

Профессор Ермаченко В.М. и профессор Евсеев И.В.

Лекция 10.

Энергия магнитной анизотропии. Доменная структура ферромагнетика. Сверхпроводимость. Эффект Мейсснера. Примеры нахождения магнитного поля в присутствии сверхпроводников.

Энергия магнитной анизотропии. Оценки показывают, что для напряжённостей магнитного поля H , получаемых в лабораторных условиях, при температурах T , не очень близких к θ , второе слагаемое в выражении (9.28) для M всегда мало по сравнению со спонтанной намагниченностью. Предполагая эти условия выполненными, в дальнейшем считаем, что $|M|$ не зависит от напряжённости приложенного поля и совпадает с $|M_0|$. Влияние магнитного поля сводится к ориентированию вектора намагниченности, так как обменные силы не определяют направление M . Следует иметь в виду, что при рассмотрении поведения M было опущено диполь-дипольное взаимодействие магнитных моментов, которое, как показали оценки, является слабым по сравнению с обменным и поэтому не влияет на величину $|M|$. Однако это взаимодействие является анизотропным, т.е. его величина зависит от ориентации вектора M относительно кристаллографических осей. Поэтому даже при $H = 0$ из-за действия таких сил вектор M будет ориентирован по определённому направлению.

Рассмотрим подробнее энергию магнитного взаимодействия магнитных моментов электронов. Для двух магнитных моментов μ_1 и μ_2 , находящихся на расстоянии R друг от друга, её можно записать в виде

$$U = \mu_{1i}\mu_{2k}(R^2\delta_{ik} - 3R_iR_k)/R^5.$$

При переходе к макроскопическому описанию это выражение нужно усреднить по движению электронов и по расположению атомов решётки. В результате для плотности энергии, которая называется энергией магнитной анизотропии и обозначается $U_{ан}$, получается следующее выражение:

$$U_{ан} = \beta_{ik}M_iM_k/2, \tag{10.1}$$

где M_i - проекции вектора намагниченности M , β_{ik} - безразмерный симметричный тензор, зависящий от симметрии кристаллической решётки ферромагнетика. Напомним, что энергия магнитной анизотропии в $[e^2/(\hbar c)]^{-2}$ раз меньше обменной.

В дальнейшем нас будет интересовать только направление вектора \mathbf{M} . Для исследования этого вопроса запишем ту часть свободной энергии ферромагнетика, которая зависит от его направления:

$$\Delta\tilde{F} = \beta_{ik}M_iM_k/2 - \mathbf{MH}. \quad (10.2)$$

Термодинамически равновесное направление \mathbf{M} определяется из условия минимума этого выражения, рассматриваемого как функция направления \mathbf{M} при заданном значении внешнего параметра \mathbf{H} .

Определим вначале, как направлен вектор намагниченности при $\mathbf{H} = 0$. В выражении для энергии магнитной анизотропии перейдем к главным осям тензора β_{ik} , расположение которых определяется кристаллической решёткой ферромагнетика:

$$U_{ан} = (\beta_{xx}M_x^2 + \beta_{yy}M_y^2 + \beta_{zz}M_z^2)/2. \quad (10.3)$$

В случае кубической симметрии

$$\beta_{xx} = \beta_{yy} = \beta_{zz} = \beta,$$

и, следовательно, энергия анизотропии, определяемая выражением (10.3), не зависит от направления \mathbf{M} : $U_{ан} = \beta M^2/2$. Этим выражением можно пренебречь по сравнению с вкладом обменных сил $aM^2/2$. Поэтому в кубических кристаллах при вычислении $U_{ан}$ необходимо учитывать более высокие порядки теории возмущений. В результате энергия магнитной анизотропии будет содержать более высокие степени величины \mathbf{M} , например

$$U_{ан} = \varepsilon_{iklm}M_iM_kM_lM_m,$$

где ε_{iklm} - тензор четвёртого ранга. Это выражение уже не сводится к изотропному случаю. Из-за того, что сюда вошли более высокие степени \mathbf{M} , энергия магнитной анизотропии кубических кристаллов меньше, чем у одноосных и двухосных. В двухосных кристаллах все три главных значения тензора β_{ik} различны. Этот случай здесь не рассматривается.

Обсудим подробнее выражение для энергии магнитной анизотропии одноосных кристаллов, у которых $\beta_{xx} = \beta_{yy} \neq \beta_{zz}$. Обозначая

$$\beta_{xx} = \beta_{yy} = \beta_{\perp} > 0, \quad \beta_{zz} = \beta_{\parallel} > 0, \quad (10.4)$$

запишем $U_{ан}$ в виде

$$U_{ан} = M^2(\beta_{\perp}\sin^2\theta + \beta_{\parallel}\cos^2\theta)/2, \quad (10.5)$$

где θ - угол между направлением \mathbf{M} и выделенной кристаллографической осью кристалла.

При исследовании на минимум выражения (10.5) рассмотрим два возможных случая: $\beta_{\perp} > \beta_{\parallel}$ и $\beta_{\perp} < \beta_{\parallel}$. Итак пусть $\beta_{\perp} > \beta_{\parallel}$. Преобразуем выражение (10.5) следующим образом:

$$U_{ан} = \beta_{\parallel}M^2/2 + (\beta_{\perp} - \beta_{\parallel})M^2\sin^2\theta/2. \quad (10.6)$$

Опуская не зависящее от направления \mathbf{M} первое слагаемое и обозначая $\beta = \beta_{\perp} - \beta_{\parallel}$ ($\beta > 0$), вместо (10.6) запишем

$$U_{ан} = \beta M^2 \sin^2 \theta / 2. \quad (10.7)$$

Минимум этого выражения и определяет направление \mathbf{M} в данном случае. Нетрудно видеть, что он достигается при $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, т.е. вектор \mathbf{M} ориентирован в положительном или отрицательном направлении выделенной кристаллографической оси одноосного кристалла, которая называется в этом случае осью лёгкого намагничивания. Отметим, что оба состояния с $\theta = 0$ и $\theta = \pi$ имеют одинаковое значение свободной энергии и, следовательно, оба являются термодинамически устойчивыми.

Во втором случае, когда $\beta_{\perp} < \beta_{\parallel}$, выражение (10.5) преобразуем к виду

$$U_{ан} = \beta_{\perp} M^2 / 2 + (\beta_{\parallel} - \beta_{\perp}) M^2 \cos^2 \theta / 2. \quad (10.8)$$

Нетрудно видеть, что минимум (10.8) достигается при $\theta = \pi/2$, т.е. вектор \mathbf{M} лежит в плоскости, ортогональной выделенной кристаллографической оси. Эта плоскость в таких кристаллах называется плоскостью лёгкого намагничивания.

Ниже рассматривается только случай одноосных кристаллов с осью лёгкого намагничивания. Пусть теперь напряжённость магнитного поля отлична от нуля. Для выяснения вопроса как направлен вектор \mathbf{M} , необходимо исследовать на минимум выражение

$$\Delta \tilde{F} = \beta M^2 \sin^2 \theta / 2 - \mathbf{M}\mathbf{H}, \quad (10.9)$$

где, по-прежнему, угол θ отсчитывается от оси лёгкого намагничивания. Кроме этой оси имеется ещё одно выделенное направление вектора \mathbf{H} . Так как оси x и y в одноосном кристалле не связаны с кристаллографическими направлениями, то всегда можно, например, выбрать ось x так, чтобы вектор \mathbf{H} лежал в плоскости xz . Тогда имеем

$$\mathbf{M}\mathbf{H} = M(H_x \sin \theta \cos \varphi + H_z \cos \theta), \quad (10.10)$$

причём, так как направление \mathbf{H} фиксировано, то направления осей x и z можно выбрать так, что $H_x > 0$ и $H_z > 0$. Итак, необходимо искать минимум $\Delta \tilde{F}$ по углам θ и φ , характеризующим положение вектора \mathbf{M} . Нетрудно видеть, что минимум по углу φ достигается при $\cos \varphi = 1$, так как выражение (10.10) входит в (10.9) со знаком минус. Осталось найти минимум выражения

$$\beta M^2 \sin^2 \theta / 2 - M(H_x \sin \theta + H_z \cos \theta) \quad (10.11)$$

по углу θ . Рассмотрим некоторые частные случаи. Предположим, что $H_z = 0$, т.е. \mathbf{H} лежит в плоскости, ортогональной оси лёгкого намагничивания $H_x = H$. Тогда (10.11) принимает вид

$$\beta M^2 \sin^2 \theta / 2 - MH \sin \theta. \quad (10.12)$$

Отсюда следует, что при

$$H < \beta M \quad (10.13)$$

минимум выражения (10.12) достигается при

$$\sin\theta = H/\beta M. \quad (10.14)$$

Уравнению (10.14) удовлетворяют два значения угла: θ_m и $\pi - \theta_m$. Следовательно, при включении магнитного поля магнитный момент \mathbf{M} начинает отклоняться от оси лёгкого намагничивания и, пока $H < \beta M$, имеется два устойчивых состояния с одинаковой энергией, но разной ориентацией \mathbf{M} . При $H = \beta M$ имеем $\theta_m = \pi/2$, и устойчивым является одно состояние, в котором магнитный момент направлен по линиям напряжённости поля. Нетрудно видеть, что при $H > \beta M$ вектор \mathbf{M} также будет направлен по вектору \mathbf{H} . Другими словами, величина βM играет роль критического значения для напряжённости магнитного поля H , ниже которого в ферромагнетике устойчивыми являются два состояния с различными направлениями намагниченности, а выше - только одно.

Исследуем теперь другой частный случай, когда $H_x = 0$, $H_z = H$, т.е. случай, когда линии напряжённости поля направлены по оси лёгкого намагничивания. Выражение (10.11) при этом принимает вид

$$\beta M^2 \sin^2 \theta/2 - MH \cos \theta. \quad (10.15)$$

Проделав несложные преобразования и опустив слагаемое, не зависящее от угла θ , из (10.15) получаем следующее выражение

$$- \beta M^2 (\cos \theta + H/\beta M)^2/2. \quad (10.16)$$

Как функция $\cos \theta$ выражение (10.16) представляет собой перевернутую параболу. Если $H < \beta M$, то имеется два минимума при $\cos \theta = \pm 1$, причём энергия состояния, отвечающего значению $\theta = 0$, меньше, чем состояния с $\theta = \pi$. При $H > \beta M$ выражение (10.16) имеет один минимум при $\theta = 0$, т.е. устойчиво только состояние с вектором \mathbf{M} , направленным по \mathbf{H} .

Аналогичное исследование можно провести в общем случае, когда одновременно не равны нулю величины H_x и H_z . При этом оказывается, что существуют критические значения величины магнитного поля H_{kp} такие, что если $H < H_{kp}$, то устойчивыми являются два состояния с различными направлениями \mathbf{M} , а при $H > H_{kp}$ устойчиво только одно состояние. Уравнение кривой, определяющее критическое значение поля, получается из общего выражения (10.11) и имеет вид

$$H_{xkp}^{2/3} + H_{zkp}^{2/3} = (\beta M)^{2/3}. \quad (10.17)$$

В рассмотренных частных случаях были найдены точки $H_{xkp} = \beta M$ при $H_z = 0$ и $H_{zkp} = \beta M$ при $H_x = 0$.

Доменная структура ферромагнетика. Как следует из полученных результатов, при $H < H_{kp}$ возможны два устойчивых состояния с различными направлениями намагниченности \mathbf{M} . В том случае, когда линии напряжённости магнитного поля ортогональны оси лёгкого намагничивания, энергия этих состояний одинакова, при других направлениях \mathbf{H} -

различна. Отсюда вытекает возможность появления доменной структуры ферромагнетика, т.е. разбиения его на макроскопические области, отличающиеся друг от друга ориентацией вектора \mathbf{M} .

Рассмотрим доменную структуру ферромагнетика для случая, когда напряжённость внешнего магнитного поля равна нулю. Отсутствие внешнего поля означает равенство нулю плотности тока в уравнении Максвелла (8.1). В случае ферромагнетика наличие спонтанной намагниченности \mathbf{M} приводит к появлению магнитного поля и при $\mathbf{j} = 0$. Для нахождения напряжённости магнитного поля, используя соотношение $\mathbf{B} = \mathbf{H} + 4\pi\mathbf{M}$, перепишем уравнение (8.2) в виде

$$\operatorname{div}\mathbf{H} = -4\pi\operatorname{div}\mathbf{M}. \quad (10.18)$$

Модуль вектора \mathbf{M} определяется обменными силами, а его направление - энергией анизотропии. Вводя формально плотность эквивалентных зарядов

$$\rho_3 = -\operatorname{div}\mathbf{M}, \quad (10.19)$$

для определения напряжённости магнитного поля, создаваемого ферромагнетиком, имеем уравнения, аналогичные уравнениям электростатики:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 4\pi\rho_3. \quad (10.20)$$

В однородном веществе дивергенция \mathbf{M} отлична от нуля там, где есть скачок намагниченности, т.е. на границах между доменами и на границе ферромагнетика. Это означает, что на этих поверхностях имеется поверхностная плотность эквивалентных зарядов σ_3 . Рассмотрим, например, границу ферромагнетика. Вне ферромагнетика $\mathbf{M} = 0$, а внутри $\mathbf{M} = \text{const}$, следовательно, $\rho_3 = 0$. При микроскопическом подходе, когда вместо резкой границы имеется переходная область, внутри неё величина ρ_3 отлична от нуля. Так же как и в лекции 2 при выводе граничных условий, введём σ_3 соотношением

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int \rho_3 dV = \int \sigma_3 dS, \quad (10.21)$$

где интегрирование ведется по физически бесконечно малому цилиндру с площадью основания ΔS и высотой δ , равной толщине переходной области. Предел $\delta \rightarrow 0$ означает переход к геометрической границе раздела, в результате чего заряд, сосредоточенный внутри переходной области, необходимо считать расположенным на поверхности раздела. Подставляя (10.19) в (10.21), получаем

$$\sigma_3 = M_n, \quad (10.22)$$

где M_n - проекция вектора \mathbf{M} на внешнюю нормаль к поверхности ферромагнетика. Аналогично, на границе раздела между доменами 1 и 2 имеем

$$\sigma_3 = M_{1n} - M_{2n}, \quad (10.23)$$

причём нормаль направлена из домена 1 в 2. Рассмотрим для примера однодоменный ферромагнетик в форме прямоугольного параллелепипеда, у которого направление вектора \mathbf{M} параллельно боковым граням. Тогда на этих гранях $\sigma_s = 0$, а на торцах плотность поверхностных зарядов σ_s имеет противоположные знаки ($+M$ на одном и $-M$ на другом). Следовательно, такой образец эквивалентен диполью - это есть постоянный магнит с двумя полюсами.

Обсудим теперь, почему ферромагнетик разбивается на домены. Здесь определяющим фактором является конкуренция двух эффектов: выигрыша в обменной энергии при переходе всего образца в ферромагнитное состояние и проигрыша, связанного с увеличением энергии системы из-за возникающего при этом магнитного поля. Обратимся для примера к рассмотренному выше образцу в форме параллелепипеда. Если он не разбит на домены, то энергия созданного им поля может превысить выигрыш в энергии за счёт перехода в ферромагнитное состояние. Предположим теперь, что образец разбился на плоскопараллельные слои толщиной d , параллельные одной из боковых граней, так что направления вектора \mathbf{M} в соседних слоях противоположны. В этом случае возможен частичный проигрыш в обменной энергии из-за того, что на границе между доменами магнитные моменты (спины электронов) не параллельны друг другу. Однако при этом энергия магнитного поля может быть существенно уменьшена, так как теперь σ_s на каждом торце имеет чередующиеся знаки в местах выхода различных доменов к поверхности ферромагнетика. Следовательно, для выяснения вопроса о том, будут ли возникать домены в данном образце и какого размера, необходимо найти энергию магнитного поля и энергию, связанную с образованием границ раздела между доменами, - поверхностную энергию (проигрыш в обменной энергии из-за того, что по разные стороны от границы вектор \mathbf{M} имеет разные направления).

Оценим, например, толщину домена d в рассмотренном выше случае. Пусть L_3 длина ребра образца в направлении оси лёгкого намагничивания, а L_1 и L_2 длины двух других ребер параллелепипеда. Для определённости считаем, что границы, между возникающими доменами параллельны граням образца с длинами рёбер L_2 и L_3 . Число таких границ порядка L_1/d , где d - толщина слоя домена. С каждой из таких границ связана поверхностная энергия

$$U_n = \gamma M^2 L_2 L_3, \quad (10.24)$$

где γM^2 - энергия единицы площади поверхности раздела, а γ некоторая постоянная. Следовательно, полная энергия, связанная с образованием границ раздела между доменами, имеет порядок величины

$$\gamma M^2 L_1 L_2 L_3 / d. \quad (10.25)$$

Оценим энергию возникающего магнитного поля. В изложенном подходе поле создается заряженными плоскостями торцов, площадь каждого из которых равна L_1L_2 . Из решения задачи для бесконечной плоскости следует, что энергия магнитного поля, отнесённая к площади заряженной поверхности, может быть записана в виде

$$kdM^2, \quad (10.26)$$

где k - числовой множитель. Умножая (10.26) на площадь заряженной поверхности и добавляя поверхностную энергию (10.25), получаем выражение

$$\gamma M^2 L_1 L_2 L_3 / d + kdM^2 L_1 L_2, \quad (10.27)$$

которое следует рассматривать как функцию толщины домена d . Минимум этой функции и определяет равновесное значение величины d . В данном примере толщина домена пропорциональна корню квадратному из длины ферромагнетика в направлении оси лёгкого намагничивания: $d \sim \sqrt{L_3}$.

Рассмотрим подробнее границу раздела между доменами. В предыдущих рассуждениях предполагалось, что она параллельна оси лёгкого намагничивания. Действительно, такое направление энергетически самое выгодное, так как при этом значение σ_s на такой границе равно нулю (см. (10.23)) и, следовательно, нет источников для возникновения магнитного поля. При микроскопическом подходе поверхность раздела представляет собой слой некоторой толщины l . Пусть ось z совпадает с направлением оси лёгкого намагничивания, а ось x ортогональна плоскости раздела между доменами. Тогда при движении вдоль оси x вектор \mathbf{M} меняет свое направление от $M_z = M$ ($M_x = M_y = 0$) в одном домене до $M_z = -M$ в другом, т.е. \mathbf{M} зависит от x . Энергетически выгодно, чтобы объёмная плотность эквивалентных зарядов в переходном слое была равна нулю:

$$\rho_s = -\operatorname{div}\mathbf{M} = -\frac{\partial M_x}{\partial x} = 0. \quad (10.28)$$

Из (10.28) следует, что изменение направления \mathbf{M} совершается так, что $M_x = \text{const}$. Вдали от границы раздела $M_x = 0$, следовательно, изменение направления \mathbf{M} при переходе от одного домена к другому совершается поворотом вектора \mathbf{M} в плоскости, параллельной границе раздела. Вопрос о толщине переходного слоя l можно решить, вводя энергию неоднородности U_n , связанную с зависимостью \mathbf{M} от x в переходном слое l , и сравнивая её с энергией анизотропии. Энергия неоднородности учитывает силы, стремящиеся увеличить l , т.е. сделать зависимость \mathbf{M} от величины x более плавной, чтобы был меньше проигрыш в обменной энергии, связанный с изменением направления соседних спинов. Силы, учитываемые энергией анизотропии, стремятся уменьшить l , так как эта энергия увеличивается при любом отклонении от оси лёгкого намагничивания, поэтому для них выгоднее, чтобы соседние атомы сразу приняли противоположную ориентацию спинов. В результа-

те получается конечная толщина переходного слоя, порядок которой, как это следует из более подробного рассмотрения, равен $(\hbar c/e^2)a$, где a - боровский радиус.

Сверхпроводимость. Эффект Мейсснера. Сверхпроводимость, открытая в начале прошлого века, получила своё название по одному из проявлений того особого состояния, в которое переходят многие металлы при достаточно низких температурах, - отсутствию сопротивления протеканию постоянного тока. Температура, при которой вещество переходит в такое сверхпроводящее состояние, называется критической температурой T_c .

Для всех известных в настоящее время сверхпроводников критическая температура мала по сравнению с комнатной. Среди элементов наибольшее значение критической температуры имеет ниобий: $T_c \approx 9,2$ К. В сверхпроводящих сплавах (соединениях) критическая температура достигает значения порядка 150 К.

Обратим внимание, что установки, использующие сверхпроводники, уже нашли практическое применение в науке и технике, несмотря на то, что для поддержания сверхпроводящего состояния вещества его необходимо охлаждать, по крайней мере, жидким азотом.

Отметим, что физики-теоретики указывали на возможность существования сверхпроводимости и при комнатной температуре. Однако в настоящее время теория не может указать критическую температуру конкретного вещества, ее изменение при изменении состава сплава, его кристаллической структуры. Можно сказать, что есть теория сверхпроводимости, объясняющая физическую сущность явления, но нет теории сверхпроводников.

В данной главе рассматривается только феноменологическая теория сверхпроводимости, задачей которой является получение различных соотношений, граничных условий, позволяющих решать электродинамические задачи при наличии сверхпроводников.

Напомним, что при помещении проводника во внешнее стационарное электрическое поле свободные заряды располагаются на его поверхности так, что поле внутри проводника равно нулю:

$$\mathbf{E}^{(i)} = 0. \quad (10.29)$$

Для сверхпроводника это условие остается справедливым и для поля постоянного тока. Действительно, в проводнике в стационарном поле на электроны проводимости действуют сила со стороны электрического поля и сила трения (сопротивление), которые уравнивают друг друга. В сверхпроводнике силы трения нет, поэтому, чтобы картина была стационарной, необходимо также и отсутствие электрического поля внутри сверхпроводника. Условие (10.29) позволяет решать задачи для стационарных электрических полей при наличии сверхпроводников. В частности, из непрерывности тангенциальных компо-

нент напряжённости электрического поля и условия (10.29) следует, что на поверхности сверхпроводника

$$\mathbf{E}_t|_S = 0, \quad (10.30)$$

т.е. линии напряжённости электрического поля ортогональны поверхности сверхпроводника.

Обратимся теперь к стационарному магнитному полю. В 30-х годах прошлого века экспериментально было установлено, что магнитное поле не проникает внутрь сверхпроводника:

$$\mathbf{B}^{(i)} = 0. \quad (10.31)$$

Этот экспериментальный результат называется эффектом Мейсснера. Отметим, что при этом внутри сверхпроводника средний микроскопический ток равен нулю и, следовательно, плотность магнитного момента сверхпроводника также равна нулю, а потому и введённая в лекции 1 напряжённость магнитного поля равна нулю:

$$\mathbf{H}^{(i)} = 0. \quad (10.32)$$

Таким образом, в сверхпроводнике могут существовать только поверхностные токи, определяемые из граничного условия (2.3), которое с учётом (10.32) приводит к следующему выражению для плотности поверхностного тока

$$\mathbf{i} = \frac{c}{4\pi} [\mathbf{n}, \mathbf{H}^{(e)}] |_S, \quad (10.33)$$

где \mathbf{n} - единичный вектор внешней нормали к поверхности сверхпроводника, $\mathbf{H}^{(e)}$ напряжённость магнитного поля вне сверхпроводника. Именно эти поверхностные токи экранируют внешнее магнитное поле, не давая ему возможности проникнуть внутрь сверхпроводника.

В действительности токи текут в некотором поверхностном слое, толщина которого зависит от свойств и термодинамического состояния сверхпроводника и обычно имеет порядок 10^{-5} см. Именно на такую глубину проникает магнитное поле внутрь сверхпроводника. Для теоретического описания эффекта Мейсснера и расчёта глубины проникновения поля необходимо привлекать представления микроскопической теории.

Из непрерывности нормальных компонент магнитной индукции и условия (10.31) следует, что

$$B_n^{(e)} |_S = 0. \quad (10.34)$$

Считая, что вне сверхпроводника находится вещество, магнитными свойствами которого можно пренебречь, т.е. положить $\mu = 1$, имеем из (10.34)

$$H_n^{(e)} |_S = 0. \quad (10.35)$$

Итак, при наличии сверхпроводника для отыскания стационарного магнитного поля необходимо решить задачу только в области вне сверхпроводника. Отметим, что условие (10.35) позволяет однозначно найти $\mathbf{H}^{(e)}$ из соответствующих уравнений. Соотношение (10.33) используется затем для вычисления плотности поверхностных токов.

Обратим внимание, что у некоторых сверхпроводящих сплавов (соединений) эффект Мейсснера отсутствует - магнитное поле проникает внутрь сверхпроводника. Такие сверхпроводники называются сверхпроводниками II рода. В дальнейшем везде будет идти речь только о сверхпроводниках I рода - с эффектом Мейсснера.

Рассмотрим несколько простых примеров нахождения стационарного магнитного поля при наличии сверхпроводников.

1. Сверхпроводящий шар радиуса R помещён во внешнее однородное поле \mathbf{H} . В этом случае магнитное поле $\mathbf{H}^{(e)} = \mathbf{H}$ отличается от \mathbf{H} и удовлетворяет уравнениям

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \quad (10.36)$$

с граничными условиями

$$H_n|_R = 0, \quad \mathbf{H}(r \rightarrow \infty) = \mathbf{H}. \quad (10.37)$$

Вводя скалярный потенциал φ соотношением

$$\mathbf{H} = -\operatorname{grad}\varphi, \quad (10.38)$$

из (10.36) приходим к уравнению

$$\Delta\varphi = 0 \quad (10.39)$$

с граничными условиями, следующими из (10.37):

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}|_R = 0, \quad (10.40)$$

$$\varphi(r \rightarrow \infty) = -(\mathbf{r}, \mathbf{H}). \quad (10.41)$$

Решение уравнения (10.39) ищем в виде

$$\varphi(\mathbf{r}) = -(\mathbf{r}, \mathbf{H}) + A \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{H})}{r^3}, \quad (10.42)$$

где постоянная A определяется из условия (10.40) и равна

$$A = -R^3/2. \quad (10.43)$$

Величина

$$\mathbf{M} = A\mathbf{H} = -R^3\mathbf{H}/2 \quad (10.44)$$

имеет физический смысл магнитного момента сверхпроводящего шара. В этом можно непосредственно убедиться, вычисляя магнитный момент, создаваемый в шаре поверхностными токами, возникающими под влиянием внешнего поля. Для этого нужно сначала вычислить значение \mathbf{H} на поверхности шара. Используя (10.38) и (10.42) с учётом (10.43), получаем

$$\mathbf{H}_R = [\mathbf{n}, [\mathbf{H}, \mathbf{n}]]/2, \quad (10.45)$$

где \mathbf{n} - единичный вектор внешней нормали шара. Подставляя (10.45) в (10.33), получаем распределение поверхностных токов:

$$\mathbf{i} = \frac{3c}{8\pi} [\mathbf{n}, \mathbf{H}]. \quad (10.46)$$

Вводя угол θ между физически выделенным направлением \mathbf{H} и вектором \mathbf{n} , из выражения (10.46) получаем, что модуль плотности поверхностного тока i не зависит от угла в плоскости, ортогональной \mathbf{H} . Следовательно, кольцо на поверхности шара, занимающее область в интервале углов от θ до $\theta + d\theta$, можно рассматривать как замкнутый виток линейного тока $dI = iRd\theta$. Так как площадь, охваченная таким кольцом, равна $S = \pi R^2 \sin^2\theta$, то для вклада dM в магнитный момент шара от такого кольца имеем:

$$dM = dIS/c = 3R^3 H \sin^3\theta d\theta/8.$$

Интегрируя это выражение по углу θ от 0 до π , получаем

$$M = R^3 H /2.$$

Направление магнитного момента противоположно вектору \mathbf{H} в соответствии с формулой (10.44).

Обратим особое внимание на направление магнитного момента сверхпроводника. Как и у диамагнетика, магнитный момент сверхпроводника всегда направлен против индуцировавшего его поля. В связи с этим сверхпроводник иногда называют аномальным диамагнетиком.

2. Магнитный диполь μ , расположен над поверхностью массивного сверхпроводника. Магнитный диполь представим в виде совокупности двух фиктивных магнитных зарядов $\pm m$. Вместо задачи о вычислении поля, создаваемого диполем, рассмотрим задачу о вычислении поля, создаваемого одним зарядом m , расположенным на высоте a над плоской поверхностью сверхпроводника, занимающего полупространство $z < 0$. Решение уравнения Лапласа (10.39) для скалярного потенциала φ ищем в виде

$$\varphi(x, y, z) = \frac{m}{\sqrt{(z-a)^2 + \rho^2}} + \frac{m'}{\sqrt{(z+a)^2 + \rho^2}}.$$

Здесь $\rho^2 = x^2 + y^2$, m' - константа, значение которой находится из граничного условия

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0,$$

что даёт $m' = m$. Этот результат показывает, что магнитный заряд любого знака отталкивается сверхпроводящей поверхностью. Следовательно, и магнитный диполь (постоянный

магнит) также будет отталкиваться сверхпроводящей поверхностью. Поэтому, если взять достаточно маленький магнит, чтобы его сила тяжести могла уравновеситься силой отталкивания, то он будет висеть над поверхностью сверхпроводника.

3. Сверхпроводящий цилиндр помещён во внешнее однородное поле \mathbf{H} , параллельное его оси. Пусть поперечные размеры цилиндра (не обязательно кругового) достаточно малы по сравнению с его длиной l . Тогда, пренебрегая влиянием торцов, получаем, что напряженность магнитного поля вне сверхпроводника совпадает с \mathbf{H} :

$$\mathbf{H}^{(e)} = \mathbf{H}, \quad (10.47)$$

так как граничное условие (10.35) удовлетворено на всей боковой поверхности. Найдём магнитный момент \mathbf{M} этого цилиндра. Как уже отмечалось, величина \mathbf{M} определяется поверхностными токами, распределение которых даётся выражением (10.33). Подставляя в (10.33) результат (10.47), имеем

$$\mathbf{i} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{n}, \mathbf{H}], \quad (10.48)$$

откуда следует, что в каждой точке боковой поверхности цилиндра токи текут по касательной, перпендикулярной образующей, и представляют собой замкнутые витки. Сквозь элемент длины dl , взятый на поверхности цилиндра вдоль образующей, протекает ток

$$dI = i dl,$$

где, согласно (10.48),

$$i = \frac{cH}{4\pi}.$$

Такой плоский виток с током dI обладает магнитным моментом

$$dM = dIS/c = H S dl/4\pi, \quad (10.49)$$

где S - площадь витка, равная площади поперечного сечения цилиндра. Выполняя в (10.49) интегрирование по длине с учётом того, что величины S и H постоянны, получаем

$$M = VH/4\pi,$$

где $V = Sl$ - объём цилиндра. Учитывая, что направление магнитного момента противоположно вектору \mathbf{H} , имеем окончательно

$$\mathbf{M} = - VH/4\pi. \quad (10.50)$$

4. В разобранных выше примерах рассматривались односвязные сверхпроводники. Их отличительной чертой является то, что полный поверхностный ток, протекающий через поперечное сечение такого сверхпроводника, равен нулю. Для многосвязных сверхпроводников полный ток, протекающий через некоторое сечение тела, может быть отличен от нуля. Этот факт очень существен, так как циркуляция \mathbf{H} по контуру пропорциональна полному току, протекающему через поверхность, натянутую на этот контур:

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (10.51)$$

В качестве примера рассмотрим сверхпроводник в форме тора - сверхпроводящее кольцо. Пусть каким-то образом в нём был возбуждён ток I - полный ток, протекающий через поперечное сечение кольца (рис. 5). Напомним, что ток I является поверхностным током. Спрашивается: какое магнитное поле \mathbf{H} создаёт такое кольцо с током в окружающем пространстве? При использовании скалярного потенциала φ (10.38) для вычисления \mathbf{H} следует иметь в виду следующее обстоятельство. Если в случае односвязных проводников потенциал был однозначной функцией точки наблюдения, то в рассматриваемом примере при $I \neq 0$ он не может быть однозначным.

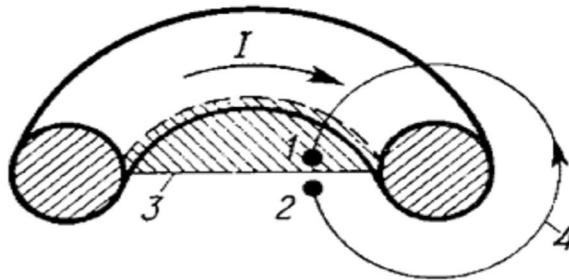


Рис. 5. Схематическое изображение сверхпроводящего кольца с током: 1 и 2 – точки на контуре интегрирования 4; 3 – плёнка, закрывающая отверстие кольца.

Действительно, рассмотрим следующий интеграл по контуру 4, охватывающему кольцо (рис. 5):

$$\int_2^1 \mathbf{H} d\mathbf{l} = - \int_2^1 \text{grad} \varphi d\mathbf{l} = \varphi_2 - \varphi_1. \quad (10.52)$$

Пусть теперь точки 1 и 2 совпадают. Если φ однозначная функция точки, то из (10.52) следует, что

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = 0,$$

что противоречит (10.51) при $I \neq 0$. Для однозначности φ необходимо, как говорят математики, провести «разрез плоскости». В данном примере это сводится к следующему. Считаем отверстие в кольце как бы закрытым некоторой бесконечно тонкой плёнкой, поверхность которой мы не должны пересекать ни при каких перемещениях. Теперь при вычислении интеграла (10.52) надо считать, что точка 2 принадлежит нижней поверхности плёнки, а точка 1 - верхней, т.е. они разделены бесконечно малым промежутком (лежат на разных «берегах разреза»). Тогда, с одной стороны, рассматриваемый контур отличается от замкнутого на бесконечно малую величину, и вследствие непрерывности \mathbf{H} имеем

$$\int_2^1 \mathbf{H} d\mathbf{l} \approx \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I. \quad (10.53)$$

С другой стороны, сравнивая (10.53) с (10.52), видим, что на поверхности этой плёнки (разреза) потенциал испытывает скачок

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{4\pi}{c} I. \quad (10.54)$$

Выражение (10.54) представляет собой граничное условие, дополнительное к условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_S = 0, \quad (10.55)$$

которое должно выполняться на поверхности сверхпроводящего кольца. Порядок нумерации 1 и 2 выбирается по правилу винта так, что при вращении его по направлению I он движется от точки 1 к точке 2.

Рассмотрим магнитный поток сквозь площадь, ограниченную кольцом,

$$\Phi_I = \int \mathbf{H} d\mathbf{S}, \quad (10.56)$$

где индекс I означает, что речь идет о потоке, связанном с током I . Этот поток зависит от геометрии кольца и тока. Зависимость Φ_I от тока легко установить. Действительно, уравнения (10.36) для определения \mathbf{H} и граничное условие (10.35) линейны и однородны (напомним, что при удалении от кольца $\mathbf{H} \rightarrow 0$). Поэтому, как следует из (10.51), \mathbf{H} зависит от тока линейно. Следовательно, Φ_I также линейно зависит от тока I . Обычно связь магнитного потока Φ_I с током I записывают в виде

$$\Phi_I = \frac{1}{c} LI, \quad (10.57)$$

где L - самоиндукция. Так же как и для линейных проводников, в данном случае энергия магнитного поля выражается через L и I следующим образом:

$$\frac{1}{8\pi} \int \mathbf{H}^2 dV = \frac{LI^2}{2c^2}.$$

Если сверхпроводящее кольцо с током находится во внешнем магнитном поле, то магнитный поток сквозь площадь, охваченную кольцом, можно записать в виде суммы:

$$\Phi = \Phi_e + \frac{1}{c} LI, \quad (10.58)$$

где Φ_e - магнитный поток от внешнего магнитного поля. Обратим внимание, что при помещении сверхпроводящего кольца с током во внешнее магнитное поле сила тока в нем изменяется так, что магнитный поток Φ остается неизменным. Постоянство Φ вытекает из уравнения Максвелла

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t},$$

которое после интегрирования по поверхности, охваченной кольцом, приводит к соотношению

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \oint \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (10.59)$$

Так как контур интегрирования лежит на поверхности сверхпроводника, то правая часть (10.59) равна нулю вследствие (10.30). Постоянство потока можно интерпретировать следующим образом. Поток Φ определяется числом линий напряжённости магнитного поля, проходящих сквозь данную площадь. Изменить поток - значит вывести (или ввести) линии \mathbf{H} из пространства, ограниченного кольцом. Так как линии \mathbf{H} либо замкнуты, либо уходят на бесконечность, то при такой операции необходимо пересечь сверхпроводящую область, куда поле проникнуть не может. Следовательно, линии \mathbf{H} нельзя вывести из сверхпроводящего кольца, которое является, таким образом, «арканом» для магнитных силовых линий. Обратим внимание, что если существует элементарный магнитный заряд - монополь Дирака, то магнитный поток сохраняться не будет. Этот факт используют экспериментаторы для поиска гипотетического магнитного заряда.

Отметим, что микроскопический подход к явлению сверхпроводимости приводит к квантованию магнитного потока сквозь сверхпроводящее кольцо:

$$\Phi = n\Phi_0. \quad (10.60)$$

Здесь n - целое число, а

$$\Phi_0 = 2\pi\hbar c / (2e) \quad (10.61)$$

- квант потока (флюксон), \hbar - постоянная Планка, e - заряд электрона, $2e$ - заряд куперовой пары, в которую связываются электроны в сверхпроводящем состоянии. Для аккуратного получения выражений (10.60), (10.61) требуется привлечь представление о волновой функции всех электронов в сверхпроводящем состоянии. Следующие нестрогие рассуждения позволяют понять эффект квантования магнитного потока в рассматриваемом примере. Классическое финитное движение квантуется по правилу Бора - Зоммерфельда. При движении частицы с зарядом $2e$ и массой $2m$ (куперовской пары) в магнитном поле с векторным потенциалом A условия квантования имеют вид

$$\oint (2mv_s + 2eA/c) d\mathbf{l} = 2\pi\hbar,$$

где v_s - скорость движения пары. Так как внутри сверхпроводника сверхпроводящий ток отсутствует ($v_s = 0$, ток существует только в поверхностном слое) и магнитного поля нет, то, смещая контур интегрирования в глубь сверхпроводника и используя теорему Стокса, получаем

$$2e\Phi/c = 2\pi n\hbar,$$

что эквивалентно (10.60), (10.61).

В заключение укажем способ возбуждения тока в сверхпроводящем кольце. Кольцо в нормальном состоянии при $T > T_c$ помещают во внешнее магнитное поле и затем охлаждают до перехода в сверхпроводящее состояние. В результате возникает определённый магнитный поток сквозь поверхность, охваченную кольцом. Затем внешнее магнитное поле выключается и в кольце возбуждается ток, обеспечивающий постоянство магнитного потока.