость квазистационарного приближения в области, где ток проводимости отсутствует. Здесь $\lambda = c/\omega$ - длина волны электромагнитного поля. Значение l - порядка характерной длины проводника L. Поэтому неравенство (11.12) ограничивает размер проводника: $L \ll \lambda$. С другой стороны, в достаточном удалении от проводника, где напряжённость поля изменяется в пространстве степенным образом, роль l играет r - расстояние от точки наблюдения до проводника. Поэтому квазистационарное приближение работает только в некоторой области вблизи проводника, так что $r \ll \lambda$. Отметим, что физически это условие означает пренебрежение эффектом запаздывания при распространении электромагнитного поля.

Итак, в квазистационарном приближении электромагнитное поле описывается системой уравнений

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\sigma\boldsymbol{E}, \qquad (11.13)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0, \qquad (11.14)$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \qquad (11.15)$$

Вне проводника $\sigma = 0$ и уравнение (11.13) принимает вид

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = 0. \qquad (11.16)$$

Взяв дивергенцию от обеих частей уравнения (11.13), с учётом того, что σ не зависит от координат, получаем

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 0. \qquad (11.17)$$

Так как ток проводимости течёт только внутри проводника, то

$$j_n|_S = \sigma E_n|_S = 0,$$

т.е. на поверхности проводника

$$E_n|_S = 0. \qquad (11.18)$$

Из уравнения (11.14) следует непрерывность нормальных компонент $\boldsymbol{H}$ на границе проводника:

$$H_n^{(i)}|_S = H_n^{(e)}|_S, \qquad (11.19)$$

где индексы i и e указывают на поле внутри и вне проводника. Из (11.13) с учетом конечности $\boldsymbol{E}$ и σ следует непрерывность тангенциальных компонент вектора $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{H}_t^{(i)}|_S = \boldsymbol{H}_t^{(e)}|_S. \qquad (11.20)$$

Следовательно, на границе проводника вектор $\boldsymbol{H}$ непрерывен:

$$\boldsymbol{H}^{(i)}|_S = \boldsymbol{H}^{(e)}|_S.$$

Из уравнений (11.13) - (11.15) нетрудно получить уравнения только для $\boldsymbol{H}$ или для $\boldsymbol{E}$. Например, взяв ротор от обеих частей уравнения (11.13) и исключая $\mathrm{rot}\boldsymbol{E}$ с помощью (11.15), получаем

$$\Delta \boldsymbol{H} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}. \tag{11.21}$$

Аналогично получается и уравнение для $\boldsymbol{E}$:

$$\Delta \boldsymbol{E} = \frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \tag{11.22}$$

Сделаем следующее замечание относительно применимости квазистационарного приближения. Условия (11.8), (11.12) могут оказаться более слабыми, чем требование адиабатичности, т.е. отсутствия зависимости ε и σ от ω. Поэтому иногда рассматривают задачи в квазистационарном приближении с учётом зависимости ε и σ от ω (квазистационарность в широком смысле этого понятия). Имеется еще одно условие, ограничивающее применимость этих упрощённых уравнений. Дело в том, что мы рассматриваем макроскопические поля, поэтому длина свободного пробега электрона в проводнике должна быть малой по сравнению с расстоянием l, на котором существенно меняется напряжённость поля внутри проводника. Как будет видно из дальнейшего, l уменьшается с ростом ω. Именно отсюда для хороших металлов вытекает самое сильное ограничение на частоту поля: $\omega << 10^{10}$ c^{-1}.

Токи Фуко. Как уже отмечалось, уравнения квазистационарного электромагнитного поля широко применяются для решения задач электро- и радиотехники, в которых рассчитываются электрические цепи с ёмкостями, индуктивностями и сопротивлениями. Они используются также при нахождении распределения переменного тока по поперечному сечению проводника (задача о скин-эффекте). Ещё один тип задач, для решения которых используется квазистационарное приближение, - это задачи о нахождении токов Фуко. Токи Фуко возникают в массивных проводниках, помещаемых в переменное магнитное поле, и приводят к диссипации энергии электромагнитного поля - нагреванию проводников.

Рассмотрим более подробно задачу о токах Фуко на примере проводящего шара радиуса R, помещённого в однородное переменное магнитное поле:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0\exp(-i\omega t). \tag{11.23}$$

Напомним, что в промежуточных вычислениях для упрощения используются комплексные величины. Поэтому выражение (11.23) подразумевает, что

$$\mathbf{H} = \mathrm{Re}\,\mathbf{H}_0\exp(-i\omega t) = \mathbf{H}_0\cos(\omega t).$$

Напряжённость магнитного поля в присутствии проводника отлична от $\mathbf{H}$

$$\boldsymbol{H}^{(e)}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}^{(e)}(\boldsymbol{r})\exp(-i\omega t), \tag{11.24}$$

$$\boldsymbol{H}^{(i)}(\boldsymbol{r},t) = \boldsymbol{H}^{(i)}(\boldsymbol{r})\exp(-i\omega t), \tag{11.25}$$

где индексы e и i указывают, что рассматриваются области вне и внутри проводника, соответственно. Из (11.21) получаем уравнения для определения функций $\boldsymbol{H}^{(e)}(\boldsymbol{r})$ и $\boldsymbol{H}^{(i)}(\boldsymbol{r})$

$$\Delta \boldsymbol{H}^{(e)}(\boldsymbol{r}) = 0, \tag{11.26}$$

$$\Delta \boldsymbol{H}^{(i)}(\boldsymbol{r}) = -\frac{4\pi i\omega\sigma}{c^2}\boldsymbol{H}^{(i)}(\boldsymbol{r}) \tag{11.27}$$

с граничными условиями

$$\boldsymbol{H}^{(e)}(\boldsymbol{r} \to \infty) = \mathbf{H}_0. \tag{11.28}$$

$$\boldsymbol{H}^{(e)}(R) = \boldsymbol{H}^{(i)}(R). \tag{11.29}$$

Прежде чем обсуждать конкретный вид решения поставленной задачи, сделаем некоторые оценки и получим общие выражения, позволяющие найти поглощённую проводником энергию электромагнитного поля. Вводя характерную длину изменения магнитного поля внутри проводника l, получим для неё из (11.27) следующую оценку:

$$l \sim c/\sqrt{\sigma\omega}\,. \tag{11.30}$$

Значение l при уменьшении ω увеличивается, поэтому для достаточно малых частот выполняется неравенство $l >> L$, где L - характерная длина рассматриваемого проводника (в случае шара $L = R$). Для таких частот решение может быть найдено приближённо в виде ряда по степеням малого параметра L/l. В противоположном случае достаточно больших частот, когда $l << L$, решение может быть найдено в виде ряда по степеням малого параметра l/L.

По найденной напряжённости магнитного поля из уравнения (11.13) или (11.15) рассчитывается напряжённость индуцированного им электрического поля $\boldsymbol{E}$ и, следовательно, распределение токов Фуко в проводнике $\boldsymbol{j} = \sigma\boldsymbol{E}$. Поглощаемая проводником в единицу времени энергия поля может быть рассчитана по формуле (9.6):

$$Q = \int dV\boldsymbol{jE} = \int dV\sigma\boldsymbol{E}^2. \tag{11.31}$$

Величина $Q_0 = \boldsymbol{jE} = \boldsymbol{j}^2/\sigma$ представляет собой количество теплоты, выделяющейся в единице объёма проводника в единицу времени, а само это соотношение есть не что иное, как закон Джоуля - Ленца в дифференциальной форме. В дальнейшем будет использоваться величина $\overline{Q}$, где черта сверху означает усреднение по промежутку времени $T >> 1/\omega$. Обратим внимание, что выражение (11.31) представляет собой квадратичную форму $\boldsymbol{E}$, а потому в нём для $\boldsymbol{E}$ следует использовать вещественное выражение. Используя уравнения электромагнитного поля и теорему Гаусса, можно записать выражение для величины $\overline{Q}$ в виде интеграла по поверхности проводника:

$$\overline{Q} = -\frac{c}{4\pi}\oint d\boldsymbol{S}\,\overline{[\boldsymbol{E},\boldsymbol{H}]} \tag{11.32}$$

где элемент поверхности $d\boldsymbol{S}$ направлен по внешней нормали. Выражение (11.32) показывает, что диссипируемая в проводнике энергия равна потоку энергии электромагнитного поля сквозь поверхность проводника. Получим выражение для величины $\overline{Q}$ через комплексные величины $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ при гармонической зависимости напряжённостей полей от времени. Записывая

$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t) = [\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})\exp(-i\omega t) + \text{k.c.}]/2$, $\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t) = [\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})\exp(-i\omega t) + \text{k.c.}]/2$,

имеем

$$\overline{[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t),\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r},t)]} = \mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}), \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})^*]/2. \tag{11.33}$$

Используя (11.33), из (11.32) получаем

$$\overline{Q} = -\frac{c}{8\pi}\oint d\boldsymbol{S}\,\mathrm{Re}[\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}),\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})^*]. \tag{11.34}$$

Для практических целей представляет интерес зависимость $\overline{Q}$ от частоты поля ω. В предельных случаях малых и больших частот можно установить явный вид этой зависимости для проводника произвольной формы. В случае малых частот при $L << l$ для распределения магнитного поля в пространстве можно взять в первом приближении функцию $\boldsymbol{H}_{cm}(\boldsymbol{r})$, отвечающую случаю $\omega = 0$. Для шара в однородном поле $\boldsymbol{H}_{cm}(\boldsymbol{r}) = \mathbf{H_0}$. Индуцированное электрическое поле определяется тогда из уравнения (11.15), которое для гармонической зависимости полей от времени имеет вид

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = \frac{i\omega}{c}\boldsymbol{H}_{cm}(\boldsymbol{r}). \tag{11.35}$$

Из (11.35) следует, что $E \sim \omega$, в частности для шара в однородном поле

$$E \sim \frac{R\omega}{c}\,\mathrm{H}_0.$$

Поэтому из (11.31) видим, что в области малых частот $\overline{Q} \sim \omega^2$ и для шара

$$\overline{Q} \sim \frac{\sigma\omega^2 R^5}{c^2}\,\mathrm{H}_0^{\,2} \tag{11.36}$$

Исследуем теперь случай достаточно больших частот, когда $l << L$. Тогда для нахождения напряжённости магнитного поля вне проводника можно в первом приближении пренебречь проникновением поля в проводник. Поэтому на поверхности проводника имеем такое же граничное условие, как и в случае сверхпроводника:

$$H_n^{(e)}|_S = 0. \tag{11.37}$$

Условие (11.37) означает, что возникающие токи Фуко препятствуют проникновению поля вглубь проводника. Условие (11.37) вместе с условием поведения поля на бесконечности позволяет найти распределение поля $\boldsymbol{H}^{(e)}(\boldsymbol{r})$ вне проводника и, следовательно, на поверхности проводника:

$$\boldsymbol{H}_0 = \boldsymbol{H}^{(e)}(\boldsymbol{r})|_S. \tag{11.38}$$

Итак, в первом приближении по параметру l/L вектор напряжённости магнитного поля на поверхности проводника направлен по касательной к поверхности и определяется выражением (11.38). Это выражение используется в качестве граничного условия при нахождении распределения напряжённости поля внутри проводника:

$$\boldsymbol{H}^{(i)}(\boldsymbol{r})|_S = \boldsymbol{H}_0. \qquad (11.39)$$

Уравнение (11.27) с условием (11.39) позволяет найти $\boldsymbol{H}^{(i)}(\boldsymbol{r})$ внутри проводника. Оценка напряжённости электрического поля внутри проводника даёт

$$E^{(i)} \sim \frac{l\omega}{c} H^{(i)} \sim \sqrt{\frac{\omega}{\sigma}} H^{(i)}. \qquad (11.40)$$

Обратим внимание, что напряжённость электрического поля существенно меньше, чем магнитного ($l << L << c/\omega$). Для поглощаемой мощности из (11.34) в этом случае получаем следующую зависимость от частоты ω и проводимости σ:

$$\overline{Q} \sim c\sqrt{\frac{\omega}{\sigma}} \oint dS\, |\boldsymbol{H}_0|^2. \qquad (11.41)$$

Если величина l мала не только по сравнению с L, но и по сравнению с характерным значением радиуса кривизны поверхности проводника, то возможны дальнейшие упрощения. В этом случае при нахождении напряжённости поля внутри проводника можно заменить участок поверхности проводника касательной плоскостью. Направим ось z в глубь проводника перпендикулярно этой плоскости. При такой постановке задачи функция $\boldsymbol{H}^{(i)}$ зависит только от z, а граничное условие (11.39) имеет вид

$$\boldsymbol{H}^{(i)}(z=0) = \boldsymbol{H}_0. \qquad (11.42)$$

Из уравнения $\mathrm{div}\boldsymbol{H} = 0$ следует, что $H_z^{(i)} = \mathrm{const}$, а так как на границе $H_{0z} = 0$, то вектор $\boldsymbol{H}^{(i)}$ параллелен вектору $\boldsymbol{H}_0$. Тогда, обозначая

$$\boldsymbol{H}^{(i)}(z) = \boldsymbol{e}_0 H(z),$$

где $\boldsymbol{e}_0$ - единичный вектор по направлению $\boldsymbol{H}_0$, для определения скалярной функции $H(z)$ имеем из (11.27) уравнение

$$\frac{d^2H}{dz^2} + k^2H = 0, \qquad (11.43)$$

где

$$k^2 = \frac{4\pi i\sigma\omega}{c^2}. \qquad (11.44)$$

Решение уравнения (11.43), имеющее физический смысл, запишем в виде

$$H(z) = H_0\exp(ikz), \qquad (11.45)$$

где

$$k = (1 + i)/l, \qquad (11.46)$$

$l = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}$. (11.47)

Таким образом, в этом приближении напряжённость поля внутри проводника при удалении от поверхности меняется по закону

$\boldsymbol{H}^{(i)}(z) = \boldsymbol{H}_0\exp(iz/l - z/l)$.

Из этого выражения видно, что l имеет смысл расстояния, на котором существенно меняется напряжённость поля в проводнике. Эту величину, определяемую выражением (11.47), обычно называют глубиной проникновения поля в проводник. Из уравнения (11.13) в этом приближении для напряжённости электрического поля в проводнике получаем выражение

$$\boldsymbol{E}^{(i)} = \sqrt{\frac{\omega}{8\pi\sigma}}\,(1 - i)[\boldsymbol{n},\boldsymbol{H}^{(i)}], \tag{11.48}$$

где $\boldsymbol{n}$ - единичный вектор внешней нормали к поверхности проводника, направленный в отрицательном направлении оси z. Отметим, что оценка (11.40) согласуется с результатом (11.48). Используя (11.34), для поглощаемой мощности получаем

$$\overline{Q} = \frac{c}{16\pi}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}\oint dS\,|\,\boldsymbol{H}_0\,|^2. \tag{11.49}$$

Выражение (11.41), полученное путем оценки, отличается от результата (11.49) только числовым множителем.

Обратимся теперь к результатам точного решения задачи о проводящем шаре в переменном однородном поле. Направляя ось z по физически выделенному направлению H_0 и вводя сферические координаты r, θ и φ, из симметрии задачи видим, что у магнитного поля отличны от нуля только компоненты $H_r(r,\theta)$ и $H_\theta(r,\theta)$, а у электрического - только компонента $E_\varphi(r,\theta)$. Следовательно, вектор $\boldsymbol{j}$, описывающий распределение токов Фуко, также имеет только одну отличную от нуля компоненту $j_\varphi(r,\theta) = \sigma E_\varphi(r,\theta)$. Опуская выражения для напряжённостей полей ввиду их громоздкости, приведем формулу для поглощаемой мощности:

$$\overline{Q} = \frac{3\omega R l^2}{8}\,\mathsf{H}_0^{\,2}\,\{(R/l)[\mathrm{sh}(2R/l) + \sin(2R/l)][\mathrm{ch}(2R/l) - \cos(2R/l)]^{-1} - 1\}, \tag{11.50}$$

где sh$x$ и ch$x$ - гиперболические синус и косинус.

Выражение (11.50) позволяет проверить результаты провёденных оценок поглощаемой мощности. Для малых частот, проводя в (11.50) разложение по малому параметру, получаем

$$\overline{Q} = \frac{\pi\omega^2\sigma R^5}{15c^2}\,\mathsf{H}_0^{\,2}. \tag{11.51}$$

Сравнение (11.51) с (11.36) показывает, что проделанная ранее оценка верна с точностью до числового множителя. Для больших частот при $l << R$ из (11.50) имеем приближённо

$$\overline{Q} = \frac{3}{8}\sqrt{\frac{\omega}{2\pi\sigma}}\,cR^2 H_0^{\ 2}. \qquad (11.52)$$

Оценка (11.49) согласуется с результатом (11.52). Более того, результат (11.52) получается из (11.49), если в качестве $\boldsymbol{H}_0$ использовать выражение (10.45).

Обратимся теперь к задачам о скин-эффекте, т.е. задачам нахождения распределения переменного тока по сечению проводника. Для примера рассмотрим бесконечно длинный прямой цилиндрический проводник кругового сечения радиуса R. Направим ось z по оси цилиндра вдоль направления протекания тока. Тогда отличная от нуля компонента плотности тока j_z, обозначаемая в дальнейшем j, вследствие осевой симметрии задачи и однородности в направлении z зависит только от r - расстояния от оси цилиндра. Пусть плотность тока зависит от времени по гармоническому закону

$$j(r,t) = j(r)\exp(-\,i\omega t), \qquad (11.53)$$

где, как и выше, мы используем комплексное выражение, подразумевая его реальную часть. Распределение тока по поперечному сечению проводника нормировано условием

$$\int_0^R dr\,2\pi r j(r) = I, \qquad (11.54)$$

где I - амплитуда полного тока, текущего по проводнику. Дальнейшие вычисления проводятся в цилиндрических координатах z, r и φ. Из симметрии задачи следует, что напряжённость магнитного поля имеет только одну отличную от нуля компоненту

$$H_\varphi(r,t) = H(r)\exp(-\,i\omega t). \qquad (11.55)$$

Так как уравнения квазистационарного приближения вне проводника совпадают с уравнениями стационарного магнитного поля, то вне проводника

$$H^{(e)}(r) = \frac{2I}{cr}. \qquad (11.56)$$

Учитывая конечность величины $H^{(i)}(r)$ при $r = 0$, из уравнения (11.27) имеем

$$H^{(i)}(r) = AJ_1(kr), \qquad (11.57)$$

$J_\nu(x)$ - функция Бесселя, k определено выражением (11.46), а постоянная A находится из условия непрерывности магнитного поля на поверхности проводника и равна

$$A = \frac{2I}{cRJ_1(kR)}. \qquad (11.58)$$

Распределение плотности тока по сечению проводника получается затем из (11.13):

$$j(r) = \frac{kI}{2\pi RJ_1(kR)}J_0(kr). \qquad (11.59)$$

Для получения окончательного ответа нужно (11.59) умножить на $\exp(-\,i\omega t)$ и выделить реальную часть.

Обсудим полученный результат. В предельном случае малых частот, когда $R << l$, в первом неисчезающем приближении из (11.59) получаем очевидный ответ:

$$j(r) = \frac{I}{\pi R^2}.$$

Следующие члены ряда по малому параметру показывают, что при удалении от оси амплитуда плотности тока возрастает. Эта тенденция увеличения плотности тока по мере приближения к поверхности проводника особенно наглядно проявляется при больших частотах, когда $l << R$. В этом случае основная зависимость плотности тока от r, как следует из (11.59), определяется множителем $\exp[-(R-r)/l]$. Таким образом, при больших частотах ток в основном сосредоточен в тонком слое (скин-слое) вблизи поверхности проводника. В заключение отметим, что этот результат не зависит от формы проводника и толщина скин-слоя может быть оценена по формуле (11.47).