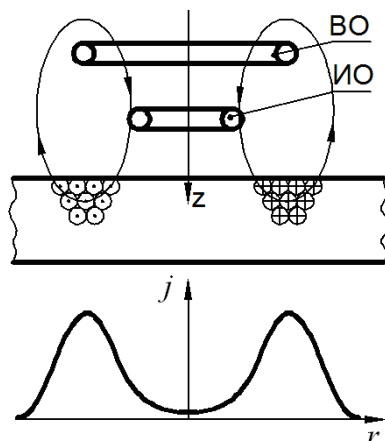


## Лекция 25

### ФИЗИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ВИХРЕТОКОВОГО КОНТРОЛЯ

Рассмотрим возбуждающую ( $BO$ ) и измерительные ( $ИО$ ) обмотки, расположенные над электропроводящим изделием. Переменное магнитное поле  $BO$  приводит к появлению в изделии вихревых токов.



Плотность вихревых токов  $j$  максимальна на поверхности изделия в контуре, диаметр которых близок к диаметру  $BO$  и убывает с увеличением  $r$ .

Плотность токов  $j$  убывает также с глубиной по закону  $j = j_0 \exp\{-z/\delta\}$ , причем

$$\delta \leq \sqrt{2/\omega\mu_0\mu\sigma},$$

где  $\omega$  — частота тока в  $BO$ ;  $\mu$  — относительная проницаемость;  $\sigma$  — удельная электрическая проводимость материала,  $(\text{Ом м})^{-1}$ .

Взаимодействие преобразователя с изделием определяется соотношением, получаемым из уравнений Максвелла,

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t; & \text{rot } \mathbf{H} &= \partial \mathbf{P} / \partial t + \mathbf{j}; \\ \text{div } \mathbf{B} &= 0; & \text{div } \mathbf{D} &= 4\pi\rho, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\rho$  — избыточная плотность заряда, обычно при вихретоковом контроле равная нулю;

$$\mathbf{B} = \mu' \mathbf{H}; \quad \mathbf{D} = \varepsilon' \mathbf{E}; \quad \mu' = \mu_0 \mu; \quad \varepsilon' = \varepsilon_0 \varepsilon; \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_{np} + \mathbf{j}_{см} + \mathbf{j}_{перенос} + \mathbf{j}_{стор},$$

причем плотность токов проводимости  $\mathbf{j}_{np}$  описывается дифференциальным законом Ома

$$\mathbf{j}_{np} = \sigma \mathbf{E}; \quad \text{плотность переносного тока определяется выражением } \mathbf{j}_{перенос} = \sigma \{\mathbf{v} \times \mathbf{B}\},$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость перемещения объекта контроля, в дальнейшем будем считать, что объект поко-

ится, или скоростью  $\mathbf{v}$  можно пренебречь; токи смещения  $\mathbf{j}_{см}$  существенны для диэлектри-

ков, поэтому ими будем пренебрегать;  $\mathbf{j}_{\text{стор}}$  — плотность токов, обусловленных действие сторонних источников, будем считать, что такие источники отсутствуют. При указанных условиях первую пару уравнений (1) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu' \partial \mathbf{H} / \partial t; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \varepsilon' \partial \mathbf{E} / \partial t + \sigma \mathbf{E}.\end{aligned}\quad (2)$$

Рассмотрим гармоническую плоскую электромагнитную волну, распространяющуюся в металле в направлении оси  $z$ , то есть  $\mathbf{H}(z) = \mathbf{H}_m(z) \exp\{i\omega t\}$  и  $\mathbf{E}(z) = \mathbf{E}_m(z) \exp\{i\omega t\}$  ( $i$  — мнимая единица), тогда

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{E}_m &= -\mu' i \omega \mathbf{H}_m; \\ \operatorname{rot} \mathbf{H}_m &= \varepsilon' i \omega \mathbf{E}_m + \sigma \mathbf{E}_m.\end{aligned}\quad (3)$$

Применив ко второму уравнению оператор  $\operatorname{rot}$  и подставив из первого уравнения  $\operatorname{rot} \mathbf{E}_m$ , получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}_m = \varepsilon' i \omega \operatorname{rot} \mathbf{E}_m + \sigma \operatorname{rot} \mathbf{E}_m = (\sigma + \varepsilon' i \omega) \operatorname{rot} \mathbf{E}_m = (\sigma + \varepsilon' i \omega) (-\mu' i \omega) \mathbf{H}_m. \quad (4)$$

Далее, вспомнив формулу двойного векторного произведения

$$\{\mathbf{a} \times \{\mathbf{b} \times \mathbf{c}\}\} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

можно записать

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}_m = \{\nabla \times \{\nabla \times \mathbf{H}_m\}\} = \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{H}_m) - \nabla^2 \mathbf{H}_m.$$

Так как

$$\{\nabla \times \mathbf{H}_m\} = \operatorname{rot} \mathbf{H}_m = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ H_{mx} & H_{my} & H_{mz} \end{vmatrix},$$

где  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  — тройка единичных векторов ортогональной системы координат  $(xyz)$ , тогда

$$\{\nabla \times \mathbf{H}_m\} = \operatorname{rot} \mathbf{H}_m = \{-\partial H_{my} / \partial z, \partial H_{mx} / \partial z, 0\}.$$

Далее,

$$\{\nabla \times \{\nabla \times \mathbf{H}_m\}\} = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H}_m = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ -\partial H_{my} / \partial z & \partial H_{mx} / \partial z & 0 \end{vmatrix},$$

следовательно,  $\{\nabla \times \{\nabla \times \mathbf{H}_m\}\} = \text{rot rot } \mathbf{H}_m = \{-\partial^2 H_{mx} / \partial z^2, -\partial^2 H_{my} / \partial z^2, 0\}$ . Тогда

векторное уравнение (4) преобразуется в три обычных:

$$\begin{aligned} -\partial^2 H_{mx} / \partial z^2 &= (\sigma + \varepsilon' i \omega)(-\mu' i \omega) H_{mx}; \\ -\partial^2 H_{my} / \partial z^2 &= (\sigma + \varepsilon' i \omega)(-\mu' i \omega) H_{my}; \\ H_{mz} &= 0. \end{aligned} \quad (5)$$

Так как компоненты  $H_{mx}$  и  $H_{my}$  являются решениями одинаковых уравнений, рассмотрим первое из них. Решение ищем в виде

$$H_{mx}(z) = A_1 \exp\{-kz\} + A_2 \exp\{kz\}, \quad (6)$$

где  $k^2 = \mu' \sigma \omega (i - \varepsilon' \omega / \sigma)$ . Так как электромагнитная волна в металле может только затухать, то  $A_2 = 0$ . Проанализируем выражение для  $k^2$ . Его можно представить в виде

$$k^2 = \mu' \sigma \omega (i - \varepsilon' \omega / \sigma) = \mu' \sigma \omega \sqrt{1 + (\varepsilon' \omega / \sigma)^2} \exp\{-i \arctg[1 / (\varepsilon' \omega / \sigma)]\} \exp\{i \pi\}.$$

Оценим значения параметров в этом соотношении для типичных материалов. Для типичных металлов  $\mu' \approx 10^2 \text{ Гн м}^{-1}$ ;  $\sigma = 6 \cdot 10^7 \text{ Ом}^{-1} \text{ м}^{-1}$ , тогда  $\varepsilon \varepsilon_0 \omega / \sigma = 1,5 \cdot 10^{-19} \varepsilon \omega$ . При типичных значениях частоты контроля  $f = 10^6 \text{ Гц}$  ( $\omega = 2\pi f$ ) и  $\varepsilon \approx 10$  находим, что  $\varepsilon' \omega / \sigma \ll 1$ ,  $1 / (\varepsilon' \omega / \sigma) \gg 1$  и  $\arctg[1 / (\varepsilon' \omega / \sigma)] \rightarrow \pi/2$ . Следовательно,

$$k^2 = \mu' \sigma \omega (i - \varepsilon' \omega / \sigma) = \mu' \sigma \omega \exp\{i \pi/2\} = i \mu' \sigma \omega$$

и

$$k = \sqrt{\mu' \sigma \omega} \exp\{i \pi/4\} = \sqrt{\mu' \sigma \omega} (1/\sqrt{2})(1 + i).$$

Окончательно, (6) записываем в виде

$$\begin{aligned} H_{mx}(z) &= A_1 \exp\{-\sqrt{\mu' \sigma \omega/2} (1 + i) z\} = \\ &= A_1 \exp\{-\alpha z\} \exp\{-i \alpha z\} = A_1 \exp\{-\alpha z\} \cos \alpha z, \end{aligned}$$

где  $\delta = 1/\alpha = \sqrt{2/\mu' \sigma \omega}$  — расстояние, на котором амплитуда электромагнитной волны уменьшается в  $e$  раз.

Для  $H_{my}$  будем иметь аналогичное выражение.

Длину волны  $\lambda$  определим, приравняв  $\alpha \lambda = 2\pi$ ,

$$\lambda = 2\pi/\alpha = 2\pi \sqrt{2/\mu' \sigma \omega}.$$

Фазовая скорость распространения волны  $c_1$  равна

$$c_1 = \lambda f = \sqrt{2\omega/\mu'\sigma} = \omega/\alpha.$$

Значения вышеуказанных параметров для некоторых металлических материалов приведены в таблице.

| Металл                          | $\delta, \text{ Ом}^{-1} \text{ м}$ | $\delta, \text{ мм}$ |                     |                     | $\lambda, \text{ мм}$ |                 |                 | $c_1, \text{ м/с}$ |                 |                 |
|---------------------------------|-------------------------------------|----------------------|---------------------|---------------------|-----------------------|-----------------|-----------------|--------------------|-----------------|-----------------|
|                                 |                                     | $f_1=50\text{Гц}$    | $f_2=10^4\text{Гц}$ | $f_3=10^6\text{Гц}$ | $50\text{Гц}$         | $10^4\text{Гц}$ | $10^6\text{Гц}$ | $50\text{Гц}$      | $10^4\text{Гц}$ | $10^6\text{Гц}$ |
| Медь                            | $6 \cdot 10^7$                      | 9,2                  | 0,65                | 0,065               | 68                    | 4,0             | 0,4             | 2,9                | 40              | 400             |
| Сталь<br>ЭИ4376<br>Х18Н9Т       | $6 \cdot 10^5$                      | 9,2                  | 6,5                 | 0,65                | 580                   | 40              | 4               | 29                 | 400             | 4000            |
| Сталь<br>( $\mu=2 \cdot 10^3$ ) | $6 \cdot 10^6$                      | 0,65                 | 0,046               | 0,0046              | 4,0                   | 0,29            | 2,9             | 0,2                | 2,9             | 29              |

Если электромагнитная волна падает на поверхность металла под углом  $\vartheta_0$ , то в соответствие с законом преломления угол распространения волны в металле  $\vartheta$  равен

$$\sin \vartheta = (c_1/c_0) \sin \vartheta_0,$$

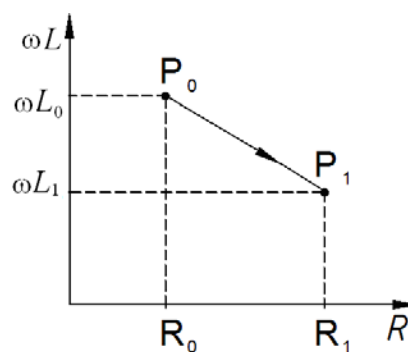
где  $c_0 = 3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$  — скорость распространения электромагнитных волн в вакууме. Коэффициент преломления равен отношению длин волн в средах  $n = \lambda/\lambda_0$ . При  $f = 10 \text{ кГц}$   $\lambda_0 = c_0/f = 3 \cdot 10^4 \text{ м}$ , а в стали  $\lambda = 40 \text{ м}$ , то есть  $n = 10^{-3}$ . Отсюда следует, что волна в металле распространяется перпендикулярно его поверхности.

Рассмотрим магнитное поле во вторичной катушке ВТП — ИО. Полное электрическое сопротивление катушек характеризуется двумя величинами:

1. Индуктивное сопротивление —  $X_L = \omega L = 2\pi f L$ , где  $L$  — индуктивность катушки.

2. Омическое сопротивление —  $R$ .

Эти характеристики катушки откладываем на графике с координатами  $R - \omega L$ .



В отсутствие испытываемого объекта пустая катушка имеет полное характеристическое сопротивление  $Z = R + i\omega L_0$ , которое показано на плоскости полного сопротивления точкой  $P_0$ .

Если в поле катушки поместить испытываемый объект, то оно изменится под действием поля вихревых токов. Это изменение поля вызывает такой же эффект, какой получился бы, если изменить характеристики самой испытательной катушки. Таким образом, влияние испытываемого объекта может быть описано как изменение параметров катушки  $L_1$  и  $R_1$  — точка  $P_1$ . Величина и направление смещения полного сопротивления от точки  $P_0$  к  $P_1$  является функцией объекта и характеристик измерительного оборудования.

**Важнейшим свойством объекта являются:**

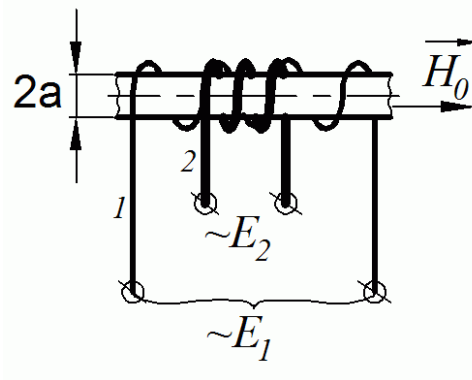
1. Электропроводность  $\sigma$ ;
2. Размеры объекта (например, диаметр прутков, труб и т.п.);
3. Магнитная проницаемость  $\mu$ ;
4. Наличие несплошностей материала, таких как, трещины, раковины, включения и т.п..

**Важнейшими характеристиками оборудования являются:**

1. Частота переменного тока;
2. Размеры и форма катушки;
3. Расстояние катушки до испытываемого объекта.

Все эти факторы влияют на полное сопротивление катушки. Зная изменение положение точки  $P$  и частоту можно *в принципе* определить все вышеуказанные параметры. Изменение характеристик катушки под влиянием объекта, можно описать, введя эффективную магнитную проницаемость, которая учитывает все вышеуказанные факторы.

Рассмотрим длинный цилиндр, помещенный внутри цилиндрической намагничивающей катушки, по которой течет переменный ток. Регистрирующая катушка находится внутри внешней.



Введем следующие допущения:

1. Внешняя катушка создает однородное магнитное поле  $H_0$  по всему сечению катушки.
2. Образец имеет бесконечную длину и постоянный радиус.
3. Электропроводность  $\sigma$  и проницаемость  $\mu$  постоянны, хотя намагниченность материала объекта меняется.
4. Различная интенсивность намагничивания возникает в результате экранирующего действия вихревых токов, которые создают магнитное поле противоположного направления. Она может быть описана введением эффективной магнитной проницаемости  $\mu_{эфф}$ .
5. Пренебрежем влиянием магнитного гистерезиса, считая, что он имеет малую величину и его влияние незначительно по сравнению с влиянием вихревых токов.

Запишем уравнения Максвелла:

$$\text{rot } \mathbf{H} = \varepsilon \partial \mathbf{E} / \partial t + \sigma \mathbf{E};$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu \partial \mathbf{H} / \partial t. \quad (7)$$

В цилиндрических координатах  $\text{rot } \mathbf{A}$  имеет компоненты:

$$\mathbf{e}_r : 1/r \partial A_z / \partial \varphi - \partial A_\varphi / \partial z;$$

$$\mathbf{e}_\varphi : \partial A_r / \partial z - \partial A_z / \partial r;$$

$$\mathbf{e}_z : 1/r \left( \partial (r A_\varphi) / \partial r - \partial A_r / \partial \varphi \right), \quad (8)$$

где  $\{\mathbf{e}_r; \mathbf{e}_\varphi; \mathbf{e}_z\}$  — реперная тройка векторов.

Так как задача радиально симметричная и поле  $\mathbf{H}_0$  бесконечно вдоль оси цилиндра, то  $\partial / \partial \varphi = \partial / \partial z = 0$ , так как отсутствует зависимость параметров задачи от координат  $\varphi$  и  $z$ . В этом случае магнитное поле имеет только одну компоненту  $\mathbf{H} = \{0; 0; H_z\}$ , которая зависит от времени и радиуса  $H_z = H_z(r; t)$ . Из (8) следует, что отличной от нуля компонентой  $\text{rot } \mathbf{H}$  является  $(\text{rot } \mathbf{H})_\varphi$ . Из первого уравнения (7) следует, что у вектора  $\mathbf{E}$  отлична от нуля только компонента  $E_\varphi = E_\varphi(r; t)$ , то есть  $\mathbf{E} = \{0; E_\varphi; 0\}$ , и у  $\text{rot } \mathbf{E}$  отлична от нуля  $(\text{rot } \mathbf{E})_z$ . В таком случае (8) примет вид

$$\mathbf{e}_\varphi : -\partial H_z / \partial r = \varepsilon \partial E_\varphi / \partial t + \sigma E_\varphi;$$

$$e_z : \partial E_\varphi / \partial r + E_\varphi / r = -\mu' \partial H_z / \partial t. \quad (9)$$

Из первого уравнения (9) находим

$$-\partial H_z / \partial r = (\varepsilon \partial / \partial t + \sigma) E_\varphi,$$

если обозначить  $\hat{L} = (\varepsilon \partial / \partial t + \sigma)$ , то

$$E_\varphi = -\hat{L}^{-1} \partial H_z / \partial r.$$

После подставки во второе уравнение (9)

$$-\hat{L}^{-1} \partial^2 H_z / \partial r^2 - \hat{L}^{-1} 1/r \partial H_z / \partial r = -\mu' \partial H_z / \partial t,$$

отсюда

$$\partial^2 H_z / \partial r^2 + 1/r \partial H_z / \partial r = \mu' (\partial^2 H_z / \partial t^2 + \sigma \partial H_z / \partial t).$$

Ищем решение этого уравнения в виде  $H_z = H_m \exp\{i\omega t\}$ , где  $H_m = H_m(r)$ , тогда

$$d^2 H_m / dr^2 + 1/r dH_m / dr = (-\mu' \varepsilon \omega^2 + i\mu' \sigma \omega) H_m,$$

так как  $\varepsilon \omega \ll \sigma$  (см. выше), то

$$d^2 H_m / dr^2 + 1/r dH_m / dr = i\mu' \sigma \omega H_m$$

Обозначим  $k^2 = i\mu' \sigma \omega$  и введем новую переменную  $p = kr$ , тогда

$$d^2 H_m / dp^2 + 1/p dH_m / dp - H_m = 0. \quad (10)$$

Это уравнение Бесселя нулевого порядка. Общий вид уравнений Бесселя  $n$ -го порядка имеет вид

$$y'' + y'/x - (1 + n^2/x^2)y = 0.$$

Общее решение этого уравнения

$$y(x) = AI_n(x) + BK_n(x),$$

где  $I_n(x)$  — функция Бесселя второго рода  $n$ -го порядка;  $K_n(x)$  — функция Кельвина  $n$ -го порядка. Так как у нас  $n = 0$ , то решение (10) имеет вид

$$H_m(kr) = AI_0(kr) + BK_0(kr).$$

Так как функция  $K_0(kr)$  при  $r \rightarrow 0$  имеет особенность  $K_0(kr) \rightarrow \infty$ , то из физических соображений следует, что необходимо положить  $B = 0$ , тогда

$$H_m(kr) = AI_0(kr).$$

Приведем для справок следующие формулы:

$$I_n(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{k! \Gamma(n+k-1)}; \quad I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2};$$

$$\Gamma(n+1) = n!; \quad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt.$$

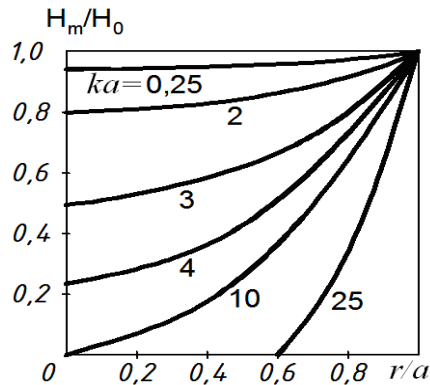
Постоянную  $A$  находим из граничных условий, а именно,

$$H_0 = H_n(a) = A I_0(ka); \quad A = H_0 / I_0(ka),$$

то есть

$$H_m(kr) = H_0 I_0(kr) / I_0(ka).$$

Зависимость этой функции от параметров приведен на рисунке.



Магнитная индукция равна  $B_z = \mu_0 \mu H_m$ . Поток, пронизывающий вторую катушку и неферромагнитный образец, равен

$$\Phi_{об} = 2\pi \int_0^a \mu_0 \mu H_m r dr = 2\pi \mu_0 \mu H_0 / I_0(ka) \left\{ \int_0^a I_0(rk) r dr \right\}.$$

Введем  $\mu_{эфф}$  из условия, что по всему сечению образца действует поле  $H_0$ , но внутри образца имеется комплексная проницаемость  $\mu_{эфф}$ , такая что

$$\Phi_{об} = \pi a^2 \mu_0 \mu_{эфф} H_0,$$

Приравняв два последних соотношения, получим

$$a^2 \mu_{эфф} = \left\{ 2\mu / I_0(ka) \right\} \left\{ \int_0^a I_0(kr) r dr \right\},$$



откуда

$$\mu_{\text{эфф}} = \left\{ 2\mu/a^2 I_0(ka) \right\} \left\{ r I_1(kr)/k \right\} \Big|_0^a = 2\mu I_1(ka)/ka I_0(ka).$$

У нас  $ka = a\sqrt{\omega\mu\sigma} \sqrt{i} = a\sqrt{\omega\mu\sigma} e^{i\pi/4}$

Из теории специальных функций следует

$$I_n(x e^{\pm i\pi/4}) \cdot e^{\pm i\pi n/2} = ber_n(x) + i bei_n(x),$$

где  $ber_n(x)$  и  $bei_n(x)$  — специальные функции (см. Янке Е., Эмде Р., Леш Ф. «Специальные функции». — М.: Наука, 1968.). В нашем случае

$$I_0(x e^{\pm i\pi/4}) = ber_0(x) + i bei_0(x).$$

Частота, при которой  $|ka| = 1$  называется *граничной частотой*  $f_g$

$$|ka| = a\sqrt{\omega\mu\sigma} = a\sqrt{2\pi f_g \mu\sigma} = 1,$$

откуда

$$f_g = 1/2\pi\sigma\mu a^2,$$

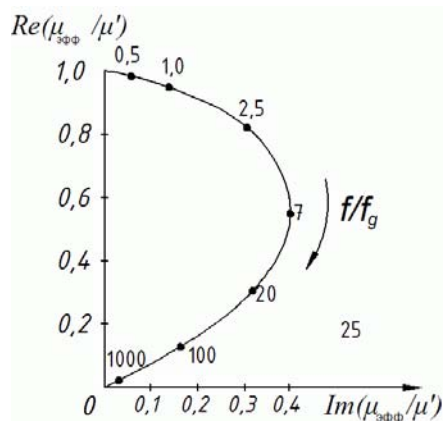
следовательно, параметр, который определяет все характеристики в задаче —  $ka$ , в свою очередь, зависит только от отношения рабочей частоты  $f$  к граничной частоте  $f_g$ :

$$ka = \sqrt{i f/f_g}.$$

В частности, можно ввести относительную эффективную магнитную проницаемость

$$\mu'_{\text{эфф}} = \mu_{\text{эфф}}/\mu = \left| \Phi(f/f_g) \right| e^{i\varphi(f/f_g)} = \Phi_1(f/f_g) + i\Phi_2(f/f_g),$$

которая определяется отношением  $f/f_g$ .



## Закон подобия

Таким образом, при равных значениях параметра  $ka$  или при равных значениях отношения рабочей и граничной частоты  $f/f_g$ , распределение вихревых токов, магнитных полей и наводимых ЭДС в двух экспериментах будет одинаково. Это утверждение носит название *закона подобия*. Этот факт используют для моделирования.

Последнее означает, что можно использовать результаты испытаний, полученные в удобных для проведения экспериментов условиях, для предсказания характера влияния тех или иных факторов, не всегда поддающихся точному непосредственному изменению, на информативные параметры вихретокового контроля.

Например, заполняют ртутью форму из стекла, в которую вводят имитаторы дефектов из непроводящего материала. Полученные результаты обобщают, приводят к безразмерному виду и используют в дальнейшем при контроле реальных объектов. Таким образом, результаты испытаний на модели можно затем применить к испытываемому объекту с другими размерами, электропроводностью и относительной магнитной проницаемостью.

Влияние трещин в контролируемых образцах на изменение параметров измерительной катушки на основе этого закона можно изучать на образцах увеличенного сечения с искусственными дефектами, форма которых подобна трещинам.

## ЭДС во вторичной катушке

При отсутствии образца во вторичной катушке наводится ЭДС холостого хода

$$E_{хол} = -n d\Phi/dt; \quad E_{хол} = -in\omega(\pi d^2/4)\mu_0 H_0,$$

то есть

$$\Phi = (\pi d^2/4)\mu_0 H_0 e^{i\omega t}.$$

Абсолютное значение ЭДС холостого хода равно

$$|E_{хол}| = \bar{E}_{хол} = 2\pi f n (\pi d^2/4)\mu_0 H_0,$$

где  $n$ ,  $d$  — число витков и диаметр вторичной катушки.

После ввода образца общий магнитный поток, созданный  $H_0$ , будет складываться из потока в образце и потока в зазоре. Доля ЭДС от потока в зазоре равна

$$E_z = -i 2\pi f n \mu_0 H_0 (\pi/4)(d^2 - d_0^2), \quad (d_0 = 2a).$$

Доля в ЭДС от магнитного поля в образце:

$$E_{обр} = -i 2\pi f n (\pi d_0^2 / 4) \mu_{эфф} \mu_0 H_0 = -i 2\pi f n (\pi d_0^2 / 4) \mu'_{эфф} \mu_0 \mu H_0.$$

Результирующая ЭДС

$$E = E_z + E_{обр} = -i 2\pi f n \mu_0 H_0 (\pi/4) (d^2 - d_0^2 + \mu \mu'_{эфф} d_0^2).$$

Обозначим  $\eta = d_0^2 / d^2$  — коэффициент заполнения, доля сечения катушки заполненная образцом (изделием), тогда

$$E = E_{хол} (1 - \eta + \eta \mu \mu'_{эфф}) = -i |E_{хол}| (1 - \eta + \eta \mu \mu'_{эфф}). \quad (11)$$

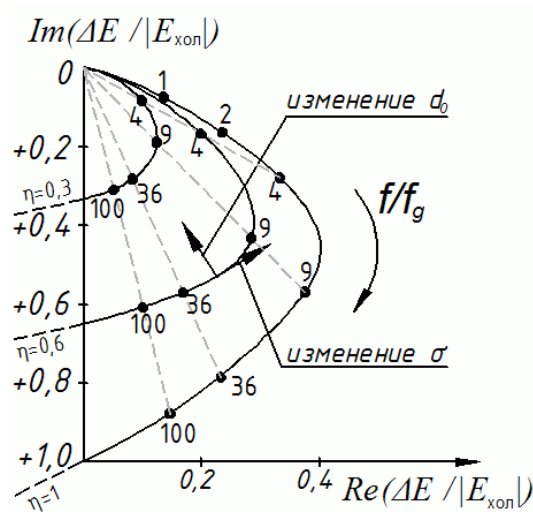
Если в эту формулу подставить  $\mu'_{эфф} = \text{Re}\{\mu'_{эфф}\} + i \text{Im}\{\mu'_{эфф}\}$  и выделить  $\text{Re}\{E\}$  и  $\text{Im}\{E\}$ , то на плоскости с этими координатами можно получить семейство кривых, где параметром будет  $\eta$ :

$$\begin{aligned} E / |E_{хол}| &= -i (1 - \eta + \eta \mu \text{Re}\{\mu'_{эфф}\} + i \eta \mu \text{Im}\{\mu'_{эфф}\}); \\ (E - E_{хол}) / |E_{хол}| &= \Delta E / |E_{хол}| = -i (-\eta + \eta \mu \mu'_{эфф}). \end{aligned} \quad (12)$$

Для немагнитного материала  $\mu = 1$ , поэтому

$$\text{Re}\{\Delta E / |E_{хол}|\} = \mu \eta \text{Im}\{\mu'_{эфф}\};$$

$$\text{Im}\{\Delta E / |E_{хол}|\} = -(-\eta + \eta \mu \text{Re}\{\mu'_{эфф}\}) = \eta (1 - \mu \text{Re}\{\mu'_{эфф}\}).$$



Внешняя кривая  $\eta = 1$  по форме совпадает с кривой для  $\mu'_{эфф}$ . Изменение  $\sigma$  влияет только на параметр  $f/f_g$ , а изменение диаметра изделия  $d_0$  изменяет как параметр  $f/f_g$ , так и  $\eta$ .

При  $f = \text{const}$  и  $d_0 = \text{const}$  при известной фиксированной электропроводности  $\sigma$  испытываемому материалу на комплексной плоскости напряжений соответствует только одна точка. Если эту комплексную плотность воспроизвести на экране осциллографа, то по положению точки можно определить как диаметр, так и электропроводность  $\sigma$  материала.