РЕШЕНИЯ

1. Поскольку $T_{ij} = c_{ijlm} S_{lm}$ и тензор модулей c_{ijlm} упругости инвариантен относительно любых преобразований системы ортогональных координат, необходимо определить вид такого тензора. Свойством инвариантности относительно любых преобразований системы ортогональных координат обладает только скаляр и единичный тензор δ_{ij}. Следовательно, каждую компоненту тензора модулей упругости можно выразить через компоненты единичный тензор δ_{ij}. В силу симметричности δ_{ij} относительно перестановки индексов $\delta_{ij} = \delta_{ji}$, существует только три различных комбинаций компонент, содержащих четыре индекса i, j, l и m, — $\delta_{ij}\delta_{lm}$, $\delta_{il}\delta_{jm}$, $\delta_{im}\delta_{jl}$. Поэтому c_{ijlm} можно представить в виде

$$c_{ijlm} = \lambda\delta_{ij}\delta_{lm} + \mu_1\delta_{il}\delta_{jm} + \mu_2\delta_{im}\delta_{jl}, \tag{1.1}$$

где $\lambda; \mu_1; \mu_2$ — постоянные коэффициенты. Так как $T_{ij} = T_{ji}$, то $c_{ijlm} = c_{jilm}$. Следовательно,

$$c_{ijlm} = c_{jilm} = \lambda\delta_{ji}\delta_{lm} + \mu_1\delta_{jl}\delta_{im} + \mu_2\delta_{jm}\delta_{il}. \tag{2.1}$$

Из сравнения выражений (1) и (2), видно, что

$$\mu_1 = \mu_2 = \mu,$$

отсюда

$$c_{ijlm} = \lambda\delta_{ij}\delta_{lm} + \mu\left(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}\right). \tag{3.1}$$

Следовательно, упругие свойства изотропного материала определяются двумя константами λ и μ, которые называются коэффициенты Лямэ.

2. Закон Гука изотропного материала имеет вид, см. выражение (3.1) в решении задачи 1,

$$T_{ij} = c_{ijlm} S_{lm} = \left\{\lambda\delta_{ij}\delta_{lm} + \mu\left(\delta_{il}\delta_{jm} + \delta_{im}\delta_{jl}\right)\right\} S_{lm}.$$

Проводя суммирование по l и m, получил

$$T_{ij} = \lambda\Delta\delta_{ij} + \mu S_{ji} + \mu S_{ij} = \lambda\Delta\delta_{ij} + 2\mu S_{ij},$$

где $\Delta = S_{11} + S_{22} + S_{33} = \partial u_x/\partial x + \partial u_y/\partial y + \partial u_z/\partial z = \operatorname{div}\boldsymbol{u}$ — объемная деформация материала; $\boldsymbol{u} = \left\{u_x; u_y; u_z\right\}$ — вектор смещения точек нагруженного материала.

3. Используя упрощенную матричную запись Фойта, заключающуюся в замене индексов $(11) \to (1)$; $(22) \to (2)$; $(33) \to (3)$; $(23) = (32) \to (4)$; $(13) = (31) \to (5)$; $(12) = (21) \to (6)$, компоненты тензора упругих свойств изотропного материала, согласно выражению (3.1) в решении задачи 1, можно записать:

$$c_{11} = c_{22} = c_{33} = \lambda + 2\mu ;$$
$$c_{12} = c_{13} = c_{23} = \lambda ; \qquad (1.3)$$
$$c_{44} = c_{55} = c_{66} = \mu .$$

Остальные компоненты тензора упругих свойств равны нулю, причем $c_{\alpha\beta}$ $(\alpha, \beta = 1,...,6)$ симметричен относительно перестановки индексов $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$. Следовательно,

$$\lambda = c_{12} \text{ и } \mu = (c_{11} - c_{12})/2 . \qquad (2.3)$$

Из 36 компонент тензора $c_{\alpha\beta}$ в силу симметрии $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ различными являются (36-6)/2+6=21 компонента. Из них отличны от нуля лишь 9, остальные 21-9=12 равны нулю. Тензор упругих свойств изотропного тела в записи Фойта имеет вид

$$c_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{11} & c_{12} & 0 & 0 & 0 \\ c_{12} & c_{12} & c_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (c_{11}-c_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11}-c_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (c_{11}-c_{12})/2 \end{pmatrix},$$

причем обобщенный закон Гука в записи Фойта имеет вид

$$T_\alpha = c_{\alpha\beta} S_\alpha . \qquad (3.3)$$

4. Продольная и поперечная деформация стержня соответственно равны

$$\Delta l / l = (1/E) F/S ; \qquad \Delta d/d = -\upsilon(\Delta l/l) = -(\upsilon/E) F/S ,$$

где $S = \pi d^2/4$ — площадь поперечного сечения. В силу радиальной симметрии отличны от нуля следующие компоненты тензора деформации:

$$S_{11} = (1/E) T_{11} ; \qquad S_{22} = S_{33} = -(\upsilon/E) T_{11} ,$$

где $T_{11} = F/S$, или в записи Фойта $S_{11} = S_1$, $S_{22} = S_2$, $S_{33} = S_3$, $T_{11} = T_1$

$$S_1 = (1/E) T_1 ; \qquad S_2 = S_3 = -(\upsilon/E) T_1 . \qquad (1.4)$$

С другой стороны, согласно обобщенному закону Гука

$$T_1 = c_{11} S_1 + c_{12} S_2 + c_{13} S_3 ;$$
$$T_2 = c_{21} S_1 + c_{22} S_2 + c_{23} S_3 ; \qquad (2.4)$$
$$T_3 = c_{31} S_1 + c_{32} S_2 + c_{33} S_3 .$$

Боковая поверхность стержня свободна от нагрузок и стержень тонкий, поэтому

$$T_{22} = T_{33} = 0 .$$

С учетом соотношений (1.3) в решении задачи 3 и симметрии тензора $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ можно записать

$$T_2 = c_{12}\left(S_1 + S_3\right) + c_{11}S_2 = 0.$$

После подстановки (1.4) находим

$$c_{12}\left[\left(1/E\right)T_1 - \left(\upsilon/E\right)T_1\right] - c_{11}\left(\upsilon/E\right)T_1 = 0.$$

Таким образом,

$$c_{12}\left(1-\upsilon\right) - \upsilon c_{11} = 0,$$

откуда

$$\upsilon = c_{12}/\left(c_{11} + c_{12}\right). \qquad (3.4)$$

Далее, подставляя в первое уравнение системы (2.4) соотношения (1.4) и сокращая обе части на T_1, находим

$$1 = c_{11}/E - 2\upsilon c_{12}/E,$$

откуда с учетом (3.4) получим

$$E = c_{11} - 2c_{12}^2/\left(c_{11} + c_{12}\right). \qquad (4.4)$$

5. Из (1.3), (3.4) и (4.4), см. решения задач 3 и 4, следует

$$c_{12} = \lambda; \qquad c_{11} = \lambda + 2\mu; \qquad (1.5)$$

и

$$\upsilon = c_{12}/\left(c_{11} + c_{12}\right); \qquad E = c_{11} - 2c_{12}^2/\left(c_{11} + c_{12}\right). \qquad (2.5)$$

После подстановки (1.5) в (2.5) находим

$$\upsilon = \lambda/2\left(\lambda + \mu\right);$$

$$E = \mu\left(3\lambda + 2\mu\right)/\left(\lambda + \mu\right).$$

Разрешив эти соотношения относительно λ и μ, получим

$$\lambda = E\upsilon/\left(1+\upsilon\right)\left(1-2\upsilon\right);$$

$$\mu = E/2\left(1+\upsilon\right).$$

Вторая константа Лямэ в технической литературе называется модулем сдвига и обозначается символом G.

6. При преобразовании системы координат компоненты пьезомодулей изменяются по закону

$$e_{ijk} = \alpha_i^l \alpha_j^m \alpha_k^n e_{lmn},$$

где α_i^l — матрица преобразования системы координат. Если имеется центр симметрии, то есть при преобразовании $x \to -x;\ y \to -y;\ z \to -z$, описываемыми соотношениями

$$\alpha_i^l = -\delta_{il},$$

пьезомодули остаются теми же. Поэтому

$$e_{ijk} = \left(-1\right)^3 \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} e_{lmn} = \left(-1\right)^3 e_{ijk} = -e_{ijk},$$

следовательно,

$e_{ijk} = 0$.

Таким образом, если кристалл имеет центр симметрии, он не может обладать пьезоэффектом.

7. Рассмотрим уравнения пьезоэффекта в записи Фойта, в которых независимыми переменными являются деформация и напряженность электрического поля

$$T_\alpha = c^E_{\alpha\beta} S_\beta - e_{i\alpha} E_i; \qquad (1.7)$$

$$D_i = \varepsilon^S_{ij} E_j + e_{i\alpha} S_\alpha, \qquad (2.7)$$

где индексы $i, j = 1,2,3$ и $\alpha, \beta = 1,...,6$. Умножив второе уравнение на $\beta^S_{ki} = \left(\varepsilon^S_{ki}\right)^{-1}$, получим

$$\beta^S_{ki} D_i = \beta^S_{ki} \varepsilon^S_{ij} E_j + \beta^S_{ki} e_{i\alpha} S_\alpha.$$

Так как $\beta^S_{ki}\varepsilon^S_{ij} = \delta_{kj}$, то

$$E_k = \beta^S_{ki} D_i - \beta^S_{ki} e_{i\alpha} S_\alpha.$$

Подставив это выражение в (1.7), получим

$$T_\alpha = c^E_{\alpha\beta} S_\beta - e_{k\alpha}\beta^S_{ki} D_i + e_{k\alpha}\beta^S_{ki} e_{i\beta} S_\beta = \left(c^E_{\alpha\beta} + e_{k\alpha}\beta^S_{ki} e_{i\beta}\right) S_\beta - e_{k\alpha}\beta^S_{ki} D_i,$$

Следовательно,

$$c^D_{\alpha\beta} = c^E_{\alpha\beta} + e_{k\alpha}\beta^S_{ki} e_{i\beta}.$$

8. Результирующее колебательные смещения в пластине пропорционально $e^{i\omega t}$ и обусловлено суммой смещений падающей и отраженной волны

$$u(x,t) = \left(a\,e^{-ikx} + b\,e^{ikx}\right) e^{i\omega t},$$

где a и b — амплитуды падающей и отраженной волн. Колебательная скорость в пластине равна

$$\dot{u}(x,t) = i\omega\left(a\,e^{-ikx} + b\,e^{ikx}\right) e^{i\omega t}.$$

На границах пластины колебательные скорости равны:

$$\dot{u}_1 = \dot{u}_1(x_1,t) = i\omega\left(a\,e^{-ikx_1} + b\,e^{ikx_1}\right) e^{i\omega t};$$

$$\dot{u}_2 = \dot{u}_2(x_2,t) = i\omega\left(a\,e^{-ikx_2} + b\,e^{ikx_2}\right) e^{i\omega t}.$$

Здесь и далее временной множитель $e^{i\omega t}$ опущен.

Рассматривая эту пару соотношений как систему уравнений относительно a и b, находим

$$i\omega a = \left(\dot{u}_1\,e^{ikx_2} - \dot{u}_2\,e^{ikx_1}\right) \big/ 2i\sin kl;$$

$$i\omega b = \left(\dot{u}_2\,e^{ikx_1} - \dot{u}_1\,e^{ikx_2}\right) \big/ 2i\sin kl. \qquad (1.8)$$

Поскольку $\partial p/\partial x = -\rho\,\partial^2 u/\partial t^2$, то амплитуда звукового давления равна

$$p(x) = \rho\omega^2\left[a\,e^{-ikx}/(-ik) + b\,e^{ikx}/ik\right] = i\rho c\omega\left(a\,e^{-ikx} - b\,e^{ikx}\right).$$

Соответственно амплитуда силы

$$F(x)=i\rho c\omega S_{пл}\left(a\,\mathrm{e}^{-ikx}-b\,\mathrm{e}^{ikx}\right)=\rho c S_{пл}\left(i\omega a\,\mathrm{e}^{-ikx}-i\omega b\,\mathrm{e}^{ikx}\right).$$

Подставляя (1.8), находим силы, действующие на грани пластины

$$F_1=Z_0\left\{\dot u_1/i\,\mathrm{tg}\,kl-\dot u_2/i\sin kl\right\};$$

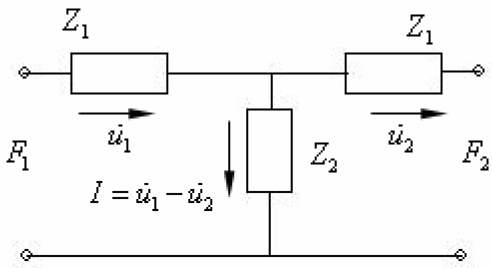
$$F_2=Z_0\left\{\dot u_1/i\sin kl-\dot u_2/i\,\mathrm{tg}\,kl\right\},$$

где $Z_0=\rho c S_{пл}$. Вспомнив любимую учительницу по математике — $1/\mathrm{tg}\,kl=1/\sin kl-\mathrm{tg}(kl/2)$, получим

$$\begin{cases}F_1=\left(Z_0/i\sin kl\right)\left(\dot u_1-\dot u_2\right)+iZ_0\,\mathrm{tg}(kl/2)\dot u_1;\\ F_2=\left(Z_0/i\sin kl\right)\left(\dot u_1-\dot u_2\right)-iZ_0\,\mathrm{tg}(kl/2)\dot u_1.\end{cases}\qquad(2.8)$$

Введя обозначения $Z_1=iZ_0\,\mathrm{tg}(kl/2)$ и $Z_2=-iZ_0/\sin kl$, (2.8) можно представить в виде

$$\begin{cases}F_1=Z_2\left(\dot u_1-\dot u_2\right)+Z_1\dot u_1;\\ F_2=Z_2\left(\dot u_1-\dot u_2\right)-Z_1\dot u_2.\end{cases}\qquad(3.8)$$



Эквивалентная схема пластины

Нетрудно видеть, что система уравнений (3.8) описывает электрическую схему, показанную на рисунке. Действительно, согласно этой схеме

$F_1=Z_1\dot u_1+Z_2 I$;

$IZ_2=Z_1\dot u_2+F_2$

и

$I+\dot u_2=\dot u_1$,

что соответствует системе (3.8). Таким образом, первая схема электромеханической аналогии ставит в соответствие

механической силе — электрическое напряжение;

колебательной скорости — электрический ток.

9. Из задачи 8 следует, что входной импеданс пластины равен

$$Z(0)=Z_{вх}=F_1/\dot u_1.$$

Оттуда же

$$F_1=\left(Z_1+Z_2\right)\dot u_1-Z_2\dot u_2;$$

$$F_2=Z_2\dot u_1-\left(Z_1+Z_2\right)_2\dot u_2,\qquad(1.9)$$

поэтому

$$Z(0)=F_1/\dot u_1=\left(Z_1+Z_2\right)-Z_2\,\dot u_2/\dot u_1;$$

$$Z(l) = F_2/\dot{u}_2 = Z_2\,\dot{u}_1/\dot{u}_2 - (Z_1 + Z_2). \qquad (2.9)$$

Из последнего выражения следует

$$\dot{u}_2/\dot{u}_1 = Z_2\Big/\big(Z_1 + Z_2 + Z(l)\big),$$

подставляя в первое соотношение (2.9), получим

$$Z(0) = (Z_1 + Z_2) - Z_2^2\Big/\big(Z_1 + Z_2 + Z(l)\big) =$$

$$= \left[(Z_1 + Z_2)^2 - Z_2^2 + (Z_1 + Z_2)Z(l)\right]\Big/\big(Z_1 + Z_2 + Z(l)\big). \qquad (3.10)$$

Введем обозначение $x = kl$, тогда, см. обозначения задачи 8, получим

$$Z_1 + Z_2 = iZ_0\,\mathrm{tg}(x/2) - iZ_0/\sin x = -iZ_0/\mathrm{tg}\,x,$$

$$Z_2^2 = -Z_0^2\big/\sin^2 x;$$

$$(Z_1 + Z_2)^2 - Z_2^2 = Z_0^2.$$

После подстановки в (3.10) находим

$$Z(0) = Z_{вх} = Z_0 \cdot \frac{Z(l)/Z_0 + i\,\mathrm{tg}\,kl}{1 + i\big(Z(l)/Z_0\big)\mathrm{tg}\,kl}.$$

Таким образом, входной импеданс пластины зависит от ее толщины l, соотношения kl и выходного импеданса $Z(l)$.

Если $l = \lambda/2$, то $k\,l = (2\pi/\lambda)(\lambda/2) = \pi$ и $\mathrm{tg}\,k\,l = 0$. Отсюда

$$Z(0) = Z(l),$$

то есть входной импеданс пластины равен импедансу нагрузки.

Если $l = \lambda/4$, то $k\,l = (2\pi/\lambda)(\lambda/4) = \pi/2$ и $\mathrm{tg}\,k\,l \to \infty$. Отсюда

$$Z(0) = Z_{вх} = Z_0^2\big/Z(l).$$

10. Воспользуемся уравнениями пьезоэффекта в виде

$$T_\alpha = c^D_{\alpha\beta} S_\beta - h_{i\alpha} D_i;$$

$$E_i = \beta^S_{i\,j} D_i - h_{i\beta} S_\beta.$$

Так как пластина совершает толщинные колебания, то $S_3 = \partial u/\partial x$ и отличной от нуля является компонента механических напряжений $T_3 = T$ и электрической индукции $D_3 = D$. Опуская индексы, можем записать

$$T = c^D\,\partial u/\partial x - hD;$$

$$E = \beta^S D - h\,\partial u/\partial x.$$

Силы, действующие на грани пластины, равны

$$F_1 = S_{пл} T(x_1) = S_{пл}\big(c^D\,\partial u(x_1)/\partial x - hD\big);$$

$$F_2 = S_{пл} T(x_2) = S_{пл}\big(c^D\,\partial u(x_2)/\partial x - hD\big).$$

Следовательно, в левые части соотношений (3.8) в решении задачи 8, необходимо включить дополнительное отрицательное слагаемое $-hDS_{пл}$

$$\begin{cases} F_1 - hDS_{пл} = Z_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + Z_1\dot{u}_1; \\ F_2 - hDS_{пл} = Z_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) - Z_1\dot{u}_2. \end{cases}$$

Перенося его в правые части уравнений, получим

$$\begin{cases} F_1 = Z_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + Z_1\dot{u}_1 + hDS_{пл}; \\ F_2 = Z_2(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) - Z_1\dot{u}_2 + hDS_{пл}. \end{cases}$$

Разность потенциалов между гранями пьезопластины равна

$$U = \int_{x_1}^{x_2} E\,dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(\beta^S D - h\,\partial u/\partial x\right)dx = \beta^S Dl - h\left[u(x_2) - u(x_1)\right] = \beta^S Dl - h(u_2 - u_1).$$

Так как $\dot{u} = \partial u/\partial t = i\omega u$ и $u = \dot{u}/i\omega$, то

$$U = \beta^S Dl - (h/i\omega)(\dot{u}_2 - \dot{u}_1).$$

Электрическая индукция связана с током смещения

$$I = S_{пл}\,\partial D/\partial t = i\omega S_{пл} D,$$

поскольку все параметры пропорциональны $e^{i\omega t}$. Тогда с учетом $\beta^S = 1/\varepsilon^S$, можно записать

$$U = I\,l/i\omega\varepsilon^S S_{пл} - (h/i\omega)(\dot{u}_2 - \dot{u}_1).$$

Поскольку $C_0 = \varepsilon^S S^{пл}/l$ — емкость жестко закрепленной пьезопластины, то

$$U = I/i\omega C_0 - (h/i\omega)(\dot{u}_2 - \dot{u}_1),$$

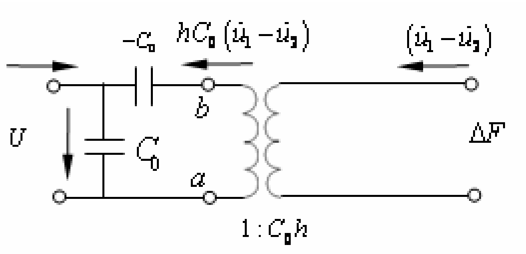
откуда

$$I = i\omega C_0 U - C_0 h(\dot{u}_1 - \dot{u}_2).$$

Дополнительное слагаемое $\Delta F = -hDS_{пл} = Ih/i\omega$, следовательно, можно представить в виде

$$\Delta F = hC_0\left[U - (hC_0/i\omega C_0)(\dot{u}_1 - \dot{u}_2)\right].$$

Дополнительную силу можно реализовать с помощью электромеханического трансформатора



Действительно, из приведенной схемы следует

$$\Delta F = hC_0 U_{ab};$$

$$U_{ab} = \left[U - (hC_0/i\omega C_0)(\dot{u}_1 - \dot{u}_2)\right].$$

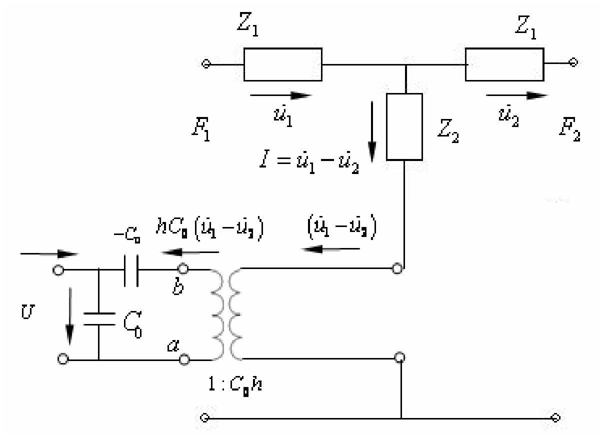
Таким образом,

$$\Delta F = hC_0\left[U - (hC_0/i\omega C_0)(\dot{u}_1 - \dot{u}_2)\right].$$

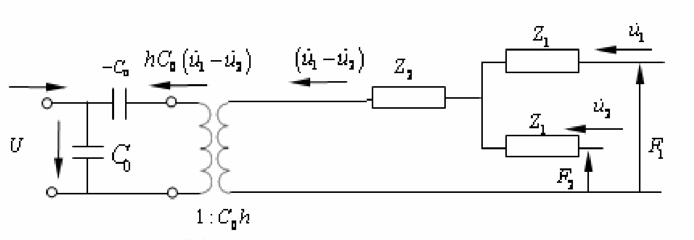
Формальная отрицательная емкость «$-C_0$» введена для того, чтобы сохранялось равенство

$$I = i\omega C_0 U - C_0 h(\dot{u}_1 - \dot{u}_2).$$

Нетрудно видеть, что для выполнения вышеприведенных соотношений электромеханический трансформатор надо включить между импедансом Z_2 и «землей», см. рис. в решении задачи 8. Эквивалентная электромеханическая схема пьезопреобразователя будет иметь вид



Обычно ее изображают следующим образом



11. Вектор напряженности электрического поля $\boldsymbol{E}$ направлен вдоль оси x_1, то есть $\boldsymbol{E}=\{E,0,0\}$, поскольку электроды нанесены на плоскости тонкой пластины, перпендикулярные этой оси. Так как плоская волна распространяется вдоль оси x_3, пластина длинная и тонкая, то преобладающими компонентами вектора колебательных смещений будет u_3, тензора деформации $S=S_3=\partial u_3/\partial x_3$ и механических напряжений T_3, тогда уравнение пьезоэффекта можно записать в виде

$$T_3=c_{33}^E\,\partial u_3/\partial x_3-e_{13}E;$$

$$D=\varepsilon_{11}^S E+e_{13}\,\partial u_3/\partial x_3,$$

так как $\boldsymbol{D}=\{D,0,0\}$. В этом случае уравнение движения имеет вид

$$\rho\,\partial^2 u_3/\partial t^2=\partial T_3/\partial x_3,$$

которое после подстановки T_3 можно записать как

$$\rho\,\partial^2 u_3/\partial t^2=c_{33}^E\,\partial^2 u_3/\partial x_3^2-e_{13}\partial E/\partial x_3.$$

Поверхности $x_1=0$ и $x_1=b$, на которые нанесены электроды, являются эквипотенциальными поверхностями, поэтому $\partial E/\partial x_3\equiv 0$, тогда уравнение движения

$$\rho\,\partial^2 u_3/\partial t^2=c_{33}^E\,\partial^2 u_3/\partial x_3^2.$$

Это волновое уравнение, описывающее плоскую волны, скорость распространения которой равна

$$v = \left(c_{33}^E / \rho \right)^{1/2}.$$

Силы, действующие на плоскостях пластины $x_3 = 0$ и $x_3 = d$, получим, воспользовавшись соотношениями (3.8) из решения задачи 8,

$$\begin{cases} F_1 = Z_2 \left(\dot{u}_1 - \dot{u}_2 \right) + Z_1 \dot{u}_1; \\ F_2 = Z_2 \left(\dot{u}_1 - \dot{u}_2 \right) - Z_1 \dot{u}_2. \end{cases}$$

За счет пьезоэффекта, как и при решении задачи 10, к правым частям этих уравнений необходимо добавить слагаемое $\Delta F = e_{13} ELb$, которое с учетом соотношения $e_{13} = h_{13} \varepsilon_{11}^S$ можно представить в виде $\Delta F = h_{13} \varepsilon_{11}^S ELb$. В результате получим

$$\begin{cases} F_1 = Z_2 \left(\dot{u}_1 - \dot{u}_2 \right) + Z_1 \dot{u}_1 + h_{13} \varepsilon_{11}^S ELb; \\ F_2 = Z_2 \left(\dot{u}_1 - \dot{u}_2 \right) - Z_1 \dot{u}_2 + h_{13} \varepsilon_{11}^S ELb. \end{cases}$$

Разность потенциалов на электродах равна

$$U = \int_0^b E dx_1 = Eb, \tag{1.11}$$

тогда добавку к силам, действующим на гранях, можно записать в виде $\Delta F = h_{13} \varepsilon_{11}^S LU$. Если обозначить $C_0 = \varepsilon_{11}^S Ld / b$ — емкость преобразователя, то

$$\Delta F = h_{13} \left(l/d \right) C_0 U.$$

Ток смещения, протекающий через преобразователь, найдем, определив изменение заряда Q на электродах преобразователя,

$$\widehat{I} = d\widehat{Q} / dt.$$

Так как рассматривается гармоническая волна, то $\widehat{Q} = Q \mathrm{e}^{i\omega t}$, Q — амплитудное значение заряда на электродах. Следовательно, амплитудное значение тока равно $I = i\omega Q$. С другой стороны, для амплитудного значения заряда можно записать

$$Q = \int_{S_{ЭЛ}} D\, dS_{ЭЛ} = L \int_0^d D dx_3 = L \varepsilon_{11}^S Ed - e_{13} L \left(u_1 - u_2 \right), \tag{2.11}$$

где $S_{ЭЛ}$ — площадь поверхности электрода; $u_1 = u_3(0)$ и $u_2 = u_3(d)$. Вводя колебательные скорости граней с электродами

$$\dot{u}_1 = i\omega u_1; \quad \dot{u}_2 = i\omega u_2,$$

с учетом (1.11) и (2.11) получим

$$I = i\omega Q = i\omega \left[L \varepsilon_{11}^S Ed - e_{13} L \left(u_1 - u_2 \right) \right]$$

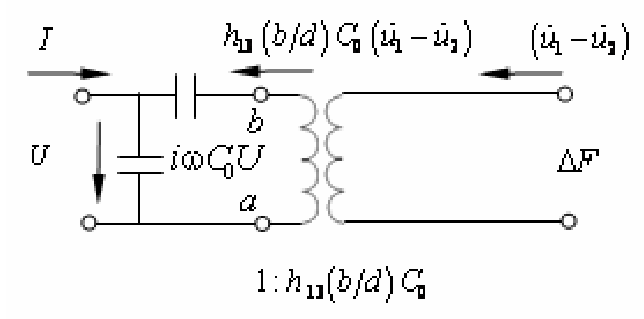
или

$$I = i\omega C_0 U - h_{13} \left(b/d \right) C_0 \left(\dot{u}_1 - \dot{u}_2 \right). \tag{3.11}$$

Отсюда

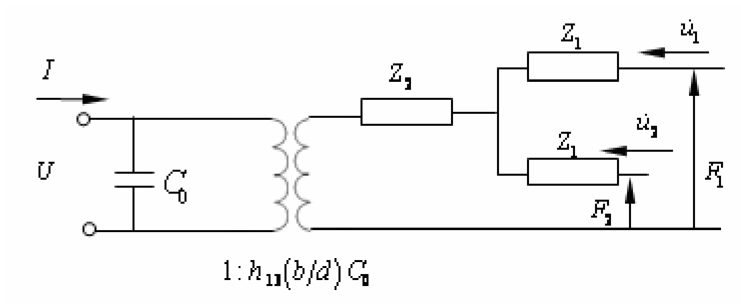
$$U = I / i\omega C_0 + h_{13} \left(b/d \right) \left(C_0 / i\omega C_0 \right) \left(\dot{u}_1 - \dot{u}_2 \right). \tag{4.11}$$

Соотношениям (3.11) и (4.11) соответствует схема:



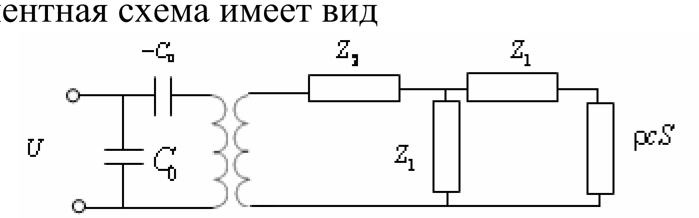
Здесь коэффициент электромеханической трансформации $N = h_{13}\left(b/d\right)C_0$ и $\Delta F = U_{ab}N = UN$.

Повторив рассуждения в решении задачи 10, окончательно эквивалентную схему преобразователя можно представить в виде



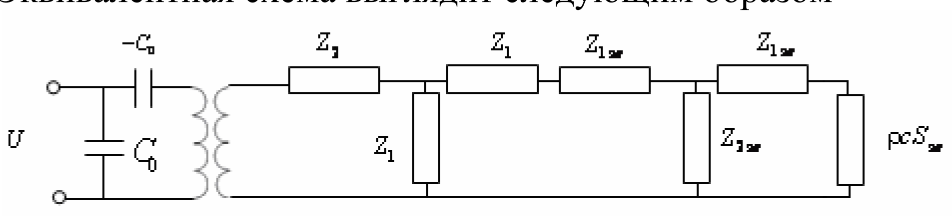
Эта схема отличается от схемы, приведенной в решении задачи 10, отсутствием отрицательной емкости

12. Эквивалентная схема имеет вид



где S — площадь плоской поверхности пьезопреобразователя.

13. Эквивалентная схема выглядит следующим образом



где $Z_{1\text{зв}} = iZ_{0\text{зв}}\,\mathrm{tg}\left(k_{\text{зв}}l_{\text{зв}}/2\right)$; $Z_{2\text{зв}} = -iZ_{0\text{зв}}\big/\sin k_{\text{зв}}l_{\text{зв}}$ и $Z_{0\text{зв}} = \rho_{\text{зв}}c_{\text{зв}}S_{\text{зв}}$; $k_{\text{зв}} = \omega/c_{\text{зв}}$.

15. Рассмотрим фазированную решетку, содержащую $p = 2m+1$ излучателей, показанных на рисунке, которые будем нумеровать числами от $-m$ до $+m$. Ширину фазирующей решетки будем полагать много меньшей, чем расстояние до точки, в которой рассчитываем акустическое поле. Рассчитаем акустическое поле в т. A. Вклад в акустическое поле, например, колебательную скорость, от центрального излучателя с номером $n=0$ можно записать в виде

$$v_0(t) = v_0 \sin 2\pi f t / r,$$

где v_0 — амплитуда колебаний излучателей; r — расстояние от излучателя до т. A; f — частота колебаний излучателей. Вклад в поле в т. A излучателя с номером n

$$v_n(t) = v_0 \sin 2\pi f(t - \tau_n)/r_n.$$

Здесь τ_n — время задержки излучения в т. A по отношению к излучению центрального излучателя; r_n — расстояние от n-го излучателя до т. A. Из рисунка следует,

$$r_n^2 = (r - nd\sin\vartheta)^2 + (nd\sin\vartheta)^2 = r^2 - 2rnd\sin\vartheta + n^2d^2;$$

$$r_n = \sqrt{r^2 - 2r\,nd\sin\vartheta + n^2d^2} = r\sqrt{1 - 2(nd/r)\sin\vartheta + n^2d^2/r^2},$$

где d — шаг излучателей в решетке. Поскольку $nd/r \ll 1$, то $r_n \simeq r$, тогда

$$v_n(t) \simeq v_0 \sin 2\pi f(t - \tau_n)/r.$$

Разности хода излучения в т. A от излучателей с номерами n по отношению к излучению центрального излучателя можно представить в виде

$$\Delta_{1,0} = -d\sin\vartheta \qquad \Delta_{0,-1} = d\sin\vartheta;$$

$$\Delta_{2,0} = -2d\sin\vartheta; \qquad \Delta_{0,-2} = 2d\sin\vartheta$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots;\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Delta_{m,0} = -m\,d\sin\vartheta; \qquad \Delta_{0,-m} = m\,d\sin\vartheta.$$

Следовательно,

$$\tau_n = \Delta_{n,0}/c = +nd\sin\vartheta/c; \qquad n = 0, \pm 1, \ldots, \pm n,$$

где c — скорость звука. Таким образом

$$v_n(t) = v_0 \sin\left[2\pi f t - 2\pi f(\sin\vartheta/c)nd\right]/r = v_0\sin\left[2\pi f t - knd\right]/r,$$

где $k = 2\pi f \sin\vartheta / c$.

Суммарная колебательная скорость в т. A от всех излучателей равна

$$v_\Sigma = (v_0/r)\sum_{n=-m}^{m}\sin\left[2\pi f t - knd\right] = (v_0/r)\sum_{n=-m}^{m}\left(\sin 2\pi f t\cos k\,nd - \cos 2\pi f t \sin k\,nd\right) =$$

$$= (v_0/r)\left[\left(\sum_{n=-m}^{m}\cos k\,nd\right)\sin 2\pi f t - \left(\sum_{n=-m}^{m}\sin k\,nd\right)\cos 2\pi f\right].$$

Амплитуда колебательной скорости в т. A

$$|v_\Sigma| = (v_0/r)\sqrt{A^2 + B^2}; \qquad A = \sum_{n=-m}^{m}\cos k\,nd\;4 \qquad B = \sum_{n=-m}^{m}\sin k\,nd.$$

Из-за антисимметрии нечетности суммируемых слагаемых

$$B = \sum_{n=-m}^{m}\sin k\,nd = 0,$$

поэтому

$$|v_\Sigma| = (v_0/r)\sum_{n=-m}^{m}\cos k\,nd\,.$$

Запишем последнюю сумму в виде

$$|v_\Sigma| = (v_0/r)\left(\sum_{n=-m}^{0}\cos k\,nd + \sum_{n=0}^{m}\cos k\,nd\right) - (v_0/r) = (v_0/r)\left(2\sum_{n=0}^{m}\cos k\,nd - 1\right).$$

Далее, запишем

$$\cos k\,nd = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{ik\,nd}\right\} = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{in\beta}\right\}, \qquad \beta = k\,d\,,$$

тогда

$$\sum_{n=0}^{m}\cos k\,nd = \mathrm{Re}\sum_{n=0}^{m}\mathrm{e}^{in\beta}\,.$$

Последняя сумма представляет сумму геометрической прогрессии с основанием $\mathrm{e}^{i\beta}$

$$\sum_{n=0}^{m}\mathrm{e}^{in\beta} = \left(1-\mathrm{e}^{i\beta(m+1)}\right)\Big/\left(1-\mathrm{e}^{i\beta}\right),$$

тогда

$$|v_\Sigma| = (v_0/r)\left(2\,\mathrm{Re}\left\{\left(1-\mathrm{e}^{i\beta(m+1)}\right)\Big/\left(1-\mathrm{e}^{i\beta}\right)\right\}-1\right).$$

После несложных преобразований находим

$$\mathrm{Re}\left\{\left(1-\mathrm{e}^{i\beta(m+1)}\right)\Big/\left(1-\mathrm{e}^{i\beta}\right)\right\} = \mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{i\beta(m+1)/2}\left(\mathrm{e}^{-i\beta(m+1)/2}-\mathrm{e}^{i\beta(m+1)/2}\right)\Big/\mathrm{e}^{i\beta/2}\left(\mathrm{e}^{-i\beta/2}-\mathrm{e}^{i\beta/2}\right)\right\} =$$

$$= \mathrm{Re}\left\{\mathrm{e}^{i\beta m/2}\sin\left[\beta(m+1)/2\right]\big/\sin[\beta/2]\right\} = \cos[\beta m/2]\sin\left[\beta(m+1)/2\right]\big/\sin[\beta/2].$$

Таким образом,

$$|v_\Sigma| = (v_0/r)\left(2\cos[\beta m/2]\sin\left[\beta(m+1)/2\right]\big/\sin[\beta/2]-1\right).$$

Вспомнив уроки тригонометрии в родной школе, последнее выражение можно представить в виде

$$|v_\Sigma| = (v_0/r)\sin\left[\beta(m+1)/2\right]\big/\sin[\beta/2] =$$

$$= (v_0/r)\left(\sin\left[(2m+1)\pi f d\sin\vartheta/c\right]\big/\sin\left[(\pi f d\sin\vartheta/c)\right]\right),$$

или

$$|v_\Sigma| = (v_0/r)\left\{\sin\left[p\pi f d\sin\vartheta/c\right]\big/\sin\left[(\pi f d\sin\vartheta/c)\right]\right\}.$$

Проанализируем последнее выражение. Обозначим $\alpha = \pi f d/c$. Максимальное значение $|v_\Sigma|$ принимает при $\vartheta \to 0$

$$|v_\Sigma|_{\max} = \lim_{\vartheta\to 0}(v_0/r)\sin(\alpha p\sin\vartheta)/\sin(\alpha\sin\vartheta) = p\,.$$

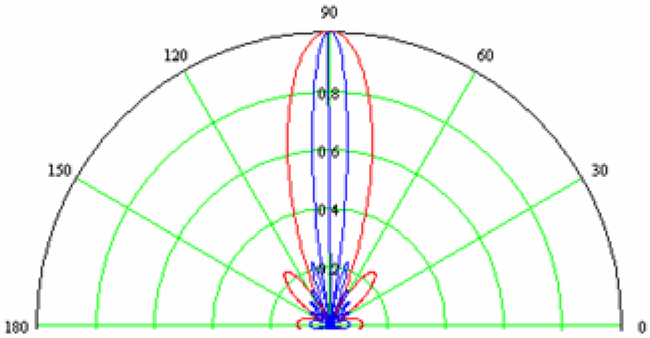
Отношение

$$I(\vartheta) = |v_\Sigma|\big/|v_\Sigma|_{\max} = \sin(\alpha p\sin\vartheta)\big/p\sin(\alpha\sin\vartheta)$$

называется диаграммой направленности. Первое значение угла ϑ_1, при котором $I(\vartheta_1) = 0$, равно

$$\vartheta_1 = \arcsin(\pi/\alpha p).$$

Таким образом, основная доля излучения фазированной решетки сосредоточена в угле $2\vartheta_1$, который уменьшается с ростом количества излучателей в решетке p.



Диаграммы направленности фазированных решеток, содержащих 7 (красная линия) и 17 (синяя линия) излучателей

На рисунке показаны диаграммы направленности двух фазированных решеток с разным количеством излучателей. Видно, что с увеличение числа излучателей в решетке диаграмма направленности существенно сужается.

17. *Ответ:* $R_{y_1y_2}(x_1;\ x_2;\ \tau) = R_{SS}(\tau \pm \tau_0) + R_{n_1n_2}(x_1;\ x_2;\ \tau)$, где x_1 и x_2 — координаты первого и второго преобразователей соответственно; y_1 и y_2 — сигналы, регистрируемые преобразователями; $\tau_0 = l/c$; c — скорость упругих волн в металле трубопровода. Знак минус в выражении для аргумента корреляционной функции означает, что сигнал акустической эмиссии пришел справа от обоих датчиков, плюс — слева. Для разделения сигналов необходимо, чтобы выполнялось условие $l > c\tau_{\text{к}}$. При этом $\tau > \tau_{\text{к}}$ и $R_{y_1y_2}(x_1;\ x_2;\ \tau) = R_{SS}(\tau \pm \tau_0)$. Если взаимная корреляционная функция $R_{y_1y_2}$ максимальна при $\tau = -\tau_0$, источник находится слева от датчиков.

18. *Ответ:*

$$S_y(\omega) = \frac{\nu \overline{A^2} K_0^2}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\omega^2\omega_0^2/Q^2} + \frac{2\pi\nu^2 \overline{A}^2 K_0^2}{\omega_0^4}\delta(\omega);$$

$$R_{yy}(\tau) = \frac{\nu K_0^2}{\omega_0^3}\left\{\frac{\overline{A^2} e^{-\omega_0|\tau|/Q}}{4Q^{-1}\beta}[\beta\cos(\beta\omega_0\tau) + Q^{-1}\sin(\beta\omega_0|\tau|)] + \overline{A}^2\frac{\nu}{\omega_0}\right\},$$

$$\beta = \sqrt{1-(Q^{-1})^2}.$$

При $Q >> 1$ $R_{yy}(t) = \dfrac{\nu K_0^2}{\omega_0^3}\left\{\dfrac{\overline{A^2}}{4Q^{-1}} e^{-\omega_0 Q^{-1}|\tau|}\cos\omega_0\tau + \overline{A}^2\dfrac{\nu}{\omega_0}\right\};$

$$\overline{y} = \overline{A}\,\frac{\nu K_0}{\omega_0^2}; \quad \sigma_y^2 = \frac{\nu K_0^2 \overline{A^2}}{4Q^{-1}\omega_0^3}; \quad \overline{y^2} = \frac{\nu K_0^2}{\omega_0^3}\left[\frac{\overline{A^2}}{4Q^{-1}} + \overline{A}^2\,\frac{\nu}{\omega_0}\right].$$

19. *Ответ:* $R_{xx}(\tau) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \overline{A_i^2} P(\omega_i)\cos\omega_i\tau; \qquad \overline{A^2} = \int A^2 w_i(A)\,dA.$