Профессор Ермаченко В.М. и профессор Евсеев И.В.

Лекция 1.

Система уравнений Максвелла в веществе для медленноменяющихся полей.

В этом курсе рассмотрены некоторые вопросы макроскопической электродинамики. В отличие от других разделов теоретической физики излагаемая здесь теория является феноменологической. Поясним сказанное на примере. Предположим, что требуется рассчитать поле, создаваемое заряженными пластинами конденсатора. Для этого надо было бы написать уравнения для электромагнитных полей, создаваемых отдельными движущимися зарядами - электронами и ядрами, из которых состоят пластины. К ним нужно еще добавить квантово-механические уравнения движения для микрочастиц. Решение совокупности этих уравнений и дает ответ на поставленную задачу. Такой подход называют микроскопическим, так как он учитывает процессы атомного масштаба. Ясно, что в данном случае микроскопический подход чересчур сложен и не нужен. Разумнее сформулировать общие уравнения для электромагнитного поля в присутствии проводников и решать их для данной конкретной системы. Сформулированные таким образом уравнения и являются феноменологическими. Электромагнитное поле, удовлетворяющее феноменологическим уравнениям, называется макроскопическим.

С современной точки зрения основные уравнения феноменологической теории занимают промежуточное положение между фундаментальными законами физики и результатами, описывающими данное конкретное явление. Из этого можно сделать два вывода. Во-первых, феноменологическая теория не содержит принципиально новых постулатов и основана на фундаментальных микроскопических законах. Во-вторых, написание феноменологических уравнений не является однозначным. Могут быть выбраны различные системы уравнений, занимающие различные положения между фундаментальными микроскопическими законами и результатами решения конкретных задач.

Основными микроскопическими законами, на которые опирается феноменологическая теория электромагнитных явлений в веществе, являются микроскопические уравнения электромагнитного поля, уравнения квантовой механики, описывающие движение отдельных микрочастиц во внешних полях, и законы статистической физики, определяющие поведение ансамбля частиц. Феноменологический подход к этим явлениям состоит в макроскопическом описании вещества, в котором оно рассматривается как сплошная среда.

Такое рассмотрение обосновано, если макроскопическое электромагнитное поле существенно меняется на расстояниях, значительно превышающих расстояния между атомами.

Например, поле, создаваемое заряженным телом, вследствие медленного (степенного) его убывания на макроскопическом расстоянии от этого тела есть сумма полей, создаваемых многими атомами. Так как расстояния между соседними атомами малы по сравнению с расстоянием до точки наблюдения, то разница в положении атомов малосущественна, и тело можно рассматривать как сплошную среду.

Формальный переход к макроскопическому описанию можно осуществить путем усреднения положений атомов. Отметим, что такое же усреднение фактически используется в гидродинамике и теории упругости. Для того чтобы после усреднения тело представляло собой сплошную среду, размеры области, по которой проводится усреднение, должны быть велики по сравнению с межатомным расстоянием. С другой стороны, эти размеры должны быть малы по сравнению с расстояниями, на которых меняются макроскопические величины. Так возникает понятие физически бесконечно малого объема с размерами, удовлетворяющими указанным условиям.

Итак, задача состоит в усреднении микроскопических уравнений электромагнитного поля по физически бесконечно малому объему. Обозначим $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r},t)$ и $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r},t)$ напряженности микроскопических полей. Они удовлетворяют системе уравнений

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{h}}{\partial t}\ , \qquad (1.1)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{e} = 4\pi\rho\ , \qquad (1.2)$$

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{h} = \frac{4\pi}{c}\rho\boldsymbol{v} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{e}}{\partial t}\ , \qquad (1.3)$$

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{h} = 0\ , \qquad (1.4)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\rho\boldsymbol{v} = 0. \qquad (1.5)$$

Входящие в эти уравнения $\rho(\boldsymbol{r},t)$ и $\rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t)$ являются микроскопическими значениями плотностей заряда и тока и связаны с зарядами отдельных микрочастиц среды, как известно, следующим образом:

$$\rho(\boldsymbol{r},t) = \sum_{i,a} e_{ia}\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{\xi}_i(t))\,, \qquad (1.6)$$

$$\rho\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r},t) = \sum_{i,a} e_{ia}\dot{\boldsymbol{\xi}}_i\delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a - \boldsymbol{\xi}_i(t))\,, \qquad (1.7)$$

где a - номер атома (молекулы или элементарной ячейки в твёрдом теле); $\boldsymbol{\xi}_i(t)$ - радиус-вектор i-го заряда, отсчитываемый от центра соответствующего атома; $\boldsymbol{r}_a$ — радиус-вектор центра инерции атома; $\boldsymbol{r}$ - радиус-вектор точки наблюдения; $\dot{\boldsymbol{\xi}}_i = d\,\boldsymbol{\xi}_i(t)/dt$. Все эти микроскопические величины $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{r},t)$, $\boldsymbol{h}(\boldsymbol{r},t)$, $\rho(\boldsymbol{r},t)$ и $\rho\boldsymbol{v}$ испытывают существенные изменения при переходе от одного заряда к другому, т.е. на расстояниях порядка атомных размеров. Усреднение сглаживает резкие колебания значений этих величин, обусловленные микроструктурой вещества, и выявляет средний ход их зависимости от $\boldsymbol{r}$ и t, характерный для сплошной среды. Черта сверху над соответствующей микроскопической величиной означает ее среднее значение. Введем следующие основные обозначения:

$\boldsymbol{E} = \bar{\boldsymbol{e}}, \quad \boldsymbol{B} = \bar{\boldsymbol{h}}$.

Величина $\boldsymbol{E}$ называется напряженностью электрического поля в среде, а $\boldsymbol{B}$ - вектором магнитной индукции. Уравнения для них получаются усреднением основных микроскопических уравнений (1.1) - (1.5):

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \tag{1.8}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\bar{\rho}, \tag{1.9}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\overline{\rho v} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}, \tag{1.10}$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0, \tag{1.11}$$

$$\frac{\partial\bar{\rho}}{\partial t} + \mathrm{div}\,\overline{\rho v} = 0. \tag{1.12}$$

Проведённое усреднение имеет пока что символический характер, так как неизвестны средние значения плотностей заряда и тока. При «размазывании» отрицательных и положительных зарядов по физически бесконечно малому объему в большинстве случаев они компенсируют друг друга. Поэтому средняя плотность заряда, в отличие от микроскопической плотности, равна нулю. Однако, под действием макроскопических полей характер движения зарядов меняется, и средняя плотность зарядов становится отличной от нуля. Таким образом, средние плотности зарядов и токов зависят от существующих в теле полей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ и не могут быть заданы произвольно. Раскрытие этой зависимости и есть основная задача построения системы феноменологических уравнений.

Все заряды в веществе можно разделить на два класса (свободные и связанные):

$$\rho = \rho_{своб} + \rho_{связ}. \tag{1.13}$$

Свободными называют такие заряды, которые могут перемещаться в теле на макроскопические расстояния. В отличие от них связанные заряды локализованы около некоторых центров. Примером свободных зарядов могут служить электроны зоны проводимости в металле. Связанными электронами в металле являются электроны внутренних оболочек и ядра атомов. Разделение зарядов на два таких класса обусловлено их существенно разным поведением в медленноменяющихся полях.

Рассмотрим внутреннюю область электронейтрального непроводящего, т.е. не содержащего свободных зарядов, вещества. Усреднение плотности заряда в веществе означает усреднение выражения (1.6) по координатам $\boldsymbol{r}_a$ атомов. При этом разность $|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a|$ пробегает интервал значений порядка размера физически бесконечно малого объема. Следовательно, она в среднем значительно больше координат $|\boldsymbol{\xi}_i(t)|$, которые для связанных зарядов порядка атомных размеров:

$$|\boldsymbol{\xi}_i(t)| << |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a|. \tag{1.14}$$

Неравенство (1.14) позволяет разложить $\overline{\rho_{связ}(\boldsymbol{r})}$ по координатам $|\boldsymbol{\xi}_i(t)|$:

$$\overline{\rho_{связ}(\boldsymbol{r})} = \overline{\sum_{i,a} e_{ia}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)} - \mathrm{div}_r \overline{\sum_{i,a} e_{ia}\boldsymbol{\xi}_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)} . \tag{1.15}$$

Отметим, что в данном случае $\overline{\rho} = \overline{\rho_{связ}(\boldsymbol{r})}$. Так как среда электронейтральна, то первое слагаемое в сумме (1.15) равно нулю, а второе выражается через среднюю плотность дипольного момента:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}) = \overline{\sum_{i,a} e_{ia}\boldsymbol{\xi}_i\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)} . \tag{1.16}$$

Поэтому средняя плотность зарядов в этом случае

$$\overline{\rho_{связ}(\boldsymbol{r})} = -\mathrm{div}\boldsymbol{P}(\boldsymbol{r}). \tag{1.17}$$

Аналогично проведем усреднение выражения (1.7) для плотности тока и сделаем разложение по малому параметру (1.14). Так как в данном случае свободные заряды отсутствуют, то $\overline{\rho v}$ совпадает с плотностью тока связанных зарядов $\overline{\rho v_{связ}}$. Ограничиваясь первыми членами разложения, получаем

$$\overline{\rho v_{связ}} = \dot{\boldsymbol{P}} - \overline{\sum_{i,a} e_{ia}[\nabla_{\mathrm{r}}\boldsymbol{,}[\dot{\boldsymbol{\xi}}_i,\boldsymbol{\xi}_i]]\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)}/2 - \overline{\sum_{i,a} e_{ia}\{\dot{\boldsymbol{\xi}}_i(\boldsymbol{\xi}_i,\nabla_{\mathrm{r}})+\boldsymbol{\xi}_i(\dot{\boldsymbol{\xi}}_i,\nabla_{\mathrm{r}})\}\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_a)}/2 , \tag{1.18}$$

где

$$\dot{\boldsymbol{P}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} . \tag{1.19}$$

Третье слагаемое в правой части формулы (1.18) может быть записано в виде аналогичном (1.19), с той лишь разницей, что плотность дипольного момента заменится на плотность квадрупольного момента. Таким образом, оба эти члена в усреднённой плотности тока имеют одну и ту же физическую природу. Однако квадрупольный член содержит дополнительную степень малой величины - отношения атомных размеров к расстоянию, на котором меняется напряженность поля. Следовательно, квадрупольная поляризация среды мала, поэтому последним слагаемым в правой части (1.18) можно пренебречь. Второе слагаемое формулы (1.18) выражается через среднюю плотность магнитного момента вещества:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}) = \overline{\sum_{i,a} \mu_{ia} \delta(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_a)}\ , \qquad (1.20)$$

где $\boldsymbol{\mu}_{ia} = (e_{ia}/2c)[\boldsymbol{\xi}_i, \dot{\boldsymbol{\xi}}_i]$ - магнитный момент, связанный с движением отдельного заряда в атоме.

С учетом вышесказанного выражение (1.18) принимает вид

$$\overline{\rho v_{связ}} = \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + c\,\mathrm{rot}\boldsymbol{M}\ . \qquad (1.21)$$

Отметим, что значения $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{M}$ сами зависят от $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{B}$ (см. также лекцию 2).

Перейдем теперь к проводникам, т.е. к веществам, в которых наряду со связанными зарядами имеются и свободные. Основная особенность проводников заключатся в том, что под действием приложенного поля в них возникает макроскопическое движение свободных зарядов, т.е. электрический ток. Этот ток называется током проводимости. Среднюю плотность тока проводимости обозначим $\boldsymbol{j}$:

$$\boldsymbol{j} = \overline{\rho v_{своб}}\ .$$

С учетом связанных зарядов полное выражение для средней плотности микроскопического тока может быть записано в виде

$$\overline{\rho v} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + c\,\mathrm{rot}\boldsymbol{M}. \qquad (1.22)$$

При написании аналогичной формулы для плотности зарядов следует учесть, что электронейтральность тела обеспечивается теперь совокупностью, как свободных, так и связанных зарядов, поэтому первое слагаемое в правой части выражения (1.15) для проводников отлично от нуля. Обозначим его $\overline{\rho^{(0)}{}_{связ}}$ и запишем среднюю плотность микроскопических зарядов в виде

$$\overline{\rho} = \rho - \mathrm{div}\boldsymbol{P}, \qquad (1.23)$$

где

$$\rho = \overline{\rho_{своб}(\boldsymbol{r})} + \overline{\rho^{(0)}{}_{связ}(\boldsymbol{r})}\ .$$

Покажем, что ρ и $\boldsymbol{j}$ удовлетворяют уравнению непрерывности. В самом деле, подставляя (1.23) и (1.22) в уравнение непрерывности для средних плотностей заряда и тока (1.12), получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}\boldsymbol{j} = 0. \qquad (1.24)$$

Подставим выражения (1.23) и (1.22) в уравнение (1.9) и (1.10):

$$\mathrm{div}\boldsymbol{E} = 4\pi\rho - 4\pi\mathrm{div}\boldsymbol{P}, \qquad (1.25$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{B} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \boldsymbol{P}}{\partial t} + 4\pi\mathrm{rot}\boldsymbol{M} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}. \qquad (1.26)$$

Вместо величин $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{M}$, входящих в эти уравнения, введём функции $\boldsymbol{D}$ и $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{E} + 4\pi\boldsymbol{P}, \qquad (1.27)$$

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{B} - 4\pi\boldsymbol{M}, \qquad (1.28)$$

где $\boldsymbol{D}$ - вектор электрической индукции, $\boldsymbol{H}$ – напряжённость магнитного поля в среде. Следует обратить внимание на то, что, хотя $\boldsymbol{H}$ называется напряжённостью магнитного поля, средней напряжённостью магнитного поля в веществе является величина $\boldsymbol{B}$. В этих обозначениях уравнения (1.25) и (1.26) принимают вид

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 4\pi\rho, \qquad (1.29)$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \qquad (1.30)$$

До сих пор тело считалось электронейтральным. Если в тело введены извне дополнительные заряды, нарушающие его электронейтральность (такие заряды называют сторонними зарядами), то к плотности заряда ρ и тока $\boldsymbol{j}$ в уравнениях (1.29) и (1.30) следует добавить величины $\rho_{ст}$ и $\boldsymbol{j}_{ст}$, где $\rho_{ст}$ и $\boldsymbol{j}_{ст}$ - плотности заряда и тока сторонних зарядов.

Таким образом, система уравнений Максвелла, описывающая поведение электромагнитных полей в веществе, принимает следующий вид:

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}, \qquad (1.31)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{B} = 0, \qquad (1.32)$$

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D} = 4\pi(\rho + \rho_{ст}), \qquad (1.33)$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \frac{4\pi}{c}(\boldsymbol{j} + \boldsymbol{j}_{ст}) + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}. \qquad (1.34)$$

Система этих уравнений не является полной. К ней нужно добавить уравнения, связывающие величины $\boldsymbol{P}$, $\boldsymbol{M}$, $\boldsymbol{j}$ с существующими внутри тела макроскопическими полями, а также так называемые граничные условия, определяющие поведение макроскопических полей на границе раздела различных сред.