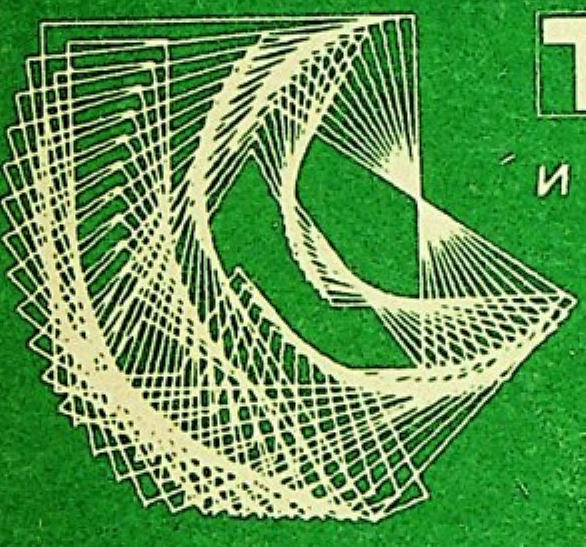
593.1
19 19
93

МИФИ
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Д. А. Васильков, В. К. Ляпидевский



Т ФАКУЛЬТЕТ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ИЗЛУЧЕНИЙ

Москва 1987

539.1
В19

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Д.А. Васильков, В.К. Ляпидевский

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ДЕТЕКТИРОВАНИЯ ИЗЛУЧЕНИЙ

БИБЛИОТЕКА
МИФИ

Утверждено
редсоветом института
в качестве учебного пособия

Библиотечный
фонд
НИЯУ МИФИ
г. Москва

Москва 1987

УДК 539.16:07, 519.83

Васильков Д.А., Ляпидевский В.К. Математические аспекты детектирования излучений: Учебное пособие. – М.: МИФИ, 1987. – 68 с.

В первой главе пособия рассмотрены общие свойства излучений потока частиц, общие характеристики детекторов излучений и задачи определения характеристик излучения по показаниям детекторов. Во второй главе приведены необходимые сведения из теории множеств и даны краткие сведения и пояснения к используемым математическим понятиям.

Учебное пособие предназначено для студентов старших курсов, аспирантов, инженеров и научных работников в области экспериментальной физики.

Глава 1 написана В.К. Ляпидевским, глава П – Д.А. Васильковым.

Рецензенты:
А.С. Шиканов, Л.А. Глиберман

© *Московский инженерно-физический институт, 1987 г.*

ГЛАВА 1. ИЗЛУЧЕНИЯ И ДЕТЕКТОРЫ

1. ИЗЛУЧЕНИЯ

Модели спектра

Рассмотрим излучение как поток частиц (или квантов), выходящих из источника и попадающих в детектор. Поток частиц, проходящий через входное окно детектора, имеет распределения по энергии, во времени и в пространстве. Стационарный поток есть поток, не изменяющий своих характеристик за время измерений. Это означает, что среднее за определенный промежуток времени число частиц, падающих на входное окно детектора, постоянно. Распределение частиц по энергии также не изменяется во времени. Будем считать, что число частиц, попадающих в промежуток времени t, и число частиц, попадающих во входное окно детектора, распределены по закону Пуассона, и характеризуются эти распределения средними значениями. Следовательно, поток частиц будем характеризовать средним по времени и по площади числом частиц.

Такое представление потока частиц предполагает, что выполняется (кроме стационарности и отсутствия последействия) условие ординарности событий. Это означает, что вероятность попадания на элементарный участок времени или пространства двух или более частиц пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одной частицы. Однако это условие выполняется не во всех моделях спектра.

Произвольное излучение можно представить в виде неотрицательной функции $f(E)$, заданной в некотором диапазоне значений энергии $[E_{min}, E_{max}]$ и отличной от нуля на некотором конечном или счетном множестве. Каждой $f(E)$ отвечает свое множество, на котором она положительна. Если ввести функции $\varphi(E, E^{(i)})$, равные единице при $E = E^{(i)}$ и нулю при $E \neq E^{(i)}$, то функцию $f(E)$, описывающую произвольное излучение, можно представить в виде линейной комбинации таких функций

$$f(E) = \sum_i f(E^{(i)})\, \varphi(E, E^{(i)}). \qquad (1)$$

Функция $\varphi(E, E^{(i)})$ описывает моноэнергетическое излучение единичной интенсивности, отвечающее значению энергии $E = E^{(i)}$. Любое излучение представляет собой линейную комбинацию моноэнергетических излучений единичной интенсивности.

Функцию $f(E)$, отличную от нуля только в одной точке $E^{(i)}$, т.е. функцию вида $f(E) = b_i\, \varphi(E, E^{(i)})$, где $b_i = f(E^{(i)})$, можно назвать моноэнергетическим излучением. Из физических соображений следует, что в (1) сумма $\sum_i f(E^{(i)})$ конечна.

Класс F функций $f(E)$, описывающих произвольные излучения, таков, что сумма любых двух функций $f_1(E) \in F$ и $f_2(E) \in F$ тоже принадлежит F. Умножив $f(E) \in F$ на любое число $\lambda > 0$, мы снова получим функцию из класса F.

Рассмотрим класс H действительных функций $h(E)$, заданных в диапазоне $[E_{min}, E_{max}]$, отличных от нуля лишь на некотором конечном или счетном множестве $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots$ (своем для каждой $h(E)$) и удовлетворяющих условию $\sum_i |h(E^{(i)})| < +\infty$.

Если ввести норму функции $\|h(E)\| = \sum_i |h(E^{(i)})|$, то H окажется линейным нормированным пространством, а класс F неотрицательных функций $f(E) \in H$ – конусом в этом пространстве (или полугруппой с нулем, допускающей умножение на положительные числа).

Конус излучений является полугруппой потому, что мы не вводим понятия отрицательного излучения и, таким образом, не вводим противоположного элемента. В природе не существует излучений, сложение которых дало бы нуль.

В рассмотренной модели спектра предполагается нулевая длительность излучения и бесконечно малая ширина спектральной линии. Пусть частицы следуют друг за другом и распределены во времени по закону Пуассона. Если любое из моноэнергетических излучений с соответствующим коэффициентом $b = f(E^{(i)})$ распределено по закону Пуассона, то суммарный поток также будет пуассоновским. Это обусловлено независимостью пуассоновских потоков с энергиями $E^{(1)}, E^{(2)}, \ldots$.

В действительности любое моноэнергетическое излучение имеет конечную ширину спектральной линии (и конечную длительность). При увеличении потока частиц вероятность попадания двух и более частиц на элементарный участок времени или пространства растет. Это приводит к нарушению ординарности потока. Поток частиц уже не будет пуассоновским.

Рассмотрим однородное излучение, т.е. излучение, состоящее из частиц одной и той же природы. Будем называть спектром однородного излучения распределение числа частиц по какому-нибудь параметру, например по энергии. Будем различать дискретные (линейчатые) и непрерывные спектры.

Дискретные спектры. Если спектр излучения содержит сравнительно небольшое число моноэнергетических излучений, то он дискретный (линейчатый) и характеризуется набором моноэнергетических излучений, причем каждой энергии кванта E_i соответствует среднее число частиц N_i. Формально дифференциальный линейчатый спектр можно описать линейной комбинацией δ-функций Дирака.

Как уже упоминалось, в действительности любое моноэнергетическое излучение имеет конечную ширину и поэтому моноэнергетические излучения являются непрерывными функциями.

Непрерывный спектр. Разобъем весь диапазон энергий на конечное число участков (разрядов). Ширину участка выберем так, чтобы в каждый попадало более нескольких десятков частиц. (Следует отметить, что выбор числа участков и их ширины является одной из основных задач при подготовке эксперимента и зависит от большого числа различных факторов.)

Таким образом, непрерывный спектр представляется в виде ряда прямоугольников (столбиков). Ширина каждого прямоугольника равна ΔE, а площадь – числу частиц, попавших в этот интервал.

Если вместо числа частиц измерять полную энергию излучения в интервале энергий $(E, E+\Delta E)$, то площдь прямоугольника равна энергии излучения в этом интервале. Чем больше число разбиений, т.е. чем меньше интервал энергий, тем меньше в него попадает частиц и тем меньше статистическая точность измерений. После выбора числа участков и их ширины проводим серию экспериментов и определяем среднее число частиц в каждом участке. Точность определения этого среднего значения (в каждом участке) тем больше, чем больше число частиц попало в данный участок.

При увеличении числа частиц, попадающих в данный участок, среднее значение приближается к математическому ожиданию, причем закон распределения среднего значения становится нормальным уже при сравнительно небольшом числе частиц. Существенно подчеркнуть, что это происходит независимо от закона распределения случайной величины, т.е. не зависит от вида энергетического спектра.

В ряде случаев, например для сравнения различных спектров, необходимо провести их нормировку. Для этого вводится условие нормировки. Вместо числа частиц, попавших в ΔE, можно взять отношение N_i/N. Тогда

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{N_i}{N} = 1, \tag{2}$$

где N – полное число частиц; N_i – число частиц попавших в участок $(E, E+\Delta E)$.

При таком представлении мы получаем спектр в виде гистограммы.

Действительно, площадь прямоугольника N_i/N есть частота появления частиц на участке спектра $(E, E+\Delta E_i)$. Если участки, на которые разбит весь спектр, равны, то высоты прямоугольников прямо пропорциональны соответствующим числам частиц.

Очевидно, что при большом числе частиц N можно разбивать спектр на более мелкие участки, т.е. уменьшать величину участка ΔE_i. При этом верхняя граница гистограммы будет все больше приближаться к некоторой кривой. Эта кривая представляет собой график плотности распределения числа частиц по энергии.

В ряде экспериментов необходимо измерять не число частиц, попавших в интервал $(E, E+\Delta E)$, а непосредственно суммарную кинетическую энергию всех частиц, попавших в этот интервал. Тогда площадь прямоугольника равна энергии излучения в интервале $(E, E+\Delta E)$. Полученное распределение будем называть энергетическим спектром и обозначать $\Phi(E)$. Эта функция характеризует распределение энергии излучения по энергии кванта излучения $\Phi(E)$.

Подчеркнем, что энергетический спектр является однозначной функцией кванта (или номера участка) излучения. Это означает, что каждой энергии кванта излучения ставится в соответствие единственное число (среднее число частиц в одном случае и средняя кинетическая энергия — в другом). Если же спектры представлены в виде гистограммы, то вместо энергии кванта берут номер участка, а число частиц или энергию излучения усредняют по соответствующему участку. Здесь также следует ввести условие нормировки, потребовав, чтобы

$$\int_{E_{min}}^{E_{max}} \Phi(E)\, dE = 1. \tag{3}$$

Для гистограммного представления спектра должно быть выполнено условие

$$\sum_k \Phi_k \Delta E_k = 1,$$

где $\Phi_k \Delta E_k$ — есть нормированная энергия излучения, приходящаяся на участок спектра шириной ΔE_k. Эта энергия равна площади "столбика" с основанием ΔE_k. Полная площадь гистограммы равна 1.

Представление спектра в виде линейной комбинации элементарных спектров

Рассмотрим излучение с энергетическим спектром $\Phi(E)$, который можно представить в виде линейной комбинации элементарных спектров $\varphi_k(E)$:

$$\Phi(E) = \sum_{k=1}^{N} \varphi_k(E)\, p_k , \tag{4}$$

где $\varphi_k(E)$ — k-й элементарный спектр, а p_k — неотрицательные коэффициенты. По определению полная энергия любого излучения с элементарным спектром равна 1, т.е. $\int_{E_{min}}^{E_{max}} \varphi_k(E)\, dE = 1$.

2. ДЕТЕКТОРЫ

Детектор как преобразователь энергии излучения в сигнал

Рассмотрим детектор как некоторое устройство (часть детектирующей излучение системы), в котором происходит преобразование энергии регистрируемого излучения, в результате чего на выходе детектора появляется сигнал. (Физические процессы, приводящие к образованию сигнала, здесь не рассматриваются.)

Пусть на входное окно детектора нормально его поверхности падает поток частиц одинаковой природы. Поток частиц может быть стационарным (см. п.1) и импульсным. Импульсным потоком будем называть поток частиц, время существования которого по порядку величины сравнимо с длительностью процессов, приводящих к образованию сигнала на выходе детектора.

Будем считать, что всюду выполняется принцип суперпозиции, т.е. потоки частиц складываются, не взаимодействуя между собой.

В общем случае детектор преобразует излучение, являющееся функцией времени $\varphi(t)$ (или других переменных), в сигнал $a(t)$, который является также функцией времени, но отличающейся от первой. Это означает, что детектор играет роль оператора, ставящего в соответствие функции $\varphi(t)$ некоторую функцию $a(t)$. Обозначив этот оператор буквой А, мы сможем записать $A[\varphi(t)] = a(t)$.

Переменная t может иметь другой физический смысл. Например, вместо временно́го спектра можно рассматривать энергетический спектр. Более того, излучение может быть функцией нескольких переменных (например, если энергетический спектр изменяется во времени).

Рассмотрим в качестве примера процедуру измерения спектра – распределения числа частиц N по энергии кванта излучения E. Заметим, что это распределение является однозначной функцией энергии кванта излучения. В реальном эксперименте для измерения энергетических спектров применяют многоканальные системы – на выходе каждого канала измеряется сигнал a_i, выражаемый одним числом. Если выход канала считать выходом некоторого детектора, то каждый детектор в этом случае является функционалом – он преобразует функцию в число.

Одна из основных задач детектирования излучений – это восстановление характеристик излучения по сигналам, измеренным на выходе детекторов. Для этого необходимо знать прежде всего общие характеристики детекторов как преобразователей излучения в сигналы.

Спектральные характеристики и форма линии

Возьмем систему из n детекторов. Будем считать, что сигнал на выходе каждого детектора пропорционален поглощенной в нем энергии. Отклик i-го детектора на элементарное k-е излучение*) обозначим a_{ik}. Тогда вектора-строка

$$a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots, a_{1k}, \ldots, a_{1N} \tag{5}$$

есть дискретное представление спектральной характеристики первого детектора. Соответственно, вектор-строка для второго детектора есть дискретное представление его спектральной характеристики и т.д.

Заметим, что для получения спектральной характеристики необходимо последовательно во времени облучать детектор излучением сначала с одним элементарным спектром, затем с другим и т.д. Сигнал a_{ik} на выходе i-го детектора соответствует элементарному спектру k.

Для системы, состоящей из n детекторов, получим прямоугольную матрицу, каждая строка которой есть дискретное представление спектральной характеристики соответствующего детектора:

$$(a_{ik}) . \tag{6}$$

Каждый столбец матрицы — это отклик системы детекторов на некоторое элементарное излучение, т.е. каждый столбец матрицы является формой линии излучения k (при действии на систему детекторов излучений с соответствующим k-ым элементарным спектром). При действии на систему детекторов излучений с k-м элементарным спектром полученные на входах детекторов отклики можно записать в виде вектора-столбца

$$\begin{matrix} a_{1k} \\ a_{2k} \\ \cdots \\ a_{ik} \\ \cdots \\ a_{nk} \end{matrix} \tag{7}$$

который является формой линии k-го излучения. Заметим, что форма линии может быть получена как при последовательном действии на детектор излучений с k-ым элементарным спектром, так и при одновременном действии этого излучения на все детекторы, в то время как спектральная характеристика детектора может быть получена только при последовательном действии на детектор излучения с элементарными спектрами с последующей записью сигнала на входе детектора.

---

*) Обычно в качестве k-го излучения используют моноэнергетическое излучение.

Аппаратурный спектр

Если на детектор действует излучение, являющееся линейной комбинацией излучений с элементарными спектрами, то отклик детектора на это излучение представляется в виде

$$a_i = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} \rho_k , \qquad i = \overline{1, n} , \tag{8}$$

где ρ_k — неотрицательные коэффициенты, те же, что в формуле (4) для спектра излучения, а a_{ik} отклик i-го детектора на излучение с k-ым элементарным спектром. Таким образом, отклик любого детектора на излучение представляется линейной комбинацией откликов этого детектора на излучение с элементарными спектрами.

В зависимости от свойств многодетекторной системы аппаратурный спектр может быть получен либо одновременным действием на все детекторы короткого импульса излучения, либо последовательным во времени анализом амплитуд сигналов от каждой зарегистрированной частицы.

Во втором случае амплитуда сигнала измеряется на выходе многоканального анализатора, включенного после детектора. В дальнейшем мы не будем делать различия между многодетекторной и многоканальной системой, характеризуя и ту и другую состоянием ее выходов.

Векторное представление сигналов

Сигнал на выходе детектора будем характеризовать одним числом. Во всех случаях это число пропорционально величине поглощенной в объеме детектора энергии. Рассмотрим систему, состоящую из n детекторов.

Упорядоченный набор n чисел, появляющихся на выходах системы под действием излучения — аппаратурный спектр — представим в виде n-мерного вектора, где n — число детекторов (число каналов). Сигналы на выходах детекторов a_i, где $i=\overline{1,n}$ будут компонентами вектора a:

$$a = (a_1, a_2, \ldots, a_n) .$$

В силу линейности детекторов при увеличении энергии падающего на детекторы излучения в α раз сигналы на выходах детекторов, т.е. компоненты вектора a, также увеличатся в α раз.

Представление сигналов на выходах детекторов в виде компонент вектора позволяет применять аппарат векторной алгебры для установления ряда важных свойств детектирующих систем. Кроме того, в случае небольшого числа каналов наглядность представлений позволяет сделать очевидными некоторые важные положения. Для этого необходимо рассмотреть свойства конуса сигналов.

Конус сигналов. Для того чтобы построить конус сигналов, необходимо располагать источниками моноэнергетического излучения. (Если заранее известно, что спектр излучения является линейной комбинацией излучений с элементарными спектрами, отличными от моноэнергетических, то для построения конуса сигналов необходимо располагать источниками излучений с элементарными спектрами.) Подействовав излучением от такого источника на систему детекторов, мы получим отклики детекторов. Для простоты будем считать, что все отклики – положительные числа.*)

Выберем систему координат в пространстве с числом измерений, равным числу n детекторов. По осям координат будем откладывать сигналы (отклики) соответствующих детекторов. Тогда каждому моноэнергетическому (элементарному) излучению будет соответствовать точка в векторном пространстве. Проведем через начало координат и эту точку прямую. Это образующая конуса. Повторяя описанную процедуру, построим границу конуса сигналов.

Конус сигналов является выпуклым телом, так как любая точка внутри конуса соответствует некоторому излучению, которое может быть представлено линейной комбинацией моноэнергетических (элементарных) излучений. Если взять произвольно две точки, принадлежащие конусу, то все точки отрезка, соединяющего эти две точки, также принадлежат конусу. Это является следствием того, что линейная комбинация сигналов, есть тоже сигнал. Последнее заключение по существу основано на том, что множество излучений выпукло, а линейный образ выпуклого множества также представляет собой выпуклое множество.

Вектор, выходящий из начала координат с координатами, равными откликам детекторов на данное излучение, удобно назвать в соответствии с установившейся в оптике терминологией цветом данного излучения. При изменении интенсивности излучения конец вектора перемещается вдоль луча, выходящего из начала координат. Таким образом, эта прямая соответствует излучению с вполне определенным спектром, но не зависит от его полной энергии. Будем называть такой луч определенного направления цветностью излучения. Таким образом, все излучения одинаковой цветности находятся на одном и том же луче, выходящей из начала координат.

Количественно цвет характеризуется координатами конца вектора, т.е. величиной сигналов на выходах детекторов.

Двумерный конус. Предположим, что $n = 2$, т.е. мы располагаем двумя детекторами. Отклики детекторов, соответствующие энергиям E_{min}

---

*) В действительности отклики – сигналы на выходах детекторов – можно складывать и вычитать, поэтому можно ввести отрицательные сигналы.

и E_{max} , являются граничными образующими конуса. Все отклики детекторов от излучений с произвольным спектром будут лежать в координатной плоскости внутри конуса. Следует отметить два важных свойства двумерного конуса.

Первое свойство: цвет любого излучения (с любым спектром) равен цвету моноэнергетического излучения с вполне определенной энергией кванта. Это свойство позволяет ввести важное понятие — эффективная энергия кванта излучения. Действительно, вектор соответствующий любому излучению, лежит внутри конуса, а любой вектор внутри конуса соответствует какому-то моноэнергетическому излучению. Таким образом, будем называть энергию кванта, соответствующую этому моноэнергетическому излучению, эффективной энергией кванта излучения.

Второе свойство: любой цвет может быть получен линейной комбинацией двух других цветов. В частности, любой цвет может быть получен линейной комбинацией двух цветов моноэнергетических излучений с энергией кванта E_{min} и E_{max} . Это также означает, что цвет любого моноэнергетического излучения (за исключением граничных цветов, соответствующих максимальной и минимальной энергии кванта излучения) может быть получен линейной комбинацией двух цветов моноэнергетических излучений.

Трехмерный конус. Отклики системы из трех детекторов на излучения образуют трехмерный конус. Систему из трех детекторов будем называть нормальной, если выполняется следующее важное условие: отклик системы на любое моноэнергетическое излучение не может быть представлен линейной комбинацией откликов других моноэнергетических излучений.[*)]

Иначе говоря, внутренняя точка конуса, соответствующая отклику трех детекторов на произвольное (не моноэнергетическое) излучение, не соответствует никакому отклику на моноэнергетическое излучение. Напомним, что для системы из двух детекторов это условие не выполняется: внутренняя точка двумерного конуса всегда соответствует отклику на какое-то моноэнергетическое излучение.

Возьмем произвольную точку на поверхности конуса, соответствующую отклику на моноэнергетическое излучение, и проведем через нее прямую, параллельную одной из координатных осей. Для трехмерного конуса прямая пройдет в общем случае внутрь конуса. Это означает, что существуют спектры излучения, которые дают одинаковые отклики первых двух детек-

---

[*)] Это условие выполняется, если считать, что спектральные характеристики детекторов $\alpha_1(E), \ldots, \alpha_4(E)$ положительны и имеют непрерывные производные $\alpha_i'(E)$ во всем диапазоне энергий квантов $[E_{min}, E_{max}]$. В общем случае это условие не является необходимым. Например, спектральная характеристика может быть определена в конечном числе точек. Однако такое рассмотрение усложняет описание основных свойств конуса сигналов.

торов, но различные отклики третьего детектора. Существенно, что отклик третьего детектора может быть представлен точкой как на поверхности конуса, так и внутри его при неизменных показаниях двух других детекторов. Это означает, что отклики первого и второго детекторов не изменяются при замене моноэнергетического излучения линейной комбинацией моноэнергетических излучений. Это свойство трехмерного конуса есть следствие свойства двумерного конуса, заключающегося в том, что цвет любого излучения равен цвету моноэнергетического излучения с вполне определенной энергией кванта. В трехмерном конусе отклик на любое излучение может быть представлен как отклик на излучение, являющееся линейной комбинацией двух моноэнергетических излучений.

Четырехмерный конус. Конус является четырехмерным телом. Поверхность конуса имеет размерность на единицу меньше, т.е. трехмерна. Если размерность конуса больше трех, то через точку, лежащую на границе конуса и соответствующей моноэнергетическому излучению, нельзя провести внутрь конуса прямую, параллельную хотя бы одной из координатных осей. В противном случае равные показания трех детекторов соответствовали бы некоторому моноэнергетическому излучению (точка на границе конуса) и вместе с тем линейной комбинации моноэнергетических излучений (точки внутри конуса). Но это противоречит свойствам нормальной системы из трех детекторов.

Поэтому для системы детекторов с $n \geqslant 4$, образующих конус (если среди них есть нормальная система из трех детекторов), выполняется важное условие: прямая, проходящая черех точку конуса, соответствующая моноэнергетическому излучению и параллельная координатной оси, имеет единственную общую точку с конусом.

Введение эталоного детектора

Введем детектор, показания которого условно приняты равными единице. Введение такого эталонного детектора геометрически равносильно пересечению конуса гиперплоскостью равных значений показаний эталонного детектора. Если сигнал на выходе эталонного детектора обозначить $a_{эт}$, то гиперплоскость проводится при значениях $a_{эт} = 1$.

Если размерность конуса равна n, то размерность гиперплоскости равна $n - 1$. Таким образом, в двумерном конусе (при $n = 2$) это прямая линия, в трехмерном конусе – плоскость, для четырехмерного конуса – трехмерная область и т.д.

Случай $n = 2$. Гиперплоскость – прямая линия – пересекает образующие конуса в двух точках $a(E_{min})$ и $a(E_{max})$. Отклики на граничные энергии E_{min} и E_{max} соответствуют границам конуса. Пересечение границы конуса и гиперплоскостью содержит точки $a(E_{min})$ и $a(E_{max})$. Очевидно, что показания второго детектора при фиксированном показании первого детектора (эталонного) будут лежать на прямолинейном отрезке этой прямой, соединяющем точки $a(E_{min})$ и $a(E_{max})$. Видно, что максимальное и минимальное возможные показания второго детектора при фиксированном показании первого детектора точно определены.

Случай $n = 3$. Пусть эталонным будет первый детектор. Проведем гиперплоскость $a_1 = 1$. В данном случае это двумерная плоскость. Кривая пересечения поверхности конуса с этой плоскостью — это цветовая кривая. Прямые, проведенные из начала координат через эту кривую, соответствуют откликам системы на моноэнергетические излучения. Точки на кривой соответствуют откликам детекторов при действии на них моноэнергетических излучений, интенсивность которых подобрана так, чтобы показания эталонного детектора были равны единице. Можно назвать полученную кривую цветовой кривой относительно эталонного детектора. В качестве эталонного детектора можно взять детектор полного поглощения (или любой другой).

Примем, что показания эталонного детектора равны единице при единичной полной энергии излучения. Тогда точки на цветовой кривой соответствуют откликам детекторов на моноэнергетические излучения единичной энергии.

В трехмерном случае мы можем взять в качестве эталонного детектора любой из трех детекторов.

Случай $n \geqslant 4$. При размерности пространства сигналов больше трех наглядное представление конуса сигналов затруднительно. Однако для четырехмерного случая сечение конуса гиперплоскостью есть трехмерное тело, свойства которого вполне наглядны.

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИК ИЗЛУЧЕНИЙ ПО ПОКАЗАНИЯМ ДЕТЕКТОРОВ

Рассмотрим систему, состоящую из двух детекторов. Воспользуемся векторным представлением сигналов. По вертикальной оси отложим величину сигнала на выходе второго детектора a_2, а по горизонтальной — a_1. Действие излучения на систему из двух детекторов характеризуется вектором (a_1, a_2) (точкой (a_1, a_2) на плоскости).

Пусть на систему детекторов действует излучение с граничными энергиями кванта излучения E_{max} и E_{min}. Это означает, что энергия кванта излучения не может быть меньше E_{min} и больше E_{max}. Отсюда следует, что отклики системы детекторов на любое излучение будет находится внутри конуса, ограниченного векторами $a(E_{max})$ и $a(E_{min})$, показанными на рис. 1.

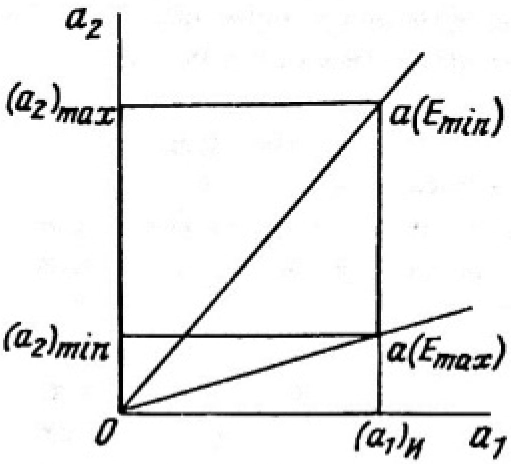


Рис. 1

Допустим, что показания первого детектора, находящегося в поле излучения, измерены и равны $(a_1)_и$. Чему будут равны показания второго детектора? Из рис. 1 видно, что при фиксированных показаниях первого детектора показания второго детектора при произвольном изменении спектра (оставляющего неизменными показания первого детектора) будут изменяться в пределах от $(a_2)_{min}$ до $(a_2)_{max}$. Таким образом, поставлена и графически решена задача о нахождении максимального (минимального) показания второго детектора при произвольном изменении спектра излучения, оставляющего неизменными показания первого детектора. Эту задачу можно распространить на любое число детекторов: найти максимальное и минимальное показания $n+1$ детектора при произвольном варьировании спектра и неизменных показаниях других n детекторов. В такой постановке задача может быть сформулирована как задача линейного программирования. С учетом принятых обозначений получим две задачи.

Задача 1. Найти $max\,(a_{n+1}) = max\left(\sum\limits_{k=1}^{N} a_{n+1,k}\, p_k'\right),\ i=\overline{1,n}$, при ограничениях

$$a_i = \sum_{k=1}^{N} a_{in}\, p_k' \ ,\quad i=\overline{1,n}\ , \qquad p_k' \geqslant 0\ ,\quad k=\overline{1,N}\ . \tag{9}$$

Задача 2. Найти $min\,(a_{n+1}) = min\left(\sum\limits_{k=1}^{N} a_{ik}\, p_k''\right)$ при ограничениях

$$a_i = \sum_{k=1}^{N} a_{ik}\, p_k'' \ ,\quad i=\overline{1,n}\ , \qquad p_k'' \geqslant 0\ ,\quad k=\overline{1,N}\ , \tag{10}$$

где p_k' и p_k'' – неотрицательные коэффициенты.

В процессе решения задач 1 и 2 находятся два набора коэффициентов p_k'' и p_k'', удовлетворяющие условиям, что показания $n+1$ детектора при наборе p_k'' будет иметь максимальное значение, а при p_k'' – минимальное. Из ограничений задач (9) и (10) видно, что линейная комбинация форм линий с коэффициентами p_k' или p_k'' дает измеренный аппаратурный спектр (цвет излучения). Вместе с тем из (4) следует, что линейная комбинация элементарных спектров $\varphi_k(E)$ с теми же коэффициентами p_k' (или p_k'') дает спектр излучения. Поэтому нахождения коэффициентов p_k' и p_k'' есть в то же время нахождение спектров излучения.

Таким образом, физический смысл сформулированных задач линейного программирования состоит в нахождении коэффициентов $p_k'\ (p_k'')$, причем линейная комбинация форм линий с этими коэффициентами дает цвет излучения, а линейная комбинация элементарных спектров с теми же коэффициентами дает два спектра излучения: один из них соответствует спектру, дающему максимальное показание $n+1$ детектора, а второй — дающему минимальное показание $n+1$ детектора. Будем называть эти два спектра экстремальными (заметим, что каждый из экстремальных спектров дает один и тот же цвет излучения).

Одним из основных результатов теории линейного программирования является утверждение, что каждой задаче линейного программирования соответствует двойственная задача, составленная по определенным правилам. Согласно этим правилам максимальное значение линейной формы прямой задачи равно минимальному значению линейной формы двойственной задачи. В рассматриваемом случае двойственные задачи к задачам 1 и 2 линейного программирования согласно известным правилам формулируют следующим образом.

Задача 1а. Найти $\min \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$ при ограничениях

$$a_{n+1,k} \geq \sum_{i=1}^{n} a_{ik} c_i', \quad k = \overline{1,N}. \tag{11}$$

Задача 2а. Найти $\max \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$ при ограничениях

$$a_{n+1,k} \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ik} c_i'', \quad k = \overline{1,N}. \tag{12}$$

В отличие от прямой задачи коэффициенты c_i' и c_i'' могут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Из ограничений задач 1а и 2а следует, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} c_i' \leq a_{n+1,k} \leq \sum_{i=1}^{n} a_{ik} c_i''. \tag{13}$$

Из (13) видно, что двойственная задача позволяет находить линейную комбинацию спектральных характеристик n детекторов, которая аппроксимирует спектральную характеристику $n+1$ детектора.

Таким образом, прямая задача линейного программирования позволяет определять два экстремальных спектра излучения. Вместе с тем, с помощью прямой задачи можно дать интервальную оценку показания $n+1$ детектора. Поскольку в качестве $n+1$ детектора может быть взят любой детектор, решение прямой задачи позволяет дать интервальную оценку спектра излучения.

Двойственная задача позволяет находить линейные комбинации спектральных характеристик детекторов, аппроксимирующие спектральную характеристику $n + 1$ детектора, т.е. позволяет синтезировать систему детекторов с заданной спектральной характеристикой.

Решение задачи спектрометрии рассмотрим на примере восстановления спектра рентгеновского излучения по кривой ослабления.

Выберем в качестве излучения с элементарным спектром "столбик" и непрерывный спектр представим в виде ступенчатой функции. Ширину столбика выберем из условия, чтобы коэффициент ослабления рентгеновского излучения для энергий кванта соответствующих минимальной и максимальной (для границ столбика) различался примерно в 1,5 раза. Затем в результате решения прямой задачи определим два экстремальных спектра $\{p'_k\}$ и $\{p''_k\}$.

Для оценки ошибки восстановления спектра, методом редукции находят интервальную оценку спектра. На рис. 2 приведены восстановленные по кривой ослабления интервальные оценки спектра (а) и линейная комбинация экстремальных спектров (б).

Метод редукции позволяет определять полную энергию излучения в данном энергетическом диапазоне. Для этого выбирают детектор, спектральная характеристика которого отлична от нуля только в интересующей нас области спектра. Расчет показывает, что интервал, в котором находится искомая величина энергии, быстро уменьшается с увеличением числа детекторов. При заданной погрешности измерения число детекторов может быть определено так, чтобы погрешность оценки поглощенной энергии была бы меньше погрешности измерений с помощью детекторов, участвующих в эксперименте.

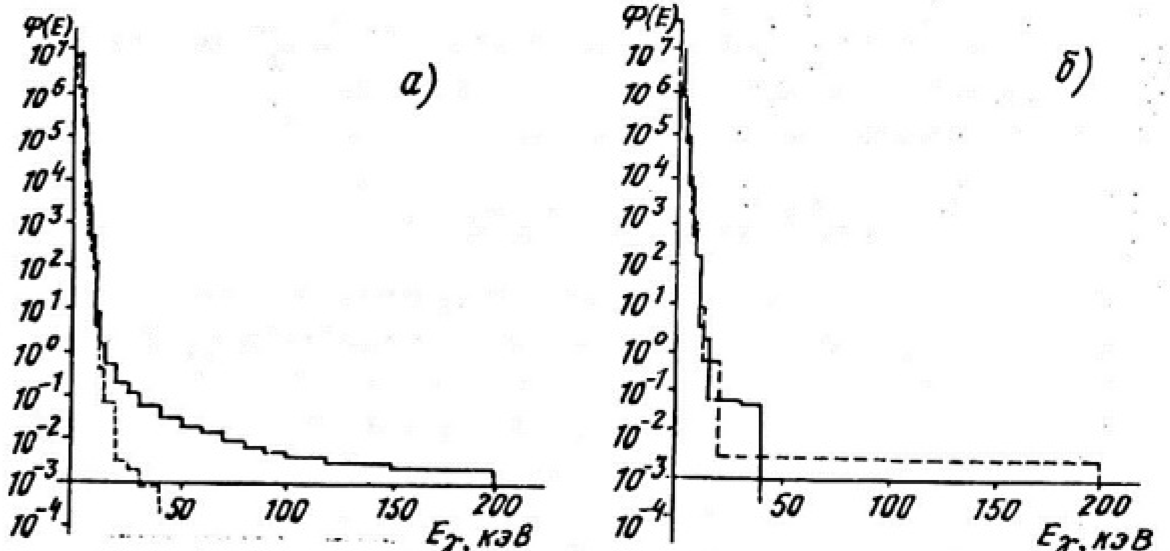


Рис. 2

ГЛАВА II. НЕОБХОДИМЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПОНЯТИЯ

Настоящая глава составлена с целью дать читателю краткие пояснения к математическим понятиям и методам, использованным в гл. 1.

Материал, относящийся к конечномерным пространствам, в основном должен быть известен читателю из курса линейной алгебры. Математических доказательств в собственном смысле слова в главе нет. Их заменяют пояснения описательного характера. Основная в теории линейного программирования теорема двойственности выводится из одного особенно наглядного частного случая так называемой теоремы отделимости. Глава служит для предварительного знакомства с математическими аспектами детектирования излучений.

4. СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

Предположим, что M есть множество каких-то элементов $x, y, \ldots$. Последние, в принципе, могут быть любой природы, но в этом пособии фигурируют лишь множества точек, векторов, функций и некоторых других простых математических объектов. Вместо "множества" употребляют также термины "совокупность", "класс", "семейство".

Запись $x \in M$ означает, что x есть один из элементов множества M. Говорят также, что "x входит в множество M" или "x принадлежит к M". Запись $v \bar{\in} M$ или $v \notin M$ означает, что v не является элементом множества M.

Целесообразно рассматривать пустое множество, не содержащее ни одного элемента. Оно обозначается $\emptyset$.

Если каждый элемент множества A является одновременно элементом множества B, то A называют подмножеством или частью множества B и пишут $A \subset B$ или $B \supset A$. Ясно, что $B \subset B$ и $\emptyset \subset B$. Если мы хотим подчеркнуть, что подмножество A множества B отлично от $\emptyset$ и от самого B, мы назовем A собственным (или истинным) подмножеством множества B.

Если $A \subset B$ и вместе с тем $B \subset A$, то говорят, что A равно B и пишут $A = B$. Таким образом, равные множества состоят из одних и тех же элементов.

Если все элементы множества M занумерованы целыми числами $1, 2, \ldots, n$, например, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то пишут

$$M = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} . \tag{14}$$

В этом случае M есть конечное множество. Если для того, чтобы занумеровать все элементы множества, понадобятся все целые положительные числа, пишут

Библиотечный фонд НИЯУ МИФИ г. Москва

$$M=\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} . \qquad (15)$$

При этом предполагается, что любое целое положительное число служит номером одного из элементов множества M, каждый его элемент получил определенный номер и, каковы бы ни были целые положительные $n \neq n'$, номера n и n' приписаны различным элементам множества M. В этом случае M называют **счетным множеством.**

Счетные множества содержат бесконечно много элементов, т.е. являются **бесконечными** множествами. Бесконечные множества могут быть и несчетными. Это означает, что их элементы не могут быть помечены (или занумерованы) целыми положительными числами так, как описано в предыдущем абзаце. Примером несчетного множества может служить совокупность $\mathbb{R}$ всех действительных чисел.

Если M — конечное или бесконечное множество, то запись $M=\{x\}$ означает, что мы выбрали для его элементов общее обозначение x. При этом различные элементы множества M отмечаются штрихами или индексами: $x', x'', x_1, x^{(1)}, x^{(2)}$, и т.д. Запись $M=\{x, y, z, \dots\}$ означает, что элементы множества M будут обозначаться буквами $x, y, z, \dots$, может быть, с теми или иными индексами.

Если $M=\{x\}$, то $P=\{x \mid \dots\}$ означает подмножество множества M, состоящее из тех его элементов x, которые удовлетворяют условию, записанному в витых скобках правее вертикальной черты.

Пусть $M=\{x\}$ и A, B — какие-либо подмножества множества M. Множество $\{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$ называется **объединением** множеств A, B и обозначается $A \cup B$ (иногда пользуются обозначением $A+B$).

Множество $\{x \mid x \in A$ и $x \in B\}$ называется **пересечением** множеств A, B и обозначается $A \cap B$ (иногда пересечение обозначают $A \cdot B$ или AB).

Таким образом, множество $A \cup B$ состоит из тех x, которые принадлежат к A или B (или к A и B одновременно), множество $A \cap B$ – из тех x, которые являются общими элементами множеств A и B. Если A и B не имеют общих элементов, т.е. $A \cap B = \emptyset$, то о таких множествах говорят, что они **не пересекаются.**

Пусть $A_1, A_2, \dots$ — конечная или счетная система подмножеств множества $M=\{x\}$. Их **объединением** называется множество всех тех x, каждый из которых принадлежит хотя бы одному из множеств $A_1, A_2, \dots$; их **пересечением** называется множество элементов x, принадлежащих всем множествам $A_1, A_2, \dots$. Объединение и пересечение множеств $A_1, A_2, \dots$ обозначаются соответственно

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \text{ или } \bigcup_k A_k ,$$
$$A_1 \cap A_2 \cap \dots \text{ или } \bigcap_k A_k .$$

Рассмотрим два множества: $X=\{x\}$ и $Y=\{y\}$, различных или совпадающих. Если каждому элементу $x\in X$ по какому-либо закону ставится в соответствие некоторый вполне определенный элемент $y\in Y$, то мы имеем функцию F из X в Y (иначе, **функцию** F, **заданную на** X, **со значениями в** Y или **отображение** F множества X в множество Y). Элемент $y\in Y$, отвечающий элементу $x\in X$ при заданном отображении, обычно обозначается $F(x)$ и называется **значением функции** F на элементе x или **образом** элемента x при отображении F.

Если $Y=X$, то мы имеем отображение множества X **самого в себя** или **преобразование** множества X.

Если мы имеем функцию F, заданную на множестве X, со значениями в Y, то, взяв любое собственное подмножество $X_1\subset X$, мы можем задать на X_1 функцию F_1 со значениями в Y, положив $F_1(x)=F(x)$ $(x\in X_1)$. Функция F_1 называется **сужением** функции F на множестве X_1. В то же время F служит **продолжением** функции F_1 на множестве X.

Если в роли Y выступает множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел и, следовательно, $F(x)$ при любом $x\in X$ есть действительное число, то F называют **числовой функцией** или **функционалом**, заданным на X *).

Если имеется отображение F_1 множества $X=\{x\}$ в множество $Y=\{y\}$ и отображение F_2 множества Y в множество $Z=\{z\}$, то можно построить **сложную функцию** или **сложное отображение** $F=F_2F_1$ множества X в Z, положив $z=F(x)=F_2(F_1(x))$. В частности, если $Z=\mathbb{R}$, т.е. F_2 – числовая функция на Y, то F окажется числовой функцией на множестве X.

Предположим, что $Y=X$ и F_1F_2 – отображения X самого в себя, иначе говоря, преобразования множества X. При этом и F_2F_1 будет преобразованием множества X, так же как F_1F_2. Последнее, вообще говоря, отлично от F_2F_1. Можно, в частности, рассмотреть преобразование F_1F_1, которое называется **квадратом преобразования** F_1 и обозначается F_1^2. Степени F_1^3, F_1^4 и т.д. определяются очевидным образом.

Предположим, что имеется отображение F множества $X=\{x\}$ в множество $Y=\{y\}$, т.е. каждому $x\in X$ соответствует определенный элемент $y=F(x)\in Y$. Допустим, кроме того, что каждый элемент $y\in Y$ является образом некоторого $x\in X$ при отображении F, т.е. $y=F(x)$, и любым различным элементам $x\in X$, $x'\in X$ соответствуют различные образы $F(x)\in Y$, $F(x')\in Y$. При этом каждый $y\in Y$ оказывается образом **единственного** $x\in X$. Поставив в соответствие произвольному $y\in Y$ тот элемент $x\in X$, для которого $y=F(x)$, мы получим отобра-

----

*) Числовые функции, принимающие комплексные значения, т.е. отображения множества X в комплексную плоскость $\mathbb{C}$, нам не встретятся.

жение F^{-1} множества Y в множество X, которое называется **обратным** по отношению к F. Заметим, что согласно определению обратного отображения соотношение $x = F^{-1}(y)$ означает то же, что $y = F(x)$ $(x \in X,\ y \in Y)$.

Если отображение F удовлетворяет условиям, высказанным в предыдущем абзаце, т.е. F отображает X в Y и каждый $y \in Y$ служит образом некоторого $x \in X$, притом единственного, то об отображении F говорят, что оно осуществляет **взаимно однозначное соответствие** между множествами X и Y.

О множествах X и Y, между которыми существует взаимно однозначное соответствие, говорят, что они **эквивалентны** или что они имеют одинаковую **мощность**.

Легко видеть, что определение счетного множества, приведенное выше, может быть перефразировано следующим образом: множество M счетно, если оно эквивалентно множеству $\mathbb{N}$ всех целых положительных чисел.

О множестве $\mathbb{R}$ всех действительных чисел, а также о любом множестве, эквивалентном $\mathbb{R}$, говорят, что оно имеет **мощность континуума**.

Имея множества $X = \{x\}$, $Y = \{y\}$ (различные или совпадающие), можно рассмотреть всевозможные **упорядоченные пары** $\langle x, y \rangle$ элементов. Совокупность всех таких пар называется **декартовым произведением** множества X на множество Y и обозначается $X \times Y$. Если $X = Y$, то $X \times X$ называется **декартовым квадратом** множества X. "Упорядоченность" пары означает, что первой компонентой пары $\langle x, y \rangle$ служит элемент множества X, второй – элемент множества Y; если же $X = Y$, то $\langle x, y \rangle$ и $\langle y, x \rangle$ считаются **различными** элементами декартова квадрата $X \times X$ при любых $x \neq y$.

Понятие декартова произведения очевидным образом распространяется на любое конечное число "множителей". Декартово произведение n "множителей", равных $\mathbb{R}$ – множеству всех действительных чисел – называется **n-мерным координатным пространством** и обозначается $\mathbb{R}^n$. Его элементами (**точками** пространства $\mathbb{R}$) служат всевозможные упорядоченные системы n действительных чисел.

5. ПОЛУГРУППЫ, ГРУППЫ И ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Любое множество $S = \{x, y, z, \ldots\}$, для элементов которого определена некоторая **алгебраическая операция**, называется **алгебраической системой**.

Нас будет интересовать **бинарная** алгебраическая операция в S, которая каждой упорядоченной паре $\langle x, y \rangle$ элементов $x \in S$, $y \in S$ ставит в соответствие вполне определенный элемент $z \in S$ — результат применения операции к элементам x, y (в указанном порядке)[*)].

Результат применения операции к элементам $x \in S, y \in S$ обозначим $x+y$ и назовем **суммой** элементов x и y, а саму операцию — **сложением**.

Алгебраическая система S называется **полугруппой**, если определенная в ней операция сложения подчиняется **ассоциативному закону**:

1) для любых $x \in S, y \in S, z \in S$

$$(x+y)+z = x+(y+z). \tag{16}$$

Полугруппа S называется **коммутативной**, если

2) для любых $x \in S, y \in S$

$$x+y=y+x. \tag{17}$$

Некоторые полугруппы содержат элемент θ, обладающий свойством:

3) каков бы ни был $x \in S$,

$$x+\theta=\theta+x=x. \tag{18}$$

Такой элемент θ (всегда единственный!) называется **нулевым элементом** (или просто **нулем**).

Ассоциативный закон позволяет определить сумму любого конечного числа слагаемых (взятых в определенном порядке). Так, $x+y+z+v = ((x+y)+z)+v=(x+y)+(z+v) = x+(y+(z+v))$.

Алгебраическая система S называется **группой**, если она представляет собой полугруппу с нулем, удовлетворяющую следующему дополнительному требованию:

4) для любого $x \in S$ существует элемент $(-x) \in S$, такой, что

$$x+(-x)=(-x)+x=\theta. \tag{19}$$

Элемент $-x$ (непременно единственный для каждого x) называется **противоположным** по отношению к x.

Итак, группа — это алгебраическая система S, в которой определена операция сложения, подчиненная требованиям 1, 3 и 4. Если, кроме того, выполняется требование 2 — коммутативность сложения, то S называется **коммутативной или абелевой**[**)] группой.

[*)] Читатель заметит, что описанная алгебраическая операция есть некоторое отображение декартова квадрата $S \times S$ множества S в S.

[**)] Н. Абель (1802–1829) — норвежский математик.

Замечание. Как в самой теории групп, так и в ее приложениях, групповая операция чаще называется **умножением**, а результат умножения элемента x на элемент y обозначается xy и называется **произведением**. При этом требования 1 и 2 формулируются в виде тождеств $(xy)z=x(yz)$ и $xy=yx$. Вместо нуля появляется **единичный элемент** (или **единица**), обозначаемый e (или цифрой 1); требование 3, описывающее свойство единицы, принимает вид $xe=ex=x$; требование 4 формулируется так: для каждого $x\in S$ существует **обратный элемент** x^{-1} для которого $xx^{-1}=x^{-1}x=e$ (сказанное относится также к полугруппам). Здесь рассматриваются лишь абелевы группы (в частности, линейные системы), а для них общепринята "аддитивная терминология".

Линейной системой или **линейным пространством** называется абелева группа S, в которой помимо групповой операции (сложения) определено еще умножение элементов $x\in S$ на числа: любому $x\in S$ и любому числу λ однозначно соответствует элемент $\lambda x\in S$, который называется **произведением** x на число λ. При этом должны удовлетворяться следующие условия:

5) для любых чисел λ, μ и для любого $x\in S$

$$(\lambda\mu)x=\lambda(\mu x); \tag{20}$$

6) для любых чисел λ, μ и для любых $x\in S$, $y\in S$

$$(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x, \quad \lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y; \tag{24}$$

7) для любого $x\in S$

$$0\cdot x=\theta, \quad 1\cdot x=x, \quad (-1)x=-x. \tag{22}$$

В зависимости от того, на какие числа определено умножение, только на действительные или на любые комплексные, различают **действительные** (или **вещественные**) **линейные системы** и **комплексные линейные системы**. Нам будут нужны только первые. Их мы и будем называть линейными системами, опуская прилагательное "действительные".*)

Элементы линейной системы часто называют **векторами**.

Замечание. Условие 5 выражает ассоциативный закон умножения векторов на числа; условие 6 – дистрибутивность этой операции как относительно сложения чисел, так и относительно сложения векторов – описывает связь между обеими операциями в линейной системе. В условии 7 достаточно было бы постулировать тождество $1\cdot x=x$; остальные два легко доказываются.

---

*) Операция умножения на числа в линейной системе S есть некоторое отображение декартова произведения $S\times\mathbb{R}$ в S. В случае комплексной линейной системы вторым "множителем" в декартовом произведении должна быть комплексная плоскость $\mathbb{C}$.

Пусть

$$x_1, x_2, \dots, x_m \quad , \tag{23}$$

– векторы из S, а

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \quad , \tag{24}$$

– любые m чисел. Выражение

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m \tag{25}$$

называется **линейной комбинацией** векторов (23) с коэффициентами (24). Ясно, что

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m = \theta , \tag{26}$$

если положить $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$. В том случае, когда это единственная возможность получить равенство (26), т.е. если при любом выборе коэффициентов (24), среди которых хотя бы один не равен нулю, $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_m x_m \neq \theta$, говорят, что векторы (23) **линейно независимы.** В противном случае, т.е. если существуют коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не все равные нулю, при которых выполняется равенство (26), говорят, что векторы $x_1, x_2, \dots, x_m$ **линейно зависимы.**

Векторы (23) линейно зависимы тогда и только тогда, когда хотя бы один из них может быть выражен в виде линейной комбинации остальных.

Если линейная система S такова, что в ней содержатся n линейно независимых векторов, тогда как при $m > n$ любые ее m векторов линейно зависимы, то S называют **конечномерной** (именно **n-мерной**) **линейной системой.** Если в S можно выбрать сколь угодно много линейно независимых векторов, S называют **бесконечномерной** линейной системой.

6. ЛИНЕЙНЫЕ НОРМИРОВАННЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Пусть $E = \{x, y, z, \dots\}$ – линейная система. Предположим, что на E задана числовая функция $\|x\|$, т.е. каждому вектору $x \in E$ поставлено в соответствие действительное число $\|x\|$, причем выполнены следующие условия.

I. Каков бы ни был вектор $x \in E$, $\|x\| \geqslant 0$; при этом $\|\theta\| = 0$ и $\|x\| > 0$ для любого $x \neq \theta$.

II. Каковы бы ни были $x \in E$, $y \in E$,

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\| .$$

III. Каковы бы ни были вектор $x \in E$ и число λ,

$$\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| .$$

Такая функция называется **нормой**, ее значение $\|x\|$ на произвольном $x \in E$ – **нормой вектора** x. Линейная система E, оснащенная нормой, называется **линейным нормированным пространством.**

Простейшими линейными нормированными пространствами являются числовая ось и совокупность всевозможных (свободных) векторов в трехмерном пространстве с обычными операциями сложения и умножения на числа. Роль нормы в этих пространствах играют соответственно абсолютная величина числа и модуль (длина) вектора.

Наличие нормы позволяет ввести в линейном нормированном пространстве E понятие расстояния. **Расстоянием** между элементами $x \in E, y \in E$ называется число

$$\rho(x,y) = \|x-y\| \ . \qquad (27)$$

Пользуясь свойствами I, II, III нормы, легко доказать, что $\rho(x,y)$ как функция векторов x и y удовлетворяет следующим условиям: $\rho(x,y) \geqslant 0$ для всех x, y, причем $\rho(x,y)=0$ тогда и только тогда, когда $x=y$; $\rho(x,y) = \rho(y,x)$ для всех x, y; каковы бы ни были x,y,z, $\rho(x,z) \leqslant \rho(x,y)+\rho(y,z)$.

Любое множество $\{x,y,\ldots\}$, в котором определена функция $\rho(x,y)$, удовлетворяющая условиям, перечисленным в предыдущем абзаце, называется **метрическим пространством**, а сама функция $\rho(x,y)$ — **метрической функцией** или **метрикой**. Элементы метрического пространства принято называть **точками**.

Таким образом, линейное нормированное пространство E оказывается метрическим пространством с метрикой (27). Его элементы (векторы) $x, y, \ldots$ мы также будем иногда называть точками.

Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ — произвольная последовательность точек линейного нормированного пространства E. Такую последовательность кратко обозначают $\{x_n \mid n=1,2,\ldots\}$ или $\{x_n\}$. Последовательность $\{x_n\} \subset E$ **сходится к точке** $x \in E$, если $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$. При этом x называют **пределом** последовательности $\{x_n\}$. Последовательность, имеющая предел, называется **сходящейся**. Сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x записывают

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \quad \text{или} \quad x_n \to x \quad \text{при} \quad n \to \infty \ .$$

Иногда пишут совсем кратко: $x_n \to x$.

Пусть $x_0 \in E$ и ε — положительное число. Множество

$$U_\varepsilon(x_0) = \{x \mid \|x - x_0\| < \varepsilon\} \qquad (28)$$

называется **сферической окрестностью радиуса** ε или, короче, **ε-окрестностью точки** x_0.

Пусть M — некоторое подмножество линейного нормированного пространства E. Точка $x_0 \in M$ называется его **внутренней точкой**, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $U_\varepsilon(x_0) \subset M$. M называется **открытым множеством**, если все его точки являются внутренними.

Точка $y_0 \in E$ называется **граничной** для множества M, если в любой ее ε-окрестности содержатся как точки множества M, так и точки, не принадлежащие к M. Сама граничная точка может принадлежать к M, но может и не принадлежать. Совокупность всех точек, граничных для M, называется **границей** множества M и обозначается символом ∂M.

Множество $M \subset E$ называется **замкнутым**, если, какова бы ни была заключенная в M сходящаяся последовательность точек $\{x_n\}$, ее предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ также принадлежит к M. Нетрудно показать, что множество M замкнуто тогда и только тогда, когда $\partial M \subset M$.

Каковы бы ни были точка $x_0 \in E$ и число $\varepsilon > 0$, ε-окрестность $U_\varepsilon(x_0)$ точки x_0 есть открытое множество, границей которого служит множество

$$\sigma_\varepsilon(x_0) = \{x \mid \|x - x_0\| = \varepsilon\}$$

– **сфера** радиуса ε с центром в x_0.

Положим $x_0 = \theta$ и $\varepsilon = 1$. Замкнутое множество

$$S = \{x \mid \|x\| \leqslant 1\} = U_1(\theta) \cup \sigma_1(\theta)$$

называется **единичным шаром** в пространстве E.

Если $\{x_n\} \subset E$ – сходящаяся последовательность точек, то

$$\lim_{m,n\to\infty} \|x_m - x_n\| = 0. \tag{29}$$

Таким образом, предельное соотношение (29) является необходимым условием сходимости последовательности $\{x_n\}$. Для некоторых линейных нормированных пространств оно и **достаточно**, т.е. всякая последовательность $\{x_n\}$, удовлетворяющая условию (29), имеет предел. Линейное нормированное пространство, обладающее таким свойством, называется **полным**.*) Полное линейное нормированное пространство E принято называть **банаховым****) **пространством** или **B-пространством**.

Заметим, что любое конечномерное линейное пространство полно, т.е. является банаховым пространством.

7. ВЫПУКЛЫЕ МНОЖЕСТВА И КОНУСЫ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Пусть x_1 и x_2 – любые две точки банахова пространства E. Множество точек

$$\overline{x_1, x_2} = \{s x_1 + t x_2 \mid s \geqslant 0,\ t \geqslant 1,\ s + t = 1\}$$

---

*) Свойство полноты требует только наличия метрики и потому может относиться к любому метрическому пространству.

**) С. Банах (1892 – 1945) – польский математик.

называется **прямолинейным отрезком** (или просто **отрезком**), соединяющим точки x_1 и x_2 .

Множество $M \subset E$ называется **выпуклым**, если, каковы бы ни были точки $x_1 \in M, x_2 \in M$, соединяющий их отрезок $x_1 x_2$ заключен в M.

Выпуклое множество M называется **выпуклым телом**, если M содержит хотя бы одну внутреннюю точку.

Любой прямолинейный отрезок представляет собой выпуклое множество. Окрестность $U_1(\theta)$ радиуса 1 точки θ (как, впрочем, любая ε - окрестность любой точки x_0) есть открытое выпуклое тело, единичный шар – замкнутое выпуклое тело.

Пусть $x_0 \in E$, причем $x_0 \neq \theta$. Луч, выходящий из θ и проходящий через точку x_0 , есть, по определению, множество

$$\{ t x_0 \mid 0 < t < +\infty \} .$$

Множество $K \subset E$ называется **конусом с вершиной в точке** θ , если: 1) каков бы ни был элемент $x \in K$, отличный от θ , противоположный элемент $-x$ не принадлежит к K ; 2) каковы бы ни были $x \in K, x' \in K$, их сумма $x + x'$ также принадлежит к K ; 3) каковы бы ни были вектор $x \in K$ и число $t > 0$, произведение tx входит в K .

Нетрудно определить конус с вершиной в произвольной точке x_0 , но это обобщение нам здесь не нужно. Мы рассматриваем только конусы с вершиной θ и называем их просто "конусы".

Условие 1 в определении конуса K означает, что вектор θ не может получиться в результате сложения ненулевых векторов из K . Условие 2 можно перефразировать, сказав, что конус есть коммутативная полугруппа относительно операции сложения, определенной в E . Наконец, условие 3 означает, что вместе с любым своим элементом $x \neq \theta$ конус содержит луч, выходящий из θ и проходящий через x .

Нулевой элемент θ может принадлежать к конусу, но может и не принадлежать. Если $\theta \in K$, то K оказывается полугруппой с нулем.

Всякий конус представляет собой выпуклое множество. Среди конусов имеются такие, которые содержат внутренние точки и, следовательно, являются выпуклыми телами; это – так называемые телесные конусы.

Конус K называется **воспроизводящим**, если любой вектор $x \in E$ может быть представлен в виде $x = x_1 - x_2$, где $x_1 \in K, x_2 \in K$. Нетрудно показать, что, в частности, любой телесный конус является воспроизводящим.

Важную роль играют **замкнутые конусы**. Точка θ служит граничной для любого конуса K , поэтому, если K замкнут, то $\theta \in K$.

8. ЛИНЕЙНЫЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Пусть $E=\{x\}$ и $E_1=\{y\}$ – банаховы пространства и T – некоторое отображение E в E_1. T называется **линейным отображением**, если:

1) для любых $x\in E$, $x'\in E$

$$T(x+x')=T(x)+T(x');$$

2) каковы бы ни были вектор $x\in E$ и число λ,

$$T(\lambda x)=\lambda T(x).$$

Предположим, что $E_1=E$. При этом T оказывается линейным отображением B-пространства E самого в себя. Такое отображение принято называть **линейным оператором**, действующим в банаховом пространстве E. Впрочем, линейным оператором называют иногда любое линейное отображение (одного B-пространства в другое).

Если E – произвольное банахово пространство, а в качестве E_1 взята числовая ось $\mathbb{R}$, то линейное отображение пространства E в R называется **линейным функционалом**, заданным на E. Линейные функционалы, заданные на B-пространстве E, будем обозначать буквой l (если нужно, с индексами или штрихами).

Напомним, что линейность функционала означает, что

$$l(x+x')=l(x)+l(x') \text{ для всех } x\in E,\ x'\in E, \tag{30}$$

$$l(\lambda x)=\lambda l(x) \quad \text{ для всех } x\in E,\ \lambda\in\mathbb{R}. \tag{31}$$

Линейный функционал l на B-пространстве E называется **непрерывным**, если при любом выборе вектора $x\in E$ и последовательности $\{x_n\}\subset E$, сходящейся к x, последовательность значений функционала $\{l(x_1),l(x_2),\dots,l(x_n),\dots\}$ сходится к $l(x)$ – его значению на векторе x.

Для непрерывности линейного функционала l необходимо и достаточно следующее условие: существует такая постоянная $\mathcal{K}$, что для любого x из единичного шара S

$$|l(x)|\leq\mathcal{K}. \tag{32}$$

Это условие означает, что числовая функция $l(x)$ **ограничена на единичном** шаре S. Линейный функционал, удовлетворяющий этому условию, называется **ограниченным**.

Наименьшее значение $\mathcal{K}$, при котором неравенство (32) выполняется для всех $x\in S$, называется **нормой** линейного функционала l и обозначается $\|l\|$. Иначе говоря, норма ограниченного линейного функционала l есть точная верхняя граница абсолютной величины значений $l(x)$ на единичном шаре:

$$\|l\|=\sup_{x\in S}|l(x)|. \tag{33}$$

Все линейные функционалы, о которых пойдет речь в дальнейшем, предполагаются ограниченными (и, следовательно, непрерывными). Они будут называться просто линейными функционалами.

Среди линейных функционалов, заданных на B-пространстве E, есть функционал, тождественно равный нулю; обозначим его θ^*. Любой линейный функционал l, отличный от θ^*, т.е. не равный нулю тождественно, принимает на E как положительные, так и отрицательные значения. Рассмотрим множества в пространстве E:

$$N_l = \{x \mid l(x) = 0\}, \tag{34}$$

$$E_l^+ = \{x \mid l(x) > 0\}, \tag{35}$$

$$E_l^- = \{x \mid l(x) < 0\}. \tag{36}$$

Множество N_l называется **гиперплоскостью** (в пространстве E) с уравнением $l(x) = 0$. Множества E_l^+ и E_l^- называются соответственно **областью положительных значений** и **областью отрицательных значений** функционала l. Ясно, что множества (34), (35) и (36) не пересекаются и

$$E = E_l^+ \cup N_l \cup E_l^-. \tag{37}$$

Гиперплоскость N_l представляет собой **линейное множество** в пространстве E. Это означает, что операция сложения и умножения на числа, будучи применены к элементам множества N_l, всегда приводят к элементам того же множества. Иначе говоря, N_l есть линейная подсистема линейной системы E. В то же время N_l есть замкнутое множество.

Замкнутые линейные множества в банаховом пространстве E называются **линейными подпространствами**. Гиперплоскости представляют собой **максимальные** линейные подпространства. Последнее утверждение означает следующее: если N_l – любая гиперплоскость и E' – линейное подпространство в E, то из $N_l \subset E'$ следует либо $E' = N_l$, либо $E' = E$.

Область положительных значений E_l^+ и область отрицательных значений E_l^- линейного функционала l представляют собой открытые выпуклые множества. Их общей границей служит гиперплоскость N_l. При любом выборе точек $x_1 \in E_l^+$ и $x_2 \in E_l^-$ прямолинейный отрезок $\overline{x_1 x_2}$ пересечет гиперплоскость N_l в некоторой (единственной!) точке x_0.

Пусть $M = \{z\} \subset E$ – некоторое множество, не заключенное целиком в гиперплоскости N_l. Если $M \subset E_l^+$, то $l(z) > 0$ при всех $z \in M$; если $M \subset E_l^+ \cup N_l$, то $l(z) \geqslant 0$ при всех $z \in M$; если $M \subset E_l^-$ или $M \subset E_l^- \cup N_l$, то $l(z) < 0$ или, соответственно, $l(z) \leqslant 0$ на M. Во всех четырех случаях о множестве M можно сказать, что оно расположено по одну сторону от гиперплоскости N_l. Тогда, когда $M \cap E_l^+ \neq \emptyset$ и $M \cap E_l^- \neq \emptyset$, точки множества M находятся по обе стороны гиперплоскости N_l.

Рассмотрим совокупность E^* всевозможных линейных функционалов, определенных на банаховом пространстве E. Если в E^* ввести операции сложения и умножения на числа, положив для произвольных $l \in E^*$, $l_1 \in E^*$, $l_2 \in E^*$ и $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(l_1 + l_2)(x) = l_1(x) + l_2(x) \quad (x \in E),$$

$$(\lambda l)(x) = \lambda l(x) \quad (x \in E),$$

то E^* окажется линейной системой (см. п. 5). Нулевым элементом будет линейный функционал $\theta^*(x) \equiv 0$. Норма линейного функционала, определенная формулой (33), удовлетворяет требованиям, предъявляемым к норме (см.п.6). Таким образом, E^* оказывается линейным нормированным пространством. Можно доказать, что E^* полно, т.е. является B-пространством. E^* называется банаховым пространством, **сопряженным с** E.

В E^*, как во всяком линейном нормированном пространстве, определено понятие сходимости: последовательность линейных функционалов $\{l_1, l_2, \ldots, l_n, \ldots\}$ сходится к линейному функционалу l, если $\lim\limits_{n \to \infty} \|l_n - l\| = 0$. В то же время к любым числовым функциям применимо понятие "сходимости в каждой точке": можно назвать последовательность $\{l_n\}$ сходящейся к l, если, каков бы ни был вектор $x \in E$, последовательность значений функционалов $l_1, l_2, \ldots$ на этом векторе сходится к значению $l(x)$ функционала l на векторе x. Следует иметь в виду, что второе определение неравносильно первому: из $\|l_n - l\| \to 0$ при $n \to \infty$ следует $l_n(x) \to l(x)$ при $n \to \infty$ для любого $x \in E$, но обратное, вообще говоря, неверно. Сходимость последовательности $\{l_n\} \subset E^*$ по метрике пространства E^* называют **сходимостью по норме** или **сильной сходимостью**, сходимость "в каждой точке $x \in E$" – **слабой сходимостью**.

Предположим, что в пространстве E выбран некоторый замкнутый конус K. Предположим далее, что последний таков, что никакой линейный функционал на E, не равный нулю тождественно, не обращается в нуль во всех точках конуса K. Другими словами, конус K не содержится ни в одной гиперплоскости пространства E.[x)]

Линейный функционал $l \in E^*$, отличный от θ^*, назовем **положительным линейным функционалом**, если $l(x) \geqslant 0$ для всех $x \in K$. Пользуясь геометрическим описанием взаимного расположения конуса K и гиперплоскости N_l, можно сказать, что l положителен тогда, когда K расположен по одну сторону от N_l, именно, когда

$$K \subset E_l^+ \cup N_l \ . \tag{38}$$

[x)] Этому условию удовлетворяет, в частности, любой телесный конус, а также любой воспроизводящий конус.

Точка θ, принадлежащая к K (мы выбрали замкнутый конус!), непременно заключена в N_l. Возможен случай, когда θ — единственная точка конуса, лежащая в гиперплоскости N_l. При этом $l(x)>0$ для любого ненулевого $x\in K$. В противном случае существует ненулевой вектор $x\in K$, на котором l принимает значение, равное нулю. При этом множество $K\cap N_l$ содержит помимо элемента θ некоторое множество лучей, выходящих из точки θ.

Если K — воспроизводящий конус в B-пространстве E, то множество всех положительных линейных функционалов $l\in E^*$ с присоединенным к нему линейным функционалом θ^* представляет собой конус в сопряженном пространстве E^*. Его обозначают K^* и называют **сопряженным** (сK) конусом.

9. КОНЕЧНОМЕРНЫЕ ЭВКЛИДОВЫ ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим n-мерную линейную систему E. Напомним, что E представляет собой абелеву группу, для которой определено умножение элементов на действительные числа. Групповая операция (сложение) и умножение на числа должны подчиняться условиям, изложенным в п. 5. Далее предположено, что E содержит n линейно независимых векторов, в то время как любая конечная система векторов, число которых больше n, линейно зависима.

Теперь мы предположим, что помимо операций, присущих любой линейной системе, в E определено **скалярное умножение** векторов: каждой паре векторов $x\in E$, $y\in E$ поставлено в соответствие действительное число, которое называется **скалярным произведением** x и y и обозначается (x,y). Эта операция *) должна удовлетворять следующим условиям:

1) для любых $x\in E$, $y\in E$

$$(x,y)=(y,x); \tag{39}$$

2) каковы бы ни были векторы $x_1\in E$, $x_2\in E$, $y\in E$ и числа λ_1,λ_2,

$$(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2, y)=\lambda_1(x_1,y)+\lambda_2(x_2,y); \tag{40}$$

3) $(x,x)\geqslant 0$, каков бы ни был вектор $x\in E$; $(\theta,\theta)=0$, но для любого $x\neq\theta$ $(x,x)>0$.

Числовая функция $b(x,y)$ двух переменных $x\in E$, $y\in E$, линейная по каждому своему аргументу, называется **билинейной формой** на E.

---

*) Скалярное умножение есть некоторое отображение декартова квадрата $E\times E$ в $\mathbb{R}$.

Функция $q(x)=b(x,x)$ $(x\in E)$ есть квадратичная форма. Условия 1 и 2 означают, что скалярное произведение как функция множителей x и y есть коммутативная билинейная форма. Условие 3 требует, чтобы соответствующая квадратичная форма (x,x) была (согласно принятой в алгебре терминологии) **положительно определенной.**

Зададим в E норму, положив, по определению, для любого $x\in E_n$

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}. \tag{41}$$

Свойства I и III нормы (см. п. 6) следуют прямо из условий (2) и (3). Свойство II вытекает из так называемого **неравенства Коши**: для любых $x\in E$, $y\in E$

$$|(x,y)|\leq \|x\|\,\|y\| . \tag{42}$$

E оказывается, таким образом, линейным нормированным пространством и, будучи конечномерным, даже банаховым пространством (см. п. 6).

Банахово пространство, конечномерное или бесконечномерное, в котором определено скалярное умножение, а норма определена через посредство скалярного умножения равенством (41), называется **пространством с эвклидовой метрикой** или, короче, **эвклидовым пространством.** Мы рассматриваем сейчас n-мерное эвклидово пространство. В дальнейшем оно будет обозначаться E_n *).

В n-мерном эвклидовом пространстве норму вектора обычно называют **модулем** или **длиной вектора** и обозначают $|x|$. Таким образом, в E_n

$$|x|=\sqrt{(x,x)}\ , \tag{43}$$

$$|(x,y)|\leq|x|\,|y| . \tag{44}$$

Наличие скалярного умножения позволяет ввести в E_n не только модули векторов, но и углы между векторами. В самом деле, для любых $x\neq\theta, y\neq\theta$ из (44) следуют неравенства

$$-1\leq\frac{(x,y)}{|x|\,|y|}\leq 1\ ,$$

---

*) Выше (см. п. 5) мы условились рассматривать только действительные линейные системы. Это соглашение, очевидно, распространяется на частные случаи линейных систем, включая эвклидовы пространства. Комплексное n-мерное эвклидово пространство (его называют также n-мерным **унитарным пространством**) можно построить, задав в n-мерной комплексной линейной системе скалярное умножение так, чтобы (x,y) принимало комплексные значения. При этом требование коммутативности (условие 1) необходимо заменить требованием **эрмитовой симметрии** скалярного произведения: $(y,x)=\overline{(x,y)}$. Условия 2 и 3 сохраняются.

и можно определить угол ψ между векторами x и y, положив

$$\psi = \arccos \frac{(x,y)}{|x||y|} . \tag{45}$$

Векторы $x \neq 0$ и $y \neq \theta$ по определению, **ортогональны**, если $\psi = \frac{\pi}{2}$, что равносильно равенству

$$(x,y) = 0 . \tag{46}$$

Удобнее определять ортогональность x и y прямо посредством равенства (46). При этом мы избавляемся от ограничений $x \neq \theta, y \neq \theta$. Вектор θ оказывается ортогональным любому вектору $x \in E_n$.

Говорят, что m векторов образуют **ортогональную систему**, если все они отличны от θ и любые два из них ортогональны. Такие векторы непременно линейно независимы, а так как в пространстве E_n не может быть более n линейно независимых векторов, то $m \leqslant n$. Нетрудно видеть, что в E_n всегда можно выбрать n взаимно ортогональных единичных векторов

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} . \tag{47}$$

Итак, векторы (47) удовлетворяют условиям

$$(e_i ; e_k) = \delta_{ik} \quad (i,k = 1,2,\ldots,n),$$

т.е. $|e_i| = 1$ $(i=1,2,\ldots,n)$ и любые два вектора e_i и e_k $(i \neq k)$ ортогональны. Такая система векторов называется **ортонормированным базисом** или просто **базисом** пространства E_n. Оно содержит бесконечно много ортонормированных базисов. Если (47) — один из них, то, какова бы ни была ортогональная матрица

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \ldots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \ldots & \sigma_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \ldots & \sigma_{nn} \end{pmatrix} , \tag{48}$$

векторы

$$e'_i = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij} \, e_j \quad (i = 1,2,\ldots,n) \tag{49}$$

также образуют ортонормированный базис. Верно и обратное: векторы $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$ любого ортонормированного базиса в E_n выражаются через векторы (47) формулами вида (49) при должном выборе ортогональной матрицы (48).

Напомним, что матрица (48) называется ортогональной, если

$$\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ji}\, \sigma_{jk} = \delta_{ik} \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

В сжатой форме эти условия могут быть выражены равенством

$$(\sigma_{ij})^{-1} = (\sigma_{ji}).$$

Заметим, что базис есть **упорядоченное** множество. Произведя какую-либо перестановку векторов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, мы получим **новый** базис, отличный от (47).

Любой вектор $x \in E_n$ единственным образом представляется в виде линейной комбинации векторов базиса:

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \quad . \tag{50}$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называют **координатами** или **компонентами** вектора x относительно базиса $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$. Равенство (50) называют **разложением** вектора x по базису.

Непосредственно из свойств базиса вытекает выражение компонент вектора x в виде скалярных произведений x на векторы базиса:

$$x_i = (x, e_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{51}$$

Умножив обе части равенства (50) на число λ, получим

$$\lambda x = (\lambda x_1) e_1 + (\lambda x_2) e_2 + \ldots + (\lambda x_n) e_n . \tag{52}$$

Возьмем еще один вектор

$$y = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n \tag{53}$$

и сложим почленно равенства (50) и (53). Получим разложение вектора $x+y$ по базису (47):

$$x + y = (x_1 + y_1) e_1 + (x_2 + y_2) e_2 + \ldots + (x_n + y_n) e_n \quad . \tag{54}$$

Так же просто получается выражение скалярного произведения векторов через компоненты множителей:

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n \quad . \tag{55}$$

Из (43) и (55) следует выражение модуля вектора x через компоненты:

$$|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \; . \qquad (56)$$

Линейные функционалы на n-мерном эвклидовом пространстве называют проще: **линейные функции** или **линейные формы.** Любая линейная функция l на E_n непрерывна.

Возьмем какую-нибудь линейную функцию l и произвольный вектор x. Воспользовавшись разложением x по базису (47), получим выражение

$$l(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n \quad , \qquad (57)$$

где $a_i = l(e_i) \quad (i=1,2,\ldots,n)$. Правая часть последнего равенства представляет собой скалярное произведение вектора

$$a = a_1 e_1 + a_2 e_2 + \ldots + a_n e_n \qquad (58)$$

на вектор

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \quad , \qquad (59)$$

т.е.

$$l(x) = (a, x) . \qquad (60)$$

Вектор a был определен своими координатами относительно некоторого базиса (47). Нетрудно показать, что, выбрав любой другой ортонормированный базис $\{e_1', e_2', \ldots, e_n'\}$ и представив $l(x)$ в виде $l(x) = a_1' x_1' + a_2' x_2' + \ldots + a_n' x_n'$, где $a_i' = l(e_i') \quad (i=1,2,\ldots,n)$ мы получим **тот же вектор** (58) $a = a_1' e_1' + a_2' e_2' + \ldots + a_n' e_n'$. Таким образом, представление линейной функции l в виде (60) не зависит от выбора базиса. Вектор a в (60) естественно назвать **градиентом** линейной функции l.*)

Мы, показали, что для любой линейной функции l существует градиент, притом, очевидно, единственный. Любой вектор $a \in E_n$ является градиентом некоторой линейной функции – скалярного произведения (a, x) как функции вектора x. Любые две различные линейные функции принимают различные значения хотя бы на одном из векторов базиса, поэтому их градиенты также различны. Таким образом, поставив в соответствие произвольной линейной функции l ее градиент a, мы получим взаимно однозначное соответствие между сопряженным пространством E_n^* и исходным пространством E_n.

---

*) Компоненты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ вектора a равны частным производным первого порядка функции $l(x)$ соответственно по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (см. (57)). Далее, если x_0 и $x_0 + h$ – любые векторы, то приращение функции l в точке x_0, вызванное приращением h аргумента, выражается в виде $\Delta l = l(x_0 + h) - l(x_0) = (a, h)$.

Такое соответствие оказывается **изоморфизмом**. Это означает, что градиент суммы нескольких линейных фукнций есть сумма градиентов слагаемых и при умножении линейной функции на число ее градиент умножается на то же число. Далее, соответствие между E_n^* и E_n **изометрично**, т.е. норма любой линейной функции (см. п. 8 , формула (33)) совпадает с модулем ее градиента.

Мы видим, таким образом, что пространства E_n и E_n^* обладают неразличимой структурой. Именно это обстоятельство имеют в виду, когда говорят, что n-мерное эвклидово пространство является **самосопряженным**. Можно просто отождествить сопряженное пространство E_n^* с самим E_n. При этом придется дополнительно возложить на векторы $a \in E_n$, $b \in E_n$,..."обязанности" линейных функций на E. Для этого достаточно условиться, что на произвольном $x \in E_n$ вектор a (как элемент сопряженного пространства E_n^*, т.е. как линейная функция на E) принимает значение (a,x), вектор b принимает значение (b,x) и т.д.

Предположим, что в E_n выбран некоторый замкнутый конус K. Согласно сказанному в предыдущем абзаце, сопряженный конус K^* можно построить в том же пространстве E_n. K^* будет состоять из всевозможных векторов $u \in E_n$, удовлетворяющих условию $(u,x) \geq 0$ для всех $x \in K$.

10. ПРОСТРАНСТВО $\mathbb{R}^n$

В п.4 было введено **n-мерное координатное пространство** $\mathbb{R}^n$ – совокупность всевозможных упорядоченных систем n действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Каждый такой набор чисел – вектор (или точку) пространства R^n – условимся кратко обозначать $\vec{x}$. Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем называть соответственно первой, второй , . . . , n-й **компонентами** вектора $\vec{x}$.

Итак, пусть

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \tag{61}$$

– произвольные векторы из R^n. Зададим в $\mathbb{R}^n$ операции сложения и умножения на числа, положив

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \tag{62}$$

$$\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, + \ldots + \lambda x_n). \tag{63}$$

Теперь определим скалярное умножение:

$$(\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n. \tag{64}$$

Из (64), в частности, следует, что

$$|\vec{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2} \,. \tag{65}$$

Легко проверить, что так заданные операции превращают $\mathbb{R}^n$ в эвклидово пространство. Нетрудно убедиться в том, что это n-мерное пространство. В самом деле, в $\mathbb{R}^n$ не может быть более n линейно независимых векторов.*) В то же время n векторов

$$\left.\begin{array}{l} \vec{e}_1 = (1,0,0,\ldots,0)\,, \\ \vec{e}_2 = (0,1,0,\ldots,0)\,, \\ \vec{e}_3 = (0,0,1,\ldots,0)\,, \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ \vec{e}_n = (0,0,0,\ldots,1) \end{array}\right\} \tag{66}$$

образуют ортогональную систему, даже ортонормированный базис, откуда следует, что они линейно независимы.

Возьмем произвольный вектор

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{67}$$

и умножим вектор $\vec{e}_1$ на x_1, вектор $\vec{e}_2$ – на x_2, ... , вектор $\vec{e}_n$ – на x_n (см. (66)). Сложив результаты, получим представление вектора $\vec{x}$ в виде линейной комбинации векторов (66):

$$\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n \,. \tag{68}$$

Из равенства (68) явствует, что компоненты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вектора (67) являются его компонентами относительно базиса (66) (см. п. 9, формула (50)).

Рассмотрим теперь n-мерное эвклидово пространство E_n, элементами которого могут служить объекты любой природы, лишь бы для них были определены сложение, умножение на числа и скалярное умножение, удовлетворяющие требованиям, перечисленным в пп.5 и 9.

Выберем в E_n какой-нибудь ортонормированный базис

$$\{e_1, e_2, \ldots, e_n\} \,. \tag{69}$$

Возьмем произвольный вектор $x \in E_n$ и его разложение

---

*) Рассмотрим произвольные m векторов и образуем прямоугольную матрицу M, столбцы которой заполнены компонентами этих векторов. "Высота" (число строк) матрицы M будет равна n, "ширина" (число столбцов) – m. Известно, что ранг r матрицы, равный наибольшему числу линейно независимых столбцов, должен удовлетворять неравенству $r \leq \min\{m, n\}$. Следовательно, $r \leq n$.

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \tag{70}$$

по базису (69). Его компоненты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ относительно базиса (69) образуют упорядоченную систему n чисел, т.е. вектор

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{71}$$

пространства $\mathbb{R}^n$. Поставим в соответствие вектору (70), принадлежащему к E_n, вектор (71). Тем самым мы задаем отображение пространства E_n в n-мерное координатное пространство $\mathbb{R}^n$. Любой вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ пространства $\mathbb{R}^n$ является образом вектора $x \in E_n$, имеющего компоненты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ относительно базиса (69). Два различных вектора

$$\left.\begin{aligned} x &= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \ldots + x_n e_n \in E_n, \\ y &= y_1 e_1 + y_2 e_2 + \ldots + y_n e_n \in E_n \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

имеют различные компоненты, говоря точнее, хотя бы при одном значении индекса i x_i должно быть отлично от y_i. Следовательно, векторам (72) будут соответствовать различные векторы

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad \vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

в пространстве $\mathbb{R}^n$. Итак, мы установили взаимно однозначное соответствие между E_n и $\mathbb{R}^n$. Сопоставив (54) с определением (62) сложения в $\mathbb{R}^n$, (52) – с (63), а (55), (56) – с (64), (65), мы обнаружим, что соответствие между E_n и $\mathbb{R}^n$ есть **изоморфизм** и **изометрия**.

Можно сказать, что $\mathbb{R}^n$ служит **реализацией** пространства E_n. Построенный изоморфизм определяется выбором базиса в E_n. Выбрав новый базис, мы получим новый изоморфизм пространства E_n на $\mathbb{R}^n$ и новую реализацию n-мерного эвклидова пространства E_n в виде n-мерного координатного пространства $\mathbb{R}^n$. В тех задачах, связанных с пространством E_n, в которых не возникает надобность в переходе от одного базиса к другому (а таковы задачи, рассматриваемые в пособии), мы можем считать E_n реализованным в виде $\mathbb{R}^n$.

11. ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^n$

Пусть L – некоторое линейное подпространство n-мерного координатного пространства $\mathbb{R}^n$, содержащее ненулевые векторы и не совпадающее с самим $\mathbb{R}^n$. Достаточно требовать, чтобы L было линейным множеством или линейной подсистемой в $\mathbb{R}^n$ (см. п. 8), так как в конечномерных B-пространствах все линейные множества замкнуты. Будучи линейной системой, L имеет определенную **размерность** m. Это означает, что L содержит m линейно независимых векторов

$$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_m. \tag{73}$$

но если взять в L большее число векторов, то они непременно линейно зависимы. Естественно назвать L m**-мерным подпространством** пространства $\mathbb{R}^n$ *). Полезно ввести еще 0-мерное подпространство, состоящее из единственного элемента $\vec{0}$. Мы предположили, что $\{\vec{0}\} \neq L \neq \mathbb{R}^n$, поэтому $0 < m < n$.

Векторы (73) образуют **аффинный базис** **) m-мерного подпространства L. Любой вектор $\vec{x} \in L$ однозначно представляется в виде

$$\vec{x} = t_1 \vec{b}_1 + t_2 \vec{b}_2 + \ldots + t_m \vec{b}_m . \tag{74}$$

Придавая переменным $t_1, t_2, \ldots, t_m$ в (74) всевозможные действительные значения, мы получим всевозможные векторы подпространства L.

Пусть

$$\begin{gathered} \vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ \vec{b}_i = (b_{1i}, b_{2i}, \ldots, b_{ni}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \end{gathered} \tag{75}$$

Согласно определению действий над элементами пространства $\mathbb{R}^n$, векторное равенство (74) равносильно системе скалярных равенств

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= b_{11} t_1 + b_{12} t_2 + \ldots + b_{1m} t_m ; \\ x_2 &= b_{21} t_1 + b_{22} t_2 + \ldots + b_{2m} t_m ; \\ &\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ x_n &= b_{n1} t_1 + b_{n2} t_2 + \ldots + b_{nm} t_m . \end{aligned}\right\} \tag{76}$$

Прямоугольная матрица

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nm} \end{pmatrix} \tag{77}$$

высоты n и ширины m $(m < n)$ имеет ранг, равный m, так как ее столбцы заполнены компонентами линейно независимых векторов (73).

Уравнения (74) и (76) можно рассматривать как **параметрические уравнения** m-мерного подпространства L. Параметрами служат переменные $t_1, t_2, \ldots, t_m$, число которых равно размерности L.

---

*) Прилагательное "линейное" мы будем опускать.

**) Так называется любая максимальная линейно независимая система векторов в конечномерной линейной системе. Будучи m-мерным эвклидовым пространством, L содержит и ортонормированные базисы.

Так как ранг матрицы B равен m, то один из ее миноров порядка m — назовем его Q — отличен от нуля. Пусть $k_1, k_2, \dots, k_m$ — номера строк матрицы B, вошедших в минор Q. Выделим из (76) m уравнений, содержащих в левых частях $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}$, из которых можно выразить $t_1, t_2, \dots, t_m$ в виде линейных комбинаций переменных $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_m}$. Подставив полученные выражения $t_1, t_2, \dots, t_m$ в оставшиеся $n-m$ уравнений (76), получим $n-m$ однородных линейных уравнений относительно $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &a_{n-m,1}x_1 + a_{n-m,2}x_2 + \dots + a_{n-m,n}x_n = 0. \end{aligned} \tag{78}$$

Легко показать, что уравнения (78) линейно независимы. Точнее говоря, их левые части линейно независимы, а это равносильно условию, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n-m,1} & a_{n-m,2} & \dots & a_{n-m,n} \end{pmatrix} \tag{79}$$

равен $n-m$.

Координаты любого вектора $\vec{x} \in L$, очевидно, удовлетворяют уравнениям (78). Верно и обратное: любое решение $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы (78) может быть получено по формулам (76) при некоторых значениях $t_1, t_2, \dots, t_m$, следовательно, $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L$. Итак, мы видим, что любое m-мерное подпространство L пространства $\mathbb{R}^n$ может быть описано параметрическими уравнениями (76), содержащими m параметров, или системой $n-m$ однородных линейных уравнений (78).

Применив этот вывод к произвольному $(n-1)$-мерному подпространству $\tilde{L}$, мы обнаружим, что такое подпространство описывается одним однородным линейным уравнением

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = 0. \tag{80}$$

Его левая часть представляет собой скалярное произведение вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ на вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ или линейную функцию $l(\vec{x})$, определенную на $\mathbb{R}^n$ и имеющую градиент $\vec{a}$. Условие, касающееся ранга матрицы (79), в этом частном случае сводится к тому, что $\vec{a} \neq \vec{0}$.

Уравнение (80) можно записать в виде

$$(\vec{a}, \vec{x}) = 0. \tag{81}$$

Таким образом, $(n-1)$-мерное подпространство $\tilde{L}$ есть геометрическое место точек, в которых линейная функция $l(\vec{x})$ обращается в нуль *).

Заметим, что между линейными функциями и $(n-1)$-мерными подпространствами нет взаимно однозначного соответствия: каково бы ни было число $\lambda \neq 0$, уравнение $(\lambda\vec{a}, \vec{x}) = 0$ описывает то же подпространство, что и (81).

Уравнение (81) можно также истолковать, сказав, что $(n-1)$-мерное подпространство $\tilde{L}$ в $\mathbb{R}^n$ состоит из всех $\vec{x}$, ортогональных фиксированному вектору $\vec{a}$. Иногда мы будем называть $\vec{a}$ нормалью или вектором нормали к $\tilde{L}$.

Система (78), описывающая m-мерное подпространство L, которую мы представим в сжатом виде

$$(\vec{a}_j, \vec{x}) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-m), \tag{82}$$

где

$$\vec{a}_j = (a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{jn}) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-m), \tag{83}$$

содержит $n-m$ уравнений вида (81). Из них каждое служит уравнением некоторого $(n-1)$-мерного подпространства. Следовательно, любое m-мерное подпространство L является пересечением $n-m$ $(n-1)$-мерных подпространств. Последние, как мы видели, таковы, что матрица (79) имеет ранг $n-m$, а это равносильно линейной независимости векторов (83).

Наоборот, пересечение любых $n-m$ $(n-1)$-мерных подпространств $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \ldots, \tilde{L}_{n-m}$ с линейно независимыми векторами нормалей есть некоторое m-мерное подпространство.

В частности, пересечение любых n $(n-1)$-мерных подпространств, векторы нормалей которых линейно независимы, есть 0-мерное подпространство. Другими словами, n таких $(n-1)$-мерных подпространств имеют единственную общую точку $\vec{0}$.

Возьмем какие-либо множества $U = \{\vec{u}\}$ и $V = \{\vec{v}\}$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Множество

$$\{\vec{u} + \vec{v} \mid \vec{u} \in U, \vec{v} \in V\} \tag{84}$$

называется **векторной суммой** множеств U и V и обозначается $U+V$. В частности, если V состоит из единственного элемента $\vec{v}_0$, то можно рассмотреть векторную сумму множества U и вектора $\vec{v}_0$

$$U + \vec{v}_0 = \{\vec{u} + \vec{v}_0 \mid \vec{u} \in U\}. \tag{85}$$

---

*) Подпространства $n-1$ измерений соответствуют гиперплоскостям в произвольных банаховых пространствах (см. п. 8). Если (81) записать в виде $l(\vec{x}) = 0$, то $\tilde{L}$ окажется гиперплоскостью N_l.

О множестве вида (85) говорят также, что оно получено из множества V сдвигом на вектор $\vec{v}_0$.

Пусть теперь L – какое-либо m-мерное подпространство, $\vec{c}$ – фиксированный вектор в $\mathbb{R}^n$. Множество

$$\Pi = L + \vec{c}, \tag{86}$$

полученное сдвигом L на вектор $\vec{c}$, назовем m-мерной плоскостью в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Если $\vec{c} \in L$, то $\Pi = L$. Если же $\vec{c} \bar{\in} L$, то Π и L не пересекаются. Заметим, что в этом случае $\vec{0} \bar{\in} \Pi$ и, следовательно, Π не является линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^n$.

Коль скоро фиксировано L, m-мерная плоскость (86) однозначно определяется выбором вектора $\vec{c}$. Взаимно однозначного соответствия между m-мерными плоскостями (86) и векторами $\vec{c}$ нет: из равенства $L+\vec{c}_1 = L+\vec{c}_2$ следует только, что $\vec{c}_1 - \vec{c}_2 \in L$.

Заметим, что, в соответствии с определением 0-мерного подпространства, 0-мерная плоскость, полученная сдвигом точки $\vec{0}$ на $\vec{c}$, состоит из единственной точки $\vec{c}$.

Если m-мерное подпространство L описывается векторным параметрическим уравнением (73), то уравнением m-мерной плоскости $\Pi = L + \vec{c}$ будет служить

$$\vec{x} = \vec{c} + t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + \ldots + t_m\vec{b}_m. \tag{87}$$

Векторное уравнение (87) равносильно системе скалярных уравнений. Последние можно получить из (87) так же, как уравнения (76) выводятся из (74).

Рассмотрим теперь $(n-1)$-мерное подпространство $\tilde{L}$. Пусть $(\vec{a}, \vec{x}) = 0$ его уравнение; $(n-1)$-мерную плоскость

$$\tilde{\Pi} = \tilde{L} + \vec{c}, \tag{88}$$

полученную сдвигом $\tilde{L}$ на произвольный вектор $\vec{c}$, условимся называть просто плоскостью в пространстве $\mathbb{R}^n$.

Плоскость $\tilde{\Pi}$ имеет уравнение

$$(\vec{a}, \vec{x}) = \gamma, \tag{89}$$

где

$$\gamma = (\vec{a}, \vec{c}). \tag{90}$$

Таким образом, плоскость $\tilde{\Pi}$ служит **поверхностью уровня** линейной функции $l(\vec{x}) = (\vec{a}, \vec{x})$, на которой последняя принимает значение γ. При выбранном $\tilde{L}$ соответствие между плоскостями (88) и значениями γ взаимно однозначно. Значению $\gamma = 0$ отвечает, в частности, само подпространство $\tilde{L}$.

Плоскость (88) однозначно определяется ее уравнением (89), т.е. в конечном счете параметрами $\vec{a}$ и γ. Поэтому вместо $\widetilde{\Pi}$ мы будем иногда использовать обозначение $\Pi_{\vec{a},\gamma}$. Вектор $\vec{a}$ будем называть **вектором нормали** к плоскости $\Pi_{\vec{a},\gamma}$. Заметим, что между плоскостями $\Pi_{\vec{a},\gamma}$ и парами $\langle\vec{a},\gamma\rangle$ взаимно однозначного соответствия нет: при любом $\lambda \neq 0$ $\Pi_{\vec{a},\gamma} = \Pi_{\lambda\vec{a},\lambda\gamma}$.

Любые две плоскости $\Pi_{\vec{a}_1,\gamma_1}$, $\Pi_{\vec{a}_2,\gamma_2}$ с линейно независимыми векторами нормали пересекаются по некоторой $(n-2)$-мерной плоскости. Плоскости $\Pi_{\vec{a},\gamma_1}$, $\Pi_{\vec{a},\gamma_2}$ с общим вектором нормали и $\gamma_1 \neq \gamma_2$ не пересекаются; такие плоскости естественно назвать параллельными.

Предположим, что m-мерное подпространство L представлено в виде

$$L = \widetilde{L}_1 \cap \widetilde{L}_2 \cap \ldots \cap \widetilde{L}_{n-m},$$

где $\widetilde{L}_j$ $(j=1,2,\ldots,n-m)$ $(n-1)$-мерные подпространства. Тогда, каков бы ни был вектор $\vec{c}$,

$$L + \vec{c} = (\widetilde{L}_1 + \vec{c}) \cap (\widetilde{L}_2 + \vec{c}) \cap \ldots \cap (\widetilde{L}_{n-m} + \vec{c}).$$

На "языке уравнений" последнее утверждение может быть сформулировано так: если m-мерное подпространство L описывается системой уравнений

$$(\vec{a}_j, \vec{x}) = 0 \qquad (j = 1,2,\ldots,n-m), \tag{91}$$

то его сдвиг на вектор $\vec{c}$ описывается уравнениями

$$(\vec{a}_j, \vec{x}) = \gamma_j \qquad (j=1,2,\ldots,n-m), \tag{92}$$

где $\gamma_j = (\vec{a}_j, \vec{c})$.

Рассмотрим следующую задачу: даны $m+1$ линейно независимых векторов

$$\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_m; \tag{93}$$

требуется найти m-мерную плоскость, проходящую через точки (93). Это означает, что компоненты векторов (93) должны удовлетворять уравнениям искомой m-мерной плоскости. При произвольном n слова "векторы" и "точки" – всего лишь разные названия элементов пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. упорядоченных систем n действительных чисел. Но если пользоваться пространством $\mathbb{R}^3$ и его геометрической интерпретацией, то числа, образующие тройку $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, могут означать как компоненты вектора $\vec{r} = \vec{OP}$, так и декартовы координаты точки P. В соответствии с нашими наглядными представлениями поставленную задачу в $\mathbb{R}^3$ при $m = 2$ естественно формулировать так: даны линейно независимые векторы $\vec{x}_0 = \vec{OP_0}$, $\vec{x}_1 = \vec{OP_1}$, $\vec{x}_2 = \vec{OP_2}$; найти (двумерную) плоскость, проходящую через точки P_0, P_1, P_2 (рис. 3).

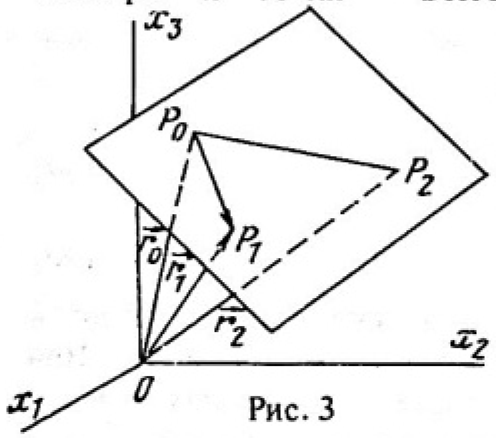


Рис. 3

Из линейной независимости векторов (93) следует, что векторы

$$\vec{x}_1-\vec{x}_0\ ,\vec{x}_2-\vec{x}_0\ ,\dots,\vec{x}_m-\vec{x}_0 \tag{94}$$

также линейно независимы. Искомая m-мерная плоскость будет изображаться уравнением

$$\vec{x}=\vec{x}_0+t_1(\vec{x}_1-\vec{x}_0)+t_2(\vec{x}_2-\vec{x}_0)+\dots+t_m(\vec{x}_m-\vec{x}_0)\,. \tag{95}$$

Нетрудно убедиться в том, что поставленная задача имеет единственное решение. В частности, если

$$\vec{x}_0\ ,\ \vec{x}_1\ ,\ \vec{x}_2\ ,\dots,\ \vec{x}_{n-1} \tag{96}$$

— линейно независимые векторы, то единственная плоскость, проходящая через $\vec{x}_0,\vec{x}_1,\vec{x}_2,\dots,\vec{x}_{n-1}$, описывается векторным параметрическим уравнением

$$\vec{x}=\vec{x}_0+t_1(\vec{x}_1-\vec{x}_0)+t_2(\vec{x}_2-\vec{x}_0)+\dots+t_{n-1}(\vec{x}_{n-1}-\vec{x}_0)\,. \tag{97}$$

12. МНОГОГРАННИКИ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^n$

Рассмотрим какую-нибудь линейную функцию $l(\vec{x})=(\vec{a},\vec{x})$ на пространстве $\mathbb{R}^n$, имеющую градиент $\vec{a}\neq\vec{0}$, и плоскость $\Pi_{\vec{a},\gamma}$, изображаемую уравнением

$$(\vec{a},\vec{x})=\gamma\,. \tag{98}$$

Множества вида

$$\{\vec{x}\,|\,(\vec{a},\vec{x})>\gamma\}\ ,\ \ \{\vec{x}\,|\,(\vec{a},\vec{x})<\gamma\} \tag{99}$$

называются **открытыми полупространствами**, множества

$$B^+_{\vec{a},\gamma}=\{\vec{x}\,|\,(\vec{a},\vec{x})\geq\gamma\}\ , \tag{100}$$

$$B^-_{\vec{a},\gamma}=\{\vec{x}\,|\,(\vec{a},\vec{x})\leq\gamma\} \tag{101}$$

называются **замкнутыми полупространствами**. В дальнейшем мы рассматриваем только замкнутые полупространства и называем их просто **полупространствами**.

Всякое полупространство (100) или (101) представляет собой неограниченное выпуклое замкнутое множество. Границей его служит плоскость

$$\Pi_{\vec{a},\gamma}=\{\vec{x}\,|\,(\vec{a},\vec{x})=\gamma\}\,. \tag{102}$$

Так как

$$B^-_{\vec{a},\gamma}=B^+_{-\vec{a},-\gamma}\ ,$$

то мы можем ограничиться рассмотрением полупространств только вида (100) или только вида (101). Поэтому в дальнейшем, говоря о полупространстве, мы будем подразумевать множество вида (100) и обозначать его (тогда, когда это не может привести к путанице) символом $B_{\vec{a},\gamma}$.

Условимся говорить о полупространстве $B_{\vec{a},\gamma}$, что оно примыкает к плоскости $\Pi_{\vec{a},\gamma}$.

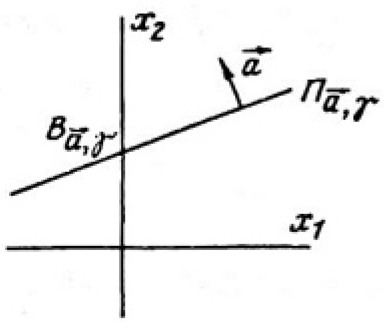


Рис. 4

На рис. 4 изображена "плоскость" $\Pi_{\vec{a},\gamma}$ в пространстве $\mathbb{R}^2$, т.е. прямая в координатной плоскости x_1, x_2; ее уравнение $a_1x_1+a_2x_2=\gamma$. Стрелкой изображен вектор нормали $\vec{a}=(a_1,a_2)$ к $\Pi_{\vec{a},\gamma}$. Полупространство, примыкающее к $\Pi_{\vec{a},\gamma}$ (в нашем случае это полуплоскость), лежит с той стороны от $\Pi_{\vec{a},\gamma}$, куда направлен вектор $\vec{a}$ – градиент функции $(\vec{a},\vec{x})=a_1x_1+a_2x_2$.

Многогранником в пространстве $\mathbb{R}^n$ называется пересечение конечного числа полупространств, если это пересечение не пусто *).

Итак, пусть

$$\Pi_{\vec{a}_1,\gamma_1}, \Pi_{\vec{a}_2,\gamma_2}, \ldots, \Pi_{\vec{a}_N,\gamma_N} \tag{103}$$

произвольные N плоскостей,

$$B^+_{\vec{a}_1,\gamma_1}, B^+_{\vec{a}_2,\gamma_2}, \ldots, B^+_{\vec{a}_N,\gamma_N} \tag{104}$$

- примыкающие к ним полупространства. Обозначив $\Pi_k=\Pi_{\vec{a}_k,\gamma_k}$, $B_k=B^+_{\vec{a}_k,\gamma_k}$ $(k=1,2,\ldots,N)$, запишем соответственно вместо (103) и (104)

$$\Pi_1, \Pi_2, \ldots, \Pi_N, \tag{105}$$

$$B_1, B_2, \ldots, B_N. \tag{106}$$

Предположим, что множество

$$M=B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_N \tag{107}$$

не пусто и, следовательно, является многогранником.

Полупространства (106) представляют собой замкнутые выпуклые множества, поэтому их пересечение – многогранник M – тоже замкнутое выпуклое множество. Так как

$$B_k=\{\vec{x} \mid (\vec{a}_k,\vec{x}) \geqslant \gamma_k\} \quad (k=1,2,\ldots,N),$$

то многогранник M определяется системой неравенств

---

*) Мы сформулировали, строго говоря, определение выпуклого многогранника. Прилагательное "выпуклый" опущено, так как многогранники, не обладающие свойством выпуклости, нам нигде не понадобятся.

$$\left.\begin{aligned}(\vec a_1,\vec x)&\geqslant\gamma_1,\\(\vec a_2,\vec x)&\geqslant\gamma_2,\\&\cdots\cdots\\(\vec a_N,\vec x)&\geqslant\gamma_N.\end{aligned}\right\}\qquad(108)$$

М может быть ограниченным или неограниченным, может содержать внутренние точки (иначе говоря, быть "выпуклым телом") или быть заключенным в одной из плоскостей (105).

На рис. 5 изображены различные множества (107) в $\mathbb{R}^2$: а) $M=\varnothing$; б) M – ограниченное выпуклое тело; в) M – неограниченное выпуклое тело; г) "плоскости" Π_1 и Π_2 параллельны, M – неограниченное выпуклое тело; д) "плоскости" Π_1 и Π_2 совпадают, но их векторы нормалей $\vec a_1$ и $\vec a_2$ направлены в разные стороны, поэтому примыкающие к ним "полупространства" (полуплоскости) не имеют общих внутренних точек, и M также не содержит внутренних точек. $\Pi_1, \Pi_2, \ldots$ – "плоскости" в $\mathbb{R}^2$, т.е. прямые; стрелками указаны векторы нормалей.

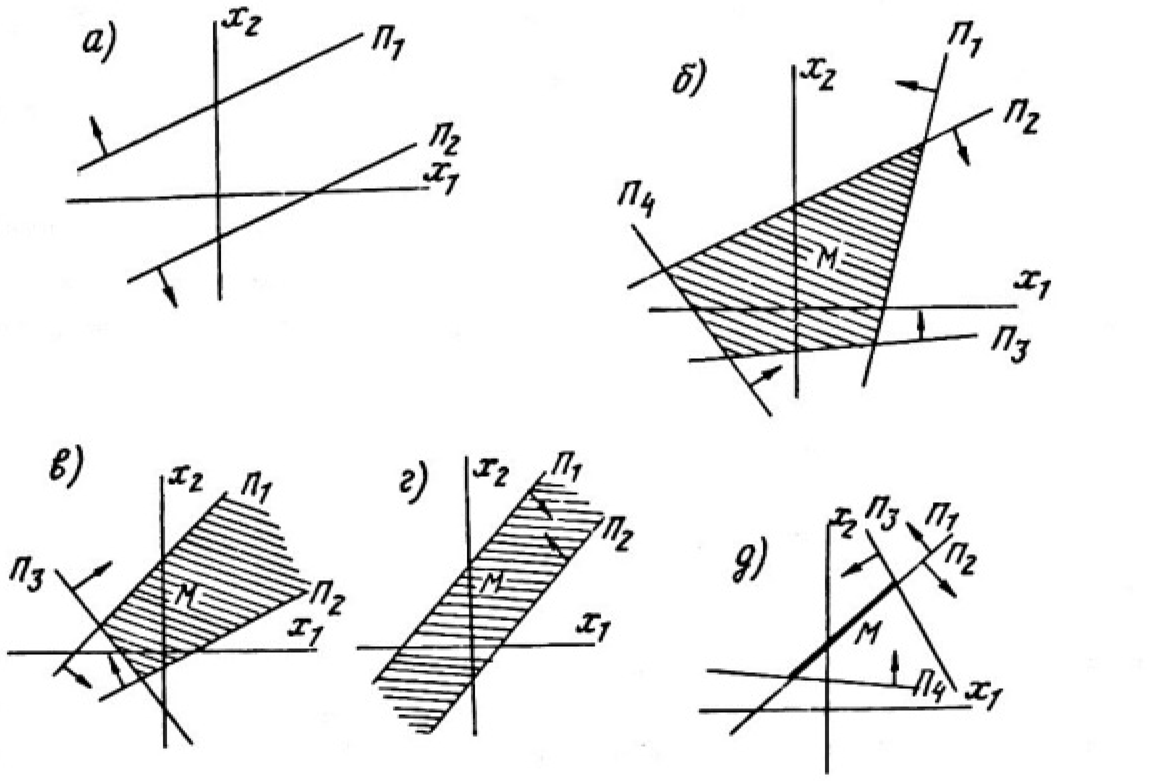


Рис. 5

Размерность многогранника M , содержащего внутренние точки, по определению, равна n – размерности пространства $\mathbb{R}^n$. Если M не содержит внутренних точек и содержится в некоторой , r-мерной плоскости $(r<n)$, но не содержится ни в какой плоскости меньшей размерности, то число r считается **размерностью многогранника** M .

Гранью многогранника (107) называется пересечение g многогранника с одной или несколькими плоскостями (105), если это пересечение не пусто. Предположим, что $g = M \cap (\Pi_{k_1} \cap \Pi_{k_2} \cap \ldots \cap \Pi_{k_s})$ и $\Pi_{k_1} \cap \Pi_{k_2} \cap \ldots \cap \Pi_{k_s}$ есть некоторая r-мерная плоскость. Тогда g называется **r-мерной гранью многогранника** M.

Любая 1-мерная грань называется **ребром** многогранника, 0-мерная грань называется **вершиной** многогранника. Вершины многогранника M (и только они) обладают следующим свойством: нет такого прямолинейного отрезка, концы которого принадлежали бы к M, а вершина являлась бы его серединой.

Неограниченный многогранник может вовсе не иметь вершин (см. рис. 5,г). Любой ограниченный многогранник имеет вершины.

Рассмотрим один важный частный случай. Предположим, что все плоскости (105) проходят через точку $\vec{0}$, т.е. представляют собой $(n-1)$-мерные подпространства $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \ldots, \tilde{L}_N$. Последние описываются уравнениями

$$(\vec{a}_k, \vec{x}) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{109}$$

Возьмем примыкающие к $\tilde{L}_1, \tilde{L}_2, \ldots, \tilde{L}_N$ полупространства

$$B_k = \{\vec{x} \mid (\vec{a}_k, \vec{x}) \geqslant 0\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \tag{110}$$

Многогранник

$$M = B_1 \cap B_2 \cap \ldots \cap B_N \tag{111}$$

назовем **коническим многогранником**. Иначе говоря, конический многогранник представляет собой множество векторов $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, определяемое (см. (108)) системой неравенств

$$\left.\begin{aligned} &(\vec{a}_1, \vec{x}) \geqslant 0, \\ &(\vec{a}_2, \vec{x}) \geqslant 0, \\ &\quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ &(\vec{a}_N, \vec{x}) \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

Конический многогранник M заведомо не пуст, так как $\vec{0} \in M$. Далее, если $\vec{x}_1 \in M$, $\vec{x}_2 \in M$, то и $\vec{x}_1 + \vec{x}_2 \in M$; если $\vec{x} \in M$, то $t\vec{x} \in M$ при любом $t > 0$. Отсюда, в частности, следует, что конический многогранник (если $\vec{0}$ не является его единственным элементом) представляет собой неограниченное множество.

Таким образом, если M содержит векторы, отличные от нулевого, то он обладает двумя из трех свойств, определяющих конус (см. п.7). Свойство конуса, состоящее в том, что при $\vec{x} \neq \vec{0}$ векторы $\vec{x}$ и $-\vec{x}$ не могут одновременно быть элементами конуса, может нарушаться.

Можно показать, что, каков бы ни был конический многогранник M, можно выбрать в нем такую конечную систему векторов

$$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_p, \tag{113}$$

что $M=\{t_1\vec{b}_1+t_2\vec{b}_2+\ldots+t_p\vec{b}_p \mid t_1\geqslant 0, t_2\geqslant 0,\ldots,t_p\geqslant 0\}$. О векторах (113) можно сказать, что они порождают конический многогранник M. Система порождающих векторов и их число не определяются однозначно множеством M, даже если потребовать, чтобы векторы (113) имели заданную длину (равную, например, 1).

Среди систем векторов, порождающих M, существует система, содержащая наименьшее число векторов. И такая система порождающих векторов, определяется, вообще говоря, неоднозначно.

В том случае, когда M представляет собой конус, т.е. M не содержит ни одной пары векторов вида $\{\vec{x},-\vec{x}\}$, где $\vec{x}\neq\vec{0}$, наименьшая (по числу элементов) система порождающих векторов

$$\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \ldots,\ \vec{b}_q \tag{114}$$

единственна с точностью до выбора длин векторов. При этом M имеет q ребер. Последние представляют собой лучи

$$\{t\vec{b}_s \mid 0<t<+\infty\} \qquad (s=1,2,\ldots,q),$$

к каждому из которых присоединяется $\vec{0}$. Представление произвольного вектора $\vec{x}\in M$ в виде линейной комбинации векторов (114) с неотрицательными коэффициентами, вообще говоря, не единственно.

На рис. 6,а изображен конический многогранник M в координатной плоскости, определенный неравенством $x_1\geqslant 0$, т.е. $\{\vec{x}=(x_1,x_2) \mid x_1\geqslant 0\}$. Тройки векторов $\vec{b}_1=(0;-1)$, $\vec{b}_2=(1;0)$, $\vec{b}_3=(0;1)$ и $\vec{b}_1'=\vec{b}_1$, $\vec{b}_2'=(1,1)$, $\vec{b}_3'=\vec{b}_3$ служат примерами наименьших (по числу элементов) систем векторов, порождающих M.

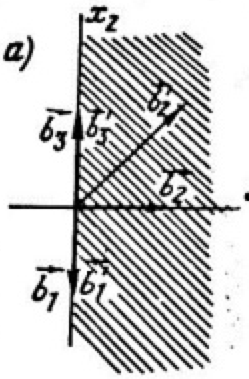
На рис. 6,б изображен конический многогранник (даже конус) M в пространстве $\mathbb{R}^3$, определенный неравенствами $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$, $x_3\geqslant 0$, $x_1+x_2-2x_3\geqslant 0$. Для наглядности изображен ограниченный многогранник, отсеченный от M плоскостью $x_1+x_2=2$. Векторы $\vec{b}_1=(1,0,0)$, $\vec{b}_2=(0,1,0)$, $\vec{b}_3=(0,1,\frac{1}{2})$, $\vec{b}_4=(1,0,\frac{1}{2})$ образуют наименьшую систему порождающих векторов. Они направлены вдоль ребер многогранника. Вектор $\vec{x}=(1,1,\frac{1}{2})\in M$ может быть выражен в виде линейной комбинации порождающих векторов (с неотрицательными коэффициентами) $\vec{x}=\vec{b}_1+\vec{b}_3$ или $\vec{x}=\vec{b}_2+\vec{b}_4$.

Рассмотрим еще один интересный класс многогранников. Возьмем линейно независимые векторы $\vec{x}_0, \vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$. Множество

$$\tilde{S}=\{t_0\vec{x}_0+t_1\vec{x}_1+\ldots+t_m\vec{x}_m \mid t_0\geqslant 0, t_1\geqslant 0,\ldots,t_m\geqslant 0;\ t_0+t_1+\ldots+t_m=1\} \tag{115}$$

представляет собой наименьшее выпуклое множество, содержащее точки $\vec{x}_0,\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$. Точный смысл этого утверждения таков: каково бы ни было выпуклое множество C, содержащее $\vec{x}_0,\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$, непременно $\tilde{S}\subset C$. Множество (115) называется m-мерным симплексом[*)] с вершинами $\vec{x}_0,\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_m$.

[*)] От латинского *simplex* – простой.



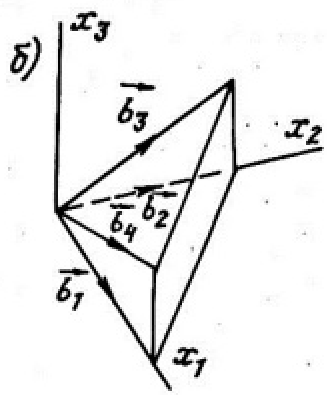


Рис. 6

В частности, если мы имеем $n+1$ линейно независимых векторов

$$\vec{x}_0, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \ldots, \vec{x}_n, \tag{116}$$

то n-мерный симплекс

$$S=\{t_0\vec{x}_0+t_1\vec{x}_1+\ldots+t_n\vec{x}_n \mid t_0\geqslant 0, t_1\geqslant 0,\ldots, t_n\geqslant 0; t_0+t_1+\ldots+t_n=1\} \tag{117}$$

с вершинами (116) есть наименьшее выпуклое тело, содержащее векторы (116).

Любой симплекс представляет собой ограниченный многогранник. Гранями симплекса также служат симплексы соответствующих размерностей. В трехмерном пространстве 0-мерный симплекс есть точка; 1-мерный симплекс – отрезок прямой; 2-мерный симплекс – треугольник; 3-мерный симплекс – тетраэдр.

Пусть $\vec{x}$ – произвольный элемент n-мерного симплекса (117). Тогда $\vec{x}$ однозначно представляется в виде

$$\vec{x}=t_0\vec{x}_0+t_1\vec{x}_1+\ldots+t_n\vec{x}_n, \tag{118}$$

где

$$t_0\geqslant 0, t_1\geqslant 0,\ldots, t_n\geqslant 0, \quad t_0+t_1+\ldots+t_n=1. \tag{119}$$

Числа $t_0, t_1, \ldots, t_n$ называются **барицентрическими координатами** вектора $\vec{x}\in S$. Для того, чтобы получить какую-нибудь m-мерную грань симплекса (117), следует в (118) некоторые $n-m$ барицентрических координат положить равными нулю, а остальные $m+1$ варьировать с соблюдением условий (119). Отсюда, в частности, следует, что число m-мерных граней n-мерного симплекса равно числу сочетаний из $n+1$ по $m+1$.

13. ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Рассмотрим заданную на $\mathbb{R}^n$ линейную функцию

$$l(\vec{x})=(\vec{c},\vec{x})=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n. \tag{120}$$

Мы предположим, что $l(\vec{x})$ не равна нулю тождественно. Это равносильно условию, что ее градиент

$$\vec{c}=(c_1, c_2, \dots, c_n) \tag{121}$$

отличен от $\vec{0}$, т.е.

$$|c_1|+|c_2|+\dots+|c_n|>0 . \tag{122}$$

При этом условии $l(\vec{x})$ принимает на $\mathbb{R}^n$ всевозможные действительные значения. В самом деле, каково бы ни было $\gamma\in\mathbb{R}$, $l(\vec{x})$ принимает значение γ, в частности, на векторе $\vec{x}=\frac{\gamma}{|\vec{c}|^2}\vec{c}$.

Пространство $\mathbb{R}^n$ оказывается расслоенным на параллельные плоскости

$$(\vec{c},\vec{x})=\gamma \qquad (-\infty<\gamma<+\infty), \tag{123}$$

которые являются поверхностями уровня линейной функции (120).

Возьмем какое-нибудь замкнутое выпуклое тело M в пространстве $\mathbb{R}^n$ и поставим следующую задачу: найти наименьшее значение функции (120) на M.

Заметим, что если мы умеем находить наименьшее значение функции $l(\vec{x})=(\vec{c},\vec{x})$, то отыскание ее наибольшего значения не составит труда, так как*)

$$\max l(\vec{x})=-\min\left[-l(\vec{x})\right]=-\min(-\vec{c},\vec{x}) .$$

Обозначим

$$\mu=\min_{\vec{x}\in M}(\vec{c},\vec{x}) . \tag{124}$$

Поставленная задача состоит в отыскании не только числа μ, но и той точки (или точек), в которой (соответственно, в которых) функция (120) принимает значение, равное μ.

Если M — ограниченное множество, то, так как оно замкнуто, а линейная функция непрерывна, $l(\vec{x})$ достигает хотя бы в одной точке множества M своего наименьшего значения μ. Тогда, когда M — неограниченное множество, может случиться, что $l(\vec{x})$ не ограничена снизу на M и, следовательно, наименьшего значения (на M) не существует.

Далее следует заметить, что $l(\vec{x})$ не может принять значения μ ни в одной внутренней точке множества M. В самом деле, если бы такая точка существовала, она была бы стационарной точкой функции $l(\vec{x})$. Но

$$\frac{\partial l}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_1}(c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n)=c_i ,$$

поэтому, в силу условия (122), функция $l(\vec{x})$ не имеет стационарных точек. Отсюда следует, что свое наименьшее значение μ (если оно существует) функция $l(\vec{x})$ принимает на границе множества M.

---

*) Символы $\max$ и $\min$ означают не "максимум" и "минимум", а "наибольшее значение" и "наименьшее значение" функции на каком-либо множестве.

Если в качестве M взято замкнутое выпуклое множество, не содержащее внутренних точек, то M будет заключено в некоторой m-мерной плоскости Π $(1 \leq m \leq n)$. При этом может случиться, что M будет целиком лежать в одной из плоскостей семейства (123). Если эта последняя описывается уравнением $(\vec{c}, \vec{x}) = \gamma_0$, то $l(\vec{x})$ тождественно равна γ_0 на множестве M, и задача о наименьшем значении $l(\vec{x})$ на M оказывается тривиальной. Остальные утверждения, касающиеся поведения функции $l(\vec{x})$ на множестве M, остаются в силе[*].

Теперь мы рассмотрим задачу о наименьшем значении линейной функции (120) **на многограннике** M. Относительно M будем предполагать, что этот многогранник имеет вершины.

Допустим, что линейная функция $l(\vec{x}) = (\vec{c}, \vec{x})$ ограничена снизу на многограннике M. Тогда $l(\vec{x})$ **принимает свое наименьшее значение** μ **в вершине многогранника** M (может быть, в нескольких вершинах).

Заметим, что и существование вершин и ограниченность (как сверху, так и снизу) линейной функции $l(\vec{x})$ на M обеспечены, если M – **ограниченный многогранник.**

Если $l(\vec{x})$ принимает свое наименьшее значение μ в нескольких различных вершинах многогранника, то она тождественно равна μ на грани наименьшей размерности, содержащей эти вершины.

В частности, если $l(\vec{x})$ принимает значение μ в двух различных вершинах $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$, то $l(\vec{x})$ тождественно равна μ на ребре многогранника, содержащем эти вершины, другими словами, на прямолинейном отрезке $\overline{\vec{x}_1 \vec{x}_2}$.

Все, что было сказано о наименьшем значении линейной функции $l(\vec{x})$, очевидным образом распространяется на ее **наибольшее значение**, если только $l(\vec{x})$ ограничена сверху на M и многогранник M имеет вершины.

На рис. 7 изображены некоторые многогранники в пространстве $\mathbb{R}^2$ (т.е. в координатной плоскости x_1, x_2) и отдельные линии уровня линейной функции $l(\vec{x}) = c_1 x_1 + c_2 x_2$. Стрелки указывают направление вектора $\vec{c} = grad\, l$.

На рис. 7,а многогранник M содержит внутренние точки. Он заключен в "слое", образованном линиями уровня функции $l(\vec{x})$, имеющими с M общие точки. На рисунке изображены несколько таких линий. "Слой" ограничен "плоскостями" (прямыми) $l(\vec{x}) = \gamma_1$ и $l(\vec{x}) = \gamma_2$, где $\gamma_1 < \gamma_2$. Наименьшее значение μ функции $l(\vec{x})$ на M равно γ_1 и достигается ею в вершинах P_1 и P_2 (а следовательно, на ребре $\overline{P_1 P_2}$ многогранни-

[*] И в этом случае верно, что $l(\vec{x})$ принимает наименьшее значение (если оно существует) на границе множества M, но это утверждение требует иной интерпретации. Мы на ней не останавливаемся, так как в тех случаях, когда M есть многогранник, экстремальное свойство линейной функции допускает более простую формулировку, не зависящую от того, содержит M внутренние точки или нет.

ка). Наибольшее значение γ_2 функция $l(\vec{x})$ достигает в единственной вершине P_4.

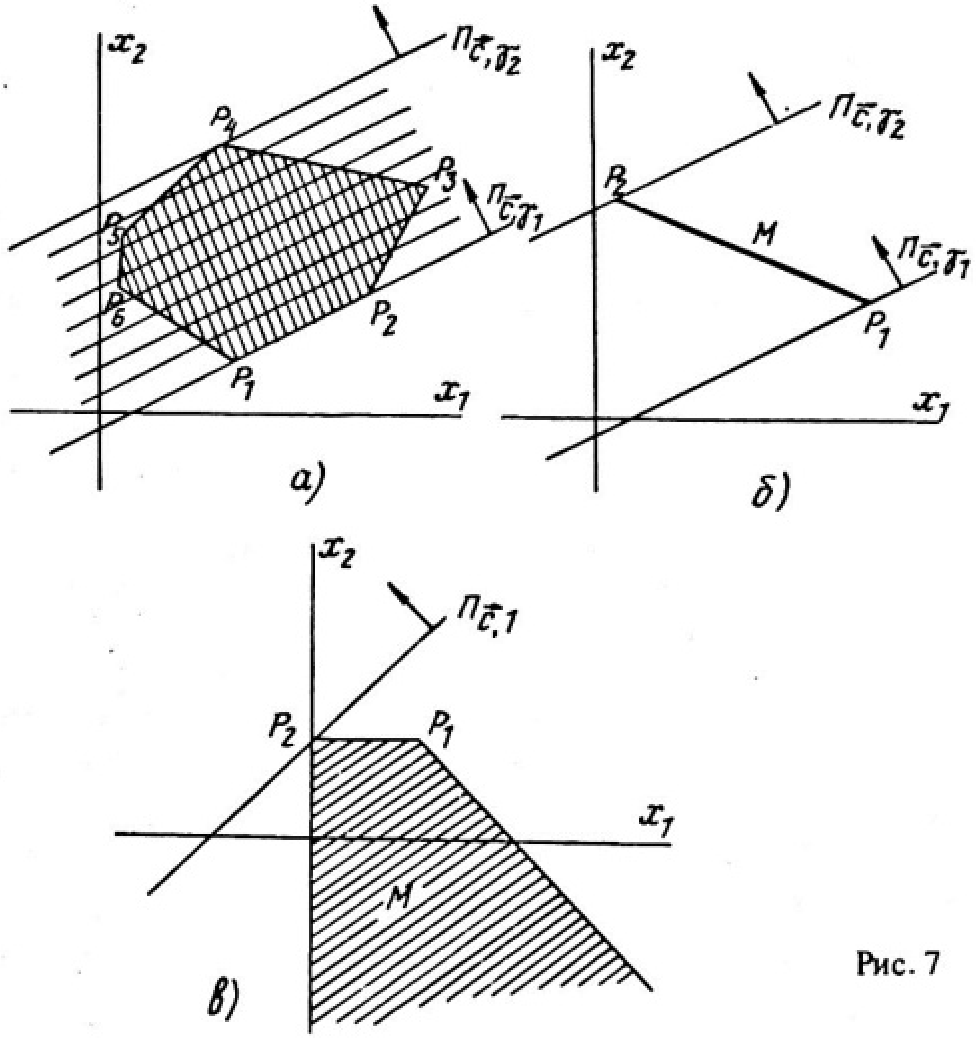


Рис. 7

На рис. 7,б многогранник M ограничен, но не имеет внутренних точек. Функция $l(\vec{x})$ принимает наименьшее и наибольшее (на M) значения соответственно в вершинах P_1 и P_2. На рис. 7,в неограниченный многогранник M определяется системой неравенств $x_1 \geq 0, -x_2 \geq -1, -x_1 - x_2 \geq -2$. Линейная функция $l(\vec{x}) = -x_1 + x_2$ неограничена снизу на M; свое наибольшее значение, равное 1, она принимает в вершине $P_2(0,1)$.

Так называемая стандартная задача линейного программирования состоит в следующем: требуется найти решение (или решения) $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ системы неравенств

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n} &\geq \gamma_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n} &\geq \gamma_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn} &\geq \gamma_m, \end{aligned}\right\} \qquad (125)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \dots,\ x_n \geq 0, \qquad (126)$$

на котором (которых) линейная функция

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{127}$$

принимает наименьшее значение.

Под "решением" системы неравенств (125) — (126) мы понимаем любую упорядоченную систему n действительных чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ (т.е. точку пространства $\mathbb{R}^n$), удовлетворяющую всем неравенствам (125) и (126). Следовательно, если такие "решения" существуют, речь идет об отыскании наименьшего значения линейной функции (127) на многограннике M, который определен неравенствами (125) — (126) (см. п. 12, в частности, неравенства (108)).

Можно показать, что многогранник M, определенный неравенствами (125) — (126), имеет вершины, следовательно, если только поставленная задача разрешима, функция (127) принимает свое наименьшее значение μ в одной или в нескольких вершинах многогранника.

В теории линейного программирования функцию (127) обычно называют **целевой функцией**; неравенства (125) и (126), определяющие многогранник M, называют **системой ограничений**.

Каноническая задача линейного программирования ставится следующим образом: требуется найти решение (или решения) системы неравенств

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n&=b_1\ ;\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n&=b_2\ ;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n&=b_m\ , \end{aligned}\right\} \tag{128}$$

$$x_1\geqslant 0\ ,\ x_2\geqslant 0\ ,\ \ldots\ ,\ x_n\geqslant 0\ , \tag{129}$$

на котором (которых) линейная функция

$$c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$$

принимает наименьшее значение.

Может быть, более естественно было бы говорить о решениях "системы уравнений (128)" и "системы неравенств (129)", но наша сжатая формулировка вполне корректна: система уравнений (128) равносильна системе $2m$ неравенств

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n\geqslant b_i\ ;$$

$$(-a_{i1})x_1+(-a_{i2})x_2+\ldots+(-a_{in})x_n\geqslant -b_i \quad (i=1,2,\ldots,m).$$

Далее можно предположить, что матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

имеет ранг $r = m$, откуда, в частности, будет следовать, что $m \leqslant n$. Действительно, поставленная задача содержательна лишь тогда, когда уравнения (128) совместны, поэтому, если $r < m$, то некоторые $m - r$ уравнений (128), являющиеся следствиями остальных r уравнений, могут быть изъяты.

Итак, в случае канонической задачи многогранник M представляет собой пересечение $(n-m)$-мерной плоскости, заданной системой (128), и n полупространств

$$B_j = \{\vec{x} \mid x_j \geqslant 0\} \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Заметим, что задача линейного программирования в гл.1 сформулирована как раз в канонической форме. К канонической же задаче применим так называемый **симплекс-метод**, наиболее эффективный численный метод решения задач линейного программирования.

Описанная выше стандартная задача не является наиболее общей формой задач линейного программирования, но любая задача такого рода может быть приведена к стандартной форме посредством несложных преобразований. В свою очередь стандартная задача может быть сведена к канонической.

Опишем вкратце один из способов такого сведения. Если требуется найти наименьшее значение функции (127) при ограничениях (125) и (126), то вводим неотрицательные переменные $z_1, z_2, \dots, z_m$, вместо неравенств (125) записываем уравнения

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n - z_i = \gamma_i \quad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{130}$$

и берем линейную функцию $n + m$ переменных

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + 0 \cdot z_1 + 0 \cdot z_2 + \dots + 0 \cdot z_m . \tag{131}$$

Задача отыскания наименьшего значения функции (131) при ограничениях (130) и

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0, \dots, x_n \geqslant 0,\ z_1 \geqslant 0, z_2 \geqslant 0, \dots, z_m \geqslant 0 \tag{132}$$

есть каноническая задача линейного программирования. Она эквивалентна исходной задаче в том смысле, что если функция (131) достигает наименьшего значения μ на векторе

$$(x_1, x_2, \dots, x_n, z_1, z_2, \dots, z_m) \in M_1 \subset \mathbb{R}^{n+m}, \tag{133}$$

где M_1 – многогранник в пространстве $\mathbb{R}^{n+m}$, определенный неравенствами (130) и (132), то функция (127) достигает своего наименьшего значения (также, очевидно, равного μ) на векторе

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M \subset \mathbb{R}^n, \tag{134}$$

где M – многогранник в пространстве $\mathbb{R}^n$, определенный неравенствами (125) и (126). Наоборот, пусть функция $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ принимает значение μ на некотором векторе (134). Подставив компоненты этого вектора в уравнения (130) и найдя

$$z_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k - \gamma_i \quad (i=1,2,\ldots,m),$$

мы обнаружим, что функция (131) принимает значение μ на векторе (133).

Далее будет показано, каким образом каноническая задача линейного программирования может быть сведена к стандартной задаче.

14. ДВОЙСТВЕННЫЕ ЗАДАЧИ

Стандартная задача линейного программирования, как сказано в п. 13, состоит в отыскании наименьшего значения μ линейной функции

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{135}$$

на многограннике $M \subset \mathbb{R}^n$, определенном неравенствами

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geqslant \gamma_1 ; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geqslant \gamma_2 ; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geqslant \gamma_m , \end{array}\right\} \tag{136}$$

$$x_1 \geqslant 0 , \; x_2 \geqslant 0 , \ldots , x_n \geqslant 0 , \tag{137}$$

а также в отыскании вершины (или вершин) многогранника M, в которой (в которых) функция (135) принимает значение μ.

Условимся иногда обозначать стандартную задачу кратко СЗ и указывать только систему ограничений и вопрос, относящийся к целевой функции, опуская полную словесную формулировку задачи. То же соглашение будет относиться к канонической задаче (КЗ). Таким образом, мы имеем

СЗ:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \geqslant \gamma_i \quad (i=1,2,\ldots,m); \\ \qquad x_k \geqslant 0 \quad (k=1,2,\ldots,n), \end{array}\right\} \tag{138}$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \quad min\,? \tag{139}$$

КЗ:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = b_i \quad (i=1,2,\ldots,m); \\ \qquad x_k \geqslant 0 \quad (k=1,2,\ldots,n), \end{array}\right\} \tag{140}$$

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \quad min\,? \tag{141}$$

Задача, двойственная к стандартной задаче, формулируется так: требуется найти решение (или решения) системы неравенств

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}u_1+a_{21}u_2+\ldots+a_{m1}u_m \leq c_1 \ ; \\ a_{12}u_1+a_{22}u_2+\ldots+a_{m2}u_m \leq c_2 \ ; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{1n}u_1+a_{2n}u_2+\ldots+a_{mn}u_m \leq c_n \ , \end{array}\right\} \tag{142}$$

$$u_1 \geq 0, \ u_2 \geq 0, \ldots, \ u_m \geq 0 \ , \tag{143}$$

на котором (на которых) линейная функция

$$\gamma_1 u_1+\gamma_2 u_2+\ldots+\gamma_m u_m \tag{144}$$

принимает наибольшее значение.

Система ограничений (142) – (143), если она совместна, т.е. существует хотя бы один вектор $(u_1, u_2, \ldots, u_m) \in \mathbb{R}^m$, ей удовлетворяющий, определяет некоторый многогранник M^* в m-мерном координатном пространстве. Матрица из коэффициентов при $u_1, u_2, \ldots, u_m$ в левых частях неравенств (142) получена транспонированием матрицы (a_{ik}) в условиях (136). Правые части неравенств (142) представляют собой коэффициенты целевой функции (135). Коэффициентами целевой функции двойственной задачи служат правые части неравенств (136).

Обозначив задачу, двойственную к СЗ, символом СЗ*, запишем ее краткую формулировку

СЗ*:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ik} u_i \leq c_k \qquad (k=1,2,\ldots,n), \tag{145}$$

$$u_i \geq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,m), \tag{146}$$

$$\gamma_1 u_1+\gamma_2 u_2+\ldots+\gamma_m u_m \quad max\,? \tag{147}$$

Легко видеть, что, придав СЗ* стандартную форму

$$\sum_{i=1}^{m} (-a_{ik}) u_i \geq -c_k \qquad (k=1,2,\ldots,n), \tag{148}$$

$$u_i \geq 0 \qquad (i=1,2,\ldots,m), \tag{149}$$

$$(-\gamma_1)u_1+(-\gamma_2)u_2+\ldots+(-\gamma_m)u_m \quad min\,? \tag{150}$$

и сформулировав задачу, двойственную к задаче (148) – (150), мы снова придем к исходной СЗ. Сказанное может быть кратко выражено символическим равенством (СЗ*)*= СЗ.

Для того, чтобы сформулировать задачу, двойственную к канонической задаче, поступим следующим образом: сведем КЗ к СЗ и рассмотрим задачу, двойственную к полученной СЗ; ее мы и назовем задачей, двойственной к исходной КЗ.

Итак, дана КЗ:

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = b_i \qquad (i=1,2,\dots,m), \tag{151}$$

$$x_k \geqslant 0 \qquad (k=1,2,\dots,n), \tag{152}$$

$$c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n \quad min? \tag{153}$$

Заменив систему (151) эквивалентной системой неравенств

$$\left.\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n \geqslant b_1\ ;\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n \geqslant b_2\ ;\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n \geqslant b_m\ ;\\
&(-a_{11})x_1+(-a_{12})x_2+\dots+(-a_{1n})x_n \geqslant -b_1\ ;\\
&(-a_{21})x_1+(-a_{22})x_2+\dots+(-a_{2n})x_n \geqslant -b_2\ ;\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&(-a_{m1})x_1+(-a_{m2})x_2+\dots+(-a_{mn})x_n \geqslant -b_m\ ,
\end{aligned}\right\} \tag{154}$$

мы получим стандартную задачу линейного программирования с системой ограничений (154), (152) и с целевой функцией $c_1x_1+c_2x_2+\dots+c_nx_n$.

В двойственной задаче должны фигурировать векторы $(u_1,u_2,\dots,u_m,$ $u_{m+1},u_{m+2},\dots,u_{2m})$ – элементы пространства $\mathbb{R}^{2m}$. Сохраним за первыми m компонентами этих векторов обозначения $u_1,u_2,\dots,u_m$, а для $u_{m+1},u_{m+2},$ $\dots,u_{2m}$ введем новые обозначения $v_1,v_2,\dots,v_m$. Тогда целевая функция двойственной задачи

$$b_1u_1+b_2u_2+\dots+b_mu_m+(-b_1)u_{m+1}+(-b_2)u_{m+2}+\dots+(-b_m)u_{2m}$$

примет вид

$$b_1(u_1-v_1)+b_2(u_2-v_2)+\dots+b_m(u_m-v_m),$$

а система ограничений –

$$\begin{aligned}
&a_{11}(u_1-v_1)+a_{21}(u_2-v_2)+\dots+a_{m1}(u_m-v_m)\leqslant c_1\ ;\\
&a_{12}(u_1-v_1)+a_{22}(u_2-v_2)+\dots+a_{m2}(u_m-v_m)\leqslant c_2\ ;\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&a_{1n}(u_1-v_1)+a_{2n}(u_2-v_2)+\dots+a_{mn}(u_m-v_m)\leqslant c_n\ ,
\end{aligned}$$

$$u_1\geqslant 0,\ u_2\geqslant 0,\ \dots,\ u_m\geqslant 0,$$

$$v_1\geqslant 0,\ v_2\geqslant 0,\ \dots,\ v_m\geqslant 0.$$

Положив
$$z_1 = u_1 - v_1\ ,\ z_2 = u_2 - v_2\ ,\ \dots,\ z_m = u_m - v_m$$
и заметив, что требование неотрицательности $u_1, u_2, \dots, u_m$ и $v_1, v_2, \dots, v_m$ никак не скажется на переменных $z_1, z_2, \dots, z_m$, мы придем к следующей формулировке задачи, двойственной к КЗ:

$$\text{КЗ}^*: \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ik} z_i \leq c_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \tag{155}$$

$$b_1 z_1 + b_2 z_2 + \dots + b_m z_m \quad max\ ? \tag{156}$$

Задачи линейного программирования допускают компактную матричную формулировку. Напомним читателю правило умножения прямоугольных матриц. Возьмем матрицы

$$\mathbb{F} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \cdots & f_{1s} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ f_{m1} & f_{m2} & \cdots & f_{ms} \end{pmatrix}, \quad \mathbb{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_{s1} & g_{s2} & \cdots & g_{sn} \end{pmatrix},$$

подчиненные условию, что число столбцов (ширина) матрицы $\mathbb{F}$ равно числу строк (высоте) матрицы $\mathbb{G}$. Тогда

$$\mathbb{F}\mathbb{G} = \mathbb{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & \dots & h_{1n} \\ h_{21} & h_{22} & \dots & h_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ h_{m1} & h_{m2} & \dots & h_{mn} \end{pmatrix},$$

где $h_{ik} = \sum_{j=1}^{s} f_{ij}\, g_{jk} \quad (i = 1, 2, \dots, m;\ k = 1, 2, \dots, n).$

Высота матрицы $\mathbb{H}$ равна высоте левого множителя, ее ширина равна ширине правого множителя.

Элемент $\vec{w}$ r-мерного координатного пространства может быть записан в традиционной форме как вектор-строка

$$\vec{w} = (w_1, w_2, \dots, w_r) \tag{157}$$

или в виде вектора-столбца

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \dots \\ w_r \end{pmatrix}. \tag{158}$$

Ясно, что (157) и (158) также представляют собой матрицы: первая содержит одну строку и r столбцов, вторая — r строк и один столбец. Запись $\vec{w} \geq \vec{w}_1$ будет означать, что каждая компонента вектора $\vec{w}$ не меньше соответствующей компоненты вектора $\vec{w}_1$. В частности, если все компоненты вектора $\vec{w}$ неотрицательны, мы будем писать $\vec{w} \geq \vec{0}$.

Введем матрицу

$$\mathbb{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

векторы-столбцы

$$\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \dots \\ \gamma_m \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$$

и векторы-строки

$$\vec{c} = (c_1, c_2, \dots, c_n), \quad \vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_m).$$

Стандартную задачу линейного программирования и двойственную к ней можно сформулировать так:

СЗ:

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{A}\vec{x} \geqslant \vec{\gamma}, \\ \vec{x} \geqslant \vec{0}, \end{aligned}\right\} \tag{159}$$

$$\vec{c}\vec{x} \quad \min ? \tag{160}$$

СЗ*:

$$\left.\begin{aligned} \vec{u}\mathbb{A} \leqslant \vec{c}, \\ \vec{u} \geqslant \vec{0}, \end{aligned}\right\} \tag{161}$$

$$\vec{u}\vec{\gamma} \quad \max ? \tag{162}$$

Введя вектор-столбец $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ и вектор-строку $\vec{z} = (z_1, z_2, \dots, z_m)$, запишем в матричной форме каноническую и двойственную к ней задачи:

КЗ:

$$\left.\begin{aligned} \mathbb{A}\vec{x} = \vec{b}, \\ \vec{x} \geqslant \vec{0}, \end{aligned}\right\} \tag{163}$$

$$\vec{c}\vec{x} \quad \min ? \tag{164}$$

КЗ*:

$$\vec{z}\mathbb{A} \leqslant \vec{c}, \tag{165}$$

$$\vec{z}\vec{b} \quad \max ? \tag{166}$$

Все произведения в (159) – (166) следует трактовать как произведения матриц.

15. ТЕОРЕМА ДВОЙСТВЕННОСТИ

Рассмотрим КЗ линейного программирования и задачу, к ней двойственную КЗ*.

Система ограничений (151), (152) (или (163) в матричной форме)

КЗ (тогда, когда эта система совместна) определяет некоторый многогранник M в n-мерном координатном пространстве $\mathbb{R}^n$. Система ограничений (155) (или (165)) двойственной задачи (тогда, когда она совместна) определяет некоторый многогранник M^* в m-мерном координатном пространстве $\mathbb{R}^m$.

Известно, что целевая функция

$$f(\vec{x})=\vec{c}\vec{x}=(\vec{c},\vec{x})=c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n \tag{167}$$

может быть не ограничена снизу на многограннике M. В этом случае система ограничений двойственной задачи оказывается несовместной: в пространстве $\mathbb{R}^m$ нет ни одного вектора $\vec{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_m)$, удовлетворяющего всем неравенствам (155). Другими словами, n полупространств в $\mathbb{R}^m$, определяемых соответственно первым, вторым, . . . , n-м неравенствами (155), имеют пустое пересечение.

Если же функция (167) ограничена снизу на M, то неравенства (155) определяют некоторый многогранник $M^*\subset\mathbb{R}^m$.

Целевую функцию двойственной задачи обозначим

$$g(\vec{z})=\vec{z}\vec{b}=(\vec{b},\vec{z})=b_1z_1+b_2z_2+\ldots+b_mz_m. \tag{168}$$

Возьмем произвольные векторы

$$\vec{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in M,\quad \vec{z}=(z_1,z_2,\ldots,z_m)\in M^*,$$

подставим координаты вектора $\vec{x}$ в левые части уравнений (151), умножим первое, второе и т.д. полученные равенства соответственно на z_1, на z_2 и т.д. и сложим их почленно. Мы придем к равенству

$$\sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}x_k\Big)z_i=\sum_{i=1}^{m}b_iz_i. \tag{169}$$

Левую часть (169) можно представить в виде

$$\sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{i=1}^{m}a_{ik}z_i\Big)x_k.$$

В силу неравенств (155) и условия (152), из (169) будет следовать

$$f(\vec{x})=\sum_{k=1}^{n}c_kx_k\geqslant\sum_{i=1}^{m}b_iz_i=g(z). \tag{170}$$

Из неравенства (170), которое справедливо для любых $\vec{x}\in M$ и $\vec{z}\in M^*$, в частности, вытекает, что линейная функция $g(\vec{z})$ ограничена сверху на многограннике M^*. Следовательно, линейная функция $g(\vec{z})$ достигает своего наибольшего (на M^*) значения ν в одной из вершин $\vec{z}^{(0)}$ многогранника M^* (может быть, помимо $\vec{z}^{(0)}$ еще в нескольких вершинах). В то же время линейная функция $f(\vec{x})$ достигает своего наименьшего (на M) значения μ в одной из вершин $\vec{x}^{(0)}$ (может быть, еще в нескольких вершинах) многогранника M. Из (170), в частности, следует неравенство

$$f(\vec{x}^{(0)}) \geqslant g(\vec{z}^{(0)}) . \tag{171}$$

Теорема двойственности утверждает, что наименьшее значение μ функции $f(\vec{x})$ на многограннике M и наибольшее значение ν функции $g(\vec{z})$ на многограннике M^* совпадают, т.е.

$$f(\vec{x}^{(0)}) = g(\vec{z}^{(0)}) . \tag{172}$$

Мы не будем приводить здесь доказательство теоремы двойственности. Ограничимся тем, что покажем, каким образом эта теорема вытекает из очень простого и наглядного свойства конических многогранников.

Пусть $\hat{M}$ — конический многогранник в пространстве $\mathbb{R}^n$ и

$$\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_p \tag{173}$$

— векторы, порождающие $\hat{M}$. Возьмем произвольный вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. Этот вектор либо принадлежит к $\hat{M}$, либо не принадлежит.

В первом случае $\vec{v}$ может быть выражен в виде линейной комбинации векторов (173) с неотрицательными коэффициентами:

$$\vec{v} = t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + \dots + t_p\vec{b}_p , \tag{174}$$

$$t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, \dots, t_p \geqslant 0 . \tag{175}$$

Во втором случае, т.е. когда $\vec{v} \bar{\in} \hat{M}$, существует плоскость, проходящая через точку $\vec{0}$ и отделяющая вектор $\vec{v}$ от многогранника $\hat{M}$. Это утверждение составляет содержание так называемой теоремы отделимости: каковы бы ни были замкнутое выпуклое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ и точка $\vec{x}_0$, не принадлежащая к M, существует такая плоскость Π, что M находится по одну сторону плоскости Π, а точка $\vec{x}_0$ — по другую, причем $\vec{x}_0 \bar{\in} \Pi$. В нашем частном случае замкнутым выпуклым множеством является конический многогранник $\hat{M}$. При этом плоскость Π непременно содержит $\vec{0}$. Точный смысл этого предложения таков: существует $(n-1)$-мерное подпространство $\tilde{L}$, изображаемое уравнением

$$(\vec{a}, \vec{x}) = 0 \qquad (\vec{a} \neq \vec{0}), \tag{176}$$

такое, что для любого $\vec{x} \in \hat{M}$

$$(\vec{a}, \vec{x}) \geqslant 0 , \tag{177}$$

но

$$(\vec{a}, \vec{v}) < 0 . \tag{178}$$

Другими словами, плоскость $\tilde{L} = \Pi_{\vec{a},0}$ (см. п. 12) такова, что $\hat{M}$ заключено в полупространстве $B^+_{\vec{a},0}$, а $\vec{v}$ лежит внутри полупространства $B^-_{\vec{a},0}$ (т.е. $\vec{v}$ — одна из внутренних точек множества $B^-_{\vec{a},0}$).

На рис. 8 изображен конический многогранник $\hat{M}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ (говоря точнее, ограниченный многогранник, отсеченный от $\hat{M}$ некоторой плоскостью). На рис. 8,а вектор $\vec{v}$ заключен в $\hat{M}$; на рис. 8,б вектор $\vec{v}$ находится вне $\hat{M}$; изображена часть плоскости, "отделяющей" $\vec{v}$ от $\hat{M}$.

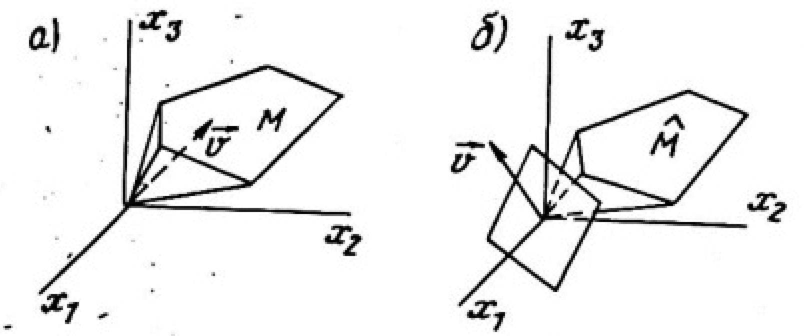


Рис. 8

Заметим, что неравенство (177) выполняется для всех $\vec{x} \in \hat{M}$ тогда и только тогда, когда оно выполняется для векторов (173), порождающих конический многогранник $\hat{M}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}_1) \geqslant 0, (\vec{a}, \vec{b}_2) \geqslant 0, \ldots, (\vec{a}, \vec{b}_p) \geqslant 0. \tag{179}$$

Пусть

$$\begin{aligned} \vec{b}_1 &= (b_{11}, b_{21}, \ldots, b_{n1}); \\ \vec{b}_2 &= (b_{12}, b_{22}, \ldots, b_{n2}); \\ &\cdots\cdots\cdots \\ \vec{b}_p &= (b_{1p}, b_{2p}, \ldots, b_{np}) \end{aligned}$$

и $\vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда соотношения (174) и (175) могут быть представлены в виде

$$\left.\begin{aligned} b_{11}t_1 + b_{12}t_2 + \ldots + b_{1p}t_p &= v_1; \\ b_{21}t_1 + b_{22}t_2 + \ldots + b_{2p}t_p &= v_2; \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{n1}t_1 + b_{n2}t_2 + \ldots + b_{np}t_p &= v_n, \end{aligned}\right\} \tag{180}$$

$$t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, \ldots, t_p \geqslant 0, \tag{181}$$

а неравенства (178) и (179) – в виде

$$\left.\begin{aligned} b_{11}a_1 + b_{21}a_2 + \ldots + b_{n1}a_n &\geqslant 0; \\ b_{12}a_1 + b_{22}a_2 + \ldots + b_{n2}a_n &\geqslant 0; \\ \cdots\cdots\cdots \\ b_{1p}a_1 + b_{2p}a_2 + \ldots + b_{np}a_n &\geqslant 0, \end{aligned}\right\} \tag{182}$$

$$a_1v_1 + a_2v_2 + \ldots + a_nv_n < 0. \tag{183}$$

Альтернативе "каков бы ни был конический многогранник $\hat{M} \subset \mathbb{R}^n$, произвольно выбранный вектор $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ либо содержится в $\hat{M}$, либо не содержится" можно придать такую форму: какова бы ни была матрица

$$\mathbb{B}=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{pmatrix}, \tag{184}$$

при любом выборе вектора $\vec{v}=(v_1, v_2, \dots, v_n)$ **либо система уравнений** (180) (относительно $t_1, t_2, \dots, t_p$) **имеет решение** $t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, \dots, t_p \geqslant 0$, **либо разрешима** (относительно $a_1, a_2, \dots, a_n$) **система неравенств** (182) – (183)[*].

Введя векторы-столбцы

$$\vec{t}=\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \dots \\ t_p \end{pmatrix}, \quad \vec{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$$

и вектор-строку $\vec{a}=(a_1, a_2, \dots, a_n)$, мы сможем сформулировать последнее предложение в матричной форме: какова бы ни была матрица (184), при любом выборе вектора-столбца $\vec{v}$ либо разрешима (относительно вектора-столбца $\vec{t}$) система неравенств

$$B\vec{t}=\vec{v}, \quad \vec{t} \geqslant \vec{0}, \tag{185}$$

либо разрешима (относительно вектора-строки $\vec{a}$) система неравенств

$$\vec{a}\mathbb{B} \geqslant \vec{0}, \quad \vec{a}\vec{v} < 0 . \tag{186}$$

Заметим, что мы вправе называть (185) "системой неравенств", так как векторное уравнение $\mathbb{B}\vec{t}=\vec{v}$ можно заменить неравенствами $\mathbb{B}\vec{t} \leqslant \vec{v}$, $\mathbb{B}\vec{t} \geqslant \vec{v}$.

Отыскание решений неравенств (185) назовем задачей А; отыскание решений системы неравенств (186) – задачей Б. Теорема Фаркаша гласит, что при любом выборе вектора $\vec{v}$ разрешима одна и только одна из задач А и Б. Поэтому для доказательства разрешимости (при выбранном $\vec{v}$), скажем, задачи А достаточно установить, что задача Б не имеет решения.

Обратимся снова к задачам линейного программирования КЗ и КЗ*, рассмотренным в начале п. 15. Предположим, как и раньше, что система ограничений исходной задачи

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n=b_i \quad (i=1,2,\dots,m), \tag{187}$$

$$x_k \geqslant 0 \qquad (k=1,2,\dots,n) \tag{188}$$

совместна и определяет некоторый многогранник M в пространстве $\mathbb{R}^n$,

---

[x] Это предложение называется **теоремой Фаркаша.** Она, как мы видим, вытекает из теоремы отделимости. Последняя, в свою очередь, является следствием теоремы Фаркаша. Есть еще теоремы, равносильные теореме отделимости, например, следующая: если K – конус в пространстве $\mathbb{R}^n$ и K^* – конус, сопряженный с K (см. п. 9), то конус, сопряженный с K^*, совпадает с исходным конусом K.

а целевая функция

$$f(\vec{x}) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_n x_n \tag{189}$$

ограничена снизу на M. Тогда $f(\vec{x})$ достигает наименьшего (на M) значения μ в одной из вершин $\vec{x}^{(0)}$ многогранника M: $\mu = f(\vec{x}^{(0)})$.

При этом система ограничений двойственной задачи

$$a_{1k}z_1 + a_{2k}z_2 + \ldots + a_{mk}z_m \leq c_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{190}$$

также совместна и определяет некоторый многогранник M^* в пространстве $\mathbb{R}^m$. Целевая функция задачи КЗ*

$$g(\vec{z}) = b_1z_1 + b_2z_2 + \ldots + b_m z_m \tag{191}$$

связана с функцией (189) соотношением (см. (170)): при всех $\vec{x} \in M, \vec{z} \in M^*$

$$g(\vec{z}) \leq f(\vec{x}).$$

Следовательно, она ограничена сверху на M^* и достигает своего наибольшего (на M^*) значения ν в одной из вершин $\vec{z}^{(0)}$ многогранника M^*:

$$\nu = g(\vec{z}^{(0)}). \tag{192}$$

Утверждение теормы двойственности состоит в том, что $f(\vec{x}^{(0)}) = \nu$. Другими словами, компоненты $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}$ вектора $\vec{x}^{(0)}$ удовлетворяют уравнениям (187), неравенствам (188) и, сверх того, уравнению

$$c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \nu. \tag{193}$$

Таким образом, теорема двойственности утверждает существование неотрицательных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1;\\
&a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2;\\
&\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m,\\
&c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \nu.
\end{aligned}$$

Это означает разрешимость задачи **А**, отвечающей матрице

$$\mathbb{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \\ c_1 & c_2 & \ldots & c_n \end{pmatrix}$$

и вектору $\vec{v} = (b_1, b_2, \ldots, b_m, \nu)$.

Соответствующая задача Б состоит в отыскании решений $(h_1, h_2, \ldots, h_m, h_{m+1})$ системы неравенств

$$\left.\begin{aligned} a_{11}h_1+a_{21}h_2+\ldots+a_{m1}h_m+c_1h_{m+1}\geqslant 0\,;\\ a_{12}h_1+a_{22}h_2+\ldots+a_{m2}h_m+c_2h_{m+1}\geqslant 0\,;\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ a_{1n}h_1+a_{2n}h_2+\ldots+a_{mn}h_m+c_nh_{m+1}\geqslant 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{194}$$

$$b_1h_1+b_2h_2+\ldots+b_mh_m+\vartheta h_{m+1}<0\,. \tag{195}$$

Теорема двойственности будет доказана, если удастся установить, что задача Б неразрешима.

Допустим противное, т.е. что существует решение

$$h_1',\, h_2',\, \ldots,\, h_m',\, h_{m+1}'$$

системы неравенств (194) – (195), так что

$$\left.\begin{aligned} a_{11}h_1'+a_{21}h_2'+\ldots+a_{m1}h_m'+c_1h_{m+1}'\geqslant 0\,;\\ a_{12}h_1'+a_{22}h_2'+\ldots+a_{m2}h_m'+c_2h_{m+1}'\geqslant 0\,;\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ a_{1n}h_1'+a_{2n}h_2'+\ldots+a_{mn}h_m'+c_nh_{m+1}'\geqslant 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{196}$$

$$b_1h_1'+b_2h_2'+\ldots+b_mh_m'+\vartheta h_{m+1}'<0\,. \tag{197}$$

Умножим левые части (196) соответственно на $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – компоненты произвольного вектора $\vec{x}\in M$ – и сложим полученные неравенства почленно. Мы придем к соотношению

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{m} a_{ik}h_i' + h_{m+1}'\sum_{k=1}^{n} c_k x_k \geqslant 0\,. \tag{198}$$

Так как $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k x_k = f(\vec{x})$ и согласно (187)

$$\sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{m} a_{ik}h_i' = \sum_{i=1}^{m}\Big(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k\Big)h_i' = \sum_{i=1}^{m} b_i h_i'\,,$$

то (198) можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{m} b_i h_i' + h_{m+1}' f(\vec{x}) \geqslant 0\,. \tag{199}$$

Вычтя из (199) неравенство (197), получим

$$h_{m+1}'\left(f(\vec{x})-\vartheta\right)>0\,. \tag{200}$$

Так как $f(\vec{x})\geqslant g(\vec{z})$ при всех $\vec{x}\in M, \vec{z}\in M^*$ и $\vartheta=\max g(\vec{z})\,(\vec{z}\in M^*)$, то разность в скобках в (200) неотрицательна, следовательно, $h_{m+1}'>0$. Введем обозначения

$$z_1' = -\frac{h_1'}{h_{m+1}'}, \quad z_2' = -\frac{h_2'}{h_{m+1}'}, \ldots, z_m' = -\frac{h_m'}{h_{m+1}'}$$

и разделим (196) и (197) на $-h_{m+1}'$. Первые n полученных неравенств

$$\left.\begin{array}{l} a_{11} z_1' + a_{21} z_2' + \ldots + a_{m1} z_m' \leq c_1; \\ a_{12} z_1' + a_{22} z_2' + \ldots + a_{m2} z_m' \leq c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} z_1' + a_{2n} z_2' + \ldots + a_{mn} z_m' \leq c_n, \end{array}\right\} \tag{201}$$

$$b_1 z_1' + b_2 z_2' + \ldots + b_m z_m' > \nu \tag{202}$$

свидетельствуют о том, что вектор

$$\vec{z}' = (z_1', z_2', \ldots, z_m')$$

содержится в многограннике M^* и, следовательно,

$$g(\vec{z}') = b_1 z_1' + b_2 z_2' + \ldots + b_m z_m' \leq \nu,$$

а это противоречит неравенству (202).

Итак, предположение о разрешимости задачи Б оказывается несостоятельным. Значит, разрешима задача А, откуда следует теорема двойственности.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор Е.Н. К о ч у б е й

Техн. редактор Н.М. В о р о н ц о в а

Корректор М.В. М а к а р о в а

Тем. план 1987 г., поз. 36

Л. – 62037 Подписано в печать 13/I-1988 г. Формат 60x84 1/16

Объем 4,25 п.л. Уч.-изд.л. 4 Тираж 350 экз. Цена 25 коп.

Изд.№ 110-1 Заказ 2119

Типография МИФИ, Каширское шоссе, 31