Лекция 4

ХАРАКТЕРИСТИКИ АКУСТИЧЕСКОГО ПОЛЯ

Рассмотрим плоскую гармоническую волну, распространяющуюся в положительном направлении оси x, параметры среды при этом изменяются по гармоническому закону. Смещение частиц среды относительно положения равновесия описывается формулой:

$$u = B\,\mathrm{e}^{i(\omega t - kx)} = B\sin\left(\omega t - kx\right) = B\sin\omega\left(t - kx/\omega\right) = B\sin\omega\left(t - x/c\right).$$

Перечислим основные характеристики гармонической волны.

1. B - *амплитуда волны*.

2. c - *скорость волны, фазовая скорость, скорость волнового фронта*.

3. ω - *круговая частота волны,* $f = 2\pi/\omega$ - *циклическая частота*.

4. $T = 1/f = 2\pi/\omega$ - *период колебаний*.

5. λ - *длина волны*

$$\lambda = cT = c/f = 2\pi c/\omega.$$

6. $k = \omega/c = 2\pi f/c = 2\pi/Tc = 2\pi/\lambda$ - *волновое число*.

7. $\varphi = \omega x/c = kx$ - *фаза волны* в точке с координатой x.

8. $v = du/dt$ - *колебательная скорость,* скорость, с которой частицы среды смещаются относительно положения равновесия при распространении волны (не путать со скоростью c распространения волнового фронта), зависит от частоты

$$v = du/dt = i\omega B\,\mathrm{e}^{i(\omega t - kx)} = i\omega u\,.$$

Смещение и колебательная скорость частиц среды сдвинуты относительно друг друга по фазе на 90°.

9. $a = d^2u/dt^2 = -\omega^2 B e^{i(\omega t - kx)} = -\omega^2 u$ - *колебательное ускорение* частиц.

10. $\overline{E}$ - *плотность энергии волны* (среднее значение полной энергии волны в единице объема)

$$\overline{E} = \rho_0 |v|^2/2 = \rho_0\omega^2 B^2/2 = 2\pi^2\rho_0 f^2 B^2 \ \left[Дж/м^3\right].$$

11. J - *интенсивность колебаний (сила звука)*

$$J = \overline{\mathrm{E}}c = \rho_0 c|v|^2/2 = \rho_0 c\omega^2 B^2/2 = 2\pi^2\rho_0 f^2 B^2 c \ \left[Дж/м^2 c\right].$$

12. w - *акустическая мощность* (энергия, переносимая упругой волной в единицу времени через площадь S в направлении ее распространения)

$$w = \int_S \vec{J}\, d\,\vec{s}\ \left[Bm\right].$$

13. p - *звуковое давление* (переменная часть давления, возникающая в среде при прохождении звуковой волны).

Согласно (2.3) $\partial p / \partial x = -\rho_0\, \partial v / \partial t$, для гармонической волны $\partial p / \partial x = \rho_0 \omega^2 u$ и $u = B\,\mathrm{e}^{i(\omega t - kx)}$. После интегрирования получим $p = \rho_0 \omega^2 B e^{i(\omega t - kx)} / \left(-ik\right) = i\rho_0 \omega^2 u / k$. С учетом соотношений пп.6 и 8 определяем акустическое давление в плоской волне

$$p = \rho_0 c v\ \left[H / м^2\right].$$

14. z - *акустический импеданс*, отношение величины звукового давления к величине колебательной скорости в данной точке среды. Для плоской волны акустический импеданс равен

$$z = p / v = \rho_0 c \left[кг / м^2 c\right],$$

и называется *характеристическим импедансом среды*.

В общем случае акустический импеданс определяется как отношение колебательной силы F к колебательной скорости

$$Z_a = F / v = \mathrm{Re}\left\{Z_a\right\} + i\,\mathrm{Im}\left\{Z_a\right\},$$

где составляющая $\mathrm{Re}\left\{Z_a\right\}$ связана с потерями энергии в акустической системе и с потерями на излучение, а $\mathrm{Im}\left\{Z_a\right\}$ обусловлена реакцией сил инерции или сил упругости в колебательной системе.

Рассмотрим пример расчета интенсивности колебаний для типичного конструкционного материала – сталь:

$$\left(\rho_0 c\right)_{сталь} = 7{,}8 \cdot 10^3\, кг / м^3 \cdot 5 \cdot 10^3\, м / с = 3{,}9 \cdot 10^6\, кг / м^2 с\,;$$

$$J = \left(1/2\right)\rho_0 c v^2 = \left(1/2\right)\rho_0 c(\omega B)^2 = \left(1/2\right)\rho_0 c(2\pi f)^2 B^2,$$

выбрав значение амплитуды колебаний $B = 10^{-5}\, м$ и частоты $f_1 = 50\, Гц$, получим $J_1 \simeq 20\ Bm / м^2$. При $f_2 = 10\, кГц$ - $J_2 \simeq 8 \cdot 10^5\ Bm / м^2$. Этот пример показывает, что увеличение частоты волны является эффективным методом увеличение силы звука.

Упругие волны в твердых телах, их типы и скорость распространения

Отличительная особенность твердых тел от газов и жидкостей то, что помимо объемной упругости твердые тела обладают сдвиговой упругостью. Поэтому в твердых телах могут распространяться как *продольные* волны, так и *сдвиговые* волны.

Продольные волны - направление распространения волны (волновой вектор – обобщение понятия волновое число на трехмерный случай) совпадает с направлением смещений частиц среды при колебаниях.

Сдвиговые волны - направление распространения волны перпендикулярно направлению смещения частиц среды, то есть частицы смещаются в плоскости перпендикулярно распространению волны.

Вектор смещения частиц среды в этой плоскости можно представить как суперпозицию смещений в двух взаимно перпендикулярных направлениях, лежащих в этой плоскости, другими словами, можно говорить о *поляризации* волн.

Продольные волны называются также волнами *сжатия-сжатия.* Распространение волны сопровождается изменением расстояния между параллельными плоскостями, перпендикулярными распространению волн. При этом происходит изменение объема тела, содержащего заданное количество числа частиц (массы).

Распространение сдвиговых волн, их также называют *поперечными волнами,* не приводит к изменению объема тела. Плоскости перпендикулярные волновому вектору «скользят» одна относительно другой, причем расстояние между ними не меняется.

Рассмотрим распространение волн в неограниченном твердом теле. Заметим, на практике неограниченным твердым телом можно считать тела, характерный размер которых в 20…30 раз больше длины волны.

Чтобы получить уравнение, описывающее распространение волн, необходимо приравнять силы, действующие на выделенный элементарный объем среды инерционным силам

$$\partial\sigma_{ij}\big/\partial x_j = \rho\partial^2 u_i\big/\partial t^2\,; \qquad \left(i, j = 1,2,3\right). \tag{3.1}$$

Здесь σ_{ij} - компоненты тензора напряжений, $\boldsymbol{u} = \left\{u_1; u_2; u_3\right\}$ - компоненты вектора смещения частиц среды при распространении волны, индексы i и j нумеруют оси x, y и z. По повторяющимся индексам - в данном уравнении индекс j, подразумевается суммирование (правило Эйнштейна).

Для изотропного твердого тела связь между компонентами тензорами деформации $u_{ij} = (1/2)\left(\partial u_i/\partial x_j + \partial u_j/\partial x_i\right)$ и тензора напряжения определяется обобщенным законом Гука:

$$\sigma_{ii} = \lambda(u_{11} + u_{22} + u_{33}) + 2\mu u_{ii}; \quad \sigma_{ij} = 2\mu u_{ij},$$

где λ, μ – коэффициенты Ляме, описывающие свойства упругости изотропного твердого тела. Они связаны с константами упругости, используемых в инженерных расчетах - модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона υ, следующими соотношениями:

$$E = \mu(2\mu + 3\lambda)/(\mu + \lambda) \text{ и } \upsilon = \lambda/2(\lambda + \mu).$$

В свою очередь,

$$\mu = E/2(1 + \upsilon) \text{ и } \lambda = E\upsilon/(1 - 2\upsilon)(1 + \upsilon)$$

Подставив в (3.1) компоненты σ_{ij}, выраженные через u_{ij} в соответствии с обобщенным законом Гука, которые, в свою очередь, выразим через компоненты вектора смещения $\boldsymbol{u} = \{u_1; u_2; u_3\}$ получим векторное уравнение

$$(\lambda + \mu)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{u}) + \mu\Delta\boldsymbol{u} = \rho\partial^2\boldsymbol{u}/\partial t^2, \tag{3.2}$$

где Δ – оператор Лапласа.

Всякий вектор можно представить в виде суммы двух составляющих

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_l + \boldsymbol{u}_t, \tag{3.3}$$

где $\boldsymbol{u}_l$ - потенциальный вектор, такой, что его можно представить как $\boldsymbol{u}_l = \operatorname{grad}\varphi$ и, следовательно, $\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_l = 0$; $\mathbf{u}_t$ - соленоидальный вектор, такой, что $\operatorname{div}\mathbf{u}_t = 0$.

Так как $\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} = \Delta\boldsymbol{u} + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}$, то предыдущее уравнение можно записать в виде

$$\rho\partial^2\boldsymbol{u}/\partial t^2 = (\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u} - \mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}. \tag{3.4}$$

Подставив (3.3) в (3.4), получим два уравнения

$$\rho\partial^2\boldsymbol{u}_l/\partial t^2 = (\lambda + 2\mu)\operatorname{grad}\operatorname{div}\boldsymbol{u}_l; \tag{3.5}$$

$$\rho\partial^2\boldsymbol{u}_t/\partial t^2 = -\mu\operatorname{rot}\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_t. \tag{3.6}$$

Рассмотрим случай плоской волны. Для нее $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(x)$ – вектор смещения зависит только от координаты x, то есть $\boldsymbol{u}(x) = \{u_x(x); u_y(x); u_z(x)\}$, следовательно, $\boldsymbol{u}_l = \boldsymbol{u}_l(x)$

и $\boldsymbol{u}_t = \boldsymbol{u}_t(x)$. Из (3.5) и (3.6) нетрудно видеть, что ненулевой компонентой потенциального вектора $\boldsymbol{u}_l(x)$ является только x-компонента – $(\boldsymbol{u}_l(x))_x = u_x(x)$ ($\operatorname{rot}\boldsymbol{u}_l = 0$), а отличными от нуля составляющими солиноидального вектора $\boldsymbol{u}_t(x)$ являются компоненты $(\boldsymbol{u}_t(x))_y = u_y(x)$ и $(\boldsymbol{u}_t(x))_z = u_z(x)$ (т.к. $\operatorname{div}\boldsymbol{u}_t = 0 + \partial u_y/\partial y + \partial u_z/\partial z = 0$). Другими словами, векторы $\boldsymbol{u}_l(x)$ и $\boldsymbol{u}_t(x)$ имеют вид $\boldsymbol{u}_l(x) = \{u_x(x);0;0\}$ и $\boldsymbol{u}_t(x) = \{0;u_y(x);u_z(x)\}$, тогда векторное уравнение (3.5) преобразуется в уравнение

$$\rho\partial^2 u_x/\partial t^2 = (\lambda + 2\mu)\partial^2 u_x/\partial x^2, \tag{3.7}$$

а (3.6) – в два уравнения скалярных:

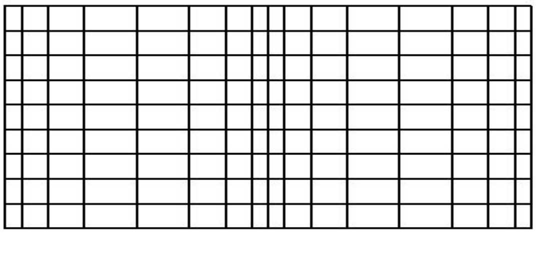
$$\rho\partial^2 u_y/\partial t^2 = \mu\partial^2 u_y/\partial x^2;$$

$$\rho\partial^2 u_z/\partial t^2 = \mu\partial^2 u_z/\partial x^2. \tag{3.8}$$

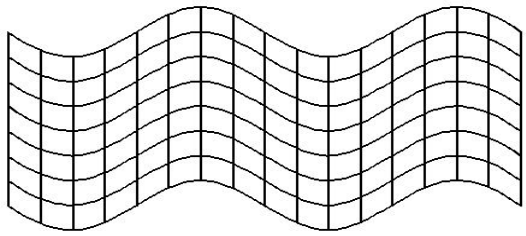
Уравнения (3.7) и (3.8) – волновые уравнения. Квадрат скорости волны, описываемого (3.7), равна $c_l^2 = \lambda + 2\mu/\rho = E(1-\upsilon)/\big(\rho(1+\upsilon)(1-2\upsilon)\big)$. Так как смещение частиц в этой волне совпадает с направлением ее распространения, то это продольная волна. Квадрат скорости волн, описываемых (3.8), – $c_t^2 = \mu/\rho = E/2\rho(1+\upsilon)$. Смещения частиц среды для этих волн перпендикулярны направлению распространения, следовательно, это поперечные или сдвиговые волны. Таким образом, (3.8) описывает сдвиговые волны с различной поляризацией.

Известно, что объемная деформация среды через вектор смещения частиц среды описывается соотношением $\Delta V/V = \operatorname{div}\boldsymbol{u}$. Так как $\operatorname{div}\boldsymbol{u}_l = \partial u_x/\partial x \neq 0$, продольные волны вызывают объемную деформацию среды, а сдвиговые нет – $\operatorname{div}\boldsymbol{u}_t = 0$.

Смещение частиц в продольных и сдвиговых волнах



Смещение частиц среды при распространении продольной волны



Смещение частиц среды при распространении поперечной (сдвиговой) волны

Продольные и сдвиговые волны чаще всего применяют для контроля узлов, изделий и материалов.

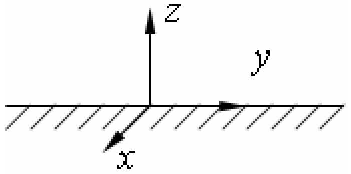
Волны в ограниченных твердых телах

Влияние границ тела существенно изменяет характер распространения волн. Последнее связано с отражением волн от границ объекта и их сложением. Рассмотрим типы волн, которые могут встречаться в ограниченных телах.

1. Наличие одной свободной границы раздела

Существование свободной границы приводит к возможности распространения *поверхностных* волн или *волн Рэлея*. Этот тип волн был открыт лордом Рэлеем в 1885 году.

Распределение смещения частиц твердого тела и выражение для скорости распространения можно получить, решив задачу о распространении волн в полуограниченной среде с граничными условиями свободной от напряжения поверхности, вектор нормали которой $\boldsymbol{n} = \{0,0,1\}$ ориентирован вдоль оси z. Равенство нулю напряжений на границе означает, что на границе выполняются условия $\sigma_{ij} n_j = 0$, $i, j = x, y, z$, следовательно, $\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0$.

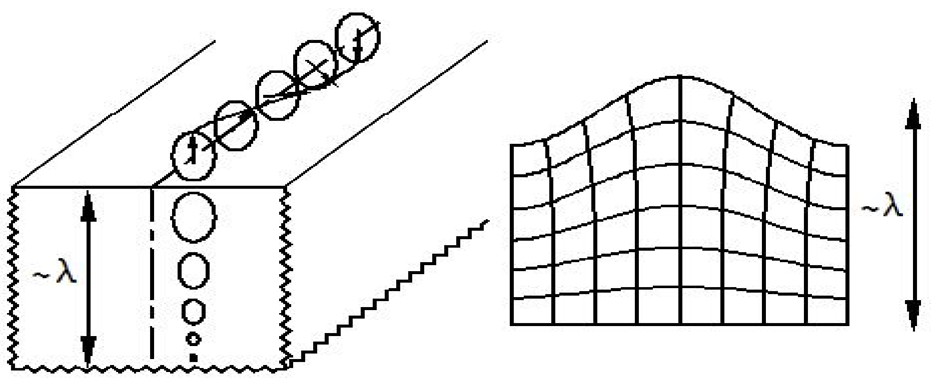


К определению напряжений на свободной границе

Подстановка граничных условий - нормальные и тангенциальные напряжения на поверхности равны нулю, в решение волнового уравнения позволяет получить выражение для скорости распространения поверхностных волн c_R и соотношение между компонентами смещения частиц в нормальном и тангенциальном направлениях по отношению к границе. Если выбрать типичное значение коэффициента Пуассона для металлов $\upsilon = 0,3$, то

$$c_R = \left(0,87 + 1,12\upsilon/\left(1+\upsilon\right)\right)\sqrt{E/2\rho\left(1+\upsilon\right)}\Big|_{\upsilon=0,3} = 0,93c_t.$$

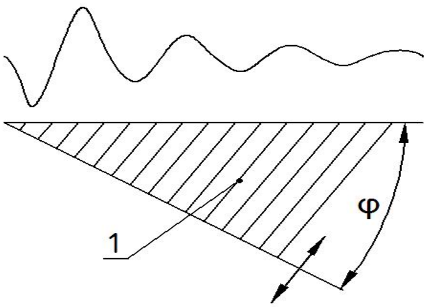
По сути дела волну Рэлея можно представить, как волну бегущую вдоль границы твердого тела, состоящую из линейной комбинации продольной и поперечной волн. Расчеты показывают, что амплитуда такой волны уменьшается с увеличением расстояния от границы. Волна затухает на расстоянии порядка длины волны от поверхности тела. Волны Рэлея могут распространяться на большие расстояния вдоль поверхности твердого тела. При распространении волн Рэлея частицы движутся, вращаясь по эллипсам, большая ось которых перпендикулярна границы. Отношение полуосей эллипса, то есть вытянутость эллипса с глубиной увеличивается. Продольная и поперечная компоненты смещения сдвинуты по фазе на 90^0 и убывают с глубиной по разному закону. Волны, подобные рэлеевским, могут распространяться и вдоль искривленных поверхностей. Однако на вогнутых участках они испытывают значительное дополнительное затухание вследствие излучения энергии вглубь материала.



Смещение частиц среды при распространении поверхностной волны

Поверхностные волны используют для выявления поверхностных дефектов и дефектов, расположенных вблизи поверхности на глубине порядка длины волны.

Вдоль поверхности могут распространяться *вытекающие* волны. Отличительная особенность этих волн - сильное ослабление волн с увеличением расстояния от источника. Например, при коэффициенте Пуассона $\upsilon = 0,3$ амплитуда волны ослабевает в e раз на расстоянии $1,75\lambda$ от точки возбуждения. При распространении вытекающих волн под углом к поверхности распространяются поперечные волны. Затухание вытекающих волн, как раз обусловлено существованием этих волн. Скорость вытекающих волн $c_{выт}$ связана с углом распространения поперечных волн $c_{выт} = c_t / \cos\varphi$, причем $c_{выт} \approx c_l$.



Вытекающие волны
1 — фронт волны

Вообще говоря, строгое решение задачи о распространении волн в полуограниченном теле, возбуждаемых механическими напряжениями, действующими на локальном участке поверхности, показывает, что в этом случае возбуждаются:

1. Продольные и поперечные волны, распространяющие объеме тела;
2. Волны Рэлея;
3. Вытекающие волны;
4. Продольные волны, распространяющиеся в приповерхностном слое;
5. Поперечные волн, распространяющиеся в приповерхностном слое. Различают

SV-волны – вертикально поляризованные волны, смещение частиц перпендикулярно поверхности;

SH-волны – горизонтально поляризованные волны, смещение частиц параллельно поверхности, их называют еще *волны Лява*.

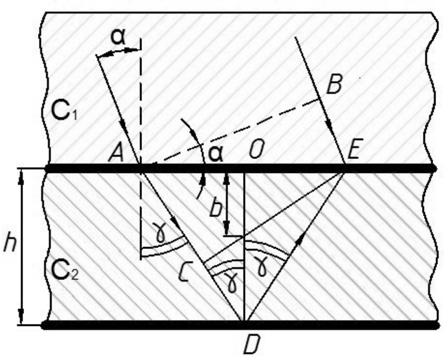
В дефектоскопии волны, указанные в п.п. 4 и 5, называют *головными*, их скорости равны соответственно c_l и c_t. Головные волны применяют для выявления дефектов в приповерхностных слоях. На практике чаще используют продольные приповерхностные волны, распространяющиеся в приповерхностном слое глубиной от λ до $(3...4)\lambda$. Поэтому, когда говорят о применении головных волн, обычно имеют в виду эти волны.

2. Наличие двух свободных границ

Если твердое тело имеет две свободные поверхности (слой, пластина), то в нем могут существовать специфические типы волн, их называют *волнами в пластинах* или *волнами Лэмба* и относят к *нормальным волнам.* Нормальные волны можно рассматривать как бегущие вдоль границы сред и стоящие в перпендикулярном направлении – по толщине пластины.

При распространении этих волн частицы среды совершают сложное колебательное движение в плоскости распространения волны. Характерное распределение амплитуды смещения точек пластины при заданной частоте называют *модой* или *формой* волны. Разные моды нормальных волн различаются числом и расположением *узловых поверхностей* – поверхностей, точки которых остаются неподвижными при распространении волны. Количество узловых поверхностей определяют номер нормальной волны.

Чтобы понять принцип возникновения нормальных волн, рассмотрим в качестве примера образование нормальных волн в слое жидкости, сдвиговой вязкостью которой в нашем случае можно пренебречь.



Образование нормальных волн в жидком слое

Из среды *1* под углом α к нормали к поверхности слоя жидкости толщиной h, среда *2*, падает плоская волна. Скорости волн в средах соответственно равны c_1 и c_2. Для того чтобы в точке *E* падающая и отраженная волна были в фазе и усиливали друг друга, необходимо чтобы разность фаз на пути *CDE* была кратной 2π, или на *CDE* должно укладываться целое число волн. Из рисунка следует

$$CD = a\cos\gamma; \quad OE = h\,\mathrm{tg}\,\gamma; \quad b = OE\,\mathrm{tg}\,\gamma = h\,\mathrm{tg}^2\,\gamma; \quad a + b = h;$$

$$DE = h/\cos\gamma; \quad CD = (h-b)\cos\gamma = h(1-\mathrm{tg}^2\gamma)\cos\gamma;$$

$$CDE = CD + DE = h(1-\mathrm{tg}^2\gamma)\cos\gamma + h/\cos\gamma =$$

$$= h/\cos\gamma\left\{\cos^2\gamma - \sin^2\gamma + \sin^2\gamma + \cos^2\gamma\right\} = 2h\cos\gamma.$$

Таким образом, условие сложения волн в фазе в точке *E* имеет вид

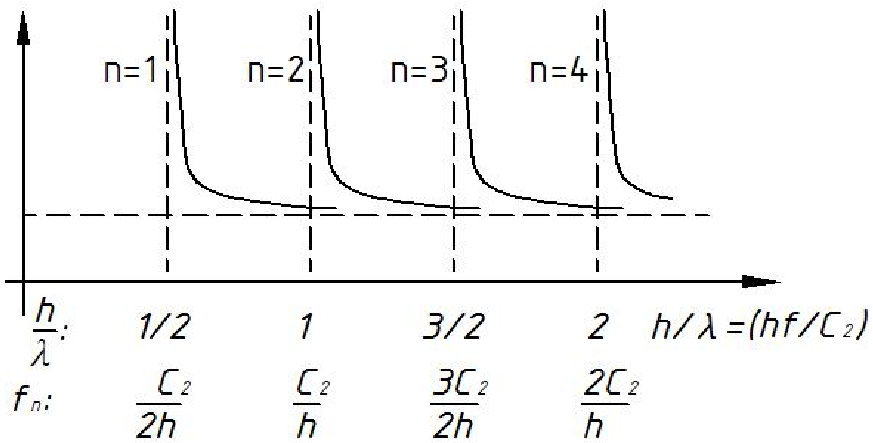
$$2h\cos\gamma = n\lambda.$$

В частном случае при нормальном падении полны из среды *1* – $\alpha = \gamma = 0$ и условие сложение волн фазе имеет вид $h = n\lambda/2$ – хорошо известное условие резонансных колебаний, образование стоячих волн в слое толщиной h – на толщине должно укладываться полуцелое число волн.

Из закона преломления Снеллиуса следует $\sin\alpha/c_1 = \sin\gamma/c_2 = \sin\gamma_p/c_p$, где c_p – скорость нормальных волн. Так как нормальные волны распространяются вдоль слоя, то $\gamma_p = 90^0$, тогда $\sin\alpha/c_1 = \sin\gamma/c_2 = 1/c_p$. Отсюда

$$c_p = c_2/\sin\gamma = c_2\Big/\sqrt{1-\cos^2\gamma} = c_2\Big/\sqrt{1-\left(n\lambda/2h\right)^2} = c_2\Big/\sqrt{1-\left(nc_2/2hf\right)^2},$$

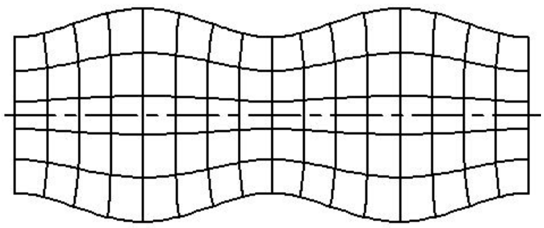
где $\lambda = c/f$. Из условия $n\lambda/2h = 1$, получим $\lambda_n = 2h/n$ или $f_n = \left(c_2/2h\right)n$. Величина $f_1 = \left(c_2/2h\right)$ называется *частотой отсечки.*



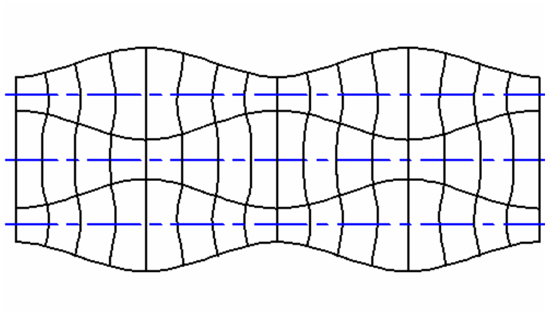
Дисперсионные кривые нормальных волн в жидком слое

При $f < f_1$ нормальные волны в слое жидкости распространяться не могут. Так как $c_p = c_p\left(\lambda\right)$, то имеет место дисперсия нормальных волн. В данном случае дисперсия обусловлена геометрией задачи о распространении волн слое жидкости, поэтому она называется геометрической дисперсией.

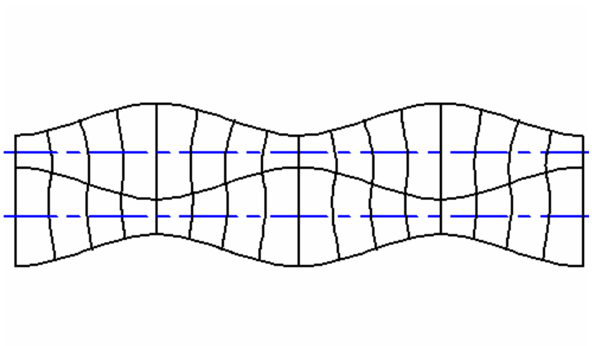
При $h/\lambda = 1/2;\, 1;\, 3/2;\, 2\ldots \quad c_p \to \infty$. Последнее означает, что все точки поверхности колеблются одновременно – синфазно. При $h/\lambda = (h/c_2)\, f \to \infty$ скорость нормальных волн стремится к c_2. Волны с нечетными номерами $\mathrm{n} = 2\mathrm{k}+1$ называются *симметричными модами*, так как движение частиц симметрично относительно центральной плоскости слоя, с четными n =2k – *антисимметричными модами,* частицы смещаются антисимметрично относительно центральной плоскости слоя.



$n = 1$



$n = 3$



$n = 2$

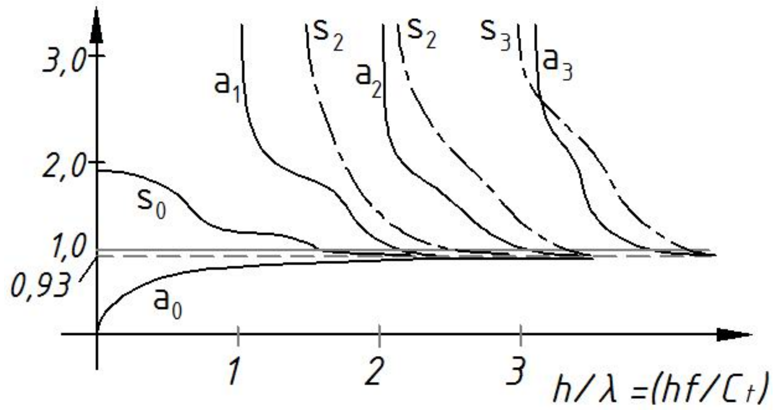
Моды низших симметричных и анти симметричных нормальных волн

Переходя к твердому слою – пластине, материал которого обладает сдвиговой упругостью, следует отметить, что хотя сущность явления сохраняется – образование стоячих волн по толщине пластине и бегущих вдоль нее, математическое решение существенно усложняется – в пластине распространяются продольные и поперечные волны. При отражении от границ эти волны частично трансформируются друг в друга, причем фаза волны при этом не кратна π.

Ниже представлены дисперсионные кривые для нормальных волн в пластине, где введены следующие обозначения:

– антисимметричные моды – a_i;

– симметричные моды – s_i.



Дисперсионные кривые нормальных волн в твердом теле

Обращает на себя внимание тот факт, что нет частоты отсечки. Нулевыми индексами отмечены моды, которые при увеличении толщины пластины переходят в поверхностные волны – волны Рэлея:

s_0 – соответствует волне расширения – сжатия;

a_0 – соответствует волне расширения – изгиба.

Волны первого и более высоких порядков возникают при определенных значениях $h/\lambda = hf/c_t$. С увеличением толщины h их скорость стремится к скорости поперечных волн c_t.

Особенности распространения нормальных волн

1. Зависимость скорости распространения от частоты колебания – геометрическая дисперсия $c_g = c_p - \lambda \partial c_p \big/ \partial\lambda$.

2. Наличие определенного распределения амплитуды колебаний по сечению при заданной частоте колебаний – формы или моды волн.

3. Существование нескольких нормальных волн, имеющих различные формы (моды), при одной и той же частоте возбуждения.

4. В общем случае волна, распространяющаяся в теле с ограниченными поперечными размерами, представляет собой суперпозицию нескольких нормальных волн.

Применение нормальных волн

Нормальные волны распространяются в пластине как в волноводе на большое расстояние.

Дефекты вызывают отражение нормальных волн, причем условия распространения нормальных волн будут меняться не только при наличии поперечных дефектов, но и продольных – расслоений, вдоль распространения волны, так как скорость зависит от толщины слоя. Отметим, что продольные и поперечные волны слабо реагируют на дефекты, расположенные вдоль распространения волн, а применение нормальных волн позволяет обнаружить такие дефекты.

Нормальные волны применяют для контроля пластин, тонких листов, оболочек обечаек и труб толщиной не более 3…5 мм.

(показать презентацию о применении нормальных волн для контроля трубопроводов)

Нормальные волны в стержнях

Рассмотрим стержень круглого сечения диаметром d. Вектор, описывающий смещение точек стержня при распространении волны вдоль его оси, в полярных координатах можно представить в виде $\mathbf{u} = \left\{u_{r;}\, u_\varphi; u_z\right\}$, где компоненты вектора описываются функциями

$$u_r(r;\varphi;z;t) = U(r;\varphi)\exp\left\{i(kz - \omega t)\right\};$$

$$u_\varphi(r;\varphi;z;t) = V(r;\varphi)\exp\left\{i(kz - \omega t)\right\};$$

$$u_z(r;\varphi;z;t) = W(r;\,\varphi)\exp\left\{i(kz - \omega t)\right\},$$

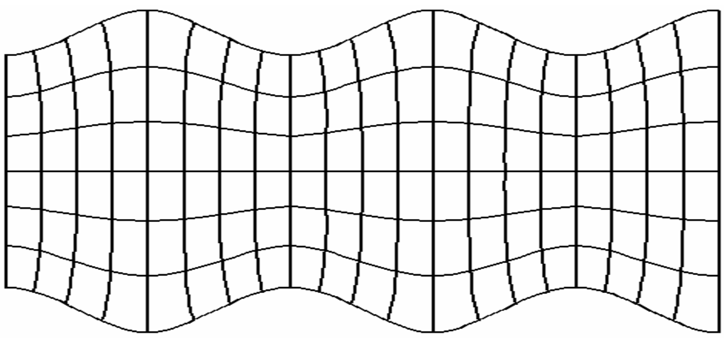
где U, V и W – функции указанных переменных.

Если $\mathbf{u}$ подставить в волновое уравнение, записанное в полярных координатах, с граничными условиями $\sigma_{rr} = \sigma_{r\varphi} = \sigma_{rz} = 0$ – поверхность стержня свободна от механических напряжений, то можно получить решения для трех типов волн:

- продольных;
- изгибных;
- крутильных.

1. Продольные волны

Для этих волн функция $V(r;\varphi) \equiv 0$, а U и W не зависят от φ. Это волны растяжения – сжатия. Продольные волны – нормальные волны, стоящие в поперечном направлении и бегущие вдоль стержня. Скорость этих волн при $d \ll \lambda$ равна $c = \sqrt{E/\rho} < c_l$, причем $c < c_l$, так как жесткость стержня меньше жесткости сплошной среды. Заметим, эта скорость часто указывается в инженерных справочниках как скорость звука в материалах.



Нормальные продольные волны в длинном тонком стержне

2. Крутильные волны

Для этих типов волн $U = W = 0$, а $V(r) \neq 0$. Каждое сечение стержня поворачивается одно относительно другого на некоторый угол.

3. Изгибные волны

Функции U, V и W отличны от нуля и зависят от r и φ. Это – нормальные волны. Различают симметричные и антисимметричные волны, скорость которых зависит от λ, то есть имеет место дисперсия этих волн.

Стержни при $d \ll \lambda$, как и пластины, являются волноводами и нормальные волны используются для контроля прутков и проволок.