МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

С. Б. ШИХОВ, Ю. И. ЕРШОВ

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА

МОСКВА 1978

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО
СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

С. Б. ШИХОВ, Ю. И. ЕРШОВ

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА

Утверждено
в качестве учебного пособия
редсоветом института

МОСКВА 1978

УДК 621.039.512

Шихов С.Б., Ершов Ю.И. Нестационарная теория переноса. Учебное пособие. М., изд. МИФИ, 1978, 72 с.

В учебном пособии кратко излагаются постановка и вывод основной задачи нестационарной теории переноса. Основное внимание уделяется удачному выбору физической модели и четкому строгому математическому формализму ее описания. Для этой цели изучается задача Коши в банаховых пространствах, свойства теории операторов, в частности элементы теории полугрупп, элементы спектральной теории операторов. Во второй главе указанная теория применяется к оператору нестационарной теории переноса.

Пособие предназначено для студентов специальности "Прикладная математика", аспирантов и молодых специалистов.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ

В этой главе дан вывод кинетического уравнения переноса нейтронов – основного уравнения физики реакторов и защиты – без учета влияния запаздывающих нейтронов и в предположении, что нейтрон является классической частицей (его квантовомеханические свойства не принимаются во внимание). Если первое предположение является грубым и в дальнейшем влияние запаздывающих нейтронов будет учтено, то второе предположение в рамках большинства задач физики реакторов и защиты вполне оправдано. Вводятся в рассмотрение функциональные пространства, играющие роль рабочих пространств при анализе задачи, и дается краткий обзор теории полугрупп ограниченных операторов, которая представляет собой основу математического аппарата нестационарной теории переноса.

§ 1. КИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

Уравнение переноса нейтронов есть линейное интегродифференциальное уравнение Больцмана. Линейность уравнения является следствием основного предположения, принимаемого в физике реакторов и защиты, которое заключается в том, что плотность нейтронного газа много меньше плотности ядер среды. Другими словами, плотность нейтронов такова, что не учитываются столкновения между нейтронами и влияние распределения нейтронов по скоростям на распределение по скоростям ядер среды. Необходимо отметить, что для реальных ядерных энергетических установок такое предположение хорошо согласуется с экспериментом; влияние же эффектов, связанных с нелинейностью уравнения, при необходимости рассматривается особо и, как правило, такие задачи возникают при изучении устойчивости реакторных систем.

Пусть $n(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)\,d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}$ – среднее число нейтронов в элементе объемом $d\vec{r}=dx\,dy\,dz$, включающем точку $\vec{r}=(x,y,z)$ с кинетической энергией $E\in dE$ (в электрон-вольтах) и направлениями, лежащими в телесном угле $d\vec{\Omega}\ni\vec{\Omega}$ в момент времени t. Таким образом, $n(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)$ играет роль функции распределения нейтронов в точке $\vec{r}$ и в момент времени t по энергии и направлениям движения нейтронов.

Среда, в которой осуществляется процесс переноса нейтронов, обычно характеризуется макроскопическими нейтронными сечениями

$$\sum_{b,\ell}(\vec{r},E)=N_\ell(\vec{r})\,\sigma_{b,\ell}(E)\ \text{см}^{-1},$$

где $N_\ell(\vec{r})$ – плотность ядер ℓ-го изотопа в среде; $\sigma_{b,\ell}$ – сечение реакции типа "b" нейтрона с ядром ℓ-го изотопа. Полное макроскопическое сечение определяется тогда равенством

$$\sum\nolimits_t(\vec{r},E)=\sum_\ell N_\ell(\vec{r})\sum_b \sigma_{b,\ell}(E).$$

Функцию $\sum_t(\vec{r},E)$ удобно представить в виде

$$\sum\nolimits_t(\vec{r},E)=\sum\nolimits_{si}(\vec{r},E)+\sum\nolimits_a(\vec{r},E),$$

где $\sum_{si}(\vec{r},E)=\sum_s(\vec{r},E)+\sum_i(\vec{r},E)$ – макроскопическое сечение упругого $\sum_s(\vec{r},E)$ и неупругого $\sum_i(\vec{r},E)$ рассеяния; $\sum_a(\vec{r},E)$ – полное макроскопическое сечение захвата нейтрона ядрами среды.

Обозначив $\sigma_{t,\ell}=\sum_b \sigma_{b,\ell}(E)$ как полное микроскопическое сечение ℓ-го изотопа, получим представление полного макроскопического сечения в виде

$$\sum\nolimits_t(\vec{r},E)=\sum_\ell N_\ell(\vec{r})\,\sigma_{t,\ell}(E)=N(\vec{r})\,\sigma_t(\vec{r},E),$$

где $N(\vec{r})=\sum_\ell N_\ell(\vec{r})$, $\sigma_t(\vec{r},E)=\frac{1}{N(\vec{r})}\sum_\ell N_\ell(\vec{r})\,\sigma_{t,\ell}(E)$ — полное микроскопическое сечение смеси изотопов.

Кинетическое уравнение переноса представляет собой соотношение, учитывающее ядерные взаимодействия нейтронов и движение нейтронов относительно ядер среды. Баланс нейтронов в элементе объема $d\vec{r}=dV=ds\,df$ (рис. 1) выражается равенством:

$$\frac{Dn}{dt}d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}=v(E)\left\{n(\vec{r}_0+s\vec{\Omega};E,\vec{\Omega},t)-n(\vec{r}_0+(s+ds)\vec{\Omega},t\right\}\times$$

$$\times\, df\,dE\,d\vec{\Omega}-v(E)\sum\nolimits_t(\vec{r},E)\,n(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)\,d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}+$$

$$+\sum_{b,\ell}\int_0^{\infty}dE'\int_{4\pi}d\vec{\Omega}'v(E')\,n(\vec{r},E',\vec{\Omega}',t)\,\nu_{b,\ell}(E')\sum\nolimits_{b,\ell}(\vec{r},E')\times$$

$$\times\, W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})\,d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}+S(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)\,d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}, \qquad (1)$$

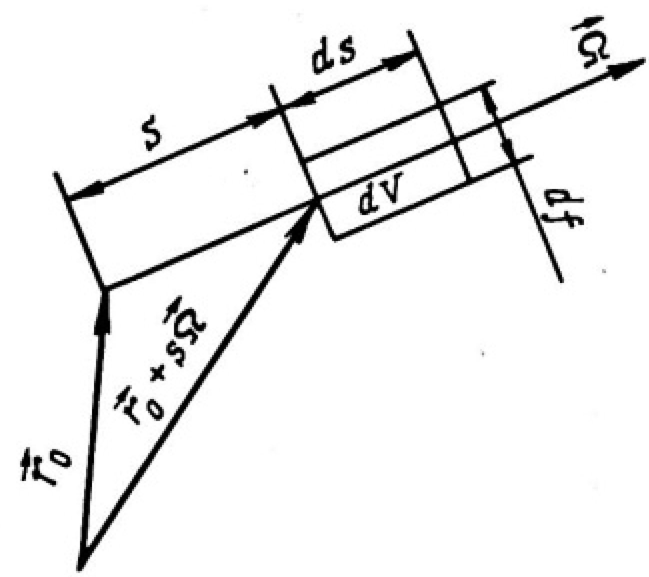

Рис. 1

где $v(E)$ – скорость нейтрона; $\nu_{b,\ell}(E')$ – число вторичных нейтронов, образовавшихся в ядерной реакции типа " b " на ядре ℓ-го изотопа; $W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})$ – функция распределения вторичных нейтронов по энергии E и направлениям движения $\vec{\Omega}$, если нейтрон, вызвавший реакцию, имел энергию E' и направление движения $\vec{\Omega}'$; $S(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)$ – функция распределения нейтронов внешнего источника в момент времени t. Функция распределения $W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})$ предполагается нормированной следующим образом:

$$\int_0^\infty \int_{4\pi} W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})\, dE\, d\vec{\Omega} = 1.$$

Остальные обозначения в выражении (1) очевидны из рис. 1. Учитывая, что

$$\left\{ n(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}, t) - n(\vec{r}_0 + (s+ds)\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}, t) \right\} df = -\frac{dn}{ds} ds\, df = -\frac{dn}{ds} d\vec{r},$$

приходим к уравнению Больцмана

$$\frac{\partial n(\vec{r},E,\vec{\Omega},t)}{\partial t} = -v\frac{dn}{ds} - v\sum_t n + \sum_{b,\ell} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\vec{\Omega}' v(E') \times$$

$$\times\, n(\vec{r},E',\vec{\Omega}',t)\, \nu_{b,\ell}(E') \sum_{b,\ell}(\vec{r},E')\, W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega}) + S.$$

Производная $\frac{dn}{ds} = \frac{d}{ds} n(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}, t)$ представляет собой производную по направлению $\vec{\Omega}$. Учитывая, что $\Omega_x = dx/ds$, $\Omega_y = dy/ds$, $\Omega_z = dz/ds$ – направляющие косинусы орта $\vec{\Omega}$, получим

$$\frac{dn}{ds} = \vec{\Omega}\nabla n.$$

Тогда уравнение баланса нейтронов в своей обычной записи примет вид:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -v\vec{\Omega}\nabla n - v\sum_t n + \sum_{b,\ell} \int_0^\infty dE' \int_{4\pi} d\vec{\Omega}' v(E')\, n(\vec{r},E',\vec{\Omega}',t) \times$$

$$\times\, \nu_{b\ell}(E') \sum_{b,\ell}(\vec{r},E')\, W_{b\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega}) + S(\vec{r},E,\vec{\Omega},t). \qquad (2)$$

Поскольку уравнение (2) содержит производные по временной и пространственным $\vec{r}(x,y,z)$ переменным, необходимо добавить начальные и граничные условия.

Предположим, что процесс переноса нейтронов рассматривается в выпуклой ограниченной области V с гладкой границей $\Gamma = \overline{V} \setminus V$. Естественным с точки зрения физики реакторов является условие отсутствия падающего извне на границу нейтронного излучения. Физический смысл этого условия заключается в том, что источники нейтронов, расположенные вне области V, имеют пренебрежимо малую интенсивность по сравнению с интенсивностью нейтронного излучения в области V и нейтроны, покинувшие область V, обратно не возвращаются. Необходимо отметить, что указанные предположения хорошо выполняются при решении задач реакторной физики.

Математически граничное условие оформляется следующим образом. Пусть $\vec{r}_s \in \Gamma$ и $\vec{\Omega}_0(\vec{r}_s)$ – единичный вектор внешней нормали поверхности Γ в точке $\vec{r}_s$. Обозначим:

$M_-(\vec{r}_s) = \{\vec{\Omega} : \vec{\Omega}\vec{\Omega}_0(\vec{r}_s) < 0, \vec{r}_s \in \Gamma\}$ – множество направлений внутрь области V. Тогда граничное условие запишется в виде:

$$n(\vec{r}_s, E, \vec{\Omega}, t) = 0,\ \vec{\Omega} \in M_-(\vec{r}_s),\ \vec{r}_s \in \Gamma. \qquad (3)$$

Наконец, начальное условие

$$n(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, 0) = n^{(0)}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \qquad (4)$$

задает распределение нейтронов в области V в момент времени $t=0$.

Напомним, что задача (2) – (4) поставлена без учета запаздывающих нейтронов, которые играют решающую роль в осуществлении управляемой ядерной реакции. Такое предположение, не являясь корректным с физической точки зрения, позволяет упростить задачу в математическом отношении с тем, чтобы результаты анализа упрощенной модели положить в основу исследования задачи с запаздывающими нейтронами.

§ 2. ОСНОВНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ХАРАКТЕРИСТИКИ СРЕДЫ

Уравнение (2) с условиями (3) и (4) получено на основе физических законов, управляющих процессом переноса нейтронов. Дальнейший анализ задачи невозможен без ее математической постановки. Для этого требуется не только написание соответствующего уравнения и дополнительных (граничных и начальных) условий, но и указание класса функций, в котором ищется решение. Упомянутый класс функций должен быть согласован с физическим смыслом рассматриваемого процесса и таким, чтобы входящие в уравнение операторы имели смысл. Поэтому естественно начать с ограничений, накладываемых на функции ядерно-физических характеристик среды:

$$\sum_t(\vec{r},E),\sum_{b,\ell}(\vec{r},E),\ W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega}),\nu_{b,\ell}(E).$$

Свойства этих функций оказывают существенное влияние на структуру области определения уравнения (2) и являются по отношению к нему исходными данными.

Прежде всего отметим, что всякая ядерно-физическая установка состоит из конечного числа зон, однородных относительно ядерно-физических характеристик. Допустим, что однородные зоны разделены гладкими поверхностями. Отсюда следует, что ядерные плотности изотопов $N_\ell(\vec{r})$ неотрицательны в области V и кусочно-непрерывные (возможно непрерывные) функции пространственной переменной $\vec{r}\in V$. Кроме того, по своему смыслу функции $N_\ell(\vec{r})$ ограничены сверху, а поскольку их конечное число, то

$$\max_{\vec{r}\in V} N_\ell(\vec{r})<+\infty, \tag{5}$$

т.е. ядерные плотности изотопов равномерно ограничены. Сомнения могут вызывать лишь точки $\vec{r}$, лежащие на границах раздела однородных зон (если таковые существуют) – в этих точках функции $N_\ell(\vec{r})$ не определены. Для выхода из этого затруднения будем считать (не ограничивая общности рассуждений), что поверхности раздела однородных зон, как и граница области V, имеют лебегову меру нуль, т.е. примем, что функции $N_\ell(\vec{r})$ определены почти всюду в области V относительно меры Лебега на V. Тогда соотношение (5) следует заменить равномерной ограниченностью по существенному максимуму:

$$\operatorname*{vrai\,max}_{\vec{r}\in V} N_\ell(\vec{r})<+\infty, \tag{6}$$

где $\operatorname{vrai}\max N_\ell(\vec r) = \inf\limits_{M\subset V} \max N_\ell(\vec r)$ (M — произвольное множество из области V меры нуль).

Далее, будем предполагать, что в области V нет областей с отличной от нуля мерой, незаполненных веществом (нет вакуумных пустот). Этот факт означает, что полная ядерная плотность $N(\vec r) = \sum\limits_\ell N_\ell(\vec r)$ отлична от нуля почти всюду в области V, за исключением границ раздела однородных зон, где функция $N(\vec r)$ не определена. Поэтому можем записать:

$$\operatorname{vrai}\min_{\vec r\in V} N(\vec r) \equiv \sup_M \min_{\vec r\in(V\setminus M)} N(\vec r) = N_0 > 0.$$

С учетом (6) условие, налагаемое на функцию $N(\vec r)$, примет вид:

$$0 < N_0 = \operatorname{vrai}\min N(\vec r) \le N(\vec r) \le \operatorname{vrai}\max N(\vec r) = N_1 < \infty. \quad (7)$$

Эксперименты по измерению нейтронных сечений и расчеты на основе газовой модели вещества показывают, что микроскопические сечения, усредненные по максвелловскому распределению скоростей ядер среды, подчиняются закону $1/\sqrt{E}$ вблизи малых энергий нейтрона и ограничены сверху при $E \to \infty$. Поэтому разумно считать функции $\sqrt{E}\,\sigma_{b,\ell}(E)$ и $\sqrt{E}\,\sigma_{b,\ell}(E)\,\nu_{b,\ell}(E)$ непрерывными и ограниченными на отрезке $[0, E_0]$ для произвольного значения $E_0 < \infty$. Таким образом,

$$0 < a \le \sqrt{E}\,\sigma_{b,\ell}(E) \le C_1 < \infty;$$

$$0 < a\nu_0 \le \sqrt{E}\,\nu_{b,\ell}(E)\,\sigma_{b,\ell}(E) \le \nu^{(0)} C_1 < \infty.$$

Отсюда с учетом (7) получаем

$$0 < \alpha \le \sqrt{E}\sum\nolimits_t(\vec r, E) \le \gamma < \infty, \ \vec r \in V, \ E \in [0, E_0]. \quad (8)$$

Несколько сложнее обстоит дело с функциями распределения вторичных нейтронов $W_{b,\ell}(E', E, \vec\Omega', \vec\Omega)$. Оценка по газовой модели вещества показывает, что функции распределения вторичных нейтронов, отвечающих упругому рассеянию, могут иметь особенность при $(E', \vec\Omega') = (E, \vec\Omega)$:

$$W_{s,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})=\frac{f_\ell(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})\sqrt{E}}{\left|\sqrt{E'}\vec{\Omega}'-\sqrt{E}\,\vec{\Omega}\right|}\,, \tag{9}$$

где $f_\ell(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})$ непрерывна в области изменения своих аргументов $Q\times Q$; $Q=[0,E_0]\times V_{\vec{\Omega}}$ ($V_{\vec{\Omega}}$ – множество ортов $\vec{\Omega}$). Поскольку множество $Q\times Q$ замкнуто, то из непрерывности функций $f_\ell(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})$ следует их равномерная ограниченность.

Все остальные функции $W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})$ $(b\neq s)$ особенностей не имеют и могут быть представлены в виде

$$W_{b,\ell}(E',E',\vec{\Omega}',\vec{\Omega})=f_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})\sqrt{E},\ b\neq s, \tag{10}$$

где $f_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})$ при $b\neq s$ непрерывны и равномерно ограничены на $Q\times Q$.

В дальнейшем изложенные выше ограничения на исходные данные будем считать выполненными.

§ 3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Введем новую переменную

$$\tau=v_T\,t\,,$$

где v_T – некоторая характерная скорость нейтрона (например, наиболее вероятная скорость в максвелловском распределении нейтронного газа по скоростям с температурой T : $v_T=\sqrt{2Tm}$, m – масса нейтрона), и выразим кинетическую энергию в безразмерных единицах

$$E=\frac{mv^2/2}{mv_T^2/2}=\frac{v^2}{v_T^2}\,.$$

Тогда уравнение (2) можно записать в удобном для дальнейшего анализа виде:

$$\frac{\partial n}{\partial\tau}=\hat{\Lambda}n(\tau)+S(\vec{r},E,\vec{\Omega},\tau), \tag{11}$$

где $\hat{\Lambda}=-\hat{L}+\hat{K}$;

$$\hat{L}n = \sqrt{E}\,\vec{\Omega}\nabla n + \sqrt{E}\sum_t(\vec{r},E)n;$$

$$\hat{K}n = \sum_{b,\ell}\iint_{Q} dE'd\vec{\Omega}'n(\vec{r},E',\vec{\Omega}',\tau)\sqrt{E'}N_\ell(\vec{r})\nu_{b,\ell}(E')\sigma_{b,\ell}(E')w_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})$$

с начальным

$$n(\vec{r},E',\vec{\Omega},\tau)_{\tau=0} = n^{(0)}(\vec{r},E,\vec{\Omega})$$

и граничным

$$n(\vec{r_s},E,\vec{\Omega},\tau) = 0,\ \vec{\Omega}\in M_-(\vec{r_s}),\vec{r_s}\in\Gamma \qquad (12)$$

условиями. В уравнении (11), в отличие от уравнения (2), интеграл по всей энергетической оси заменен интегралом по конечному промежутку $[0,E_0]$. Такая замена произведена с целью упрощения анализа и не противоречит физическому смыслу энергетической переменной*.

Переходим к описанию рабочего пространства функций. Необходимо отметить, что выбор рабочего пространства не простая задача. Ее удачное решение во многом предопределяет успех дальнейшего анализа. Здесь на первом этапе большую роль играет понимание физики процесса и априорная информация о гладкости коэффициентов, входящих в уравнение. Дальнейшее уточнение структуры рабочего пространства производится в процессе решения задачи с целью детализации свойств решения.

Поскольку ядерные плотности $N_\ell(\vec{r})$ не определены на поверхностях раздела однородных зон (если таковые существуют) и на поверхности Γ области V, таким же свойством должны обладать функции $n(\vec{r},E,\vec{\Omega},\tau)$, среди которых ищется решение уравнения (11).

Не ограничивая общности, будем считать, что меры названных поверхностей равны нулю (относительно меры обла-

---

* Действительно, в спектре реактора почти отсутствуют нейтроны с энергией $E > 10$ МэВ. Поэтому естественно принять, что энергия нейтронов ограничена сверху.

сти V); случай, когда меры поверхностей раздела отличны от нуля, не представляет интереса, поскольку он нереализуем на практике.

Итак, допустимые функции $n(\vec{r},E,\vec{\Omega},\tau)$ при каждом $\tau \geq 0$ определены почти всюду в области

$$\mathcal{D} = V \times [0,E_0] \times V_{\vec{\Omega}}, \tag{13}$$

имеющей конечную меру, равную произведению мер области V, промежутка $[0,E_0]$ и множества направлений $V_{\vec{\Omega}}$. При этом

$$\mu(\mathcal{D}) = |V| E_0 4\pi,$$

где $|V| = \mu(V)$ – лебегова мера области V.

Далее, в допустимом множестве должны содержаться функции, удовлетворяющие граничному условию (12), и функции такие, что на них имеет смысл оператор $\hat{\Lambda}$.

При построении рабочего пространства переменная τ играет роль параметра, однако зависимость от τ должна допускать существование $\partial n/\partial\tau$ при $\tau > 0$ и, согласно уравнению (11), принадлежность этой производной области значений $R(\hat{\Lambda})$ оператора $\hat{\Lambda}$.

Совокупность функций, удовлетворяющих вышеперечисленным свойствам относительно переменных $(\vec{r},E,\vec{\Omega})$, содержится в хорошо известных лебеговых пространствах $L^p_{\mathcal{D}}$, где $\mathcal{D}$ – область изменения переменных $(\vec{r},E,\vec{\Omega})$, определяемая равенством (13), а индекс $p \in [1,+\infty]$ представляет собой степень, с которой суммируем модуль функции по области $\mathcal{D}$. Напомним, что в $L^p_{\mathcal{D}}$ функции, равные почти всюду относительно меры в области $\mathcal{D}$, считаются эквивалентными. С учетом этого множества пространства $L^p_{\mathcal{D}}$ при $p \in [1,+\infty]$ представляют собой линейные пространства над полем комплексных чисел. Эти пространства полны относительно норм

$$\|f\|_p = \left\{ \int\limits_{\mathcal{D}} d\vec{r}\, dE\, d\vec{\Omega} \left| f(\vec{r},E,\vec{\Omega}) \right|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty;$$

$$\|f\|_\infty = \underset{(\vec{r},E,\vec{\Omega}) \in \mathcal{D}}{\mathrm{vrai\,max}} \left| f(\vec{r},E,\vec{\Omega}) \right| = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p,$$

т.е. являются комплексными банаховыми пространствами.

Теперь можно определить рабочее пространство E для рассматриваемой задачи как множество функций $n(\tau)$ действительной переменной $\tau \geqslant 0$ со значениями в банаховом пространстве L^p_D при каком-либо $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Наличие нормы в пространстве L^p_D позволяет естественным образом ввести понятие непрерывности $n(\tau) \in E$ и определить производную $dn(\tau)/d\tau$.

Определение 1. Функция $n(\tau) \in E$ называется непрерывной в точке $\tau_0 > 0$, если

$$\lim_{\tau \to \tau_0} \|n(\tau) - n(\tau_0)\|_p = 0,$$

где предельный переход осуществляется в одном из пространств L^p_D, $p \in [1, +\infty]$. Функция $n(\tau) \in E$ непрерывна на промежутке $[0,T]$, если она непрерывна в каждой его точке (непрерывность в точке 0 понимается как непрерывность справа).

Определение 2. Если существует элемент $y \in L^p_D$, такой, что

$$\lim_{\Delta t \to 0} \left\| \frac{n(\tau_0 + \Delta t) - n(\tau_0)}{\Delta t} - y \right\|_p = 0, \tag{14}$$

то $y \equiv \dfrac{dn(\tau_0)}{d\tau}$ называется производной функции $n(\tau) \in E$ в точке $\tau_0 > 0$. В случае $\tau = 0$ предел в (14) вычисляется справа.

Нетрудно видеть, что если $dn/d\tau$ существует в каждой точке промежутка $[0,T]$, то она сама является функцией со значениями в пространстве L^p_D. Кроме того, функция $n(\tau) \in E$, имеющая в $\tau_0 \geqslant 0$ производную, непрерывна в этой точке.

Включим в область определения $D(\hat{\Lambda})$ оператора $\hat{\Lambda}$ лишь те функции из L^p_D, $p \in [1, +\infty]$, которые удовлетворяют граничному условию. Пусть в каждом из пространств L^p_D подмножество $D(\hat{\Lambda}) \equiv R^p_D$. Тогда рассматриваемая задача состоит в отыскании решения уравнения

$$\frac{dn(\tau)}{d\tau} = \hat{\Lambda} n(\tau) + S(\tau), \ \tau > 0 \tag{15}$$

с начальным условием

$$n(0) = n^{(0)}, \tag{16}$$

где $n(\tau)$ и $S(\tau)$ – функции из E со значениями в одном из подходящих пространств L^p_D $(1 \leqslant p \leqslant +\infty)$, причем $n(\tau) \in R^p_D$ при каждом $\tau \geqslant 0$ (напомним, что функции из R^p_D удовлетворяют граничному условию).

Для завершения постановки задачи необходимо еще определить понятие решения уравнения (15) с начальным условием (16).

Определение 3. Функция $n(\tau)\in E$ со значениями в подпространстве $R^p_D \subset L^p_D$ ($1\le p \le \infty$) называется решением задачи (15) и (16) в промежутке $[0,T]$, если:

а) $n(\tau)\in R^p_D$ при всех $\tau\in[0,T]$;

б) в каждой точке $\tau\in[0,T]$ существует производная $\frac{dn(\tau)}{d\tau}$;

в) уравнение (15) удовлетворяется при всех $\tau\in[0,T]$;

г) $n(0)=n^{(0)}\in R^p_D$.

Уравнение (15) принято называть эволюционным, а задачу (15) - (16) - задачей Коши. В дальнейшем основное внимание будет уделено однородной задаче Коши:

$$\frac{dn}{d\tau}=\hat{\Lambda} n,\; n(0)=n^{(0)}, \tag{17}$$

поскольку свойства решений неоднородной задачи (15) - (16) легко получаются из свойств решений задачи (17).

§ 4. ЗАДАЧА КОШИ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В предыдущем параграфе нестационарная задача переноса нейтронов без учета запаздывающих нейтронов была сформулирована как задача Коши в банаховых пространствах L^p_D, $1\le p\le\infty$. Прежде всего необходимо выяснить какими свойствами должны обладать оператор $\hat{\Lambda}$ и область его определения $D(\hat{\Lambda})$, чтобы решение задачи Коши существовало. Выяснение упомянутых свойств составляет предмет теории полугрупп операторов и здесь мы кратко изложим основные результаты этой теории применительно к задаче (17). Перечень достаточных условий существования решений задачи Коши в банаховом пространстве одновременно представляет собой схему дальнейшего анализа задачи (17).

Отметим, что частным случаем (17) является задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения:

$$\frac{dn(\tau)}{d\tau}=\Lambda n(\tau),\; n(0)=n^{(0)}$$

(Λ - числовой коэффициент), которое имеет решение

$$n(\tau)=exp(\Lambda\tau)\, n^{(0)},\; \tau\ge 0. \tag{18}$$

По аналогии с (18) запишем формально решение задачи (17) в виде

$$n(\tau)=exp(\tau\hat{\Lambda})\,n^{(0)},\ \tau>0. \tag{19}$$

В связи с формулой (19) естественно возникает ряд вопросов, первый и важнейший из которых: как можно определить экспоненциальную функцию оператора $\hat{\Lambda}$?

<u>Определение 4.</u> Семейство операторов $\{\hat{U}(\tau)\},\tau>0$ называется полугруппой, если

$$\hat{U}(\tau_1+\tau_2)=\hat{U}(\tau_1)\hat{U}(\tau_2). \tag{20}$$

$$0<\tau_1,\tau_2<\infty$$

Если сохранить за операторной функцией $exp(\tau\hat{\Lambda})$ основное свойство числовой экспоненты:

$$exp(\tau_1+\tau_2)\hat{\Lambda}=exp(\tau_1\ \hat{\Lambda})\,exp(\tau_2\hat{\Lambda}),$$

то согласно определению 4 семейство $\{exp(\tau\hat{\Lambda}),\tau>0\}$ является полугруппой операторов и задача обоснования формулы (19) состоит в нахождении условий существования полугруппы $exp(\tau\hat{\Lambda})$. Задача решается просто, если оператор $\hat{\Lambda}$ ограничен. Действительно, пусть оператор $\hat{\Lambda}$ ограничен из пространства L^p_D в пространство L^p_D и $D(\hat{\Lambda})=L^p_D$ при каком-либо $p\in[1,+\infty]$. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}t^n\hat{\Lambda}^n=\hat{U}(t) \tag{21}$$

абсолютно сходится для любого комплексного числа t (т.е. сходится ряд $\sum\limits_n\frac{1}{n!}|t|^n\,\|\hat{\Lambda}^n\|$) и, следовательно, является при каждом t ограниченным оператором в L^p_D и аналитической функцией параметра t со значениями в пространстве ограниченных операторов.

Проверка полугруппового свойства (20) для ряда (21) формально производится так же, как и в числовом случае. В силу аналитичности (21) по t этот ряд можно дифференцировать (формально опять так же, как и в числовом случае). В результате имеем

$$\frac{d\hat{U}(t)}{dt}=\hat{\Lambda}\hat{U}(t), \tag{22}$$

где производная понимается в смысле определения 2, но по норме в пространстве ограниченных операторов. Из (22) немедленно следует:

$$\frac{d\hat{U}(t)n^{(0)}}{dt}=\hat{\Lambda}\hat{U}(t)n^{(0)} \tag{23}$$

для произвольного элемента $n^{(0)}\in L_D^p$. Если принять

$$n(t)\equiv\hat{U}(t)n^{(0)}, \tag{24}$$

то соотношение будет означать, что функция (24) является решением задачи Коши (17) в случае ограниченного оператора $\hat{\Lambda}$ при начальном условии $n^{(0)}\in L_D^p$.

Таким образом, в случае ограниченного оператора $\hat{\Lambda}$ решение задачи Коши (17) действительно определяется формулой (19) для произвольного элемента $n^{(0)}\in L_D^p$, если положить

$$exp(\hat{\Lambda}\tau)\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\tau^n\hat{\Lambda}^n,$$

т.е. решение выражается с помощью оператора полугруппы $exp(\hat{\Lambda}\tau)$, определяемого формулой (21). Однако оператор $\hat{\Lambda}$ в действительности не ограничен в L_D^p $(1\leq p\leq\infty)$, что будет строго показано ниже; тем не менее уже на этом этапе наличие в операторе $\hat{\Lambda}$ производных по пространственным переменным позволяет допустить его неограниченность.

В этом случае обоснование формулы (18) налагает на оператор $\hat{\Lambda}$ довольно сильные ограничения и проводится значительно сложнее. Идея остается прежней: необходимо корректно определить полугруппу (экспоненциальную функцию) операторов и убедиться в справедливости формулы (23) уже не для произвольного элемента $n^{(0)}\in L_D^p$, а для $n^{(0)}\in R_D^p\subset L_D^p$.

Совершенно очевидно, что формула (21) определения полугруппы не пригодна для неограниченного оператора $\hat{\Lambda}$, так как области определения операторов $\hat{\Lambda}^n$ сужаются при увеличении n. По аналогии с числовым случаем можно пытаться применить формулу $exp(t\hat{\Lambda})=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{t}{n}\hat{\Lambda}\right)^n$, где предел понимается в смысле операторной нормы. Однако такое определение некорректно по той же причине, что и определение полугруппы по формуле (21). Тем не менее аналогия с числовым случаем и здесь оказывается эффективной – небольшое видоизменение последней формулы, а именно

$$\exp(t\hat{\Lambda})=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\hat{\Lambda}\right)^{-n}, \qquad (25)$$

уже оказывается полезным. Действительно, при определенных условиях оператор $\left(1-\frac{t}{n}\hat{\Lambda}\right)^{-n}$ является с точностью до константы резольвентой оператора $\hat{\Lambda}$, которая представляет собой голоморфную функцию в резольвентном множестве со значениями в пространстве ограниченных операторов в L^p_D. Для того чтобы резольвента $(\lambda-\hat{\Lambda})^{-1}$ представляла собой непрерывный линейный оператор, определенный во всем пространстве L^p_D, достаточно замкнутости оператора $\hat{\Lambda}$.

Допустим теперь, что: A. Оператор $\hat{\Lambda}$ замкнут; B. Положительная вещественная полуось принадлежит резольвентному множеству оператора $\hat{\Lambda}$ и резольвента $(\lambda-\hat{\Lambda})^{-1}$ удовлетворяет неравенству

$$\left\|(\lambda-\hat{\Lambda})^{-1}\right\|\leqslant\frac{1}{\lambda},\ \lambda>0.$$

Отсюда следует

$$\left\|(1-\xi\hat{\Lambda})^{-1}\right\|\leqslant 1,\ \xi>0. \qquad (26)$$

Поэтому операторнозначные функции

$$\hat{U}_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\hat{\Lambda}\right)^{-n} \qquad (27)$$

равномерно ограничены $\left(\|\hat{U}_n\|\leqslant 1,\ t\geqslant 0\right)$ и голоморфны по t при $t>0$. Кроме того, из свойств резольвенты вытекает, что функция $V_n(t)$ сильно сходится к $\hat{U}(0)=\hat{I}$ при $t\to+0$ (т.е. $\lim\limits_{t\to+0}\hat{U}_n(t)n=\hat{U}(0)n=n$ для любого элемента n из пространства L^p_D). Теперь, для того чтобы убедиться в справедливости равенства (25) в условиях A и B, необходимо, как и в числовом случае, установить существование предела последовательности $\{\hat{U}_n(t)\}$ при $n\to\infty$ и убедиться, что этот предел представляет собой полугруппу. Эти факты можно доказать при дополнительном условии A′: область определения $D(\hat{\Lambda})=R^p_D$ оператора $\hat{\Lambda}$ плотна в пространстве L^p_D. Доказательство мы опускаем, поскольку оно связано с весьма тонкими рассуждениями, не относящимися к излагаемому предмету.

Итак, функция

$$\hat{U}(t)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{t}{n}\hat{\Lambda}\right)^{-n} \qquad (28)$$

(где сходимость понимается как сильная) является полугруппой операторов со свойствами:

1. $\hat{U}(t_1+t_2)=\hat{U}(t_1)\hat{U}(t_2), \hat{U}(0)=\hat{I}, \ 0<t_1,t_2<\infty;$

2. $\|\hat{U}(t)\|\leqslant 1;$

3. $\hat{U}(t)$ сильно непрерывна, т.е. функция $\hat{U}(t)\tilde{n}$ непрерывна по t при $t\geqslant 0$ в смысле нормы в L_D^p при любом $n\in L_D^p$;

4. $\frac{d}{dt}\hat{U}(t)n^{(0)}=\hat{\Lambda}\hat{U}(t)n^{(0)}, t\geqslant 0, \ n^{(0)}\in D(\hat{\Lambda})\equiv R_D^p.$

Здесь первое свойство есть просто определение полугруппы; второе – немедленно следует из (26) и существования предела (28); третье – также следует из факта сильной сходимости последовательности операторов (27), однако не столь очевидно, как первые два, и требует аккуратного доказательства, которое мы предлагаем провести в качестве полезного упражнения читателю; четвертое – как и в случае ограниченного оператора (см. (23)), означает, что функция $n(t)=\hat{U}(t)n^{(0)}$ является решением задачи Коши (17) с неограниченным оператором $\hat{\Lambda}$, удовлетворяющим условиям A, A', B. Доказательство четвертого свойства мы также опускаем ввиду его трудоемкости.

Оператор $\hat{\Lambda}$ называется производящим(инфинитезимальным) оператором полугруппы $\hat{U}(t)$. Важно отметить, что полугруппа, порождаемая оператором $\hat{\Lambda}$ со свойствами A, A', B, единственна. Другими словами, решение задачи Коши (17), определенное формулой $n(t)=\hat{U}(t)n^{(0)}$, $n^{(0)}\in D(\hat{\Lambda})$, единственно.

Для доказательства этого утверждения достаточно убедиться в справедливости формулы

$$(\xi-\hat{\Lambda})^{-1}=\int_0^\infty e^{-\xi t}\hat{U}(t)dt, \ Re\,\xi>0, \qquad (29)$$

которая устанавливает связь между резольвентой оператора $\hat{\Lambda}$ и порождаемой им полугруппой $\hat{U}(t)$. Интеграл (29) следует понимать как несобственный интеграл Римана, т.е. как сильный предел интегралов $\int_0^t e^{-\xi t'}\hat{U}(t')dt'$, $Re\,\xi>0$ при

$t \to +\infty$. Последний же интеграл имеет смысл в силу непрерывности подынтегральной функции по $t' \geq 0$ (см. свойство 3 полугруппы $\hat{U}(t)$). Предел

$$\lim_{t \to +\infty} \int_0^t e^{-\xi\tau} \hat{U}(\tau) d\tau, \; Re\,\xi > 0$$

существует, так как $\|\hat{U}(t)\| \leq 1$, $t \geq 0$. Пусть $\pi^{(0)}$ – произвольный элемент из $D(\hat{\Lambda})$. Тогда выполняется свойство 4 полугруппы $\hat{U}(t)$, которое перепишем в виде:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{-\xi t}\hat{U}(t)\pi^{(0)}\right] = e^{-\xi t}\hat{U}(t)\,(\hat{\Lambda}-\xi)\pi^{(0)}, \; Re\,\xi > 0.$$

Интегрируя последнее равенство по t , получаем

$$\pi^{(0)} = \int_0^{\infty} e^{-\xi t}\hat{U}(t)(\xi-\hat{\Lambda})\pi^{(0)} dt, \quad Re\,\xi > 0.$$

Обозначим: $v^{(0)} = (\xi - \hat{\Lambda})\pi^{(0)}$.

Если $\xi > 0$, то по условию, налагаемому на оператор $\hat{\Lambda}$, ξ принадлежит резольвентному множеству и поэтому образом $D(\hat{\Lambda}) = R_D^p$ при отображении $(\xi - \hat{\Lambda})$ является все пространство. Следовательно, для произвольного элемента из L_D^p

$$(\xi-\hat{\Lambda})^{-1} v^{(0)} = \int_0^{\infty} e^{-\xi t}\hat{U}(t) v^{(0)} dt, \; \xi > 0, \tag{30}$$

что совпадает с (29) для $\xi > 0$. Но правая часть (30) аналитична для $Re\,\xi > 0$, так как $\|\hat{U}(t)\| \leq 1$. Формула (29) доказана.

Из этой формулы, в частности, следует, что полуплоскость $Re\,\xi > 0$ принадлежит резольвентному множеству оператора $\hat{\Lambda}$ и

$$\|(\xi - \Lambda)^{-1}\| \leq \int_0^{\infty} \left|e^{-\xi t}\right| dt = 1/Re\,\xi > 0.$$

Допустим теперь, что операторы $\hat{\Lambda}_1$ и $\hat{\Lambda}_2$ порождают одну полугруппу $\hat{U}(t), t \geq 0$. Тогда из формулы (29) следует равенство

$$(\xi - \hat{\Lambda}_1)^{-1} = (\xi - \hat{\Lambda}_2)^{-1}, \; Re\,\xi > 0,$$

которое означает не только совпадение резольвент операторов $\hat{\Lambda}_1$ и $\hat{\Lambda}_2$, но и совпадение областей значений резольвент, представляющих собой области определения операторов $\hat{\Lambda}_1$ и $\hat{\Lambda}_2$. Таким образом, $\hat{\Lambda}_1=\hat{\Lambda}_2$ и, следовательно, различные операторы порождают различные полугруппы.

Условия A, A$'$, B, наложенные на оператор $\hat{\Lambda}$, оказались достаточными для того, чтобы оператор $\hat{\Lambda}$ был инфинитезимальным оператором сильно непрерывной полугруппы $\hat{U}(t)$ с оценкой нормы $\|\hat{U}(t)\|\leq 1,\ t\geq 0$. Такая полугруппа называется сжимающей. Весь ход рассуждений, изложенный выше, показывает, что условия A, A$'$, B можно ослабить. В самом деле, допустим:

A$_1$. Оператор $\hat{\Lambda}$ замкнут и имеет плотную в L^p_D область определения;

B1. Полубесконечный интервал $\lambda>\beta$ принадлежит резольвентному множеству оператора $\hat{\Lambda}$ и

$$\|(\lambda-\hat{\Lambda})^{-k}\|\leq M(\lambda-\beta)^{-k},\ \lambda>\beta,\ k=1,2,\ldots, \tag{31}$$

где M – постоянная, не зависящая от λ и k.

Введем оператор $\hat{\Lambda}_1=\hat{\Lambda}+\beta$, который удовлетворяет условиям A$_1$ и B$_1$, но вместо формулы (31) выполняется

$$\|(\alpha-\hat{\Lambda}_1)^{-k}\|\leq M\alpha^{-k},\ \alpha>0,\ k=1,2,\ldots$$

Операторнозначные функции

$$\hat{U}_n(t)=\left(1-\frac{t}{n}\hat{\Lambda}_1\right)^{-n}$$

опять равномерно ограничены: $\|\hat{U}_n(t)\|\leq M,\ t\geq 0$ и существует сильный предел $\hat{U}_1(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\hat{U}_n(t)$, который представляет собой полугруппу со свойствами

$$\|\hat{U}_1(t)\|\leq M,\quad \hat{U}_1(0)=\hat{I}.$$

Теперь легко видеть, что полугруппа

$$\hat{U}(t)=e^{\beta t}\hat{U}_1(t)$$

порождена оператором $\hat{\Lambda}$ и удовлетворяет условиям

$$\|\hat{U}(t)\|\leq e^{\beta t}M,\quad \hat{U}(0)=\hat{I}. \tag{32}$$

2

Эта полугруппа, возможно, не ограничена при $t \to \infty$, остальные же свойства, полученные выше для сжимающей полугруппы, сохраняются.

Полученные результаты удобно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Пусть оператор $\hat{\Lambda}$ удовлетворяет условиям A_1 и B_1. Тогда он является инфинитезимальным оператором сильно непрерывной полугруппы $\hat{U}(t)$, $t \geqslant 0$ с оценкой нормы (32). При этом задача Коши

$$\frac{dn}{d\tau} = \hat{\Lambda} n(\tau),\ n(0) = n^{(0)},\ n^{(0)} \in D(\hat{\Lambda}) = R_D^p$$

имеет единственное решение: $n(\tau) = \hat{U}(\tau) n^{(0)}$ для любого элемента $n^{(0)}$ из подпространства $R^p_{D_\Lambda}$.

<u>Замечание 1.</u> Полугруппу $\hat{U}(t)$ из теоремы 1 обычно называют полугруппой класса (C_0). Этой терминологией будем пользоваться в дальнейшем.

<u>Замечание 2.</u> Условия теоремы 1, касающиеся существования полугруппы, получены нами как достаточные. На самом деле они являются и необходимыми. Этот важнейший в теории полугрупп результат носит название теоремы Хилле – Иосида – Филлипса – Феллера – Миадера.

<u>Замечание 3.</u> Условия (31) необходимо проверять при всех $k = 1, 2, 3, \ldots$ Может показаться, что достаточно выполнения условия $\|(\lambda - \hat{\Lambda})^{-1}\| \leq M(\lambda-\beta)^{-1}$, однако это не так для $M>1$ (это подтверждается контрпримерами). С другой стороны, условие

$$\|(\lambda - \hat{\Lambda})^{-1}\| \leq \frac{1}{(\lambda-\beta)},\ \lambda > \beta \qquad (33)$$

более сильное, чем (31), что показывают рассуждения, проведенные для сжимающей полугруппы.

С помощью теоремы 1 теперь легко наметить план дальнейшего исследования. Ясно, что все внимание должно быть перенесено на изучение свойств оператора $\hat{\Lambda}$ в пространствах L_D^p $(1 \leq p \leq +\infty)$, т.е. предстоит ответить на следующие вопросы:

1. Имеет ли смысл оператор $\hat{\Lambda}$ на функциях из L_D^p $(1 \leq p \leq \infty)$?

2. Ограничен или нет $\hat{\Lambda}$ на L_D^p $(1 \leq p \leq \infty)$?

3. Какова структура $D(\hat{\Lambda}) \equiv R_D^p$ в пространствах L_D^p при $1 \leq p \leq \infty$? В частности, выполняется ли условие $R_D^p = L_D^p$ (R_D^p озна-

чает замыкание множества R_D^p) и при каких значениях индекса $p \in [1, \infty]$ оно справедливо?

4. Выполняется ли условие (31) или какой-либо из его более сильных вариантов?

Рассмотрим реализацию этого плана.

§ 5. ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ $D(\hat{\Lambda})$ ОПЕРАТОРА $\hat{\Lambda}$

Напомним, что в качестве рабочих пространств функций, удовлетворяющих физической постановке задачи, приняты банаховы пространства L_D^p ($p \in [1, \infty]$) с нормой

$$\|f\|_p = \left\{ \int_D d\vec{r}\, dE\, d\vec{\Omega} \left| f(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \right|^p \right\}^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \underset{(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \in D}{\mathrm{vrai\,max}} \left| f(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \right| = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p, \ f \in L_D^\infty.$$

В соответствии с определением оператора $\hat{\Lambda}$:

$$\hat{\Lambda} = -\hat{L} + \hat{K}$$

рассмотрим отдельно область определения $D(\hat{L})$ оператора $\hat{L}$ и область определения $D(\hat{K})$ оператора $\hat{K}$. Очевидно, что $D(\hat{\Lambda}) = D(\hat{L}) \cap D(\hat{K})$ и множества $D(\hat{L})$ и $D(\hat{K})$ необходимо искать в пространствах L_D^p, $p \in [1, \infty]$. Согласно принятой в теории переноса терминологии будем называть оператор $\hat{L}$ оператором переноса, а оператор $\hat{K}$ – оператором соударений. Начнем с области определения дифференциального оператора $\hat{L}$. Полагая $\vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{\Omega}$, имеем $\vec{\Omega} \nabla f(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{d}{ds} f(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega})$.

Поэтому

$$\hat{L} f(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \sqrt{E}\, \frac{d f(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega})}{ds} + \sqrt{E} \sum\nolimits_t (\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, E) \times$$

$$\times f(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}), \ \vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{\Omega} \in V. \qquad (34)$$

Отметим, что такая форма записи оператора $\hat{L}$ удобна для анализа, так как сумма частных производных в операторе $\vec{\Omega}\nabla$ заменена обыкновенной производной d/ds по переменной s. Из (34) ясно, что в $D(\hat{L})$ должны входить лишь те функции из L_D^p, для которых имеет смысл выражение $\frac{d}{ds}f(\vec{r}_0+s\vec{\Omega},E,\vec{\Omega})$. В силу того, что мера $\mu(D)$ области D конечна, $L_D^{p_1}\subset L_D^{p_2}$ при $1\le p_2\le p_1\le\infty$; другими словами, функции из L_D^p при $1\le p\le\infty$ суммируемы по области D. Полезно иметь ответ на вопрос: какими свойствами обладает $f(\vec{r}_0+s\vec{\Omega},E,\vec{\Omega})\in L_D^p, p\in[1,\infty]$ как функция переменной s? Если она суммируема по s, то из теории функций известно, что среди суммируемых функций имеют производную почти всюду лишь абсолютно непрерывные функции, причем производная абсолютно непрерывной функции сама суммируема*.

Лемма 1. Для произвольной $F(\vec{r},E,\vec{\Omega})\in L_D^p$, $1\le p\le\infty$ функция $F(\vec{r}_0+s\vec{\Omega},E,\vec{\Omega})$ суммируема по s в промежутке $[-s_{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega}), s^{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega})]$ почти при всех значениях $(E,\vec{\Omega},\vec{r}_0)\in[0,E_0]\times V_{\vec{\Omega}}\times f(\vec{\Omega})$, где $\vec{r}_0$ – точка пересечения луча $\vec{\Omega}$ с плоскостью $\alpha(\vec{\Omega})$, перпендикулярной направлению $\vec{\Omega}$; $f(\vec{\Omega})$ – проекция области V на плоскость $\alpha(\vec{\Omega})$; остальные обозначения ясны из рис. 2.

<u>Доказательство.</u> Пусть $F(\vec{r},E,\vec{\Omega})\in L_D^p$ $(1\le p\le\infty)$. Так как $F(\vec{r},E,\vec{\Omega})$ суммируема по области D, то имеет смысл интеграл

$$J=\int\limits_D d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}\,F(\vec{r},E,\vec{\Omega}).$$

Используя правило замены переменных в интеграле Лебега (см. также рис. 2), перепишем интеграл J в виде повторного интеграла:

$$J=\int\limits_0^{E_0}dE\int\limits_{4\pi}d\vec{\Omega}\int\limits_{f(\vec{\Omega})}d\vec{r}_0\int\limits_{s_1(\vec{r}_0,\vec{\Omega})}^{s_2(\vec{r}_0,\vec{\Omega})}ds\,F(\vec{r}_0+s\vec{\Omega},E,\vec{\Omega}).$$

---

* $f(x)$ называется абсолютно непрерывной при $x\in[a,b]$, если для произвольной конечной системы непересекающихся интервалов (a_k,b_k) из $[a,b]$, такой, что $\sum(b_k-a_k)\le\delta$, выполняется $\sum\limits_k|f(b_k)-f(a_k)|\le\varepsilon$ для любого положительного числа ε.

По теореме Фубини $\int\limits_{s_1(\vec{r}_0,\vec{\Omega})}^{s_2(\vec{r}_0,\vec{\Omega})} F(\vec{r}_0+s\vec{\Omega},E,\vec{\Omega})\,ds$ существует почти при всех значениях $\vec{r}_0 \in f(\vec{\Omega})$, $E\in[0,E_0]$, $\vec{\Omega}\in V_{\vec{\Omega}}$. Приняв за начало отсчета произвольную точку $\vec{r}\in V$ на луче $\vec{\Omega}$, за положительное направление – направление $\vec{\Omega}$, получим результат, сформулированный в лемме 1.

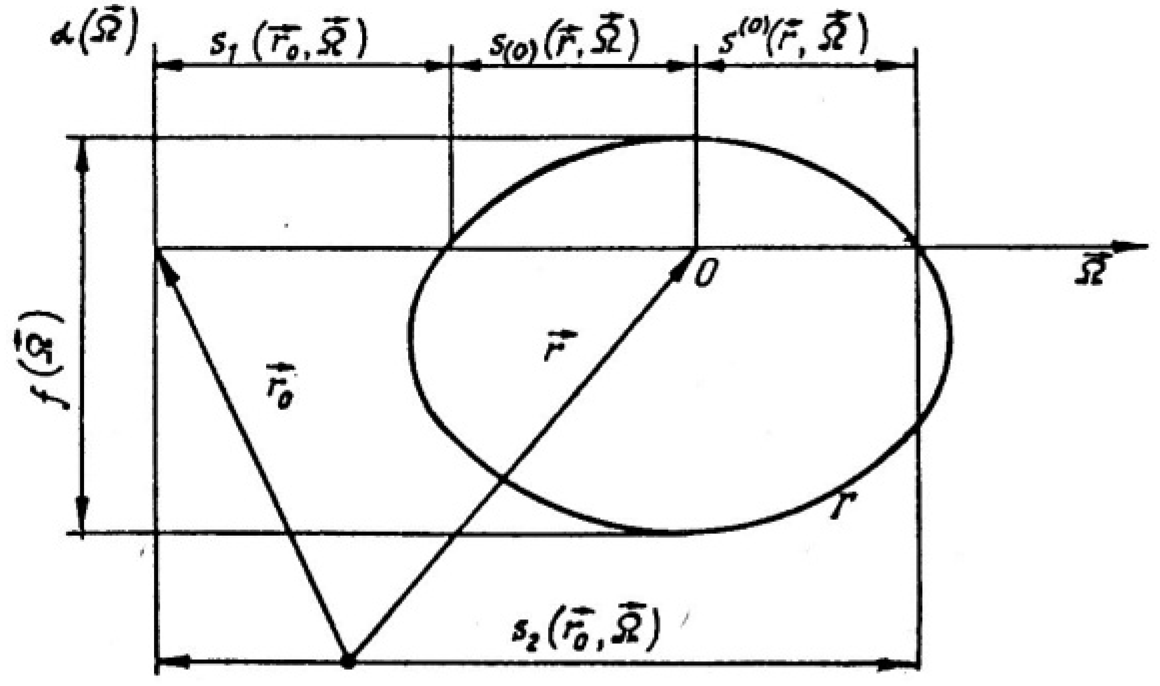

Рис. 2

Следствие 1. Если $F(\vec{r},E,\vec{\Omega})=0$ – нулевой элемент в L_D^p $(1\le p\le\infty)$, то $F(\vec{r}+s\vec{\Omega},E,\vec{\Omega})$ равна нулю почти всюду на промежутках $\left[-s_{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega}),\, s^{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega})\right]$ почти при всех значениях $(\vec{r}_0,E,\vec{\Omega})\in f(\vec{\Omega})\times$ $\times[0,E_0]\times V\vec{\Omega}$.

Рассмотрим уравнение

$$\hat{L}\varphi = F,$$

полагая $F \in L^p_D$. Формально, разрешая это уравнение с учетом граничного условия (3), получим

$$\varphi(\vec{r}_0 + s, \vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{\sqrt{E}} \int\limits_{s_{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega})}^{s} ds' \, F(\vec{r}_0 + s'\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) \times$$

$$\times \exp\left[-\int\limits_{s'}^{s} \Sigma_t (\vec{r}_0 + s''\vec{\Omega}, E)\, ds''\right] = \hat{\ell} F \qquad (35)$$

(обозначения ясны из рис. 2).

Нетрудно видеть, что это выражение имеет смысл для произвольной функции $L^{\infty}_D \ni F(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ из пространства L^{∞}_D . Действительно,

$$\|\varphi\|_{\infty} = \|\hat{\ell} F\|_{\infty} = \operatorname{vrai\,max} \left| \frac{1}{\sqrt{E}} \int\limits_{s_{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega})}^{0} ds\, F(\vec{r} + s\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left[-\int\limits_{s}^{0} ds' \, \Sigma_t (\vec{r} + s\vec{\Omega}, E)\right] \right| \le \|F\|_{\infty} \frac{1}{\sqrt{E}} \int\limits_{s_{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega})}^{0} ds \, \exp\left(\frac{\alpha}{\sqrt{E}} s\right) =$$

$$= \|F\|_{\infty} \frac{1}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{E}} s_{(0)}(\vec{r}, \vec{\Omega})\right)\right) \le \frac{1}{\alpha} \|F\|_{\infty},$$

где число α определено формулой (8). Отсюда следует, что операция $\hat{\ell}$ имеет смысл из пространства L^{∞}_D в пространство L^{∞}_D и, кроме того, $\|\hat{\ell}\| \le \frac{1}{\alpha}$, т.е. оператор $\hat{\ell}$ ограничен в L^{∞}_D. Аналогичный результат можно получить с помощью неравенства Гёльдера и в пространствах L^p_D при $p \in [1, \infty]$. Хотя это более трудная задача, чем при $p = \infty$, мы предоставляем возможность решить ее читателю в качестве полезного упражнения.

Из приведенных рассуждений вытекает ряд следствий, которые для удобства ссылок сформулируем в виде следующих лемм.

Лемма 2. Функция $\varphi(\vec{r}_0+s\vec{\Omega},E,\vec{\Omega})=\hat{\ell}F$, $F\in L_D^p$, $1\le p\le\infty$ абсолютно непрерывна по s на множестве промежутков $[-s_{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega}),\ s^{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega})]$ почти при всех значениях $(\vec{r}_0,E,\vec{\Omega})\in f(\vec{\Omega})\times[0,E_0]\times V_{\vec{\Omega}}$ (см. рис. 2). Заключение леммы следует из суммируемости $F(\vec{r}_0+s\vec{\Omega},E,\vec{\Omega})$ в формуле (35) по s для $F(\vec{r},E,\vec{\Omega})\in L_D^p$ (см. лемму 1) и свойства абсолютной непрерывности интеграла Лебега как функции верхнего предела.

Лемма 3. Область значений $R(\hat{L})$ оператора переноса $\hat{L}$, рассматриваемого в L_D^p $(1\le p\le\infty)$, совпадает со всем пространством L_D^p $(1\le p\le\infty)$. Кроме того, $\hat{L}^{-1}=\hat{\ell}$, $\|\hat{\ell}\|_p\le\frac{1}{\alpha}$, $1\le p\le\infty$.

Первое утверждение леммы очевидно. Существование $\hat{L}^{-1}$ и равенство $\hat{L}^{-1}=\hat{\ell}$ следуют из ограниченности $\hat{\ell}$ в L_D^p и легко проверяемого соотношения $\hat{L}\hat{\ell}F=F$, $F\in L_D^p$, $1\le p\le\infty$, которое показывает, что $\hat{\ell}$ является правым обратным для $\hat{L}$.

Лемма 4. Область определения $D(\hat{L})$ оператора переноса $\hat{L}$ состоит из функций $f\in L_D^p$ $(1\le p\le\infty)$, обладающих свойствами:

1. $f(\vec{r}+s\vec{\Omega},E,\vec{\Omega})$ абсолютно непрерывны по s на множестве промежутков $[-s_{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega}),s^{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega})]$ почти при всех значениях $(\vec{r}_0,E,\vec{\Omega})\in$ $\in f(\vec{\Omega})\times[0,E_0]\times V_{\vec{\Omega}}$.

2. Почти при всех $(\vec{r}_0,E,\vec{\Omega})\in f(\vec{\Omega})\times[0,E_0]\times V_{\vec{\Omega}}$ функции $f(\vec{r},E,\vec{\Omega})$ удовлетворяют граничному условию $f(\vec{r}-s_{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega})\vec{\Omega},E,\vec{\Omega})=0$.

3. $\hat{L}f\in L_D^p$, $f\in D(\hat{L})$.

Все заключения леммы непосредственно вытекают из предыдущих рассуждений. Полезно отметить, что свойство 2 функций из $D(\hat{L})$ играет роль обобщенных граничных условий, поскольку имеет смысл и в том случае, когда нормаль поверхности $\Gamma=\bar{V}\setminus V$ в точке $\vec{R}=\vec{r}-s_0(r,\vec{\Omega})\vec{\Omega}$ не существует. Это замечание позволяет рассматривать не только гладкие, но и кусочно-гладкие поверхности Γ. Необходимо лишь, чтобы множество точек поверхности, где нарушается гладкость, имело меру нуль.

Переходим к области определения оператора соударений $\hat{K}$. Введем операторы

$$\hat{T}_{b,\ell}F=\iint\limits_{Q} dE'd\vec{\Omega}'F(\vec{r},E',\vec{\Omega}')\,W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega}),$$

где $Q=[0,E_0]\times V_{\vec{\Omega}}$. Тогда оператор соударений $\hat{K}$ можно переписать в виде

$$\hat{K}n=\sum_{b,\ell}\hat{K}_{b,\ell}n=\sum_{b,\ell}\hat{T}_{b,\ell}\left[n(\vec{r},E,\vec{\Omega})\sqrt{E}\,\nu_{b,\ell}(E)\sigma_{b,\ell}(E)N_{\ell}(\vec{r})\right],$$

т.е. оператор соударений представляет собой сумму операторов $\hat{K}_{b,\ell}$, каждый из которых есть произведение оператора $\hat{T}_{b,\ell}$, и оператора умножения на функцию

$$\sqrt{E}\,\nu_{b,\ell}(E)\sum\nolimits_{b,\ell}(\vec{r},E). \qquad (36)$$

Согласно условиям, наложенным на характеристики среды (см. § 2), функция (36) ограничена по существенному максимуму, т.е. $\operatorname{vrai\,max}\sqrt{E}\,\nu_{b,\ell}(E)\sum_{b,\ell}(\vec{r},E)<\infty$, поэтому операция умножения (36) представляет собой ограниченный оператор на пространстве L_D^p при $1\le p\le\infty$.

Рассмотрим теперь операторы $\hat{T}_{b,\ell}$. Пусть $F(\vec{r},E,\vec{\Omega})$ – произвольная функция из L_D^p, $1\le p\le\infty$. Тогда $f(\vec{r},E,\vec{\Omega})\equiv\hat{T}_{b,\ell}F(\vec{r},E,\vec{\Omega})$. Образуем интеграл

$$J=\int\limits_{D} d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}\,f(\vec{r},E,\vec{\Omega})=\int\limits_{D}\hat{T}_{b,\ell}F(\vec{r},E,\vec{\Omega})\,d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}.$$

Если интеграл J существует, то этот факт эквивалентен суммируемости $f(\vec{r},E,\vec{\Omega})$ по области D и значит операторы $\hat{T}_{b,\ell}$ имеют смысл на пространствах L_D^p $(1\le p\le\infty)$. Более того, можно утверждать, что $\hat{T}_{b,\ell}$ действуют из L_D^p, $1\le p\le\infty$ в пространство суммируемых по области D функций. Для этой цели рассмотрим

$$J_1=\int\limits_{D} d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}\iint\limits_{Q} dE'd\vec{\Omega}'F(\vec{r},E',\vec{\Omega}')\,W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega}).$$

Поскольку

$$\iint\limits_{Q} dE\,d\vec{\Omega}\,W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})=1, \qquad (37)$$

то

$$J_1=\int\limits_D d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}\,F(\vec{r},E,\vec{\Omega}),\ |J_1|<\infty,\ F\in L_D^p,\ 1\le p\le\infty.$$

Применяя теорему Фубини, имеем $J=J_1$. Следовательно, $f(\vec{r},E,\vec{\Omega})=\hat{T}_{b\ell}F(\vec{r},E,\vec{\Omega})$ существует почти всюду в D и суммируема.

Покажем теперь, что операторы $\hat{T}_{b,\ell}$ ограничены из L_D^p в L_D^p при $1\le p\le\infty$. Здесь, как обычно, основным инструментом служит неравенство Гёльдера. Нам необходимо записать это неравенство в специальной форме, которая будет получена ниже. Надо однако отметить, что приводимые по этому поводу рассуждения, не являются строгими, хотя и позволяют найти неравенство Гёльдера в нужной форме. Корректное обоснование опирается на теорию векторнозначных мер и довольно громоздко.

В пространствах L_D^p $(1\le p\le\infty)$ привычная форма неравенства Гёльдера имеет вид:

$$\left|\int\limits_D f(\vec{r},E,\vec{\Omega})\,g(\vec{r},E,\vec{\Omega})\,d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}\right|\le\|f\|_p\,\|g\|_q,$$

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ f\in L_D^p,\ g\in L_D^q.$$

Отсюда

$$\left|\int\limits_D d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}\,f(\vec{r},E,\vec{\Omega})g(\vec{r},E,\vec{\Omega})\right|^p\le\int\limits_D d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}\left|f(\vec{r},E,\vec{\Omega})\right|^p\times$$

$$\times\left\{\int\limits_D d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}\left|g(\vec{r},E,\vec{\Omega})\right|^q\right\}^{p/q},\ p/q=p-1.$$

Поскольку $\mu(D)<\infty$, то $\chi(\vec{r},E,\vec{\Omega})=1\in L_D^p$, поэтому

$$\left|\int\limits_D d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}\,f(\vec{r},E,\vec{\Omega})\right|^p\le\int\limits_D d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}\left|f(\vec{r},E,\vec{\Omega})\right|^p\times$$

$$\times\left\{\int\limits_D d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}\,|\chi|^q\right\}^{p-1}.$$

Это неравенство справедливо и в пространствах L_Q^p $(1\leq p\leq \infty)$. Следовательно, почти при всех $\vec{r}\in V$

$$\left|\iint\limits_Q dE\,d\vec{\Omega} f(\vec{r},E,\vec{\Omega})\right|^p \leq \iint\limits_Q dE\,d\vec{\Omega}\left|f(\vec{r},E,\vec{\Omega})\right|^p \times$$

$$\times\left\{\iint\limits_Q dE\,d\vec{\Omega}|\chi|^q\right\}^{p-1},\ f\in L_D^p,\ \chi\equiv 1. \tag{38}$$

Производя замену $dE'd\vec{\Omega}'\rightarrow W(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})\,dE'd\vec{\Omega}'$, где $W(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})$ – положительная и достаточно гладкая функция, определенная на $Q\times Q$, имеем формальный аналог (38):

$$\left|\iint\limits_Q dE'd\vec{\Omega}' W(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega}) f(r,E',\vec{\Omega}')\right|^p \leq$$

$$\leq \iint\limits_Q dE'd\vec{\Omega}' W(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})\left|f(\vec{r},E',\vec{\Omega}')\right|^p \times$$

$$\times\left\{\iint\limits_Q dE'd\vec{\Omega}' W(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})|\chi|^q\right\}^{(p-1)},\ f\in L_D^p,\ \chi\equiv 1. \tag{39}$$

Если $W(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})$ – любая из функций $W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})$, то она обладает свойством положительности и необходимо лишь убедиться в существовании интеграла

$$\iint\limits_Q dE'd\vec{\Omega}' W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega}),$$

который присутствует в правой части (39). Для $b\neq s$ из (10) следует

$$\sup_{(E,\vec{\Omega})\in Q}\iint\limits_Q dE'd\vec{\Omega}' W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega}) = h_{b,\ell}<\infty.$$

Далее, классический расчет дифференциального сечения рассеяния нейтрона на ядрах среды с максвелловским распределением по скоростям показывает, что

$$W_{s,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega}) \le C/\sqrt{1-\mu^2},\ \mu=(\vec{\Omega}\,\vec{\Omega}'),$$

откуда

$$\iint\limits_Q dE'd\vec{\Omega}'\,W_{s,\ell} \le C_1E_0\,2\pi\int\limits_{-1}^{1}\frac{d\mu}{\sqrt{1-\mu^2}} = 2\pi^2E_0C_1 < \infty.$$

Таким образом, $\iint\limits_Q dE'd\vec{\Omega}'\,W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})$ – функция, ограниченная на Q при всех значениях индексов b,ℓ.

Неравенство (39) можно переписать в виде

$$|\hat{T}f|^p \le \hat{T}|f|^p(\hat{T}\chi)^{p-1}, \tag{40}$$

где $\hat{T}$ – любой из операторов $\hat{T}_{b,\ell}$.

Как было показано выше $\sup\limits_{(E,\vec{\Omega})\in Q}\iint\limits_Q W(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})dE'd\vec{\Omega}' =$
$= \sup(\hat{T}\chi) = h < \infty$,

поэтому из (40) следует:

$$|\hat{T}f|^p \le h^{p-1}\hat{T}|f|^p.$$

Проинтегрировав последнее неравенство по $d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega}$ с учетом условия нормировки (37) функций $W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})$, получим

$$\|\hat{T}F\|_p^p \le h^{p-1}\|F\|_p^p.$$

или

$$\|\hat{T}F\|_p \le h^{1/q}\|F\|_p,\ \|\hat{T}\|_p \le h^{1/q},\ p\ge 1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Для $p=\infty$ $\|\hat{T}\|_\infty \le h$, что проверяется непосредственно. Таким образом,

$$\|\hat{T}_{b,\ell}\|_p \le h_{b,\ell}^{1/q},\ 1\le p\le\infty,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{41}$$

Так как операторы умножения на функции $\sqrt{E}\,\nu_{b,\ell}(E)\sum_{b,\ell}(\vec{r},E)$ ограничены, с учетом (41) заключаем, что операторы $\hat{K}_{b,\ell}$ ограничены из L_D^p в L_D^p при $1 \le p \le \infty$. Оператор $\hat{K} = \sum_{b,\ell} \hat{K}_{b,\ell}$ также является ограниченным в пространстве L_D^p при $1 \le p \le \infty$.

Замечание 4. Свойством ограниченности в L_D^p обладает также и оператор

$$\hat{K}_1 = \frac{1}{\sqrt{E}}\hat{K},$$

что непосредственно следует из (9) и (10).

Все сказанное позволяет заключить, что $D(\hat{\Lambda}) = D(\hat{L})$, т.е. область определения $D(\hat{\Lambda})$ оператора $\hat{\Lambda}$ состоит из функций, принадлежащих пространствам L_D^p $(1 \le p \le \infty)$ и удовлетворяющих условиям, сформулированным в лемме 4.

§ 6. СВОЙСТВА $\hat{\Lambda}$

1. Как уже отмечалось, следует ожидать, что оператор $\hat{\Lambda}$ не ограничен в L_D^p, поскольку он содержит производные по пространственным переменным. Это предположение имеет место в пространстве L_D^p при $1 \le p \le \infty$.

Напомним, что оператор $\hat{\Lambda}$ будет ограничен на $D(\hat{\Lambda}) \subset L_D^p$, если выполняется неравенство $\|\hat{\Lambda} f\|_p \le M_p \|f\|_p$ для всех $f \in D(\Lambda) \subset L_D^p$. Здесь M_p – постоянная, не зависящая от f. Поэтому для того чтобы убедиться в неограниченности оператора $\hat{\Lambda}$, достаточно найти последовательность $f_n \in D(\hat{\Lambda})$, такую, что $\|f_n\|_p = const$ и $\|\hat{\Lambda} f_n\|_p \to \infty$ при $n \to \infty$. Последнее соотношение нет необходимости проверять для всего оператора $\hat{\Lambda} = -\hat{L} + \hat{K}$, так как $\hat{K}$ – ограниченный оператор (см. § 5). Поэтому неограниченным может быть лишь оператор переноса $\hat{L} = \sqrt{E}\,\vec{\Omega}\nabla + \sqrt{E}\sum_t$; операция умножения на функцию $\sqrt{E}\sum_t$ ограничена в силу условий § 2. Остается оператор $\sqrt{E}\,\vec{\Omega}\nabla = \sqrt{E}\frac{d}{ds}$, неограниченный на $D(\hat{\Lambda})$.

Возьмем последовательность функций

$$f_n(\vec{r},E,\vec{\Omega})=\left[\frac{s-s_1(\vec{r}_0,\vec{\Omega})}{s_2(\vec{r}_0,\vec{\Omega})-s_1(\vec{r}_0,\vec{\Omega})}\right]^n(np+1)^{1/p},$$

для которой использованы обозначения рис. 2.

Функции $f_n\in D(\hat{\Lambda})$, абсолютно непрерывные по переменной $s\in\left[-s_0(\vec{r},\vec{\Omega}),s^{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega})\right]$, удовлетворяют соответствующему граничному условию, входящему в определение $D(\hat{\Lambda})$, и $\sqrt{E}\frac{df_n}{ds}\in L_D^p$ при $1\leq p<\infty$. Далее,

$$\|f_n\|_p=(4\pi E_0V)^{1/p},\ \left\|\sqrt{E}\frac{df_n}{ds}\right\|_p=n\left[\frac{np+1}{(n-1)p+1}\right]^{1/p}C_p^{1/p}\to\infty$$

при $n\to\infty$ и $0<C_p<\infty$, $1\leq p<\infty$. При $p=\infty$ можно взять

$f_n=\left(\frac{s-s_1(\vec{r}_0,\vec{\Omega})}{d}\right)^n\in D(\hat{\Lambda})\subset L_D^\infty$, где d – диаметр объема V, т.е. верхняя граница длин его всевозможных хорд. Тогда $\|f_n\|_\infty=1$,

$$\left\|\sqrt{E}\frac{df_n}{ds}\right\|_\infty=\operatorname{vrai\,max}\sqrt{E}\left[\frac{s-s_1(\vec{r}_0,\vec{\Omega})}{d}\right]^{n-1}\frac{n}{d}=\sqrt{E_0}\,\frac{n}{d}\to\infty,\ n\to\infty$$

Полученный результат сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 2. Операторы $\hat{L}$ и, следовательно, $\hat{\Lambda}$ являются неограниченными операторами в пространствах L_D^p при $1\leq p\leq\infty$.

2. Оператор $\hat{\Lambda}$ замкнут. Напомним, что оператор $\hat{\Lambda}$ называется замкнутым, если из $f_n\to f$ $(f_n\in D(\hat{\Lambda}))$ и $\hat{\Lambda}f_n\to\varphi$ следует, что $f\in D(\hat{\Lambda})$ и $\hat{\Lambda}f=\varphi$. Убедиться в замкнутости $\hat{\Lambda}$, опираясь непосредственно на определение, непросто. Более подходящей для этой цели является следующая схема. Поскольку $\hat{\Lambda}=-\hat{L}+\hat{K}$, где оператор $\hat{K}$ ограничен в L_D^p $(1\leq p\leq\infty)$ и $D(\hat{L})\subset D(\hat{K})=L_D^p$, то замкнутость $\hat{\Lambda}$ будет следствием замкнутости $\hat{L}$. Если $\hat{L}$

имеет обратный оператор $\hat{L}^{-1}$, то $\hat{L}$ и $\hat{L}^{-1}$ одновременно замкнуты или незамкнуты. Поскольку $\hat{\ell}=\hat{L}^{-1}$ ограничен в L^p_D $(1\leq p\leq\infty)$, то он замкнут и, следовательно, замкнут оператор $\hat{L}$ и вместе с ним замкнут оператор $\hat{\Lambda}$.

Результаты этого параграфа для удобства ссылок сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3. Оператор $\hat{\Lambda}$ является замкнутым неограниченным оператором в пространствах L^p_D при $1\leq p\leq\infty$.

§ 7. СВОЙСТВА ОБЛАСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ОПЕРАТОРА $\hat{\Lambda}$

Продолжая реализацию программы, намеченной в § 4, покажем, что $D(\hat{\Lambda})=\overline{R^p_D}=L^p_D$ при $1\leq p<\infty$. Существенно, что это равенство не выполняется при $p=\infty$. Другими словами, мы хотим показать, что область определения оператора $\hat{\Lambda}$ плотна в пространствах L^p_D $(1\leq p<\infty)$. Доказать этот факт, основываясь непосредственно на определении плотного множества, затруднительно и мы воспользуемся стандартным подходом, применяемым обычно в таких случаях. Идея его проста, основана на известной теореме Хана – Банаха о продолжении линейных непрерывных функционалов и состоит в следующем. Пусть φ – линейный непрерывный функционал на L^p_D, равный нулю на R^p_D. Если элемент $x_0\in L^p_D$ принадлежит замыканию множества R^p_D, то в силу непрерывности φ имеем $\varphi(x_0)=0$.

Условие $\varphi(x_0)=0$ для всех непрерывных линейных функционалов на L^p_D, равных нулю на R^p_D, согласно теореме Хана – Банаха оказывается достаточным для того, чтобы $x_0\in\overline{R^p_D}$. Если это условие выполняется для каждого элемента из L^p_D, то, с одной стороны, отсюда следует $\overline{R^p_D}=L^p_D$, а с другой – само условие можно сформулировать так: если из $\varphi(x)=0$ $(x\in R^p_D)$ следует $\varphi=0$ (на L^p_D), то $\overline{R^p_D}=L^p_D$. Действительно, в этом случае $\varphi=0$ на R^p_D, и кроме того, $\varphi(x_0)=0$ для всех $x_0\in L^p_D$. Схема рассуждений становится особенно наглядной, если ее применить к плотному множеству на вещественной оси (например, к множеству рациональных чисел).

Множества R^p_D органически связаны с операторами $\hat{L}$ и $\hat{\ell}=\hat{L}^{-1}$. В самом деле, $D(\hat{L})=R^p_D=R(\hat{\ell})$, где $D(\hat{L})$ – область определения оператора $\hat{L}$; $R(\hat{\ell})$ – область значений оператора $\hat{\ell}$. Хорошо известно, что всякий ограниченный оператор в банаховом пространстве имеет ограниченный сопряженный оператор. Таким образом, если $\hat{\ell}$ действует в L^p_D $(1\le p\le\infty)$, то ему соответствует сопряженный $\hat{\ell}^+$, действующий в $(L^p_D)^+$ $(1\le p\le\infty)$, где $(L^p_D)^+$ – пространство, сопряженное пространству L^p_D. Значения линейного непрерывного функционала $\varphi(x)$ принято записывать симметричным образом: $\varphi(x)\equiv\langle x,\varphi\rangle$, $x\in L^p_D$, $\varphi\in(L^p_D)^+$; этого обозначения мы будем придерживаться и в дальнейшем. Пусть y – произвольный элемент из R^p_D, а x – произвольный элемент из L^p_D. Из § 6 следует $y=\hat{\ell}x$. Поэтому для доказательства равенства $\overline{R^p_D}=L^p_D$ достаточно проверить условие: из $\langle y,\varphi\rangle=\langle\hat{\ell}x,\varphi\rangle=0$ следует $\varphi\equiv 0$. Но $\langle\hat{\ell}x,\varphi\rangle=\langle x,\hat{\ell}^+\varphi\rangle=0$ для всех $x\in L^p_D$. Отсюда $\hat{\ell}^+\varphi=0$. Из этого равенства следует $\varphi=0$ тогда и только тогда, когда оператор $\hat{\ell}^+$ имеет обратный оператор. Последнее в свою очередь очевидно, поскольку оператор $\hat{\ell}$ имеет обратный оператор $\hat{L}$.

Рассмотрим теперь пространства $(L^p_D)^+$. Как известно,

$$(L^p_D)^+=L^q_D,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\quad 1<p<\infty,$$

где равенство понимается в смысле изометрического изоморфизма между элементами $(L^p_D)^+$ и L^p_D. Характерно, что $(L^1_D)^+=L^\infty_D$, но $(L^\infty_D)^+\supset L^1_D$. Поэтому приведенные выше рассуждения в общем справедливы для $p\in[1,\infty)$, т.е. $\overline{R^p_D}=L^p_D$ при $1\le p<\infty$. Такая ситуация имеет место в силу того факта, что выражение $\langle\hat{\ell}x,\varphi\rangle=\langle x,\hat{\ell}^+\varphi\rangle$ имеет смысл лишь для тех элементов $\varphi \in (L_D^{\infty})^+$, которые вместе с $\hat{\ell}^+\varphi$ принадлежат L_D^1 (в смысле изометрического изоморфизма). Более того, множество R_D^{∞} не плотно в L_D^{∞}. Действительно, функция $\chi(\vec{r},E,\vec{\Omega}) \equiv 1$ принадлежит L_D^{∞}, но $\|f-\chi\|_{\infty} \geq 1$ для любого элемента $f \in R_D^{\infty}$, поскольку функции f обращаются в нуль на границе области V для $\vec{\Omega} \in M_-(\vec{r}_s)$, $\vec{r}_s \in \Gamma$ (см. (12)). Другими словами, в некоторой окрестности элемента $\chi \in L_D^{\infty}$ нет ни одного элемента из R_D^{∞}.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Множества $R_D^p \subset L_D^p$ плотны в L_D^p при $1 \leq p < \infty$. R_D^{∞} не плотно в L_D^{∞}.

§ 8. СВОЙСТВА РЕЗОЛЬВЕНТЫ ОПЕРАТОРА $\hat{\Lambda}$

Напомним, что ближайшей целью исследования является анализ свойств оператора $\hat{\Lambda}$, который мы собираемся выполнять с помощью теоремы 1 для выяснения вопросов существования и единственности решения задачи Коши

$$\frac{dn}{d\tau} = \hat{\Lambda} n(\tau),\ n(0) = n^{(0)} \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda}) = R_D^p \subset L_D^p.$$

Рассматриваемая задача Коши имеет единственное решение, если оператор $\hat{\Lambda}$ удовлетворяет условиям A_1 и B_1 (см. § 4). Показано, что $\hat{\Lambda}$ замкнут и имеет плотную в L_D^p $(1 \leq p < \infty)$ область определения, т.е. оператор $\hat{\Lambda}$ удовлетворяет условию A_1 в пространствах L_D^p $(1 \leq p < \infty)$. Теперь необходимо выяснить удовлетворяет ли оператор $\hat{\Lambda}$ условию B_1 или его более сильному варианту, выражаемому формулой (33). Другими словами, предстоит исследовать свойства оператора $(\lambda - \hat{\Lambda})$ для вещественных λ. Оператор $+\hat{\Lambda}(\lambda) = -(\lambda - \hat{\Lambda}) = [\hat{K} - (\hat{L} + \lambda)]$ отличается от $\hat{\Lambda}$ тем, что оператор $\hat{L}$ заменен на оператор $\hat{L}(\lambda) = \hat{L} + \lambda$, что в свою очередь эквивалентно замене полного сечения $\sum_t(\vec{r},E)$

на функцию $\Sigma_t(\vec{r},E;\lambda)=\Sigma_t(r,E)+\lambda/\sqrt{E}$ при вещественных λ. Функция $\Sigma_t(\vec{r},E;\lambda)$ удовлетворяет теперь условию (см. (8)):

$$\alpha+\lambda\le\sqrt{E}\,\Sigma_t(\vec{r},E;\lambda)\le\gamma+\lambda, \tag{42}$$

и все рассуждения из § 5 и 6, относящиеся к оператору $\hat{L}$, остаются справедливыми для оператора $\hat{L}(\lambda)$, естественно, с учетом изменений, порожденных неравенством (42). В частности, оператор $\hat{L}(\lambda)$ имеет ограниченный обратный оператор $\hat{\ell}(\lambda)=\hat{L}^{-1}(\lambda)$ в пространствах L_D^p $(1\le p\le\infty)$ при $\lambda>-\alpha$ с оценкой нормы $\|\hat{\ell}(\lambda)\|_p\le\dfrac{1}{\alpha+\lambda}$, $1\le p\le\infty$. Теперь при $\lambda>-\alpha$

$$R(\lambda,\hat{\Lambda})\equiv(\lambda-\hat{\Lambda})^{-1}=(\hat{L}(\lambda)-\hat{K})^{-1}=\left[\hat{L}(\lambda)(I-\hat{\ell}(\lambda)\hat{K})\right]^{-1}=$$
$$=(\hat{I}-\hat{\ell}(\lambda)\hat{K})^{-1}\hat{\ell}(\lambda). \tag{43}$$

Отсюда

$$\|\hat{R}(\lambda;\hat{\Lambda})\|_p\le\|(\hat{I}-\ell(\lambda)\hat{K})^{-1}\|_p\,\|\hat{\ell}(\lambda)\|_p. \tag{44}$$

Соотношения (43) и (44) записаны формально; они справедливы при условии, что оператор $(\hat{I}-\hat{\ell}(\lambda)\hat{K})^{-1}$ существует и ограничен. Это заведомо так, если $\|\hat{\ell}(\lambda)\hat{K}\|_p<1$, т.е. тогда $(I-\hat{\ell}(\lambda)\hat{K})^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(\hat{\ell}(\lambda)\hat{K})^n$ ряд сходится по норме операторов и выполняется неравенство $\|(\hat{I}-\hat{\ell}(\lambda)\hat{K})^{-1}\|_p\le\dfrac{1}{1-\|\hat{\ell}(\lambda)\hat{K}\|_p}$ (здесь операторный аналог числового случая $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}x^k$, $|x|<1$). Поэтому рассмотрим

$$\|\hat{\ell}(\lambda)\hat{K}\|_p\le\|\hat{\ell}(\lambda)\|_p\,\|\hat{K}\|_p\le\frac{\|\hat{K}\|_p}{\alpha+\lambda},\ \lambda>-\alpha,\ 1\le p\le\infty.$$

Условие $\|\hat{\ell}(\lambda)\hat{K}\|_p < 1$ будет выполнено, если $\frac{\|\hat{K}\|_p}{\alpha+\lambda} < 1$ или $\lambda > \|\hat{K}\|_p - \alpha$. Тогда из (44) следует

$$\|\hat{R}(\lambda;\hat{\Lambda})\|_p \le \|(\hat{I}-\hat{\ell}(\lambda)\hat{K})^{-1}\|_p \, \|\hat{\ell}(\lambda)\|_p \le \frac{1}{1-\|\hat{\ell}(\lambda)\|_p\|\hat{K}\|_p}\frac{1}{\lambda+\alpha} \le$$

$$\le \frac{1}{\alpha+\lambda-\|\hat{K}\|_p}, \; \lambda > \|\hat{K}\|_p - \alpha. \qquad (45)$$

Неравенство (45) означает, что полупрямая $\lambda > \|\hat{K}\|_p - \alpha$ принадлежит резольвентному множеству оператора $\hat{\Lambda}$; кроме того, это неравенство совпадает с (33). Таким образом, свойство B_1 для оператора $\hat{\Lambda}$ выполняется и мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема 5. Оператор $\hat{\Lambda}$ в принятых предположениях о ядерно-физических характеристиках среды является инфинитезимальным оператором полугруппы $\hat{U}(t) = exp(t\hat{\Lambda}), t>0$ класса (C_0) с оценкой нормы $\|\hat{U}(t)\|_p \le e^{(\|\hat{K}\|_p-\alpha)t}$, $t \ge 0$ в пространствах L_D^p при $p \in [1,\infty]$. Задача Коши

$$\frac{dn}{d\tau} = \hat{\Lambda} n(\tau), \; n^{(0)} = n(0) \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda})$$

имеет единственное решение:

$$n(\tau) = exp(\tau\hat{\Lambda}) n^{(0)} = \hat{U}(\tau) n^{(0)}$$

для любого элемента $n^{(0)} \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda}) = R_D^p \subset L_D^p$ при $1 \le p < \infty$.

<u>Следствие 2.</u> Оператор переноса $\hat{L}$ является инфинитезимальным оператором полугруппы $\hat{U}(\hat{L};\tau)$ класса (C_0) с оценкой нормы $\|\hat{U}(\hat{L};\tau)\|_p \le e^{-\alpha\tau}$, $1 \le p < \infty$, $\tau \ge 0$.
Другими словами, оператор $\hat{L}$ порождает в L_D^p, $1 \le p < \infty$ сжимающую полугруппу класса (C_0) и задача Коши

$$\frac{dn(\tau)}{d\tau} = -\hat{L} n(\tau), \; n(0) = n^{(0)} \in \mathcal{D}(\hat{L})$$

имеет единственное решение в пространствах L_D^p, $1 \le p < \infty$ при любом $n^{(0)} \in R_D^p$ $(1 \le p < \infty)$, выражаемое формулой

$$n(\tau) = exp(-\hat{L}\tau) n^{(0)}, \; \tau \ge 0.$$

Результаты теоремы 5 не содержат информации о решении задачи Коши в пространстве L_D^∞. Необходимость исследования задачи в L_D^∞ диктуется не только соображениями полноты результатов с математической точки зрения, но и тем фактом, что метрика в L_D^∞ не связана с интегрированием и поэтому позволяет интерпретировать метрические понятия наиболее ясным и удобным образом с точки зрения приложений.

Теорема Хилле – Иосида – Филлипса не применима в L_D^∞, так как множество $\mathcal{D}(\hat{\Lambda}) = R_D^\infty$ не плотно в L_D^∞. Тогда представляется естественным рассмотреть задачу на подпространстве $\overline{R_D^\infty} \subset L_D^\infty$ ($\overline{R_D^\infty}$ – замыкание множества R_D^∞ по норме пространства L_D^∞). Множество $\overline{R_D^\infty}$ замкнуто и само является банаховым пространством. Если теперь рассматривать $\hat{\Lambda}$ как оператор в $\overline{R_D^\infty}$, то условия A_1 и B_1 оказываются выполненными* и, следовательно, справедлива следующая теорема.

Теорема 6. Для оператора $\hat{\Lambda}$ в $\overline{R_D^\infty}$ сохраняются все утверждения теоремы 5.

Замечание 5. Ничто не мешает с самого начала рассматривать оператор $\hat{\Lambda}$ в пространствах $\overline{R_D^p}$ при $1 \le p \le \infty$, однако никакого упрощения в доказательствах при этом не получается, так как $\overline{R_D^p} = L_D^p$ $(1 \le p < \infty)$. В сущности такой подход эквивалентен изложенному при доказательстве теоремы 5.

§ 9. СОПРЯЖЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Сопряженные операторы играют важнейшую роль в математической физике, поскольку полное исследование свойств решений задачи немыслимо без привлечения понятия сопряженного оператора. Для примера достаточно вспомнить альтернативу Фредгольма в классической теории интегральных уравнений, где проблема существования решения рассматривается в терминах сопряженных операторов. Свойства самого оператора и сопряженного с ним в банаховых пространствах весьма тесно связаны между собой, поэтому, как правило, изучению подвергается не сам оператор, а пара "оператор – сопряженный оператор".

---

* Неравенство (45) для нормы резольвенты $\hat{R}(\lambda;\hat{\Lambda})$ выполняется в пространстве L_D^∞ и тем более выполняется на подпространстве $\overline{R_D^\infty} \subset L_D^\infty$.

Нашей ближайшей задачей является построение операторов, сопряженных с операторами переноса $\hat{L}$, соударений $\hat{k}$, с оператором $\hat{\Lambda}$ и с обратным оператору $\hat{L}$. В случае ограниченных операторов и пространств L_D^p при $1 \le p < \infty$ построение сопряженных операторов не представляет труда. Например, для оператора $\hat{\ell} = \hat{L}^{-1}$ в пространствах L_D^p $(1 \le p < \infty)$ сопряженный $\hat{\ell}^+$ определяется с помощью формулы:

$$<\hat{\ell}x, \varphi> = <x, \hat{\ell}^+\varphi>, \qquad (46)$$

где $x \in L_D^p$, $\varphi \in (L_D^p)^+ = L_D^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Поскольку вид линейного непрерывного функционала в L_D^p $1 \le p < \infty$ известен:

$$<x, \varphi> = \int\limits_D x(\vec{r}, E, \vec{\Omega})\, \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})\, d\vec{r}\, dE\, d\vec{\Omega},$$

то из формулы (46) следует

$$\hat{\ell}^+\varphi = \frac{1}{\sqrt{E}} \int\limits_0^{s^{(0)}(\vec{r}, \vec{\Omega})} ds\, \varphi(\vec{r} + s\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) \times$$

$$\times \exp\left(-\int\limits_0^s ds' \sum\nolimits_t (\vec{r} + s'\vec{\Omega}, E)\right). \qquad (47)$$

Оператор $\hat{\ell}^+$ единственен, действует в L_D^q $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, p \in [1, \infty)\right)$ и ограничен, причем $\|\hat{\ell}\|_p = \|\hat{\ell}^+\|_q$, $q = \frac{p}{p-1}$, $1 \le p < \infty$.

Рассмотрим интеграл в (47). Действуя так же, как и при анализе оператора $\hat{\ell}$ (см. § 5), нетрудно убедиться, что интеграл (47) определяет линейный ограниченный оператор в L_D^1. Поэтому для него существует ограниченный сопряженный оператор, действующий в L_D^∞ и $(\hat{\ell}^+)^+ = \hat{\ell}$, $D(\hat{\ell}) = L_D^\infty$. Все изложенное относительно оператора $\hat{\ell}^+$ зафиксируем в следующей лемме.

Лемма 5. Оператор $\hat{\ell}^+$, сопряженный с оператором $\hat{\ell}$, в пространствах L_D^p при $1 \le p < \infty$ определяется формулой (47). Он ограничен и

$$\|\hat{\ell}\|_p = \|\hat{\ell}^+\|_q \le \frac{1}{\alpha}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad 1 \le p < \infty.$$

Кроме того,

$(\hat{\ell}^+)^+ = \hat{\ell}$ в пространствах L_D^p при $1 < p < \infty$;

$(\hat{\ell}^+)^+ = \hat{\ell}$ при условии $D(\hat{\ell}^+) = L_D^1$.

Несколько сложнее обстоит дело с неограниченным оператором переноса $\hat{L}$. Мы показали, что он замкнут и плотно определен в L_D^p при $1 \le p < \infty$. Известно, что эти свойства достаточны для существования сопряженного оператора $\hat{L}^+$ в $L_D^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, 1 \le p < \infty\right)$, который замкнут и для рефлексивных пространств (т.е. при $1 < p < \infty$) плотно определен и $\hat{L}^{++} = \hat{L}$. Как обычно, сопряженный оператор $\hat{L}^+$ вычисляется с помощью формулы

$$\langle \hat{L} x, y \rangle = \langle x, \hat{L}^+ y \rangle,$$

где $x \in R_D^p \subset L_D^p$, $y \in D(\hat{L}^+) = \tilde{R}_D^q \subset L_D^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \le p < \infty$.

Простые выкладки дают

$$\hat{L}^+ y = -\sqrt{E}\,\vec{\Omega}\nabla y + \sqrt{E}\,\Sigma_t(\vec{r}, E)\,y$$

для всех функций $y(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \in L_D^q$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \le p < \infty$, обладающих следующими свойствами:

1) почти при всех $(E, \vec{\Omega}, \vec{r}_0) \in [0, E_0] \times V_{\vec{\Omega}} \times f(\vec{\Omega})$ функции $y(\vec{r} + s\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega})$ абсолютно непрерывны по s на множестве интервалов $\left[-s_{(0)}(\vec{r}, \vec{\Omega}),\ s^{(0)}(\vec{r}, \vec{\Omega})\right]$;

2) почти при всех $(E, \vec{\Omega}, \vec{r}_0) \in [0, E_0] \times V_{\vec{\Omega}} \times f(\vec{\Omega})$ удовлетворяется краевое условие

$$y(\vec{r} + s^{(0)}(\vec{r}, \vec{\Omega}) \vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) = 0,$$

для которого обозначения взяты из § 5 (см. также рис. 2). Множество функций, обладающих указанными свойствами, представляет собой область определения $\mathcal{D}(\hat{L}^{+})$ сопряженного оператора переноса $\hat{L}^{+}$. Полезно сравнить множества R_{D}^{q} и $\tilde{R}_{D}^{q}$: оба состоят из абсолютно непрерывных по s функций на интервалах $\left[-s_{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega}),s^{(0)}(\vec{r},\vec{\Omega})\right]$ в силу наличия у $\hat{L}$ и $\hat{L}^{+}$ оператора градиента, но функции из R_{D}^{q} и $\tilde{R}_{D}^{q}$ удовлетворяют различным краевым условиям (функции из R_{D}^{q} обращаются в нуль на границе $\Gamma=\bar{V}\setminus V$ для направлений $\vec{\Omega}$ внутрь объема V, а из $\tilde{R}_{D}^{q}$ – для направлений из объема V).

Введем оператор

$$\hat{U}\psi(\vec{r},E,\vec{\Omega})=\psi(\vec{r},E,-\vec{\Omega}).$$

Оператор $\hat{U}$ определен на всех функциях из L_{D}^{p}, $p\in[1,\infty]$, ограничен и $\|\hat{U}\|_{p}=1$. Кроме того, $\hat{U}f\in\tilde{R}_{D}^{p}$ при $f\in R_{D}^{p}$, $1\le p\le\infty$. Следовательно,

$$\hat{L}^{+}=\hat{U}\hat{L}\hat{U}.$$

Повторяя рассуждения, касающиеся свойств $\hat{L}$ и R_{D}^{p}, и учитывая связь между замкнутым оператором с плотной областью определения и ему сопряженным, получаем лемму.

Лемма 6. Оператор переноса

$$\hat{L}\varphi=\sqrt{E}\,\Omega\nabla\varphi+\sqrt{E}\sum\nolimits_{t}(\vec{r},E)\varphi,\ \varphi\in R_{D}^{p},\ 1\le p<\infty$$

обладает замкнутым сопряженным оператором $\hat{U}\hat{L}\hat{U}\psi\equiv\hat{L}^{+}\psi=-\sqrt{E}\,\nabla\psi+\sqrt{E}\sum\nolimits_{t}(\vec{r},E)\psi,\ \psi\in\tilde{R}_{D}^{q},\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ с плотной областью определения $\tilde{R}_{D}^{q}$. Кроме того,

$$(\hat{L}^{+})^{-1}=(\hat{L}^{-1})^{+}=\hat{\ell}^{+},\ \mathcal{D}(\hat{\ell})=L_{D}^{p},\ 1\le p<\infty;$$

$$(\hat{L}^{+})^{+}=\hat{L}\ \text{при}\ \mathcal{D}(\hat{L})=R_{D}^{p},\ 1<p\le\infty.$$

(оператор $\hat{\ell}^{+}$ определен формулой (47)).

<u>Замечание 6.</u> Нетрудно видеть, что оператор $\hat{L}^{+}$ можно рассматривать независимо от оператора переноса $\hat{L}$. Тогда

$D(\hat{L}^+)=\tilde{R}_D^p$ при $1\le p\le\infty$, но в $\tilde{R}_D^1$ он не является сопряженным с $\hat{L}$ при $D(\hat{L})=R_D^\infty$ в общепринятом смысле. Точнее оператор $\hat{L}^+$ в R_D^1 есть один из сопряженных к $\hat{L}$ при $D(\hat{L})=$ $=R_D^\infty$ (но не единственный сопряженный), поскольку R_D^∞ не плотно в L_D^∞.

Рассмотрим, наконец, ограниченный оператор соударений (см. § 3)

$$\hat{K}n=\sum_{b,\ell}\hat{K}_{b,\ell}n,$$

где оператор

$$\hat{K}_{b,\ell}n=\iint\limits_Q dE'd\vec{\Omega}'n(\vec{r},E',\vec{\Omega}')\sqrt{E'}\nu_{b,\ell}(E')\sigma_{b,\ell}(E')\times$$

$$\times N_\ell(\vec{r})\,W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})$$

определен в пространствах L_D^p, $1\le p\le\infty$. Сопряженный оператор $\hat{K}^+$ имеет вид:

$$\hat{K}^+n(\vec{r},E,\vec{\Omega})=\sum_{b,\ell}\hat{K}_{b,\ell}^+n,$$

где оператор

$$\hat{K}_{b,\ell}^+n=\iint\limits_Q dE'd\vec{\Omega}'n(\vec{r},E',\vec{\Omega}')\sqrt{E}\nu_{b,\ell}(E)\sigma_{b,\ell}(E)N_\ell(\vec{r})\times$$

$$\times W_{b,\ell}(E,E',\vec{\Omega},\vec{\Omega}') \tag{48}$$

определен в пространствах L_D^q при $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $1\le p<\infty$.

Как и в случае оператора $\hat{\ell}^+$, оператор $\hat{K}^+$ имеет смысл в пространстве L_D^1, но не является сопряженным с оператором соударений $\hat{K}$, рассматриваемым в пространстве L_D^∞. Напомним, что этот факт есть следствие нерефлексивности пространств L_D^1 и L_D^∞. Таким образом, $(\hat{K}^+)^+ = \hat{K}$ при $D(\hat{K}) = L_D^p$, $1<p\le\infty$.

Основной результат этого параграфа можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема 7. Оператор $\hat{\Lambda}^+ = -\hat{L}^+ + \hat{K}^+$ представляет собой замкнутый неограниченный оператор в пространствах L_D^p при $1\le p\le\infty$ с областью определения $\tilde{R}_D^p \subset L_D^p$. Оператор $\hat{\Lambda}^+$ сопряжен с оператором $\hat{\Lambda} = -\hat{L} + \hat{K}$, если $D(\hat{\Lambda}) = R_D^p$, $D(\hat{\Lambda}^+) = \tilde{R}_D^q$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, $1\le p<\infty$. Кроме того,

$$(\hat{\Lambda}^+)^+ = \hat{\Lambda},\ D(\hat{\Lambda}) = R_D^p,\quad 1<p\le\infty.$$

В заключение параграфа перечислим некоторые свойства сопряженных с $\hat{U}(\hat{\Lambda};\tau)$, $\hat{U}(-\hat{L};\tau)$ полугрупп в пространствах L_D^p, $1\le p\le\infty$. Напомним, что в отличие от операторов $\hat{\Lambda}$ и $\hat{L}$, упомянутые полугруппы представляют собой ограниченные операторы при каждом $\tau\ge 0$ в L_D^p, $1\le p<\infty$, а при $p=\infty$ – в пространстве $\overline{R_D^\infty}$. Поэтому сопряженные полугруппы $[\hat{U}(\hat{\Lambda},\tau)]^+$ и $[\hat{U}(-L;\tau)]^+$ существуют в случае L_D^p, $1\le p<\infty$ и $\overline{R_D^\infty}$ при $p=\infty$. С другой стороны, свойства операторов $\hat{\Lambda}^+$ и $\hat{L}^+$ в пространствах L_D^p, $1<p<\infty$ позволяют сразу заявить, что эти операторы порождают полугруппы $\hat{U}(\hat{\Lambda}^+;\tau)$, $\hat{U}(-L^+;\tau)$ класса (C_0) при $D(\hat{\Lambda}^+) = \tilde{R}_D^p$, $D(-\hat{L}^+) = \tilde{R}_D^p$, $1<p<\infty$.

Равенства

$$\left[\hat{U}(\hat{\Lambda};\tau)\right]^+ = \hat{U}(\hat{\Lambda}^+;\tau),\ D(\hat{\Lambda}) = R_D^p, D(\hat{\Lambda}^+) = R_D^q, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

и

$$\left[\hat{U}(-\hat{L};\tau)\right]^+ = \hat{U}(-\hat{L}^+;\tau),\ D(\hat{L}) = R_D^p, D(\hat{L}^+) = \tilde{R}_D^q, \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

$$1<p<\infty$$

доказываются прямым путем. Трудности возникают лишь в пространствах L_D^1 и L_D^∞ в силу их нерефлексивности. Причина, порождающая трудности, состоит в следующем. Пусть $\hat{U}(\hat{\Lambda};\tau)$ рассматривается в пространстве L_D^1. Тогда соотношение

$$<\hat{U}(\hat{\Lambda};\tau)x, y> = <x, \left[\hat{U}(\hat{\Lambda};\tau)\right]^+ y>,$$

$$x \in L_D^1, \; y \in L_D^\infty$$

однозначно определяет сопряженное семейство $\left[\hat{U}(\hat{\Lambda};\tau)\right]^+$ ограниченных операторов в L_D^∞. Если $D(\hat{\Lambda}) = R_D^1 \subset L_D^1$, то, как известно, существует единственный сопряженный оператор $\hat{\Lambda}^+$ с $D(\hat{\Lambda}^+) = \tilde{R}_D^\infty \subset L_D^\infty$. Но множество $\tilde{R}_D^\infty$ не плотно в L_D^∞ и, следовательно, теорема Хилле – Иосида – Филлипса не применима. Другими словами, $\hat{\Lambda}^+$ не порождает полугруппу класса (C_0) в L_D^∞ и мы вынуждены обратиться к подпространству $\overline{\tilde{R}_D^\infty} \subset L_D^\infty$, в котором существует полугруппа $(C_0)\, \hat{U}(\hat{\Lambda}^+;\tau)$ и выполняется равенство $\left[\hat{U}(\hat{\Lambda};\tau)\right]^+ = \hat{U}(\hat{\Lambda}^+;\tau)$, где $\left[\hat{U}(\hat{\Lambda};\tau)\right]^+$ необходимо рассматривать как сужение определенной выше полугруппы на $\overline{\tilde{R}_D^\infty}$. Такие же рассуждения справедливы и для пространства L_D^∞.

Замечание 7. Полученные результаты для сопряженных полугрупп позволяют установить очевидный аналог теоремы 5 для задач Коши:

$$\frac{dn}{d\tau} = \hat{\Lambda}^+ n(\tau), \; n(0) = n^{(0)} \in D(\hat{\Lambda}^+),$$

$$\frac{dn}{d\tau} = -\hat{L}^+ n(\tau), \; n(0) = n^{(0)} \in D(\hat{L}^+).$$

§ 10. КОРРЕКТНОСТЬ ЗАДАЧИ КОШИ

Наряду с существованием и единственностью решения задачи Коши, важную роль играет также свойство непрерывной зависимости решения от исходных данных. Наличие всех этих трех свойств представляет собой классическое понятие корректной постановки задачи. Рассмотрим корректность в более узком смысле, исследовав лишь зависимость решения от начального условия. Начнем с определений.

Определение 5. Задача Коши

$$\frac{dn(\tau)}{d\tau} = \hat{\Lambda} n(\tau),\ n(0) = n^{(0)} \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda}) \tag{49}$$

поставлена корректно на отрезке $[0,T]$, если:

а) при любом $n^{(0)} \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda})$ существует ее единственное решение;

б) это решение непрерывно зависит от начальных данных, т.е. из $n_k^{(0)} \to 0$, $k \to \infty$ $\left(n_k^{(0)} \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda})\right)$ для соответствующих решений $n_k(\tau)$ следует $n_k(\tau) \to 0$ при каждом $\tau \in [0,T]$.

Из определения немедленно вытекает следствие.

Следствие 3. Если задача (49) корректна на отрезке $[0,T]$, то она корректна на полуоси $[0,\infty)$.

В самом деле, пусть $n_1(\tau)$ и $n_2(\tau)$ - решения задачи (49) при начальных условиях $n^{(0)} = n_1(0)$ и $n_2(0) = n_1(T)$ соответственно. Тогда функция

$$W(\tau) = \begin{cases} n_1(\tau),\ \tau \in [0,T]; \\ n_2(\tau - T),\ \tau \in [T, 2T] \end{cases}$$

является решением задачи (49) на промежутке $[0,2T]$. Нетрудно проверить, что это решение удовлетворяет условиям а) и б) определения 5.

Определение 6. Корректно поставленная задача Коши называется равномерно корректной, если из $n_k^{(0)} \to 0$ следует, что $n_k(t) \to 0$ равномерно по t на каждом конечном промежутке $[0,T]$.

Теорема 8. Задача Коши (49) равномерно корректна.

Действительно, в силу теоремы 5 решение задачи (49) существует, оно единственно и выражается формулой

$$n(\tau) = \hat{U}(\tau) n^{(0)},\ n^{(0)} \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda}) = R_{\mathcal{D}}^{p} \tag{50}$$

в пространствах $L_{\mathcal{D}}^{p}$ при $1 \le p < \infty$.

При $p=\infty$ формула (50) справедлива, если оператор рассматривать в подпространстве $\overline{R_D^{\infty}}$. Из оценки

$$\|\hat{U}(\tau)\|_p \leqslant e^{(\|\hat{K}\|_p-\alpha)\tau}, \quad \tau \geqslant 0$$

следует

$$\|n(\tau)\|_p = \|\hat{U}(\tau)n^{(0)}\|_p \leqslant \|\hat{U}(\tau)\|_p \|n^{(0)}\|_p \leqslant e^{(\|\hat{K}\|_p-\alpha)\tau} \|n^{(0)}\|_p,$$

$$1 \leqslant p < \infty;$$

при $p=\infty$ это неравенство следует рассматривать в $\overline{R_D^{\infty}}$.

Если $\|\hat{K}\|_p > \alpha$, то $\|n_k(\tau)\|_p \leqslant e^{(\|K\|_p-\alpha)T} \|n_k^{(0)}\|_p \to 0$ при $n_k^{(0)} \to 0$ на любом промежутке $[0,T]$, т.е. задача (49) равномерно корректна. Еще проще устанавливается равномерная корректность при $\|\hat{K}\|_p \leqslant \alpha$.

Замечание 8. Как уже отмечалось выше, условия A_1 и B_1 (см. § 4) являются необходимыми и достаточными для того, чтобы оператор $\hat{\Lambda}$ был производящим оператором полугруппы класса (C_0). Можно показать, что полугруппа $\hat{U}(\hat{\Lambda},\tau)$, порожденная равномерно корректной задачей Коши, принадлежит классу (C_0). Таким образом, условие принадлежности $\hat{U}(\hat{\Lambda},\tau)$ классу (C_0) представляет собой необходимое и достаточное условие равномерной корректности задачи Коши.

Итак, вопрос существования, единственности решения задачи Коши (49) и ее корректности полностью исчерпан.

Глава 2

СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОПЕРАТОРОВ

Дальнейший анализ будет направлен на выяснение свойств решения задачи (49) и интерпретацию этих свойств с точки зрения поведения во времени функции распределения нейтронов в пространстве и связанных с нею параметров ядерно-физической установки. Естественно, что качественный анализ решения сопряжен с более детальным изучением неограниченного замкнутого оператора $\hat{\Lambda}$ и порождаемой им полугруппы $\hat{U}(\hat{\Lambda};\tau)$. Существует прямая связь между структурой спектра операторов $\hat{\Lambda}$ и $\hat{U}(\hat{\Lambda};\tau)$ и свойствами решения задачи (49). Однако спектральный анализ является одной из самых трудных задач теории операторов, поэтому далеко не всегда удается получить в полном объеме необходимые сведения о свойствах решения.

§ 11. СПЕКТР ЗАМКНУТОГО ОПЕРАТОРА

Прежде чем приступить к изложению результатов спектрального анализа операторов, связанных с задачей (49), сформулируем определение понятия спектра и дадим классификацию спектральных точек замкнутого оператора. Напомнить спектральные понятия здесь тем более уместно, что упомянутая классификация в значительной степени произвольна и зависит от ряда обстоятельств, к которым в первую очередь следует отнести структуру исследуемого оператора. Кроме того, при анализе прикладной задачи ведущую роль играют те части спектра, которые определяют характерные свойства решения: наличие асимптотики, возможность построения итерационного процесса или применения теории возмущений и т.п. Поэтому именно такие части в первую очередь подлежат выделению и детальному изучению.

Поскольку свойства рассматриваемой задачи Коши определяются свойствами оператора $\hat{\Lambda}$, то в этом параграфе основное внимание сосредоточено на спектральных понятиях для замкнутых операторов с плотной областью определения. Следует отметить, что часть результатов остается в силе и для произвольных линейных операторов (необязательно замкнутых и плотно определенных). В данном параграфе, если не оговорено особо, $\hat{A}$ – линейный замкнутый оператор, действующий в комплексном банаховом пространстве X, с областью значений $R(\hat{A}) \subset X$ и областью определения $D(\hat{A}) \subset X$, которая плотна в X, т.е. $\overline{D(\hat{A})} = X$.

Определение 7. Совокупность комплексных чисел λ, для которых область значений $R(\hat{A}_\lambda)$ оператора $\hat{A}_\lambda = (\lambda - \hat{A})$ плотна в X и оператор $\hat{A}_\lambda$ обладает непрерывным обратным оператором, называется резольвентным множеством $\rho(\hat{A})$ оператора $\hat{A}$, а оператор $\hat{R}(\lambda;\hat{A}) = (\lambda - \hat{A})^{-1}$ $(\lambda \in \rho(\hat{A}))$ – резольвентой оператора $\hat{A}$.

Определение 8. Совокупность комплексных чисел $\sigma(\hat{A}) = \{\lambda : \lambda \notin \rho(\hat{A})\}$ называется спектром оператора $\hat{A}$.

Хорошо известно, что резольвентное множество $\rho(\hat{A})$ линейного оператора открыто, а спектр $\sigma(\hat{A})$ – замкнутое множество.

Из этих определений следует, что каждый линейный оператор порождает разбиение комплексной плоскости на две непересекающиеся части: резольвентное множество и спектр. Числа $\lambda \in \sigma(\hat{A})$ характеризуются тем, что либо $\hat{A}_\lambda^{-1}$ не существует, либо A_λ^{-1} существует, плотно определен, но неограничен, либо существует, но область определения его не плотна в X.

С перечисленными возможностями связано разбиение спектра $\sigma(\hat{A})$ оператора $\hat{A}$ на части.

Определение 9. Точечный спектр $P\sigma(\hat{A}) \subset \sigma(\hat{A})$ – множество комплексных чисел, для которых оператор $\hat{A}_\lambda$ не имеет обратного оператора. Непрерывный спектр $C\sigma(\hat{A}) \subset \sigma(\hat{A})$ – множество комплексных чисел, для которых $\hat{A}_\lambda^{-1}$ существует, плотно определен, но неограничен. Остаточный спектр $R\sigma(\hat{A}) \subset \sigma(\hat{A})$ – множество комплексных чисел, для которых оператор $\hat{A}_\lambda^{-1}$ существует, но область определения его не является плотной в X.

Характерная особенность определенных выше частей спектра состоит в том, что они попарно не пересекаются и

$$P\sigma(\hat{A}) \cup C\sigma(\hat{A}) \cup R\sigma(\hat{A}).$$

Уже эти свойства могут быть приняты в качестве решающих аргументов в пользу выделения в спектре $\sigma(\hat{A})$ частей $P\sigma(\hat{A}), C\sigma(\hat{A}), R\sigma(\hat{A})$. Кроме того, существуют критерии, позволяющие различать точки $P\sigma(\hat{A})$, $C\sigma(\hat{A})$, $R\sigma(\hat{A})$. На обсуждении этих критериев остановимся несколько подробнее.

Отметим еще раз, что принадлежность комплексного числа λ спектру $\sigma(\hat{A})$ или резольвентному множеству $\rho(\hat{A})$ определяется прежде всего свойствами обратимости и ограниченной обратимости оператора $\hat{A}_\lambda = (\lambda - \hat{A})$, поэтому условия обратимости и ограниченной обратимости линейных операторов играют важную роль в спектральной теории.

Теорема 9. Для обратимости линейного оператора T необходимо и достаточно, чтобы из условия $Tx = 0$ следовало $x = 0$.

Теорема 10. Для ограниченной обратимости линейного оператора T необходимо и достаточно, чтобы существовала постоянная $C > 0$, такая, что

$$\|\hat{T}x\| \geqslant C\|x\|, \ x \in D(\hat{T}). \tag{51}$$

Доказательство этих теорем вполне элементарно и может быть найдено в любом учебнике по функциональному анализу.

Теорема 9 немедленно доставляет критерий принадлежности комплексного числа λ точечному спектру $P_\sigma(\hat{A})$. Именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 11. Для того чтобы $\lambda \in P\sigma(\hat{A})$, необходимо и достаточно, чтобы существовал ненулевой элемент $x \in D(\hat{A}) \subset X$, такой, что

$$\hat{A}_\lambda x = (\lambda - \hat{A})x = 0.$$

Установить аналогичный признак для $C\sigma(\hat{A})$ и $R\sigma(\hat{A})$ несколько сложнее. Если $\lambda \in C\sigma(\hat{A})$, то по определению $\hat{A}_\lambda^{-1} = (\lambda - \hat{A})^{-1}$ существует и, следовательно, по теореме 9 из $(\lambda - \hat{A})x = 0$ следует $x = 0$. Одновременно с этим оператором $\hat{A}_\lambda^{-1}$ не является ограниченным, т.е. условие (51) не выполняется.

Рассмотрим формулу (51) подробнее. Переписав ее в эквивалентной форме

$$\|\hat{T}x\| \geqslant C > 0,\ x \in D(\hat{T}),\ \|x\| = 1,$$

получим условие

$$\inf_{\substack{x \in D(\hat{T}),\\ \|x\| = 1}} \|\hat{T}x\| = \gamma > 0, \tag{52}$$

которое иногда оказывается весьма полезным для спектрального анализа линейных операторов. В самом деле, предложение: "существует последовательность $\{x_n\} \subset D(\hat{T})$, $\|x_n\| = 1$, такая, что $\hat{T}x_n \to 0$ при $n \to \infty$ (т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} \|\hat{T}x_n\| = 0$)" отрицает условие (52), а следовательно, и заключение теоремы 10. В применении к оператору $(\lambda - \hat{A})$ существование такой последовательности означает, что оператор $(\lambda - \hat{A})$ не имеет ограниченного обратного, т.е. $\lambda \in \sigma(\hat{A})$. Однако полученный признак принадлежности комплексного числа λ спектру $\sigma(\hat{A})$, представляя собой достаточное условие, не является необходимым. Действительно, из определения множества $R\sigma(\hat{A})$ вытекает лишь существование $\hat{A}_\lambda^{-1}$ $(\lambda \in R\sigma(\hat{A}))$ без указания, ограничен этот оператор или нет. Поэтому имеет смысл классифицировать точки комплексной плоскости, вводя в рассмотрение множество комплексных чисел, для которых оператор $\hat{A}_\lambda^{-1}$ существует и ограничен, и дополнение к этому множеству.

Определение 10. Точка λ называется полурегулярной для оператора $\hat{A}$, если

$$\inf_{\substack{x \in D(\hat{A}),\\ \|x\|=1}} \|(\lambda-\hat{A})x\| = \gamma > 0.$$

Множество полурегулярных точек для оператора $\hat{A}$ обозначим $\breve{\rho}(\hat{A})$. Очевидно, что $\rho(\hat{A}) \subseteq \breve{\rho}(\hat{A})$.

Определение 11. Множество $Z \setminus \breve{\rho}(\hat{A})$ называется приведенным спектром $\breve{\sigma}(\hat{A})$ оператора $\hat{A}$.

Из последнего определения вытекает, что точки приведенного спектра $\breve{\sigma}(\hat{A})$ характеризуются условием

$$\inf_{\substack{x \in D(\hat{A}),\\ \|x\|=1}} \|(\lambda-\hat{A})x\| = 0 \tag{53}$$

и $\breve{\sigma}(\hat{A}) \subseteq \sigma(\hat{A})$. Отметим, что множество полурегулярных точек $\breve{\rho}(\hat{A})$ открыто; $\breve{\sigma}(\hat{A})$ – замкнутое множество, а из (53) следует, что $P\sigma(\hat{A}) \subset \breve{\sigma}(\hat{A})$, $C\sigma(\hat{A}) \subset \breve{\sigma}(\hat{A})$.

За множеством $\breve{\rho}(\hat{A}) \setminus \rho(\hat{A}) = \sigma(\hat{A}) \setminus \breve{\sigma}(\hat{A})$ сохраним старое название – остаточный спектр, но обозначим как $\breve{R}\sigma(\hat{A})$. Точки λ из $\breve{R}\sigma(\hat{A})$ характеризуются условием: оператор $(\lambda-\hat{A})$ имеет ограниченный обратный оператор, но область определения оператора $\hat{A}_\lambda^{-1}$ не плотна в X. Теперь в рамках новой классификации можно сформулировать удобные признаки принадлежности комплексного числа λ к той или иной части $\sigma(\hat{A})$.

Теорема 12. Для того чтобы $\lambda \in \breve{\sigma}(\hat{A})$, необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность $\{x_n\} \subset D(\hat{A})$, $\|x_n\| = 1$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda-\hat{A})x_n = 0. \tag{54}$$

Доказательство следует непосредственно из определения приведенного спектра. Необходимо лишь заметить, что если $\lambda \in P\sigma(\hat{A})$, а x_0 – соответствующий нормированный собственный элемент $(\|x_0\|=1)$, то можно считать $x_n = x_0$ при $n = 1, 2, \ldots$

Анализ доказательства этой теоремы показывает, что признак, установленный в теореме 12, можно несколько усилить, если не рассматривать часть точек из $P\sigma(\hat{A})$. В связи с этим введем еще одно понятие.

<u>Определение 12.</u> Собственное значение $\xi \in P\sigma(\hat{A})$ называется нормальным, если оно имеет конечную кратность*. Множество нормальных собственных чисел оператора $\hat{A}$ обозначим через $\check{P}\sigma(\hat{A})$.

Допустим теперь, что в условиях теоремы 12 последовательность $\{x_n\} \subset D(\hat{A})$ компактна. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\{x_n\}$ сходится, т.е. $x_n \to x_0 \ (x_0 \in X)$. Тогда из (54) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \hat{A}x_n = \lambda \lim_{n\to\infty} x_n = \lambda x_0$$

и в силу замкнутости $\hat{A}$ элемент x_0 является собственным вектором оператора $\hat{A}$, соответствующим собственному значению λ. Если теперь в качестве допустимых последовательностей $\{x_n\}$ брать только некомпактные, то нормальные собственные значения исключаются из рассмотрения. Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 13. Для того чтобы $\lambda \in \check{\sigma}(\hat{A}) \setminus \check{P}\sigma(\hat{A})$, необходимо и достаточно, чтобы существовала некомпактная последовательность $\{x_n\} \subset D(\hat{A})$, $\|x_n\| = 1$, такая, что

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda - \hat{A})\, x_n = 0.$$

Множество $\check{\sigma}(\hat{A}) \setminus \check{P}_\sigma(\hat{A})$ обозначим через $\check{C}\sigma(\hat{A})$ и назовем его <u>предельным спектром</u> оператора $\hat{A}$. Отметим, что для замкнутого оператора с плотной областью определения множество $\check{C}_\sigma(\hat{A})$ замкнуто.

Приведенные критерии принадлежности числа λ к спектру линейного оператора не требуют построения оператора $\hat{A}_\lambda^{-1} = (\lambda - \hat{A})^{-1}$. Тем не менее применение их к спектральному анализу конкретного оператора сопряжено с большими техническими трудностями. Иногда проще построить оператор $\hat{A}_\lambda^{-1}$ и исследовать его свойства в зависимости от комплексной переменной λ. При этом необходимо установить для каждого λ структуру области определения и свойство ограниченности оператора $\hat{A}_\lambda^{-1}$. В

---

* Напомним, что кратностью собственного значения $\xi \in P\sigma(\hat{A})$ называется размерность замыкания множества $N(\hat{A}) = \{x : (\xi - \hat{A})x = 0\}$.

функциональных лебеговых пространствах (например, в пространствах L_D^p при $1 \le p \le \infty$) ограниченность оператора устанавливается обычно путем применения неравенства Гёльдера (не следует, однако, думать, что это всегда просто). Неограниченность оператора можно доказать исходя из определения операторной нормы. Напомним, что для линейного оператора $\hat{T}$ в пространстве X норма определяется по формуле

$$\|\hat{T}\| = \sup_{\substack{x \in D(\hat{T}) \\ x \ne 0}} \frac{\|\hat{T}x\|}{\|x\|} = \sup_{\substack{x \in D(\hat{T}), \\ \|x\| \le 1}} \|\hat{T}x\| .$$

Отсюда следует, что оператор $\hat{T}$ не является ограниченным, если для любого числа $M>0$ найдется вектор $x_M \in D(\hat{T}), \|x_M\| \le 1$, такой, что $\|\hat{T}x_M\| > M$. Другими словами, для доказательства неограниченности оператора $\hat{T}$ достаточно найти нормированную (или ограниченную) последовательность $\{x_n\} \subset D(\hat{T})$, такую, что $\|\hat{T}x_n\| \to \infty$ при $n \to \infty$.

Для замкнутых операторов в банаховых пространствах иногда полезно выделить подмножество спектра, называемое существенным спектром. Это понятие весьма плодотворно используется в теории возмущений линейных операторов.

Введем необходимые определения.

Определение 13. Размерность собственного подпространства оператора $\hat{A}$, соответствующего нулевому собственному значению, называется степенью вырождения оператора $\hat{A}$ и обозначается через $nul\,\hat{A}$. Иными словами, $nul\,\hat{A}$ – это кратность нуля как собственного значения оператора $\hat{A}$. Коразмерность области значений $R(\hat{A})$ оператора $\hat{A}$ в пространстве X (размерность фактор-пространства $X/R(\hat{T})$) называется дефектом оператора $\hat{A}$ и обозначается через $def\,\hat{A}$.

Определение 14. Оператор $\hat{A}$ называется фредгольмовым, если $R(\hat{A})$ замкнуто и $nul\,\hat{A} < \infty$, $def\,\hat{A} < \infty$. Оператор $\hat{A}$ называется полуфредгольмовым, если $R(\hat{A})$ замкнуто и либо $nul\,\hat{A} < \infty$, либо $def\,\hat{A} < \infty$.

Рассмотрим теперь функции

$$\nu(\xi) = nul(\xi - \hat{A}), \mu(\xi) = def(\xi - \hat{A})$$

и классифицируем точки комплексной плоскости в соответствии со значениями этих функций.

Определение 15. Пусть $\Delta(\hat{A})$ множество всех комплексных чисел ξ, таких, что оператор $(\xi-\hat{A})$ полуфредгольмов. Существенным спектром $\sigma_e(\hat{A})$ оператора $\hat{A}$ называется множество, дополняющее $\Delta(\hat{A})$ до всей комплексной плоскости. Множество $\Delta(\hat{A})$ иногда называют полуфредгольмовой областью оператора $\hat{A}$. Аналогично определяется множество фредгольмовости $\Delta_F(\hat{A})$. Укажем без доказательства на некоторые свойства множеств $\sigma_e(\hat{A})$ и $\Delta(\hat{A})$ и на связь этих множеств с ранее определенными частями спектра и резольвентным множеством. Отметим, что $\sigma_e(\hat{A})$ замкнуто и $\Delta(\hat{A})$ открыто. Отсюда следует, что $\Delta(\hat{A})$ состоит из не более чем счетного множества компонент (связных открытых множеств), границы которых принадлежат $\sigma_e(\hat{A})$. Далее, непосредственно из определения существенного спектра вытекает, что $\xi\in\sigma_e(\hat{A})$, если либо множество значений $R(\xi-\hat{A})$ оператора $(\xi-\hat{A})$ не замкнуто, либо $R(\xi-\hat{A})$ замкнуто, но $\nu(\xi)=\mu(\xi)=\infty$. Это замечание позволяет убедиться в том, что и изолированные собственные значения конечной кратности принадлежат множеству $\Delta(\hat{A})$.

В заключение напомним связь между спектрами замкнутого оператора $\hat{A}$ и ему сопряженного оператора $\hat{A}^+$. Итак, справедлива следующая теорема.

Теорема 14. Пусть $\hat{A}$ – линейный оператор, действующий в банаховом пространстве X, с плотной областью определения. Тогда

$$P\sigma(\hat{A})\subseteq P\sigma(\hat{A}^+)\cup R\sigma(\hat{A}^+),\quad R\sigma(\hat{A}^+)\subseteq P\sigma(\hat{A}^+),$$

$$C\sigma(\hat{A})\subseteq R\sigma(\hat{A}^+)\cup C\sigma(\hat{A}^+).$$

§ 12. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА $(-\hat{L})$

Задача настоящего параграфа состоит в нахождении множества $\sigma(-\hat{L})$ и классификации точек спектра в соответствии с определениями, введенными в § 11. Прежде всего необходимо пояснить, чем вызван интерес к спектру оператора $(-\hat{L})$. Напомним, что основной задачей по-прежнему является исследование свойств решения задачи Коши, порожденной неограниченным замкнутым оператором $\hat{\Lambda}=-\hat{L}+\hat{K}$. Для этого необходима информация о спектре $\sigma(\hat{\Lambda})$ оператора $\hat{\Lambda}$. Непосредственный спектральный анализ оператора $\hat{\Lambda}$ так или иначе связан с применением теоремы 12, т.е. с построением ограниченной последовательности $\{u_n\} \subset D(\hat{\Lambda})$, удовлетворяющей условию $\lim\limits_{n\to\infty} (\lambda - \hat{\Lambda}) u_n = 0$.

Такой путь сопряжен с большими техническими трудностями и весьма громоздок, хотя и был удачно применен к спектральному анализу $\hat{\Lambda}$ [1]. Более естественным кажется спектральный анализ оператора $\hat{\Lambda}$ на основе теории возмущений. Суть рассуждений стандартна: изучаемый оператор рассматривается как возмущение некоторого простого с точки зрения спектрального анализа оператора и исследуется изменение спектра при возмущении. В нашем случае в качестве "невозмущенного" оператора удобно принять оператор $(-\hat{L})$, а в качестве "возмущающего" - ограниченный оператор соударений $\hat{K}$. Для оператора $(\lambda+\hat{L}) = \hat{L}(\lambda)$ относительно просто можно построить обратный оператор $\hat{L}^{-1}(\lambda) = \hat{\ell}(\lambda)$ (чего нельзя сказать относительно оператора $(\lambda - \hat{\Lambda})$) и исследовать его свойства в зависимости от значений комплексного параметра λ.

Итак, рассмотрим оператор $(-\hat{L})$ в виде (см. (34))

$$-\hat{L} f(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = -\sqrt{E}\, \frac{d f(\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega})}{ds} - \sqrt{E} \sum\nolimits_t (\vec{r}_0 + s\vec{\Omega}, E) f$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + s\vec{\Omega} \in V, \quad f \in R^p_D = D(-\hat{L}), \quad 1 \le p \le \infty.$$

Пусть $\hat{B} = -\hat{L}$ и $\hat{B}_\lambda = (\lambda - \hat{B})$. В § 8 была получена следующая оценка для оператора $\hat{\ell}(\lambda) = (\lambda - \hat{B})^{-1}$ при $\lambda > -\alpha$:

$$\| \hat{\ell}(\lambda) \|_p \le \frac{1}{\alpha + \lambda}, \quad 1 \le p \le \infty.$$

Покажем, что для комплексных λ с $Re\,\lambda > -\alpha$

$$\| \hat{\ell}(\lambda) \|_p \le \frac{1}{\alpha + Re\,\lambda}, \quad 1 \le p \le \infty. \tag{55}$$

В самом деле, для произвольного ξ с $Re\,\xi > -\alpha$ существует такое действительное число λ_0, что

$$|\lambda_0 - \xi| < \alpha + \lambda. \tag{56}$$

Из неравенства (56) вытекает $\lambda_0 > -\alpha$ и, следовательно, $\hat{\ell}(\lambda_0)$ существует с оценкой нормы

$$\|\hat{\ell}(\lambda_0)\|_p \le \frac{1}{\lambda_0+\alpha}. \qquad (57)$$

В этих условиях абсолютно сходится ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\xi-\lambda_0)^n \hat{\ell}(\lambda_0)^{n+1},$$

который представляет собой ряд Неймана для резольвенты $\hat{\ell}(\xi)$, $Re\,\xi > -\alpha$. Действительно, сходимость ряда гарантируется неравенством

$$\|\hat{\ell}(\lambda_0)\|_p \le \frac{1}{\lambda_0+\alpha} < \frac{1}{|\alpha_0-\xi|},$$

являющимся следствием (56) и (57). Таким образом, $\hat{\ell}(\xi)$ существует для всех комплексных ξ с $Re\,\xi > -\alpha$. Далее

$$\|\hat{\ell}(\xi)\|_p = \left\|\sum_{n=0}^{\infty} (\xi-\lambda_0)^n \hat{\ell}(\lambda_0)^{n+1}\right\|_p \le \sum_{n=0}^{\infty} |\xi-\lambda_0|^n \frac{1}{(\lambda_0+\alpha)^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_0+\alpha}\,\frac{1}{1-\dfrac{|\xi-\lambda_0|}{\alpha+\lambda_0}} \longrightarrow \frac{1}{Re\,\xi+\alpha} \qquad \text{при } \lambda_0 \to 0,$$

что доказывает справедливость неравенства (55). Результат сформулируем в виде следующего предложения.

Лемма 7. Полуплоскость $\Pi^+ = \{\lambda : Re\,\lambda > -\alpha\}$ принадлежит резольвентному множеству оператора $\hat{B} = -\hat{L}$.

Рассмотрим теперь уравнение

$$(\lambda-\hat{B})f = F(\vec{r}_0+s\vec{\Omega},E,\vec{\Omega}), \quad f \in D(\hat{L}) = R_D^p.$$

С помощью формальных выкладок нетрудно получить

$$f(\vec{r}_0+s\vec{\Omega},E,\vec{\Omega}) = \frac{1}{\sqrt{E}} \int_{s_1(\vec{r},\vec{\Omega})}^{s} ds' F(\vec{r}_0+s'\vec{\Omega},E,\vec{\Omega}) \times$$

$$\times \exp\left\{-\int_{s'}^{s} ds''\left[\sum\nolimits_t (\vec{r}_0+s''\vec{\Omega},E) + \frac{\lambda}{\sqrt{E}}\right]\right\} \equiv \hat{\ell}(\lambda). \qquad (58)$$

Согласно лемме 7 интеграл в (58) представляет собой, очевидно, резольвенту оператора $\hat{B}$ при $Re\lambda > -\alpha$. Интеграл в (58) имеет смысл, если $Re\lambda < -\alpha$ в силу суммируемости подынтегральной функции по S почти при всех значениях $(\vec{r_0}, E, \vec{\Omega})$. Для дальнейшего необходимо в дополнение к основным ограничениям на характеристики среды, перечисленным в § 2, ввести еще одно, которое естественным образом выполняется, например, для газовой модели вещества. Известно, что полное микроскопическое сечение $\sigma_{t,\ell}(E)$ ℓ-го изотопа представимо в виде:

$$\sigma_{t,\ell}(E) = (\sigma_\ell/\sqrt{E}) + \sigma'_{t,\ell}(E),$$

где $\sigma'_{t,\ell}(E)$ – непрерывная в замкнутом промежутке $[0, E_0]$ функция переменной E ; $\sigma_\ell > 0$, и, кроме того, выполняется соотношение

$$\lim_{E \to 0} \sqrt{E}\, \sigma_{t,\ell}(E) = \sigma_\ell = \inf \sqrt{E}\, \sigma_{t,\ell}(E).$$

Тогда

$$\Sigma_t(\vec{r}, E) = \sum_\ell N_\ell(\vec{r})\sigma_{t,\ell}(E) = a(\vec{r})/\sqrt{E} + \Sigma'_t(\vec{r}, E),$$

где $a(\vec{r}) = \sum_\ell N_\ell(\vec{r})\sigma_\ell = \lim_{E \to 0} \sqrt{E}\ \Sigma_t(\vec{r}, E),$

$$\Sigma'_t(\vec{r}, E) = \sum_\ell N_\ell(\vec{r})\sigma'_{t,\ell}(E).$$

Теперь мы можем записать дополнительное ограничение на характеристики среды в виде

$$0 < \alpha = \operatorname*{vrai\,min}_{\vec{r} \in V} a(\vec{r}) = \inf_{\vec{r} \in V} \lim_{E \to 0} \sqrt{E} \sum_t (\vec{r}, E) \leq$$

$$\leq \sqrt{E} \sum_t (\vec{r}, E) \leq \gamma. \qquad (59)$$

Отметим, что в силу условий, налагаемых на ядерные плотности изотопов $N_\ell(\vec{r})$ (см. § 2), функция $a(\vec{r})$ непрерывна или кусочно непрерывна в области V .

Рассмотрим функции

$$F_n(\vec{r},E,\vec{\Omega})=\begin{cases}1, E\in[E_n,E_0],\ \vec{r}\in V, \vec{\Omega}\in V_{\vec{\Omega}};\\ 0, E\notin[E_n,E_0],\ \vec{r}\in V, \vec{\Omega}\in V_{\vec{\Omega}},\end{cases}$$

где $E_n\to 0$ при $n\to\infty$. Очевидно, что $F_n\in L_D^p$ и поэтому имеет смысл интеграл в (58). Кроме того, $\hat{\ell}F_n=f_n\in\mathcal{D}(\hat{L})=R_D^p$ – в этом можно убедиться с помощью неравенства Гёльдера также, как и при доказательстве ограниченности оператора $\hat{\ell}$ (см. § 6). Оценим норму функции f_n в L_D^p :

$$\|f_n\|_p^p=\int_0^{E_0}dE\int_{4\pi}d\vec{\Omega}\int_{f(\vec{\Omega})}d\vec{r_0}\int_{s_1(\vec{r_0},\vec{\Omega})}^{s_2(\vec{r_0},\vec{\Omega})}ds\left|f_n(\vec{r_0}+s\vec{\Omega},E,\vec{\Omega})\right|^p=$$

$$=\int_{E_n}^{E_0}dE\int_{4\pi}d\vec{\Omega}\int_{f(\vec{\Omega})}d\vec{r_0}\int_{s_1(\vec{r_0},\vec{\Omega})}^{s_2(\vec{r_0},\vec{\Omega})}ds\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\int_{s_1(\vec{r_0},\vec{\Omega})}^{s}ds'\times\right.$$

$$\left.\times\exp\left\{-\int_{s'}^{s}ds''\left(\frac{\Sigma_t(\vec{r_0}+s''\vec{\Omega},E)\sqrt{E}}{\sqrt{E}}+\frac{Re\,\lambda}{\sqrt{E}}\right)\right\}\right)^p. \qquad (60)$$

При $Re\lambda<-\alpha$ в силу условия (59) для достаточно больших значений индекса n существует множество $D_0\subset D$, $\mu(D_0)>0$, такое, что $\Sigma_t(\vec{r_0}+s\vec{\Omega},E)\sqrt{E}+Re\lambda\le\alpha_0<0.$

Пусть $D_0=\Delta V\times[E_n,E_1]\times V_{\vec{\Omega}}$, где объем ΔV без ограничения общности можно считать невогнутым. Обозначая точки пересечения луча $\vec{\Omega}$ с границей объема ΔV через $s_1'(\vec{r_0},\vec{\Omega})$, $s_2'(\vec{r_0},\vec{\Omega})$ и проекцию ΔV на плоскость $\alpha(\vec{\Omega})$ через $\Delta f(\vec{\Omega})$(см. рис. 2), из (60) имеем

$$\|f_n\|_p^p \geqslant \int\limits_{E_n}^{E_1} dE \int\limits_{4\pi} d\vec{\Omega} \int\limits_{\Delta f(\vec{\Omega})} d\vec{r_0} \int\limits_{s_1'(\vec{r_0},\vec{\Omega})}^{s_2'(\vec{r_0},\vec{\Omega})} ds \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \int\limits_{s_1'(\vec{r_0},\vec{\Omega})}^{s} ds' \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{ \int\limits_{s'}^{s} \frac{|\alpha_0|}{\sqrt{E}} ds'' \right\} \right)^p \geqslant C_0 \int\limits_{E_n}^{E_1} \left(\frac{1}{\sqrt{E}} \; \frac{|\alpha_0|}{\sqrt{E}} \right)^p dE =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} C_0 |\alpha_0| \ln \dfrac{E_1}{E_n}, \; p=1 \\ C_0 |\alpha_0|^p \left(\dfrac{E_n^{-p+1}}{p-1} - \dfrac{E_0^{-p+1}}{p-1} \right), p>1 \end{array} \right\} \to \infty \text{ при } n \to \infty, \qquad (61)$$

где $0 < C_0 = \int\limits_{4\pi} d\vec{\Omega} \int\limits_{\Delta f(\vec{\Omega})} d\vec{r_0} \int\limits_{s_1'(\vec{r_0},\vec{\Omega})}^{s_2'(\vec{r_0},\vec{\Omega})} ds \int\limits_{s_1'(\vec{r_0},\vec{\Omega})}^{s} ds'(s-s')^p$.

Из (61) следует, что оператор $\hat{\ell}(\lambda)$ является неограниченным в полуплоскости $\mathcal{T}^-$ в пространствах L_D^p при $1 \leq p < \infty$. Для L_D^∞ соотношение $\|f_n\|_\infty \to \infty$, $n \to \infty$ доказывается совсем просто и мы на этом вопросе не останавливаемся. Из предыдущих рассуждений, в частности, следует, что оператор $\hat{\ell}(\lambda)$ $(Re\lambda \leq -\alpha)$ определен на множестве функций из L_D^p $(1 \leq p \leq \infty)$, каждая из которых равна нулю в некоторой окрестности точки $E=0$. Это множество, очевидно, плотно в пространствах L_D^p $(1 \leq p \leq \infty)$, что вместе со свойством неограниченности $\hat{\ell}(\lambda)(\lambda \in \mathcal{T}^-)$ позволяет отнести полуплоскость $\mathcal{T}^-$ к непрерывному спектру $C\sigma(-\hat{L})$ оператора $(-\hat{L})$. Осталось заметить, что спектр линейного оператора – замкнутое множество и оператор $\hat{\ell}(\lambda)$ плотно определен на замыкании $\overline{\mathcal{T}^-}$ полуплоскости $\mathcal{T}^-$, т.е. $C\sigma(-\hat{L}) = \overline{\mathcal{T}^-}$. Изложенное выше относительно спектра оператора $(-\hat{L})$ запишем в виде следующей леммы.

Лемма 8. Полуплоскость $\overline{\mathcal{T}^-} = \{\lambda : Re\lambda \leq -\alpha\}$ представляет собой непрерывный спектр $C\sigma(-\hat{L})$ оператора $(-\hat{L})$.

Замечание 9. Причина того, что оператор $(\lambda+\hat{L})^{-1}$ не является ограниченным в полуплоскости Γ^-, ясна: наличие нейтронов с энергией $E=0$. Если энергию ограничить от нуля, т.е. предположить, что переменная E изменяется в пределах $0<E_1\leq E\leq E_0<\infty$, то оператор $\hat{\ell}(\lambda)$ ограничен в L^p_D $(1\leq p\leq\infty)$ при всех комплексных значениях λ (спектр $\sigma(-\hat{L})$ оператора $(-\hat{L})$ пуст). Отметим, что иногда удобно включить в рассмотрение точку комплексной плоскости $\lambda=\infty$; в этом случае говорят о <u>расширенном</u> спектре оператора. Расширенный спектр $\tilde{\sigma}(-\hat{L})$ оператора $(-\hat{L})$ при условии ограниченности от нуля энергетической переменной не пуст: $\infty\in\tilde{\sigma}(-\hat{L})$. Тогда из теоремы об отображении спектра следует, что спектр оператора $\hat{\ell}$ состоит из единственной точки $\lambda=0$, т.е. оператор $\hat{\ell}$ квазинильпотентен.

Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 9. Если $0<E_1\leq E\leq E_0<\infty$, то спектр $\sigma(\hat{B})$ пуст, расширенный спектр $\tilde{\sigma}(\hat{B})$ состоит из точки $\lambda=\infty$. Спектр $\sigma(\hat{\ell})$ (и расширенный спектр $\tilde{\sigma}(\hat{\ell})$) состоит из единственной точки $\xi=0$.

На этом спектральный анализ оператора $\hat{L}$ полностью завершен.

§ 13. СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ $\hat{\ell}\hat{K}$ И $\hat{K}\hat{\ell}$

Спектральный анализ оператора $\hat{\Lambda}=-\hat{L}+\hat{K}$ является значительно более сложной задачей, чем анализ спектра оператора переноса $\hat{B}=-\hat{L}$. Структура оператора $\hat{\Lambda}$ и информация о спектре оператора переноса позволяют весьма плодотворно применить теорию возмущений линейных операторов к спектральному анализу оператора $\hat{\Lambda}$. С целью применения теории возмущений удобно оператор $\hat{\Lambda}(\xi)=(\xi-\hat{\Lambda})$, свойства обратимости которого и определяют $\sigma(\hat{\Lambda})$, представить в виде

$$(\xi-\hat{\Lambda})=(\xi+\hat{L}-\hat{K})=(1-\hat{K}\hat{\ell}(\xi))\hat{L}(\xi), \qquad (62)$$

где $\hat{L}(\xi)=(\xi+\hat{L})$, $\hat{\ell}(\xi)=\hat{L}^{-1}(\xi)$. Формула (62) рассматривается в полуплоскости $Re\,\xi>-\alpha$, где она имеет смысл. В связи с представлением (62) оператора $(\xi-\hat{\Lambda})$ в дальнейшем будут необходимы некоторые свойства оператора $\hat{K}\hat{\ell}$, которые и составляют предмет настоящего параграфа. Основной в этом направлении является следующая лемма.

Лемма 10. Операторы $\hat{K}\hat{\ell}\hat{K}$ и $\hat{K}^+\hat{\ell}^+\hat{K}^+$ компактны в пространствах L^p_D $(1\leq p\leq\infty)$. Операторы $\hat{\ell}^+$ и $\hat{K}^+$ определены правыми частями равенств (47) и (48) соответственно.

Доказательство этой леммы весьма громоздко и поэтому ниже проводится лишь его схема [1].
Поскольку

$$\hat{K}=\sum_{b,\ell} N_\ell(\vec{r})\,\hat{k}_{b,\ell},$$

где

$$\hat{k}_{b,\ell}F=\iint\limits_{Q} dE'd\vec{\Omega}'F(\vec{r},E',\vec{\Omega}')\,k_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega}),$$

$$k_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega})=\sqrt{E}\,\nu_{b,\ell}(E')\,\sigma_{b,\ell}(E')\,W_{b,\ell}(E',E,\vec{\Omega}',\vec{\Omega}),$$

то достаточно доказать компактность оператора $\hat{k}_1\hat{\ell}\hat{k}_2$, где $\hat{k}_1$ и $\hat{k}_2$ – любой из операторов $\hat{k}_{b,\ell}$ (умножение на функции $N_\ell(\vec{r})$ является ограниченным оператором, так как эти функции ограничены по существенному максимуму).

С помощью непосредственных выкладок можно убедиться, что $\hat{k}_1\hat{\ell}\hat{k}_2$ представляет собой интегральный оператор. Последнее и объясняет интерес, проявляемый к $\hat{k}_1\hat{\ell}\hat{k}_2$, так как для интегральных операторов существуют признаки компактности, выраженные в терминах свойств ядер интегральных операторов. В частности, если известна степень, с которой суммируемо ядро, то, применяя так называемые интерполяционные теоремы, можно указать тот класс лебеговых пространств, где интегральный оператор компактен [2].

Оценки показывают, что ядро $\hat{k}_1\hat{\ell}\hat{k}_2$ суммируемо со степенью $\sigma<3/2$; это эквивалентно компактности оператора $\hat{k}_1\hat{\ell}\hat{k}_2$, а следовательно, и $\hat{K}\hat{\ell}\hat{K}$ в пространствах L^p_D при $1<p<\infty$. Те же рассуждения приводят к аналогичному заключению для оператора $\hat{K}^+\hat{\ell}^+\hat{K}^+$.

Особую трудность для анализа представляют случаи L^1_D и L^∞_D. В этих пространствах указанные выше критерии компактности для $\hat{k}_1\hat{\ell}\hat{k}_2$ не срабатывают и свойство компактности приходится устанавливать, опираясь непосредственно на определение и критерии компактности множеств в L_D^1 и L_D^∞. Этот вопрос рассматриваться не будет.

Из леммы 10 немедленно получаем следствие.

Следствие 4. Операторы $(\hat{\ell}\hat{K})^2$, $(\hat{K}\hat{\ell})^2$, $(\hat{K}^+\hat{\ell}^+)^2$, $(\hat{\ell}^+\hat{K}^+)^2$ компактны в пространствах L_D^p, $1 \le p \le \infty$.

В самом деле, операторы, указанные в следствии, представляют собой произведение компактных операторов $\hat{K}\hat{\ell}\hat{K}$, $\hat{K}^+\hat{\ell}^+\hat{K}^+$ и ограниченных операторов $\hat{\ell}, \hat{\ell}^+, \hat{K}, \hat{K}^+$ в L_D^p при $1 \le p \le \infty$.

Отметим еще одно свойство операторов $\hat{K}\hat{\ell}$ и $\hat{\ell}\hat{K}$, представляющее самостоятельный интерес.

Лемма 11. Оператор $\hat{\ell}\hat{K}$ является компактным в пространствах L_D^p при $1 < p < \infty$.

Доказательство основывается на том факте, что L_D^2 становится гильбертовым пространством, если ввести скалярное произведение по формуле

$$(f,g) = \int_V f(\vec{r},E,\vec{\Omega})\overline{g(\vec{r},E,\vec{\Omega})}\,d\vec{r}\,dE\,d\vec{\Omega},$$

где черта над функцией $g(\vec{r},E,\vec{\Omega})$ означает операцию комплексного сопряжения. Тогда, рассматривая L_D^2 как векторное пространство над полем действительных чисел, нетрудно показать:

$$(\hat{L}f,f) \geqslant \alpha \|f\|_2^2, \; f \in R_D^2 = D(\hat{L}),$$

$$\alpha = \inf_{\vec{r}\in V} \lim_{E\to 0} \sqrt{E}\, \Sigma_t(\vec{r},E). \tag{63}$$

Рассмотрим оператор $\hat{K}^+\hat{\ell}\hat{K}$, который компактен вместе с оператором $\hat{K}\hat{\ell}\hat{K}$, поскольку замена $\hat{K}$ на $\hat{K}^+$ не изменяет хода доказательства леммы 10. Пусть $\{F_{n'}\}$ – ограниченная последовательность в L_D^2. Тогда в силу компактности $\hat{K}^+\hat{\ell}\hat{K}$ из $\{F_{n'}\}$ можно выделить подпоследовательность $\{F_n\}$, такую, что

$$\|\hat{K}^+\hat{\ell}\hat{K}(F_n - F_m)\|_2 \to 0, \; m,n \to \infty. \tag{64}$$

В гильбертовом пространстве L_D^2 из (64) следует:

$$(\hat{K}^{+}\hat{\ell}\hat{K}(F_n-F_m),(F_n-F_m))=(\hat{\ell}\hat{K}(F_n-F_m),\hat{K}(F_n-F_m))\to 0,\ m,n\to\infty. \quad (65)$$

Полагая в (65) $f=\hat{\ell}\hat{K}(F_n-F_m)\in R_D^2$ (откуда $\hat{L}f=\hat{K}(F_n-F_m)$), имеем с учетом (63)

$$(\hat{\ell}\hat{K}(F_n-F_m),\hat{K}(F_n-F_m))=(f,\hat{L}f)\geq\alpha\|f\|_2^2=$$

$$=\alpha\|\hat{\ell}\hat{K}(F_n-F_m)\|_2^2\to 0,\ m,n\to\infty,$$

т.е. последовательность $\{\hat{\ell}\hat{K}F_n\}$ есть последовательность Коши, что означает компактность $\hat{\ell}\hat{K}$ в L_D^2. Из компактности на действительном пространстве L_D^2 следует компактность $\hat{\ell}\hat{K}$ и на комплексном пространстве.

Следствие 5. Оператор $\hat{K}\hat{\ell}$ компактен в L_D^2.

В самом деле, учитывая, что

$$(\hat{L}f,f)=(f,\hat{L}^{+}f)=(\hat{L}^{+}f,f)\geq\alpha\|f\|_2^2$$

в случае действительного L_D^2, и, повторяя доказательство леммы для вполне непрерывного оператора $\hat{K}\hat{\ell}^{+}\hat{K}^{+}$, получим, что оператор $\hat{\ell}^{+}\hat{K}^{+}=(\hat{K}\hat{\ell})^{+}$ компактен. Следовательно, по известному свойству компактных операторов $\hat{K}\hat{\ell}$ также компактен. Это свойство с помощью упоминавшихся выше интерполяционных теорем можно распространить на пространства L_D^p $(1<p<\infty)$. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 12. Операторы $(\hat{\ell}\hat{K})$ и $(\hat{K}\hat{\ell})$ компактны в пространствах L_D^p при $1<p<\infty$.

§ 14. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ОПЕРАТОРА $\hat{\Lambda}$

Результаты § 12 и 13 позволяют получить необходимую информацию о спектре оператора $\hat{\Lambda}$ в пространствах L_D^p $(1\leq p\leq\infty)$. Как уже отмечалось, наиболее естественный путь решения задачи спектрального анализа оператора $\hat{\Lambda}$ состоит в применении теории возмущений. Мы не будем, однако, приводить результаты теории возмущений в их общей формулировке и ограничимся лишь теми положениями, которые имеют самое непосредственное отношение к спектральному анализу оператора $\hat{\Lambda}$. Необходимые для наших целей сведения из теории возмущений базируются на следующем свойстве аналитической операторнозначной функции.

Лемма 13. Пусть G – открытая односвязная область аналитичности операторнозначной функции $\hat{U}(\xi)$, некоторая целая положительная степень $\hat{U}^n(\xi)$ которой принимает значения из множества компактных операторов.

Тогда оператор $1-\hat{U}(\xi)$ не имеет ограниченного обратного оператора нигде в G, либо этот обратный оператор существует в G, кроме, быть может, конечного или счетного числа изолированных точек $\{\lambda_j\}\subset G$*.

Приступая непосредственно к спектральному анализу $\hat{\Lambda}$, рассмотрим оператор $(\xi-\hat{\Lambda})$, который на резольвентном множестве $\rho(-\hat{L})=\mathcal{T}^+$ оператора $(-\hat{L})$ можно представить в виде

$$(\xi-\hat{\Lambda})=(1-\hat{K}\hat{\ell}(\xi))\hat{L}(\xi),\ \hat{L}(\xi)=(\xi+\hat{L}),\ \xi\in\mathcal{T}^+. \qquad (66)$$

Это представление служит основой последующих рассуждений. Прежде всего, из (66) следует лемма.

Лемма 14. Полуплоскость $Re\,\xi>\|\hat{K}\|_p-\alpha$ принадлежит резольвентному множеству $\rho(\hat{\Lambda})$ оператора $\hat{\Lambda}$.

<u>Доказательство</u>. Оператор $(\xi-\hat{\Lambda})$ заведомо ограниченно обратим для $\xi\in\mathcal{T}^+$, если таким свойством обладает оператор $(1-\hat{K}\hat{\ell}(\xi))$. В свою очередь при выполнении условия

$$\|\hat{K}\hat{\ell}(\xi)\|_p\le\|\hat{K}\|_p\|\hat{\ell}(\xi)\|_p\le\frac{\|\hat{K}\|_p}{Re\,\xi+\alpha}<1$$

(т.е. при $Re\,\xi>\|\hat{K}\|_p-\alpha$), где использована оценка (55), оператор $1-\hat{K}\hat{\ell}(\xi)$ обладает ограниченным обратным. Что и требовалось доказать. Полезное свойство собственных значений оператора $\hat{\Lambda}$ в полуплоскости $\mathcal{T}^+$, которое неоднократно будет использовано в дальнейшем, устанавливается в следующей лемме.

---

* Лемма широко применяется в спектральной теории операторов. Для случая аналитической функции со значениями в множестве компактных операторов лемма доказана в книге [3].

Лемма 15. Для того чтобы число $\xi_j \in \mathcal{T}^+$ было собственным значением оператора $\hat{\Lambda}$, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda=1$ было собственным значением оператора $\hat{K}\hat{\ell}(\xi_j)$.

<u>Доказательство.</u> Если $\xi_j \in \mathcal{T}^+$ – собственное значение $\hat{\Lambda}$, то по теореме 11 существует вектор $0 \neq u \in \mathcal{D}(\hat{\Lambda}) = \mathcal{D}(\hat{L})$, такой, что $(\xi_j - \hat{\Lambda})u = (1 - \hat{K}\hat{\ell}(\xi_j))\hat{L}(\xi_j)u = 0$. Так как область значений оператора $\hat{L}(\xi_j)$ совпадает со всем пространством $L^p_{\mathcal{D}}$ $(1 \le p \le \infty)$ и он обладает ограниченным обратным оператором, то $0 \neq \hat{L}(\xi_j) \times u = v \in L^p_{\mathcal{D}}$ и $(1 - \hat{K}\hat{\ell}(\xi_j))v = 0$. Отсюда следует, что единица есть собственное значение оператора $\hat{K}\hat{\ell}(\xi_j)$. Наоборот, допустим, что $(1 - \hat{K}\hat{\ell}(\xi_j))v = 0$, $0 \neq v \in L^p_{\mathcal{D}}$. Тогда существует элемент $0 \neq u$, такой, что $\hat{L}(\xi_j)u = v$. Поэтому $(\xi_j - \hat{\Lambda})u = (1 - \hat{K}\hat{\ell}(\xi_j))\hat{L}(\xi_j)u = 0$, т.е. ξ_j – собственное значение оператора $\hat{\Lambda}$.

Леммы 13 и 15 позволяют получить информацию о спектре оператора $\hat{\Lambda}$ в полосе $\|\hat{K}\|_p - \alpha \geq Re\,\xi > -\alpha$. Именно справедлива следующая лемма.

Лемма 16. Полоса $\|\hat{K}\|_p - \alpha \geq Re\,\xi > -\alpha$ представляет собой резольвентное множество оператора $\hat{\Lambda}$ плюс, быть может, конечное или счетное множество изолированных собственных значений конечной кратности.

<u>Доказательство.</u> Согласно следствию 4 оператор $(\hat{K}\hat{\ell})^2$ компактен в пространствах $L^p_{\mathcal{D}}$ $(1 \le p \le \infty)$. Повторяя доказательство леммы 10, можно показать, что операторнозначная функция $(\hat{K}\hat{\ell}(\xi))^2$ $(\xi \in \mathcal{T}^+)$ принимает значения в множестве компактных в $L^p_{\mathcal{D}}$ $(1 \le p \le \infty)$ операторов. Кроме того, так как $\hat{\ell}(\xi)$ представляет собой резольвенту оператора $(-\hat{L})$ в полуплоскости $\mathcal{T}^+$, то в этой полуплоскости функция $\hat{U}(\xi) = \hat{K}\hat{\ell}(\xi)$ аналитична. Таким образом, операторнозначная функция $\hat{U}(\xi) = \hat{K}\hat{\ell}(\xi)$ удовлетворяет в полуплоскости $\mathcal{T}^+$ всем условиям леммы 13 и поскольку оператор $(1 - \hat{K}\hat{\ell}(\xi))$ ограниченно обратим для $Re\,\xi > \|\hat{K}\|_p - \alpha$ (лемма 14), то он имеет ограниченный обратный в $\mathcal{T}^+$ за исключением, быть может, конечного или счетного числа изолированных точек $\{\xi_j\}$, которые находятся в полосе $\|\hat{K}\|_p - \alpha \geq Re\,\xi > -\alpha$. В любой из этих точек оператор $(\hat{K}\hat{\ell}(\xi_j))^2$ компактен и по теореме об отображении спектра; спектр $\hat{K}\hat{\ell}(\xi_j)$ состоит из не более чем счетного числа собственных значений конечной кратности с единственной возможной предельной точкой $\lambda=0$. Значит число $\lambda=1$ есть собственное значение оператора $\hat{K}\hat{\ell}(\xi_j)$ кратности $k_j < \infty$. Тогда по лемме 15 число ξ_j является собственным значением оператора $\hat{\Lambda}$ и его кратность не превышает k_j. Что и требовалось доказать.

<u>Следствие 6.</u> 1) $\mathcal{T}^+ \subset \Delta(\hat{\Lambda})$;

2) $\mathcal{T}^+ \subset \rho(\hat{\Lambda}) \cup \breve{P\sigma}(\hat{\Lambda})$.

Доказательство непосредственно следует из определений множеств $\Delta(\hat{\Lambda})$, $\breve{P\sigma}(\hat{\Lambda})$ (см. § 11).

Лемма 17. $\overline{\mathcal{T}^-} \subset \sigma(\hat{\Lambda})$.

<u>Доказательство</u> относительно элементарно, если оператор $\hat{\Lambda}$ рассматривается в пространствах L^p_D $(1<p<\infty)$. Пусть $\xi \in \rho(\hat{\Lambda})$. Тогда справедливо равенство

$$(\xi-\hat{\Lambda})+\hat{K}-\hat{L}(\xi)=(1+\hat{K}\hat{\Lambda}^{-1}(\xi))\hat{\Lambda}(\xi),\hat{\Lambda}(\xi)=(\xi-\hat{\Lambda}). \quad (67)$$

Для $\xi \in \rho(\hat{\Lambda}) \cap \rho(-\hat{L})$, т.е. в полуплоскости $\mathcal{T}^+$ за исключением части из $P\sigma(\hat{\Lambda})$, лежащей в этой полуплоскости, имеем

$$\hat{K}\hat{\Lambda}^{-1}(\xi)=\hat{K}\hat{\ell}(\xi)(1-\hat{K}\hat{\ell}(\xi))^{-1}.$$

Так как оператор $\hat{K}\hat{\ell}(\xi)$ компактен и оператор $(1-\hat{K}\hat{\ell}(\xi))^{-1}$ ограничен для $\xi \in \rho(\hat{\Lambda}) \cap \rho(-\hat{L})$, то из последнего равенства следует, что $\hat{K}\hat{\Lambda}^{-1}(\xi)$ компактен на множестве $\xi \in \rho(\hat{\Lambda}) \cap \rho(-\hat{L})$. Далее, из тождества Гильберта для резольвенты

$$\hat{\Lambda}^{-1}(\mu)=\hat{\Lambda}^{-1}(\xi)(1+(\xi-\mu)\hat{\Lambda}^{-1}(\mu)),\ \xi,\mu \in \rho(\hat{\Lambda})$$

при произвольном числе $\mu \in \rho(\hat{\Lambda})$ выполняется

$$\hat{K}\hat{\Lambda}^{-1}(\mu)=\hat{K}\hat{\Lambda}^{-1}(\xi)(1+(\xi-\mu)\hat{\Lambda}^{-1}(\mu)),\ \xi \in \rho(\hat{\Lambda}) \cap \rho(-\hat{L}).$$

Отсюда вытекает, что $\hat{K}\hat{\Lambda}^{-1}(\mu)$ компактен на всем множестве $\rho(\hat{\Lambda})$. Таким образом, для функции $\hat{K}\hat{\Lambda}^{-1}(\mu)$ выполнены все условия леммы 13 и, следовательно, на каждой связной компоненте множества $\rho(\hat{\Lambda})$ оператор $1+\hat{K}\hat{\Lambda}^{-1}(\mu)$ либо ограниченно обратим всюду за исключением не более чем счетного множества точек, либо всюду не имеет обратного оператора. Последнее в рассматриваемом случае не имеет места, поскольку, согласно равенству (67), точки, где оператор $1+\hat{K}\hat{\Lambda}^{-1}(\mu)$ не имеет обратного, являются собственными значениями оператора $(-\hat{L})$ (доказательство этого дословно повторяет доказательство леммы 15). Но точечный спектр оператора $(-\hat{L})$ пуст и поэтому оператор $1+\hat{K}\hat{\Lambda}^{-1}(\mu)$ ограниченно обратим всюду на множестве $\rho(\hat{\Lambda})$. Следовательно, на этом множестве ограниченно обратим оператор $(1+\hat{K}\hat{\Lambda}^{-1}(\xi))\hat{\Lambda}(\xi)$ и в силу равенства (67) из включения $\xi \in \rho(\hat{\Lambda})$ вытекает $\xi \in \rho(-\hat{L})$. Отсюда и на основании следствия 6 заключаем, что $\rho(\hat{\Lambda}) \subset \mathcal{T}^+$ и $\overline{\mathcal{T}^-} \subset \sigma(\hat{\Lambda})$.

Замечание 10. Только что доказанный результат есть весьма частный случай теоремы о сохранении существенного спектра замкнутого оператора при относительно компактном возмущении. Важность этой теоремы для спектрального анализа замкнутых операторов трудно переоценить, поэтому остановимся на ней подробнее. Определим вначале относительно компактное возмущение. Пусть $\hat{A}$ – замкнутый плотно определенный в банаховом пространстве X линейный оператор. Линейный оператор $\hat{T}$ называется компактным относительно $\hat{A}$ ($\hat{A}$–компактным), если $D(\hat{A}) \subset D(\hat{T})$ и для любой последовательности $\{u_n\} \subset$ $\subset D(\hat{A})$, ограниченной вместе с последовательностью $\{\hat{A}u_n\}$, последовательность $\{\hat{T}u_n\}$ компактна (т.е. содержит сходящуюся подпоследовательность). Нетрудно показать, что в том случае, когда резольвентное множество $\rho(\hat{A})$ не пусто, оператор $\hat{T}$ компактен относительно $\hat{A}$, тогда и только тогда, когда компактен оператор $\hat{T}\hat{A}^{-1}(\lambda)$ ($\hat{A}(\lambda) \equiv (\lambda - \hat{A})$) для произвольной точки $\lambda \in \rho(\hat{A})$. Если оператор $\hat{T}$ является $\hat{A}$–компактным, то справедлива следующая теорема.

Теорема 15 [4]. Операторы $\hat{A}$ и $\hat{A}+\hat{T}$ имеют одинаковый существенный спектр, т.е. $\sigma_e(\hat{A}) = \sigma_e(\hat{A}+\hat{T})$. Очевидно, что в этих условиях совпадают множества полуфредгольмовости операторов $\hat{A}$ и $\hat{A}+\hat{T}$.

В рассматриваемом случае $\hat{\Lambda} = -\hat{L}+\hat{K}$, $D(\hat{L}) \subset D(\hat{K})$, а $\hat{K}\hat{\ell} = \hat{K}\hat{L}^{-1}$ компактен в L^p_D $(1<p<\infty)$ и, следовательно, оператор $\hat{K}$ является $\hat{L}$–компактным. Таким образом, условия теоремы 15 выполнены и

$$\sigma_e(-\hat{L}) = \sigma(-\hat{L}) = \overline{\mathcal{T}^-} = \sigma_e(\hat{\Lambda}) \subset \sigma(\hat{\Lambda}).$$

Пусть теперь оператор $\hat{\Lambda}$ рассматривается в пространствах L^1_D и L^∞_D. В этом случае доказать включение $\overline{\mathcal{T}^-} \subset \sigma(\hat{\Lambda})$ методами теории возмущений, которые оказались эффективными для пространств L^p_D $(1<p<\infty)$, не удается. Однако заключение леммы 17 остается справедливым и в пространствах L^1_D, L^∞_D, хотя известное доказательство этого [1], основанное на прямом применении критерия, указанного в теореме 12, связано с преодолением значительных трудностей.

Следствие 7. В пространствах L^p_D $(1<p<\infty)$ выполняется $\overline{\mathcal{T}^-} = \sigma_e(\hat{\Lambda}) = \check{C}_\sigma(\hat{\Lambda})$, $\mathcal{T}^+ = \rho(\hat{\Lambda}) \cup \check{P}_\sigma(\hat{\Lambda})$. В пространствах L^1_D и L^∞_D имеет место $\mathcal{T}^- \subset \sigma(\hat{\Lambda})$, $\mathcal{T}^+ = \rho(\hat{\Lambda}) \cup \check{P}_1\sigma(\hat{\Lambda})$, $\check{P}_1\sigma(\hat{\Lambda}) = \{\lambda \in$ $\in \check{P}\sigma(\hat{\Lambda}), \lambda \in \mathcal{T}^+\}$.

Следствие 8. Если точечный спектр оператора $\hat{\Lambda}$ в полуплоскости $\mathcal{T}^+$ счетен, то точки накопления лежат на прямой $Re\lambda = -\alpha$.

Эти следствия достаточно очевидны и на их доказательстве мы останавливаться не будем.

Список использованной литературы

1. Шихов С.Б. Вопросы математической теории реакторов. М., Атомиздат, 1973.

2. Красносельский М.А. и др. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М., "Наука", 1966.

3. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Общая теория. М., ИЛ, 1962.

4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., "Мир", 1972.

Сергей Борисович Шихов
Юрий Иванович Ершов

НЕСТАЦИОНАРНАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА

Редактор Н.Н.Антонова
Технический редактор Г.Н.Зайкина
Корректор Н.В.Шумакова

Л-73311 Подписано в печать 5/1-1979 г.
Формат 60x84 1/16 Объем 4,5 п.л. Уч.-изд.л. 4,25
Цена 18 коп. Тираж 50 экз. Изд. № 047-1
Заказ 1680

Типография МИФИ, Каширское шоссе, д. 1