МИФИ

С. Б. Шихов,
Н. В. Щукин

ДИНАМИКА РЕАКТОРОВ

МОСКВА 1982

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

С.Б. Шихов, Н.В. Щукин

ДИНАМИКА РЕАКТОРОВ

Утверждено
редсоветом института
в качестве учебного пособия

Москва 1982

УДК 621.039

Ш и х о в С.Б., Щ у к и н Н.В. Динамика реакторов. –М.: Изд. МИФИ, 1982. – 92 с.

В учебном пособии излагается теория устойчивости ядерного реактора в режиме саморегулирования, рассматриваются вопросы управления реактором с учетом обратных связей. Даются аналитические и численные методы исследования динамики реакторов. Глава I учебного пособия посвящена исследованию математических моделей реактора, в основе которых лежит "точечное" приближение нейтронной кинетики. В главе II рассматриваются вопросы пространственной динамики реакторов с использованием распределенных математических моделей.

Учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов, специализирующихся в области ядерных энергетических установок. Кроме того, оно может быть полезным для студентов и специалистов по прикладной математике.

Рецензенты: проф. Горяченко В.Д., к.ф.-м.н. Горбунов В.П.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема безопасной эксплуатации реактора, охваченного разными формами обратной связи (температурными, плотностными, системой автоматического регулирования и т.п.), тесно связана с проблемой его устойчивости в номинальном режиме. Общая тенденция к увеличению мощности единичных энергоблоков современных и строящихся АЭС требует сооружения больших реакторов, для описания динамического поведения которых наибольшей степенью надежности обладают распределенные математические модели. Однако для решения многих практически важных задач пригодна так называемая одноточечная модель динамики реактора, позволяющая рассматривать изменение во времени интегральной мощности реактора с управлением по реактивности, действующей по закону обратной связи. Здесь в принципе возможно использование классической теории регулирования систем с сосредоточенными параметрами. В этих условиях может быть успешно использована теория А.М. Ляпунова, которая весьма удобна при наличии запаздывающих температурных и мощностных коэффициентов реактивности разного знака и позволяет получить удобные критерии устойчивости как в линейном приближении, так и в условиях нелинейности, возникающих в обратных связях по реактивности.

Изложению вопросов устойчивости в точечном приближении посвящена первая глава учебного пособия.

Сведения из теории устойчивости распределенных математических моделей реактора даются во второй части учебного пособия. Здесь используется одногрупповое диффузионное приближение, пригодное для анализа устойчивости больших тепловых реакторов. Заметим, что основным аппаратом, пригодным для описания нейтронного поля гетерогенного теплового реактора в таком приближении, является система гомогенизированных макроскопических сечений, т.е. сечений, усредненных подходящим способом по элементарной ячейке. Обратная связь здесь осуществляется через эти гомогенизированные сечения, являющиеся коэффициентами нестационарного уравнения переноса нейтронов. На этом примере было удобно рассмотреть совокупный эффект обратных связей с целью продемонстрировать основные приемы математической теории устойчивости систем с распределенными параметрами. В частности, общие принципы теории применены для анализа устойчивости реактора с кипящим теплоносителем. На конкретных примерах демонстрируются возможности управления реактором с целью поддержания заданного распределения нейтронного поля в реакторе. В конце главы дается обобщенная формулировка метода расчета динамических характеристик реактора как распределенной системы.

Это учебное пособие отнюдь не исчерпывает современные результаты теории устойчивости ядерных реакторов и является лишь конспективным изложением курса по динамике реакторов, читаемого в МИФИ. Не рассматриваются также вопросы практической реализации управления нейтронным полем, для ознакомления с которыми следует обратиться к специальным пособиям (см. [18], [19]).

Нужные сведения из теории линейных и нелинейных операторов предполагаются известными. При необходимости их можно почерпнуть в книгах [2], [14].

Глава I

УСТОЙЧИВОСТЬ РЕАКТОРА В ТОЧЕЧНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

§ 1. Точечное приближение

Если принять, что в нестационарном уравнении переноса нейтронов с размножением в активной зоне реактора фазовые переменные нейтронного потока и переменная t времени разделяются, то легко вывести хорошо известную систему уравнений точечного приближения (см. [6] или [14]):

$$\left.\begin{aligned} &\ell_0 \dot{W}(t)=(\rho(t)-\beta)W(t)+\sum_{i=1}^{p_0}\frac{c_i(t)}{\tau_i};\\ &\dot{c}_i(t)=-\frac{c_i(t)}{\tau_i}+\beta_i W(t),\ i=1,2,\dots,p_0;\\ &\sum_{i=1}^{p_0}\beta_i=\beta_0. \end{aligned}\right\} \qquad (1.1)$$

Смысл величин, входящих в эти уравнения, совершенно такой, как если бы мы их записали в форме одногруппового диффузионного уравнения для реактора без отражателя в предположении, что переменные времени и декартовых координат у функции распределения нейтронов разделяются, а пространственная часть берется в виде нулевой гармоники волнового уравнения. Тогда конфигурация нейтронного поля остается постоянной, а с течением времени меняется лишь амплитуда, которую можно идентифицировать с функцией $W(t)$, умноженной на множитель соответствующей размерности. Тогда можно говорить, что $c_i(t)$ – концентрация носителей запаздывающих нейтронов i-й группы с временем жизни τ_i; ℓ_0 – время жизни нейтронов в реакторе, β_i – доля запаздывающих нейтронов i-й группы в полном числе нейтронов деления: $\beta=\sum_{i=1}^{p_0}\beta_i$ – полная доля запаздывающих нейтронов.

Однако система (1.1) несет в себе больше информации, чем та, которую в состоянии дать односкоростное диффузионное приближение. Оно пригодно для реакторов с произвольным спектром нейтронов (быстрых, промежуточных, тепловых), многозонных и однозонных, с зоной воспроизводства или с неразмножающим отражателем. При этом учитывается, что спектр запаздывающих нейтронов заметно мягче спектра нейтронов деления. Особенно резко может отличаться время жизни нейтронов ℓ_0 у реакторов с разным спектром нейтронов ($\sim 10^{-8}$ с для быстрых реакторов и $\sim 10^{-3} \div 10^{-4}$ с для тепловых). Подробности, связанные с вычислением коэффициентов уравнений (1.1), можно прочесть в книге [14].

Отметим, что система (1.1) не может описать перекосы нейтронного поля в различных переходных режимах и его пространственные колебания, поскольку пространственное распределение нейтронов по реактору предполагается заданным и берется в номинальном режиме критического (или условно критического) реактора. Тем самым сужается область применения точечного приближения: оно не в состоянии учесть локальные перегревы ТВС, пространственные качки нейтронного поля в связи с иодно-ксеноновыми эффектами и т.п.

Управляющим параметром системы (1.1) является реактивность $\rho = 1 - \frac{1}{K_{эф}}$, которую можно или рассматривать как заданную функцию $(\rho = \rho(t))$, или учесть с помощью этой функции температурные, мощностные, плотностные эффекты реактивности, действие которых по закону обратной связи будет описано далее.

Под функцией $W(t)$ здесь будем понимать интегральную мощность реактора, соответствующую нормировке этой функции.

Поскольку система уравнений (1.1), с точки зрения теории регулирования, является системой с сосредоточенными параметрами, то естественным математическим инструментом, предназначенным для исследования устойчивости таких систем, является метод теории А.М. Ляпунова, которым мы и будем пользоваться. Необходимые сведения в связи с применением к устойчивости реакторов можно почерпнуть из книг [3] и [14].

Рассматривая какую-либо математическую модель реактора, охваченного различными формами обратной связи, мы стремимся ответить на вопрос, является ли устойчивым его критическое состояние. Если разорвать систему обратных связей, то все коэффициенты уравнений, описывающих динамику реактора, будут постоянны и в силу однородности уравнения критическое состояние должно быть устойчивым.

Рассмотрим это на примере точечного приближения.

Критическим состоянием реактора в точечной кинетике при мощности реактора $W=W^*>0$ называют стационарное решение системы (1.1) при $\rho(t)\equiv 0$. Если ввести вектор $Y(t)=\begin{pmatrix} W(t) \\ c_i(t) \end{pmatrix}$, $i=1, \dots, P_0$, то вектор $Y^*=\begin{pmatrix} W^* \\ c_i^* \end{pmatrix}$ будет определяться системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned} &0=-\beta W^*+\sum_{i=1}^{P_0}\frac{c_i^*}{\tau_i}; \\ &0=-\frac{c_i^*}{\tau_i}+\beta_i W^*, \; i=1,\dots,P_0, \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

которая имеет решение $c_i^*=\beta_i\tau_i W^*$, $i=1,\dots,P_0$.

Вопрос об устойчивости стационарного решения Y^* теперь можно решить классическим способом. Вычитая (1.2) из (1.1) (при $\rho\equiv 0$), получаем систему уравнений в отклонениях:

$$\left.\begin{aligned} &\ell_0\,\delta\dot{W}=-\beta\,\delta W+\sum_{i=1}^{P_0}\frac{\delta c_i}{\tau_i}; \\ &\delta\dot{c}_i=-\frac{\delta c_i}{\tau_i}+\beta_i\,\delta W, \; i=1,\dots,P_0. \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

Функцию Ляпунова строим в виде (см. [38]):

$$V(t)=(\delta Y(t),\delta Y(t))=(\delta W(t),\delta W(t))+\sum_{i=1}^{P_0}(\alpha_i\delta c_i,\delta c_i), \tag{1.4}$$

поэтому можно сказать, что исследование ведется в (P_0+1)-мерном пространстве векторов $Y=\begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{P_0} \end{pmatrix}$ со скалярным произведением

$$(Y,Z)=(y_0,z_0)+\sum_{i=1}^{P_0}(\alpha_i y_i,z_i)=\sum_{i=0}^{P_0}(\alpha_i y_i,z_i),\; \alpha_0=1,\; \alpha_i>0,$$

где $(y_i, z_i) = y_i \bar{z}_i$ (черта – символ комплексного сопряжения); числа α_i мы имеем право выбирать по своему усмотрению, что будет использовано ниже, а норма вектора определяется по формуле:

$$\| Y \| = \sqrt{(Y, Y)}. \tag{1.5}$$

Перепишем сначала систему (1.3) в виде:

$$\left.\begin{aligned} \delta \dot{W} &= -\sum_{i=1}^{P_0} \frac{\delta \dot{c}_i}{\ell_0}; \\ \delta \dot{c}_i &= -\frac{\delta c_i}{\tau_i} + \beta_i \delta W. \end{aligned}\right\} \tag{1.6}$$

Производная функции Ляпунова, вычисленная в силу уравнений (1.6),

$$\dot{V}(t) = 2Re(\delta W, \delta \dot{W}) + \sum_{i=1}^{P_0} 2Re(\alpha_i \delta c_i, \delta \dot{c}_i) =$$

$$= -\sum_{i=1}^{P_0} 2Re\left(\delta W, \frac{\delta \dot{c}_i}{\ell_0}\right) + \sum_{i=1}^{P_0} 2Re(\alpha_i \delta c_i, \delta \dot{c}_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{P_0} 2Re\left(-\frac{\delta W}{\ell_0} + \alpha_i \delta c_i, \delta \dot{c}_i\right);$$

$$-\frac{\delta W}{\ell_0} + \alpha_i \delta c_i = -\frac{\delta W}{\ell_0} + \alpha_i(-\tau_i \delta \dot{c}_i + \tau_i \beta_i \delta W) =$$

$$= \delta W\left(-\frac{1}{\ell_0} + \alpha_i \tau_i \beta_i\right) - \tau_i \alpha_i \delta \dot{c}_i,$$

и если выбрать α_i такими, что

$$\alpha_i = \frac{1}{\ell_0 \tau_i \beta_i}, \tag{1.7}$$

то

$$\dot{V}(t) = -2\sum_{i=1}^{P_0} \frac{1}{\ell_0 \beta_i}(\delta \dot{c}_i, \delta \dot{c}_i) = -2\sum_{i=1}^{P_0} \frac{1}{\ell_0 \beta_i} |\delta \dot{c}_i|^2 \leq 0. \tag{1.8}$$

Это означает устойчивость по Ляпунову стационарного решения Y^* по норме (1.5), а следовательно, по любой эквивалентной норме.

Влияние обратной связи на динамику реактора в точечном приближении может быть изучено, например с помощью температурных коэффициентов реактивности, из которых выводится идеология мощностных коэффициентов. Поэтому для дальнейшего следует принять некоторую модель переноса тепла в реакторе.

§ 2. Математическая модель переноса тепла в технологическом канале

Представим себе цилиндрический твэл, омываемый жидким теплоносителем (рис. 1), который перемещается со скоростью v в направлении стрелки. Пусть на поверхности твэла образуется отнесенный к единице его длины тепловой поток $q(x,t)$. Будем считать, что на данный твэл приходится площадь F_T теплоносителя, а теплосодержание теплоносителя на единицу длины твэла равно $i(x,t)$. Тогда, если C_T – теплоемкость теплоносителя (на единицу массы), γ_T – его плотность, $T(x,t)$ – температура, то баланс тепла в теплоносителе определяется уравнением:

$$(C\gamma F)_T \frac{\partial T}{\partial t} = v \frac{\partial i}{\partial x} + q(x,t),$$

где $(C\gamma F)_T = C_T \gamma_T F_T$. Здесь и далее будем принимать величины C, γ, F и v не зависящими от x и T. Тогда можно записать

$$\frac{\partial i(x,t)}{\partial x} = (C\gamma F)_T \frac{\partial T(x,t)}{\partial x},$$

$$(C\gamma F)_T \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = v (C\gamma F)_T \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + q(x,t). \qquad (2.1)$$

Чтобы упростить задачу, представим частную производную по координатам в конечно-разностной форме. С этой целью проинтегрируем уравнение (2.1) по интервалу $[x_{i+1}, x_i] \in H \; (x_0 = H)$.

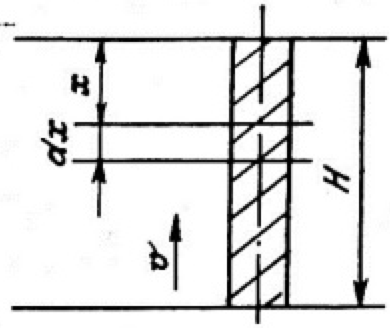

Рис. 1. Схема цилиндрического твела, омываемого жидким теплоносителем

Вводя в рассмотрение среднее значение температуры на интервале $\Delta x_i = x_i - x_{i+1}$, который назовем длиной пояса $[x_{i+1}, x_i]$,

$$\frac{1}{\Delta x_i} \int\limits_{x_{i+1}}^{x_i} dx\, T(x,t) = \bar{T}_i(t)$$

и соответственно

$$\bar{q}_i(t) = \frac{1}{\Delta x_i} \int\limits_{x_{i+1}}^{x_i} dx\, q(x,t),$$

получаем интегрированием по Δx_i:

$$(C\gamma F)_T \frac{d\bar{T}_i}{dt} = -\frac{v(C\gamma F)_T}{\Delta x_i}\left[T(x_{i+1},t) - T(x_i,t)\right] + \bar{q}_i(t). \tag{2.2}$$

Связать приближенно граничную температуру с ее средним значением можно различными способами.

Чтобы получить единую схему приведения конечно-разностных нестационарных уравнений переноса тепла вдоль канала и внутри твэла, будем рассуждать, например, так. Положим

$$a_i(t) = \frac{T(x_{i+1},t)}{\bar{T}_i(t)} = \frac{T(x_{i+1},t)}{\frac{1}{\Delta x_i}\int\limits_{x_{i+1}}^{x_i} dx\, T(x,t)}. \tag{2.3}$$

Очевидно, $\lim\limits_{\Delta x_i \to 0} a_i(t) = 1$. Это дает основание приближенно принять, что

$$a_i(t) \cong a_i \tag{2.4}$$

не зависит от температуры и времени, и вычислять коэффициент a_i по стационарному распределению температур в критическом состоянии реактора. Отсюда получается зацепляющаяся система уравнений:

$$
\left.
\begin{aligned}
&(C\gamma F)_T \frac{d\bar{T}_i}{dt} = -\frac{G C_T}{\Delta x_i}\left[a_i \bar{T}_i - a_{i-1}\bar{T}_{i-1}\right] + \bar{q}_i(t), \\
&\qquad\qquad i = 2, 3, \ldots, M; \\
&(C\gamma F)_T \frac{d\bar{T}_1}{dt} = -\frac{G C_T}{\Delta x_1}\left[a_1 \bar{T}_1 - T(H,t)\right] + \bar{q}_1(t),
\end{aligned}
\right\} \qquad (2.5)
$$

где $G = v(\gamma F)_T = v\gamma_T F_T$ – массовый расход теплоносителя. Уравнение нестационарной теплопроводности в твэле обычно строится в предположении, что аксиальным переносом тепла в нем можно пренебречь. Тогда если $Q(x,r,t)$ – распределение плотности тепловыделения в сечении цилиндрического твэла, то нестационарное уравнение теплопроводности будет иметь вид:

$$
\frac{\partial}{\partial t}\left\{\left[C(r)\gamma(r)\right]_{TB}\theta(x,r,t)\right\} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r q(x,r,t)\right] + Q(x,r,t); \qquad (2.6)
$$

$$
q(x,r,t) = -\lambda(r)\frac{\partial}{\partial r}\theta(x,r,t); \qquad (2.7)
$$

где $\theta(x,r,t)$ – температура в твэле; $q(x,r,t)$ – тепловой поток. Здесь учтена возможная зависимость объемной теплоемкости твэла $(C\gamma)_{TB}$ и его теплопроводности $\lambda(r)$ от расстояния r до его оси симметрии. Твэл может иметь многослойную структуру. Проводя интегрирование по интервалу $[r_i, r_{i+1}] \subset [0,R]$ (R – внешний радиус твэла), обозначим

$$
\frac{\int_{r_i}^{r_{i+1}} dr \cdot r\left[C(r)\gamma(r)\right]_{TB}\theta(x,r,t)}{\int_{r_i}^{r_{i+1}} dr \cdot r\,\theta(x,r,t)} = (C\gamma)_i .
$$

Если число точек разбиения выбрано достаточно большим, можно считать это отношение не зависящим от времени и постоянную $(C\gamma)_i$ рассматривать как объемную теплоемкость в i-м слое канала, усредненную по стационарному распределению температур в критическом состоянии. Тогда, если обозначить $F_i=\frac{\pi}{2}(r_{i+1}^2-r_i^2)$ – площадь поперечного сечения i-го слоя, а

$$\pi\int_{r_i}^{r_{i+1}} dr\cdot r\,Q(x,r,t)=Q_i(x,t)$$

– полное тепловыделение в слое, то получим

$$F_i\,(C\gamma)_i\,\frac{\partial\theta_i(x,t)}{\partial t}=\pi r_i q(x,r_i,t)-$$
$$-\pi r_{i+1}\,q(x,r_{i+1},t)+Q_i(x,t), \tag{2.8}$$

где $\theta_i(x,t)=\frac{1}{F_i}\,\pi\int_{r_i}^{r_{i+1}} dr\cdot r\,\theta(x,r,t)$.

Из уравнения (2.7) следует:

$$\left.\begin{aligned}
&\theta(x,\rho_1,t)-\theta(x,\rho_2,t)=\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{q(x,r,t)dr}{\lambda(r)};\\
&\frac{1}{F_{i-1}}\pi\int_{r_{i-1}}^{r_i} d\rho_1\rho_1\,\theta(x,\rho_1,t)-\theta(x,\rho_2,t)=\\
&=\frac{1}{F_{i-1}}\pi\int_{r_{i-1}}^{r_i} d\rho_1\rho_1\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{q(x,r)}{\lambda(r)}dr;\\
&\theta_{i-1}(x,t)-\theta_i(x,\rho_2,t)=\frac{\pi}{F_{i-1}}\int_{r_{i-1}}^{r_i} d\rho_1\rho_1\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{q(x,r,t)dr}{\lambda(r)}.
\end{aligned}\right\} \tag{2.9}$$

Произведя еще одно интегрирование по $\rho_2\in[r_i;r_{i+1}]$, получим

$$\theta_{i-1}(x,t)-\theta_i(x,t)=\frac{\pi^2}{F_i\,F_{i-1}}\int_{r_{i-1}}^{r_i} d\rho_1\rho_1\int_{r_i}^{r_{i+1}} d\rho_2\rho_2\,\times$$
$$\times\left\{\int_{\rho_1}^{\rho_2}\frac{q(x,r,t)}{\lambda(r)}dr\right\}.$$

Как и ранее, можно считать, что при достаточно малых интервалах разбиения отношение

$$\frac{\dfrac{\pi^2}{F_i F_{i-1}}\displaystyle\int_{r_{i-1}}^{r_i} d\rho_1 \rho_1 \int_{r_i}^{r_{i+1}} d\rho_2 \rho_2 \int_{\rho_1}^{\rho_2} dr \frac{q(x,r,t)}{\lambda(r)}}{r_i q(x,r_i,t)} = \frac{1}{b_{i-1}} \qquad (2.10)$$

не зависит от t и вычислено при стационарном распределении теплового потока. Тогда

$$b_i\left[\theta_{i-1}(x,t)-\theta_i(x,t)\right] = r_i q(x,r_i,t) \qquad (2.11)$$

и подстановка в (2.8) приводит нас к системе уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&F_1(c\gamma)_1 \frac{\partial\theta_1(x,t)}{\partial t} = b_1\left[\theta_1(x,t)-\theta_2(x,t)\right]+Q_1(x,t);\\
&\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&F_i(c\gamma)_i \frac{\partial\theta_i(x,t)}{\partial t} = b_{i-1}\left[\theta_{i-1}(x,t)-\theta_i(x,t)\right]-\\
&\qquad -b_i\left[\theta_i(x,t)-\theta_{i+1}(x,t)\right]+Q_i(x,t);\\
&\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&F_{N-1}(c\gamma)_{N-1} \frac{\partial\theta_{N-1}(x,t)}{\partial t} = b_{N-2}\left[\theta_{N-2}(x,t)-\theta_{N-1}(x,t)\right]-\\
&\qquad -\pi R q(x,R,t)+Q_{N-1}(x,t).
\end{aligned}\right\} \qquad (2.12)$$

Очевидно,

$$\pi R q(x,R,t) = q(x,t),$$

где $q(x,t)$ определено в (2.1). Если α – коэффициент теплоотдачи от стенки твэла к теплоносителю, то

$$q(x,t) = \left[\theta(x,R,t)-T(x,t)\right]\alpha = \pi R q(x,R,t). \qquad (2.13)$$

В то же время из формулы (2.9) следует:

$$\theta_{N-1}(x,t)-\theta(x,R,t) = \frac{\pi R q(x,R,t)}{\tilde{b}_{N-1}}; \qquad (2.14)$$

$$\frac{1}{\tilde{b}_{N-1}}=\frac{\dfrac{\pi}{F_{N-1}}\displaystyle\int_{r_{N-1}}^{R} d\rho_1\,\rho_1\int_{\rho_1}^{R} dr\,\frac{q(x,r,t)}{\lambda(r)}}{\pi R\,q(x,R,t)},$$

где в соответствии со сказанным выше $\tilde{b}_{N-1}$ приближенно не зависит от t и вычисляется по стационарному распределению теплового потока. Подставляя $\theta(x,R,t)$ из (2.14) в (2.13), получаем

$$\pi R q(x,R,t)=[\theta_{N-1}(x,t)-T(x,t)]\,\frac{\alpha}{1+\alpha/\tilde{b}_{N-1}}=$$

$$=[\theta_{N-1}-T(x,t)]\,b_{N-1}; \qquad b_{N-1}=\frac{\alpha}{1+\alpha/\tilde{b}_{N-1}},$$

после чего последнее уравнение системы (2.12) принимает вид:

$$F_{N-1}(c\gamma)_{N-1}\frac{\partial\theta_{N-1}(x,t)}{\partial t}=b_{N-2}\,[\theta_{N-2}(x,t)-\theta_{N-1}(x,t)]-$$
$$-b_{N-1}[\theta_{N-1}(x,t)-T(x,t)]+Q_{N-1}(x,t). \tag{2.15}$$

Коэффициенты в уравнениях (2.12), (2.15) зависят от x и следует еще провести усреднение по закону

$$\frac{1}{\Delta x_k}\int_{x_{k+1}}^{x_k} C(x)f(x,t)\,dx=\bar{C}^{(k)}\cdot f^{(k)}(t);$$

$$\bar{C}^{(k)}=\frac{1}{\Delta x_k}\int_{x_{k+1}}^{x_k} dx\,C(x)f(x,t)\Bigg/\frac{1}{\Delta x_k}\int_{x_{k+1}}^{x_k} dx\,f(x,t),$$

где при достаточно малом значении Δx_k можно пренебречь зависимостью от t и рассматривать $\bar{C}^{(k)}$ как среднее $C(x)$ при некотором стационарном значении $f(x)\cong f(x,t)$. В результате получаем следующую систему связанных уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&(c\gamma F)_T\frac{d\bar{T}_k}{dt}=-\frac{GC_T}{\Delta x_k}[a_k\bar{T}_k(t)-a_{k-1}\bar{T}_{k-1}(t)]+\\
&\qquad+\bar{b}^{(k)}_{N-1}\left[\bar{\theta}^{(k)}_{N-1}-\bar{T}_k(t)\right],\quad k=2,3,\ldots,M;\\
&(c\gamma F)_T\frac{d\bar{T}_1}{dt}=-\frac{GC_T}{\Delta x_1}\left[a_1\bar{T}_1(t)-T_{вх}\right]+\bar{b}^{(1)}_{N-1}\left[\bar{\theta}^{(1)}_{N-1}-\bar{T}_1(t)\right];
\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

$$
\left.\begin{aligned}
&F_{N-1}(\bar{c}\gamma)^{(k)}_{N-1}\frac{d\bar{\theta}^{(k)}_{N-1}(t)}{dt}=\bar{b}^{(k)}_{N-2}\left[\bar{\theta}^{(k)}_{N-2}-\bar{\theta}^{(k)}_{N-1}\right]-\\
&\qquad-\bar{b}^{(k)}_{N-1}\left[\bar{\theta}^{(k)}_{N-1}-\bar{T}_{k}\right]+\bar{Q}^{(k)}_{N}(t);\\
&\qquad\qquad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\
&F_{i}(\bar{c}\gamma)^{(k)}_{i}\frac{d\bar{\theta}^{(k)}_{i}(t)}{dt}=\bar{b}^{(k)}_{i-1}\left[\bar{\theta}^{(k)}_{i-1}-\bar{\theta}^{(k)}_{i}\right]-\\
&\qquad-\bar{b}^{(k)}_{i}\left[\bar{\theta}^{(k)}_{i}-\bar{\theta}^{(k)}_{i+1}\right]+\bar{Q}^{(k)}_{i}(t);\ i=2,3\ldots,N-1;\\
&F_{1}(\bar{c}\gamma)^{(k)}_{1}\frac{d\bar{Q}^{(k)}_{1}(t)}{dt}=\bar{b}^{(k)}_{1}\left[\bar{\theta}^{(k)}_{1}-\bar{\theta}^{(k)}_{2}\right]+\bar{Q}^{(k)}_{1}(t).
\end{aligned}\right\}\qquad(2.17)
$$

Здесь, как и всюду далее, температуру на входе в канал $T_{вх}=T(H,t)$ считаем постоянной. Если принять во внимание (2.11), то каждое из уравнений (2.16), (2.17) имеет четкий физический смысл нестационарного баланса тепла, а в совокупности эта система уравнений представляет собой конечно-разностную по координатам и непрерывную по времени модель переноса тепла в канале.

§ 3. Уравнение динамики реактора с обратной связью в точечном приближении

Каждый технологический канал в реакторе с индексом ℓ может иметь свои теплофизические характеристики $(c\gamma F)_{T,\ell}$, G_ℓ, $c_{T,\ell}$, $\bar{b}^{(k)}_{i,\ell}$, $a_{k,\ell}$. Соответственно переменные $\bar{Q}^{(k)}_{i,\ell}(t)$ должны иметь вид

$$
\bar{Q}^{(k)}_{i,\ell}(t)=Q^{(k)}_{i,\ell}\,W(t),\ \ell=1,\ldots,P, \qquad (3.1)
$$

где $Q^{(k)}_{i,\ell}$ – доля полной мощности реактора, вырабатываемой в k-м поясе и в i-м слое ℓ-го канала; $W(t)$ – полная мощность реактора в момент t, определяемая уравнениями (1.1). Будем считать, что имеется P каналов.

Прежде всего нас будет интересовать существование стационарных решений системы уравнений типа (2.16) и (2.17) при $W(t)\equiv W^*>0$, т.е. значения $\bar{T}_k(t)\equiv T_k^*$, $\bar{\theta}_i^{(k)}(t)\equiv\theta_i^{(k)*}$ при

$$\frac{d\bar{T}_k(t)}{dt}=0,\ \frac{d\bar{\theta}_i^{(k)}(t)}{dt}=0,\ W(t)\equiv W^*.$$

Введем единую систему переменных:

$$x^{(k)}=\begin{pmatrix} x_1^{(k)}\\ \cdots\\ x_N^{(k)}\end{pmatrix};\quad Q^{(k)}=\begin{pmatrix} q_1^{(k)}\\ \cdots\\ q_N^{(k)}\end{pmatrix};$$

$$x_1^{(k)}=\bar{\theta}_1^{(k)},\ldots,\ x_{N-1}^{(k)}=\bar{\theta}_{N-1}^{(k)},\ x_N^{(k)}=\bar{T}_k;$$

$$q_1^{(k)}=\bar{Q}_1^{(k)}/c_1^{(k)},\ldots,q_{N-1}^{(k)}=\bar{Q}_{N-1}^{(k)}/c_{N-1}^{(k)},\ q_N^{(k)}=0;$$

$$c_1^{(k)}=F_1(\bar{c}\gamma)_1^{(k)},\ldots,\ c_{N-1}^{(k)}=F_{N-1}(\bar{c}\gamma)_{N-1}^{(k)},\ c_N^{(k)}=(c\gamma F)_T.$$

Тогда система (2.16), (2.17) может быть записана в виде

$$\left.\begin{aligned}&\dot{x}^{(k)}=\hat{B}_k x^{(k)}+d^{(k)}\hat{P}_0 x^{(k-1)}+Q^{(k)}W(t),\\ &\qquad k=2,\ldots,M;\\ &\dot{x}^{(1)}=\hat{B}_1 x^{(1)}+d^{(1)}\hat{P}_0\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ T_{BX}\end{pmatrix}+Q^{(1)}W(t).\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

Здесь $\hat{B}_k$ – квадратная матрица порядка $N\times N$. По своей структуре она является трехдиагональной:

$$\hat{B}_k=\begin{pmatrix} -\frac{\bar{b}_1^{(k)}}{c_1^{(k)}} & \frac{\bar{b}_1^{(k)}}{c_1^{(k)}} & & 0\\ \frac{\bar{b}_1^{(k)}}{c_2^{(k)}} & -\frac{\bar{b}_1^{(k)}+\bar{b}_2^{(k)}}{c_2^{(k)}} & \frac{\bar{b}_2^{(k)}}{c_2^{(k)}} & \\ & \ddots & \ddots & \ddots\\ 0 & & \frac{\bar{b}_{N-1}^{(k)}}{c_N^{(k)}} & -\frac{\bar{b}_{N-1}^{(k)}+\bar{b}_N^{(k)}}{c_N^{(k)}}\end{pmatrix};\tag{3.3}$$

где $\bar{B}_N^{(k)} = GC_T a_k/\Delta x_k$; $\hat{P}_0$ – матрица порядка $(N \times N)$, у которой только одна компонента $(\hat{P}_0)_{NN} = 1$ отлична от нуля (можно записать $\hat{P}_0 = diag[0,0,\dots,0,1]$); $d^{(k)} = \dfrac{GC_T a_{k-1}}{\Delta x_k (C\gamma F)_T}$, $k=2,\dots,M$;
$$d^{(1)} = \frac{GC_T}{\Delta x_1 (C\gamma F)_T}.$$

Матрицы $\hat{B}_k (k=1,\dots,M)$ относятся к типу нормальных якобиевых матриц и обладают тем свойством, что все их собственные значения действительны, просты и отрицательны, так что

$$\lambda_i^{(k)} y_i^{(k)} = \hat{B}^{(k)} y_i^{(k)}, \tag{3.4}$$

$i=1,\dots,N$; $0 > \lambda_1^{(k)} > \lambda_2^{(k)} > \dots > \lambda_N^{(k)}$. Поэтому все матрицы $\hat{B}_k$ – несобственные, т.е. обратимы.

Стационарные решения системы (3.2) определяются системой уравнений

$$\left.\begin{aligned} &0 = \hat{B}_k x^{(k)*} + d^{(k)} \hat{P}_0 x^{(k-1)*} + Q^{(k)} W^*, \\ &\qquad k=2,\dots,M, \\ &0 = \hat{B}_1 x^{(1)*} + d^{(1)} \hat{P}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_{вх} \end{pmatrix} + Q^{(1)} W^*. \end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

Тогда

$$\left.\begin{aligned} &x^{(1)*} = -\hat{B}_1^{-1} \left[d^{(1)} \hat{P}_0 \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ T_{вх} \end{pmatrix} + Q^{(1)} W^* \right]; \\ &x^{(k)*} = -\hat{B}_k^{-1} \left[d^{(k)} \hat{P}_0 x^{(k-1)*} + Q^{(k)} W^* \right], \\ &\qquad k=2,\dots,M. \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

Отсюда вытекает, что стационарное решение системы (3.2) существует и единственно. Вычитая из (3.2) систему (3.5) и обозначая

$$\left.\begin{aligned} &\delta x^{(k)}(t) = x^{(k)}(t) - x^{(k)*}; \\ &\delta W(t) = W(t) - W^* \end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

2-2111

получаем систему уравнений в отклонениях:

$$\left.\begin{aligned} &\delta\dot{x}^{(k)}=\hat{B}_k\,\delta x^{(k)}+d^{(k)}\hat{P}_0\,\delta x^{(k-1)}+Q^{(k)}\delta W,\\ &\qquad\qquad k=2,\ldots,M;\\ &\delta\dot{x}^{(1)}=\hat{B}_1\,\delta x^{(1)}+Q^{(1)}\delta W. \end{aligned}\right\} \tag{3.8}$$

Введем теперь векторы порядка MN:

$$\delta x=\begin{pmatrix}\delta x^{(1)}\\ \delta x^{(2)}\\ \cdots\\ \delta x^{(M)}\end{pmatrix};\quad Q=\begin{pmatrix}Q^{(1)}\\ Q^{(2)}\\ \cdots\\ Q^{(M)}\end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Систему (3.8) можно выразить в следующей компактной форме записи:

$$\delta\dot{x}=\hat{\mathcal{B}}\,\delta x+Q\,\delta W; \tag{3.10}$$

$$\hat{\mathcal{B}}=\begin{pmatrix}\hat{B}_1 & & & & 0\\ d^{(2)}\hat{P}_0 & \hat{B}_2 & & & \\ & d^{(3)}\hat{P}_0 & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & d^{(M)}\hat{P}_0 & \hat{B}_M\end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

Матрица $\hat{\mathcal{B}}$ – квадратная, имеет двухдиагональную блочную структуру [каждый блок порядка $(N\times N)$] и поэтому ее порядок равен $(MN\times MN)$.

Обратную связь в реакторе будем описывать с помощью температурных коэффициентов реактивности $\alpha_i^{(k)}$ в i –м слое и в k –м поясе канала. По определению вклад в реактивность ℓ-го канала равен

$$\rho_\ell(t)=\sum_{k=1}^{M_\ell}\sum_{i=1}^{N_\ell}\alpha_{i,\ell}^{(k)}\cdot\delta x_{i,\ell}^{(k)}(t)=(\alpha_\ell,\delta x_\ell(t)),$$

$$\alpha_\ell=\begin{pmatrix}\alpha_\ell^{(1)}\\ \alpha_\ell^{(2)}\\ \cdots\\ \alpha_\ell^{(M_\ell)}\end{pmatrix};\quad \alpha_\ell^{(k)}=\begin{pmatrix}\alpha_{1,\ell}^{(k)}\\ \alpha_{2,\ell}^{(k)}\\ \cdots\\ \alpha_{N_\ell,\ell}^{(k)}\end{pmatrix};$$

$$\delta x_\ell = \begin{pmatrix} \delta x_\ell^{(1)} \\ \delta x_\ell^{(2)} \\ \vdots \\ \delta x_\ell^{(M_\ell)} \end{pmatrix}; \qquad \delta x_\ell^{(k)} = \begin{pmatrix} \delta x_{1,\ell}^{(k)} \\ \delta x_{2,\ell}^{(k)} \\ \vdots \\ \delta x_{N_\ell,\ell}^{(k)} \end{pmatrix}.$$

Полная система уравнений в отклонениях точечного приближения с обратной связью теперь выглядит так:

$$\left.\begin{aligned} &\ell_0 \delta \dot{W} = \rho(t)[\delta W(t) + W^*] - \beta \delta W + \sum_{i=1}^{\rho_0} \frac{\delta C_i}{\tau_i}; \\ &\delta \dot{C}_i = -\frac{\delta C_i}{\tau_i} + \beta_i \delta W, \quad i = 1, \dots, \rho_0; \end{aligned}\right\} \quad (3.12)^*$$

где $\beta = \sum_{i=1}^{\rho_0} \beta_i$;

$$\rho(t) = \sum_{\ell=1}^{P} (\alpha_\ell, \delta x_\ell(t)); \quad (3.13)$$

$$\delta \dot{x}_\ell = \hat{\mathcal{B}}^{(\ell)} \delta x_\ell + Q_\ell \delta W, \; \ell = 1, \dots, P, \quad (3.14)$$

где $\hat{\mathcal{B}}^{(\ell)}$ – матрица (3.11) для ℓ-го канала; Q_ℓ – вектор (3.9) для канала ℓ.

Укажем на следующую теорему, которая устанавливается весьма просто и описывает спектральные свойства матрицы $\hat{\mathcal{B}}$ из (3.11).

Теорема I.

1. Все собственные значения каждой матрицы $\hat{\mathcal{B}}_k \, (k=1,\dots,M)$ в (3.11) отрицательные и простые (т.е. не совпадают между собой).

2. Если матрицы $\hat{\mathcal{B}}_k \, (k=1,\dots,M)$ в (3.11) различны, то собственные значения матрицы $\hat{\mathcal{B}}$ отрицательные и простые,

---

* Следует иметь в виду, что это уравнение может быть переписано в виде: $\ell_0 \delta \dot{W} = \rho(t)[\delta W(t) + W^*] - \sum_{i=1}^{\rho_0} \delta \dot{C}_i$.

так что существует неособенная матрица $\hat{\mathcal{P}}$, такая, что

$$\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{B}}\,\hat{\mathcal{P}}=\hat{\hat{\mathcal{B}}}=diag\,[-\beta_1,-\beta_2,\dots,-\beta_{MN}],$$
$$0<\beta_1<\beta_2<\dots<\beta_{MN}.$$

3. Если все матрицы $\hat{\mathcal{B}}_k$ между собой совпадают, то все собственные значения матрицы $\hat{\mathcal{B}}$ отрицательны и имеют одинаковую кратность M. При этом число линейно независимых собственных векторов равно N:

$$-\beta_j y_j=\hat{\mathcal{B}}y_j,\quad j=1,\dots,N,\quad 0<\beta_1<\beta_2<\dots<\beta_N,$$

каждое $-\beta_j$ является собственным значением матрицы $\hat{C}=\hat{B}_k(k=1,\dots,M)$. Поэтому существует неособенная матрица $\hat{\mathcal{P}}$, такая, что матрица $\hat{\hat{\mathcal{B}}}=\hat{\mathcal{P}}^{-1}\hat{\mathcal{B}}\hat{\mathcal{P}}$ является нормальной формой Жордана:

$$\hat{\hat{\mathcal{B}}}=\begin{pmatrix}\hat{R}_1 & & & 0\\ & \hat{R}_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \hat{R}_N\end{pmatrix};\quad \hat{R}_j=\begin{pmatrix}-\beta_1 & & & 0\\ 1, & -\beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & 1, & -\beta_j\end{pmatrix}. \qquad (3.15)$$

Замечание. Не следует думать, что условие 2 теоремы I трудно выполнимо. Даже если все коэффициенты a_k, $b_i^{(k)}$ в (2.16) и (2.17) одинаковы, матрицы $\hat{\mathcal{B}}_k$ будут различны, если размеры Δx_k поясов технологического канала неодинаковы.

Предположим теперь, что п. 2 теоремы 1 выполняется для каждого канала ℓ, так что матрица $\hat{\mathcal{B}}^{(\ell)}$ имеет набор собственных значений $\{-\beta_j^{(\ell)},\ (j=1,2,\dots,M_\ell N_\ell)\}$;

$$0<\beta_1^{(\ell)}<\beta_2^{(\ell)}<\dots<\beta_{M_\ell N_\ell}^{(\ell)},\quad \ell=1,2,\dots,P.$$

Общее количество чисел $\beta_i^{(\ell)}$ равно $\sum\limits_{\ell=1}^{P}M_\ell N_\ell=T$, но

некоторые из них (с разными индексами ℓ) могут оказаться одинаковыми. Составим последовательность только различных чисел $\beta_j^{(\ell)}$:

$$0<\beta^{(1)}<\beta^{(2)}<\dots<\beta^{(G)},\quad G\le T, \qquad (3.16)$$

число которых G может оказаться меньше T.

Каждому собственному значению $\beta^{(g)}$ может принадлежать теперь несколько собственных векторов объединенной матрицы $\hat{\mathcal{B}}$:

$$\hat{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \bar{\mathcal{B}}^{(1)} & & 0 \\ & \bar{\mathcal{B}}^{(2)} \cdots & \\ 0 & & \cdots \bar{\mathcal{B}}^{(p)} \end{pmatrix}. \tag{3.17}$$

Система (3.14) имеет с учетом этого обозначения вид:

$$\left.\begin{aligned} &\delta\dot{x} = \hat{\mathcal{B}}\,\delta x + Q\,\delta W(t); \\ &\delta x = \begin{pmatrix} \delta x_1 \\ \cdots \\ \delta x_p \end{pmatrix}; \quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 \\ \cdots \\ Q_p \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

Если обозначить $\hat{E}_g = \hat{E}(-\beta^{(g)}, \hat{\mathcal{B}}) : R^T \to \mathcal{M}_1(-\beta^{(g)}, \hat{\mathcal{B}})$ оператор проектирования конечномерного пространства R^T на подпространство $\mathcal{M}_1(-\beta^{(g)}, \hat{\mathcal{B}})$ собственных векторов, принадлежащих собственному значению $-\beta^{(g)}$ матрицы $\hat{\mathcal{B}}$, то полугруппа, порождаемая матрицей $\hat{\mathcal{B}}$, представится в виде*:

$$\hat{T}(t, \hat{\mathcal{B}}) = exp(\hat{\mathcal{B}}\,t) = \sum_{g=1}^{G} exp(-\beta^{(g)} t)\,\hat{E}_g. \tag{3.19}$$

Поэтому решение (3.18) можно записать:

$$\delta x(t) = exp(\hat{\mathcal{B}}t)\,\delta x(0) + \int_0^t d\tau\, exp[(t-\tau)\hat{\mathcal{B}}]\,Q\,\delta W(\tau). \tag{3.20}$$

Тогда, учитывая обозначения (3.13) и вводя вектор

$$\alpha = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \cdots \\ \alpha_p \end{pmatrix}, \tag{3.21}$$

---

* Соответствующие определения и терминология общеизвестны и даны в [14].

а также используя представление (3.19), находим:

$$\rho(t)=(\alpha,\delta x(t))=(\alpha,\exp(\hat{B}t)\delta x(0))+$$

$$+\int_0^t d\tau(\alpha,\exp[(t-\tau)\hat{B}]Q\delta W(\tau))=\sum_{g=1}^{G}\rho_g(t); \tag{3.22}$$

$$\rho_g(t)=\exp[-\beta^{(g)}(t)](\alpha,\hat{E}_g\,\delta x(0))+$$

$$+\int_0^t d\tau\exp[-\beta^{(g)}(t-\tau)](\alpha,\hat{E}_g Q)\delta W(\tau). \tag{3.23}$$

Дифференцируя по t , получаем:

$$\dot{\rho}_g(t)=-\beta^{(g)}\rho_g(t)+C_g\delta W(t); \tag{3.24}$$

где $C_g=(\alpha,\hat{E}_g Q)$, $g=1,\ldots,G$. Системы (3.12), (3.22),(3.24) назовем каноническими уравнениями динамики реакторов в точечном приближении.

Для расчетных целей коэффициенты C_g полезно выразить через собственные векторы $x_1^{(g)},\ldots,x_{\mu_g}^{(g)}$ матрицы $\hat{B}$ и собственные векторы $y_1^{(g)},\ldots,y_{\mu_g}^{(g)}$ матрицы $\hat{B}^+$ (принадлежащие собственному значению $-\beta^{(g)}$), которые, как известно, можно всегда выбрать такими, чтобы удовлетворялось свойство биортогональности:

$$(x_j^{(g)},y_i^{(g)})=\delta_{ij}.$$

Тогда проектор $\hat{E}_g$ будет иметь вид:

$$\hat{E}_g Q=\sum_{j=1}^{\mu_g}(Q,y_j^{(g)})x_j^{(g)}$$

и из формулы (3.24) вытекает

$$C_g=(\alpha,\hat{E}_g Q)=\sum_{j=1}^{\mu_g}(Q,y_j^{(g)})(\alpha,x_j^{(g)}), \tag{3.25}$$

или в компонентах векторов

$$C_g=\sum_{j=1}^{N_g}\left\{\sum_{k=1}^{T}(Q)_k\,(y_j^{(g)})_k\right\}\left\{\sum_{i=1}^{T}(\alpha_i)(x_j^{(g)})_i\right\}=\sum_{i=1}^{T}\gamma_{gi}(\alpha)_i\,; \qquad (3.26)$$

где $\gamma_{gi}=\sum_{k=1}^{T}(Q)_k P_{ki}^{(g)}$; $P_{ki}^{(g)}=\sum_{j=1}^{N_g}(y_j^{(g)})_k\,(x_j^{(g)})_i$.

Можно принять все коэффициенты C_g отличными от нуля, так как если какой-нибудь из них $C_{g_0}=0$, то уравнение с индексом g_0 просто исключается из (3.24), поскольку соответствующая переменная $\rho_{g_0}(t)\to 0$ и не участвует в формировании обратной связи. В результате система (3.24) уменьшается ровно на столько уравнений, сколько коэффициентов C_g равно нулю.

§ 4. Устойчивость критического состояния по первому приближению

Система уравнений первого приближения образуется, если в уравнении (3.12) пренебречь произведением $\rho(t)\delta W(t)$. Тогда канонические уравнения динамики реакторов принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} &\ell_0\delta\dot W=\rho(t)W^*-\beta\delta W+\sum_{i=1}^{P_0}\frac{\delta C_i}{\tau_i}, \\ &\text{или} \\ &\ell_0\delta\dot W=\rho(t)W^*-\sum_{i=1}^{P_0}\delta\dot C_i\,; \end{aligned}\right\} \qquad (4.1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\delta\dot C_i=-\frac{\delta C_i}{\tau_i}+\beta_i\delta W; \\ &\beta=\sum_{i=1}^{P_0}\beta_i\,,\ i=1,\dots,P_0; \\ &\rho(t)=\sum_{g=1}^{G}\rho_g(t). \end{aligned}\right\} \qquad (4.2)$$

$$\dot\rho_g(t)=-\beta^{(g)}\rho_g(t)+C_g\delta W(t),\ g=1,\dots,G. \qquad (4.3)$$

К системе уравнений (4.1) - (4.3) могут быть применены обычные приемы теории регулирования. Структурную схему разомкнутой цепи можно представить в виде:

$$\delta W(t)_{вх}\to\rho(t)\to\delta W(t)_{вых}, \qquad (4.4)$$

где $\rho(t)$ определяется системой уравнений

$$\rho(t)=\sum_{g=1}^{G}\rho_g(t);\quad \dot{\rho}_g(t)=-\beta^{(g)}\rho_g(t)+c_g\,\delta W(t)_{вх}, \tag{4.5}$$

а $\delta W_{вых}(t)$ – системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&l_0\delta\dot{W}_{вых}(t)=\rho(t)W^*-\beta\delta W_{вых}(t)+\sum_{i=1}^{P_0}\frac{\delta C_i(t)}{\tau_i};\\
&\delta\dot{C}_i(t)=-\frac{\delta C_i(t)}{\tau_i}+\beta_i\delta W_{вых}(t).
\end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

Произведем над левой и правой частями уравнений (4.6) преобразование Лапласа вида

$$\tilde{f}(\lambda)=\hat{\mathcal{L}}f(t)=\int_0^\infty dt\,\exp(-\lambda t)f(t)$$

в предположении, что начальные значения всех переменных равны нулю. Тогда получим

$$l_0\lambda\,\delta\tilde{W}_{вых}(\lambda)=\tilde{\rho}(\lambda)W^*-\beta\delta\tilde{W}_{вых}(\lambda)+\sum_{i=1}^{P_0}\frac{\delta\tilde{C}_i(\lambda)}{\tau_i};$$

$$\lambda\delta\tilde{C}_i(\lambda)=-\frac{\delta\tilde{C}_i(\lambda)}{\tau_i}+\beta_i\,\delta\tilde{W}_{вых}(\lambda),$$

откуда следует

$$\left.\begin{aligned}
&\delta\tilde{W}_{вых}(\lambda)=\tilde{\Psi}(\lambda)\tilde{\rho}(\lambda);\\
&\tilde{\Psi}(\lambda)=\frac{W^*}{l_0\lambda+\sum\limits_{i=1}^{P_0}\dfrac{\beta_i\,\lambda}{\lambda+1/\tau_i}}
\end{aligned}\right\}. \tag{4.7}$$

Функция $\tilde{\Psi}(\lambda)$ называется передаточной функцией реактора и имеет смысл передаточной функции от реактивности к мощности.

Проводя такую же операцию над уравнениями (4.5), находим:

$$\left.\begin{aligned}\tilde{\rho}(\lambda) &= \tilde{\varphi}(\lambda)\delta \tilde{W}_{вх}(\lambda);\\ \tilde{\varphi}(\lambda) &= \sum_{g=1}^{G} \frac{C_g}{\lambda + \beta^{(g)}}.\end{aligned}\right\} \qquad (4.8)$$

Функцию $\tilde{\varphi}(\lambda)$ назовем теплофизической передаточной функцией. Она имеет смысл передаточной функции от мощности к реактивности и определяется только температурными коэффициентами реактивности и теплофизикой каналов.

Из условия $\delta \tilde{W}_{вых}(\lambda) = \delta \tilde{W}_{вх}(\lambda)$ находим

$$1 - \tilde{\Psi}(\lambda) = 0; \qquad (4.9)$$

где $\tilde{\Psi}(\lambda) = \tilde{\Phi}(\lambda)\tilde{\varphi}(\lambda)$. Представляя $\tilde{\Psi}(\lambda)$ в виде дроби $\tilde{\Psi}(\lambda) = \frac{\pi(\lambda)}{\varkappa(\lambda)}$, где $\pi(\lambda)$, $\varkappa(\lambda)$ – целые полиномы конечного порядка, получаем характеристическое уравнение:

$$\sigma(\lambda) = \varkappa(\lambda) - \pi(\lambda) = 0, \qquad (4.10)$$

где $\sigma(\lambda)$ – характеристический полином системы (4.1) – (4.3). Стационарное решение этой системы имеет вид

$$\delta W = \delta C_i = \rho_g = 0, \qquad (4.11)$$
$$i = 1, \ldots, \rho_0, \; g = 1, \ldots, G.$$

Если все корни характеристического полинома (4.10) отрицательны или имеют отрицательные вещественные части, то стационарное решение (4.11) асимптотически устойчиво. В этом случае мы говорим, что критическое состояние реактора при мощности W^* асимптотически устойчиво. Отсюда видно, что обнаружить устойчивость критического состояния вообще можно с помощью хорошо известных методов теории регулирования, таких, как критерии Найквиста, Михайлова и др. (см., например, [7]). Однако этот путь громоздок и не позволяет установить общие закономерности при большом числе переменных. Для анализа системы (4.1) – (4.3) используют специальные приемы.

О п р е д е л е н и е 1. Будем говорить, что математическая модель динамики реактора относится к "классу А", если коэффициенты C_g уравнений (4.3) все отрицательны:

$$C_g < 0, \quad g = 1, 2, \ldots, G. \qquad (4.12)$$

Принимая во внимание (3.26), условие (4.12) можно переписать в виде:

$$\sum_{i=1}^{T} \gamma_{g_i} \cdot (\alpha)_i < 0, \quad g=1,2,\dots,G \leq T. \tag{4.13}$$

Система неравенств (4.13) определяет в $R^{(T)}$ открытый многогранный телесный угол, который обозначим

$$\Omega \subset R^{(T)}. \tag{4.14}$$

На основании изложенного выше сформулируем теорему.

Теорема II. Для того чтобы математическая модель динамики реактора точечного приближения (3.12), (3.22), (3.24) принадлежала классу A , необходимо и достаточно, чтобы вектор α (3.21), компоненты которого являются температурными коэффициентами реактивности слоев и поясов технологических каналов, лежал в телесном угле $\Omega \ni \alpha$, $\Omega \subset R^{(T)}$.

Важное свойство систем класса А указано следующей теоремой .

Теорема III. Когда математическая модель реактора принадлежит классу A , то характеристический полином (4.10) системы (4.1) - (4.3) имеет корни, действительные части которых отрицательны.

Для доказательства, очевидно, достаточно указать такую функцию Ляпунова, чтобы тривиальное решение системы (4.1) - (4.3) было асимптотически устойчиво. Выбираем ее в виде

$$V(t) = (\delta W(t), \delta W(t)) + \sum_{i=1}^{P_0} \alpha_i (\delta C_i, \delta C_i) +$$

$$+ \sum_{g=1}^{G} \xi_g (\rho_g(t), \rho_g(t)), \tag{4.15}$$

по аналогии с (1.4), где α_i находят по (1.7):

$$\alpha_i = \frac{1}{\ell_0 \tau_i \beta_i}, \tag{4.16}$$

и обозначено $(x,y) = x\bar{y}$. Тогда по аналогии с (1.8) в силу уравнений (4.1) - (4.3) получаем:

$$\dot{V}(t) = -2 \sum_{i=1}^{P_0} \frac{(\delta \dot{C}_i, \delta \dot{C}_i)}{\ell_0 \beta_i} - 2 \sum_{g=1}^{G} \xi_g \beta^{(g)} (\rho_g, \rho_g) +$$

$$+2\sum_{g=1}^{G} Re\left(\delta W(t), \left(\frac{W^*}{l_0}+\xi_g C_g\right)\rho_g\right). \qquad (4.17)$$

Видим, что если принять

$$\frac{W^*}{l_0}+\xi_g C_g=0, \quad \xi_g=-\frac{W^*}{l_0 C_g}>0, \qquad (4.18)$$

то

$$\dot V(t)=-2\sum_{i=1}^{P_0}\frac{(\delta\dot C_i, \delta\dot C_i)}{l_0\beta_i}-2\sum_{g=1}^{G}\xi_g\beta^{(g)}(\rho_g,\rho_g)\leq 0. \qquad (4.19)$$

Хорошо известна общая теорема Барбашина – Красовского, которая часто будет использоваться в нашем учебном пособии (см. [3], [14]) и смысл которой состоит в следующем: если в силу исходных уравнений для функции Ляпунова $V>0$ имеет место $\dot V(t)\leq 0$, причем равенство возможно лишь в тривиальном случае (все компоненты решения тождественно равны нулю), тогда наблюдается асимптотическая устойчивость.

Если $\dot V(t)\equiv 0$, то $\rho_g(t)\equiv 0 (g=1,...,G)$, $\delta\dot C_i(t)\equiv 0$ и из (4.1) – (4.3) следует $\delta W(t)\equiv 0$, $\delta C_i(t)\equiv 0$. Используя теоремы Барбашина – Красовского, убеждаемся, что теорема (4.3) доказана.

Здесь продемонстрированы привлекательные стороны второго метода Ляпунова. Можно было бы использовать критерии Рауса, Гурвица и др. [7]. Но при высоком порядке системы дифференциальных уравнений они практически непригодны и вряд ли мы сумели бы столь просто получить общий результат.

Область Ω (4.14) определяет если не всю, то часть области возможных значений температурных коэффициентов реактивности, когда наблюдается асимптотическая устойчивость критического состояния. Важно, однако, что математические модели класса А допускают не только отрицательные, но и положительные значения температурных коэффициентов реактивности при наличии компенсирующих отрицательных (соответствующий пример дан далее в § 6*). Важно также, что область асимп-

---

* Частные случаи рассматриваемой задачи (для так называемой двухтемпературной модели реактора) были исследованы Сметсом [11], [12].

тотической устойчивости температурных коэффициентов Ω зависит только от теплофизических характеристик технологических каналов и никак не зависит от ядерных констант (т.е. от величин ℓ_0, τ_i, β_i) и от мощности реактора W^*.

Если $\alpha \notin \Omega$, то по определению некоторые неравенства (4.13) [т.е. (4.12)] будут нарушены, и мы выходим за пределы класса А. Функция Ляпунова в форме (4.15) теперь не годится. Однако в работах А.И. Лурье [8] еще в 1951 г. для канонической системы уравнений была предложена более общая форма функции Ляпунова.

Добавим в формулу (4.15) некоторую квадратичную форму F_0 и рассмотрим функцию

$$V(t)=(\delta W(t),\delta W(t))+\sum_{i=1}^{\rho_g}\alpha_i(\delta C_i(t),\delta C_i(t))+$$

$$+\sum_{g=1}^{G}\xi_g(\rho_g(t),\rho_g(t))+F_0(\rho_g(t)). \tag{4.20}$$

Форма $F_0(\rho_g)$ принимается в виде

$$F_0(\rho_g)=\sum_{g,h=1}^{G}\frac{(a_g\rho_g,\ a_h\rho_h)}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}. \tag{4.21}$$

Она обладает свойством положительной знакоопределенности при $a_g, a_h \neq 0$, так как из формулы

$$\frac{1}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}=\int_0^\infty exp\left[-(\beta^{(g)}+\beta^{(h)})\tau\right]d\tau,\quad \beta^{(g)},\beta^{(h)}>0$$

следует (если принять $x_g=a_g\rho_g$):

$$F(x_g)=\sum_{g,h=1}^{G}\frac{x_g\bar{x}_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}=$$

$$=\int_0^\infty d\tau\sum_{g,h=1}^{G}x_g\,exp(-\beta^{(g)}\tau)\bar{x}_h\,exp(-\beta^{(h)}\tau)=$$

$$=\int_0^\infty d\tau \sum_{g=1}^{G} x_g \exp(-\beta^{(g)}\tau)\}\{\sum_{h=1}^{G} \bar{x}_h \exp(-\beta^{(h)}\tau)\}=$$

$$=\int_0^\infty d\tau |\varphi(\tau)|^2 > 0, \quad \varphi(\tau)=\sum_{g=1}^{G} x_g \exp(-\beta^{(g)}\tau) \qquad (4.22)$$

и $F(x_g)=0$ тогда и только тогда, когда $x_g=0,\ g=1,\dots,G$. Очевидно,

$$F_0(\rho_g)=F(a_g\rho_g). \qquad (4.23)$$

Составляя производную $\dot V(t)$ в силу уравнений (4.1) – (4.3) и учитывая (1.7), получаем:

$$\dot V(t)=2Re(\delta W(t),\delta\dot W(t))+\sum_{i=1}^{\rho_0}\alpha_i 2Re(\delta C_i(t),\delta\dot C_i(t))+$$

$$+\sum_{g=1}^{G}2\xi_g Re(\rho_g(t),\dot\rho_g(t))+\sum_{h,g=1}^{G}\frac{a_g a_h 2Re(\rho_g,\dot\rho_h)}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}=$$

$$=2\sum_{i=1}^{\rho_0}\frac{(\delta\dot C_i,\delta\dot C_i)}{l_0\beta_i}+2Re\sum_{g=1}^{G}(\delta W,\rho_g\frac{W^*}{l_0})+$$

$$+\sum_{g=1}^{G}2\xi_g Re(\rho_g,c_g\delta W)-\sum_{g=1}^{G}2\xi_g(\rho_g,\rho_g)\beta^{(g)}-$$

$$-F_1(\rho_g)+\sum_{g,h=1}^{G}\frac{2Re\, a_g a_h(\rho_g,c_h\delta W)}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}. \qquad (4.24)$$

Здесь

$$F_1(\rho_g)=Re\sum_{h,g=1}^{G}2\frac{a_h a_g\beta^{(h)}(\rho_h,\rho_g)}{\beta^{(h)}+\beta^{(g)}}=$$

$$=Re\left\{\sum_{h,g=1}^{G}\frac{a_h a_g \beta^{(h)}(\rho_h,\rho_g)}{\beta^{(h)}+\beta^{(g)}}+\sum_{h,g=1}^{G}\frac{a_g a_h \beta^{(g)}(\rho_g,\rho_h)}{\beta^{(h)}+\beta^{(g)}}\right\}=$$

$$=\sum_{h,g=1}^{G}\frac{a_h a_g \beta^{(h)} Re(\rho_h,\rho_g)}{\beta^{(h)}+\beta^{(g)}}+\sum_{h,g=1}^{G}\frac{a_g a_h \beta^{(g)} Re(\rho_h,\rho_g)}{\beta^{(h)}+\beta^{(g)}}=$$

$$=Re\sum_{h,g=1}^{G} a_h a_g(\rho_h,\rho_g)=\left(\sum_{h=1}^{G} a_h\rho_h,\sum_{g=1}^{G} a_g\rho_g\right)=$$

$$=\left|\sum_{h=1}^{G} a_h\rho_h\right|^2\geqslant 0. \tag{4.25}$$

Следовательно, $F_1(\rho_g)$ – знакопостоянная положительная функция. Объединяя в (4.24) подобные члены, получаем

$$\dot V(t)=-2\sum_{i=1}^{\rho_0}\frac{(\delta\dot C_i,\delta\dot C_i)}{l_0\beta_i}-F_1(\rho_g)-\sum_{g=1}^{G}2\xi_g\beta^{(g)}(\rho_g,\rho_g)+$$

$$+2Re\sum_{g=1}^{G}\left(\delta W,\rho_g\left[\frac{W^*}{l_0}+\xi_g c_g+a_g\sum_{h=1}^{G}\frac{c_h a_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}\right]\right). \tag{4.26}$$

Если удастся подобрать действительные числа a_g* и положительные числа $\xi_g>0$ так, чтобы выполнялось:

$$\frac{W^*}{l_0}+\xi_g c_g+a_g\sum_{h=1}^{G}\frac{c_h a_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}=0; \tag{4.27}$$

$$g=1,\dots,G,$$

то в силу (4.26) и уравнений (4.1) – (4.3) будет выполняться $\dot V(t)\leq 0$ и $\dot V(t)\equiv 0$ лишь при $\delta W\equiv\delta C_i\equiv\delta\rho_g\equiv 0$.

---

* При ξ_g = 0 система квадратных относительно a_g уравнений (4.27) называется разрешающими уравнениями Лурье.

Таким образом, $V(t)$ – знакоопределенная положительная функция и сверх того $\dot{V}(t)$ – знакопостоянная отрицательная, откуда следует асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (4.1) – (4.3), если воспользоваться теоремой Барбашина – Красовского.

Класс А удовлетворяет системе квадратных уравнений (4.27), так как можно положить $a_g=0, g=1,\dots,G$; $\xi_g=\dfrac{W^*}{\ell_0(-C_g)}>0$,

но можно подозревать, что существует более широкий класс математических моделей реактора, для которого можно найти числа a_g , вообще отличные от нуля, также удовлетворяющие (4.27).

Введем такое определение.

О п р е д е л е н и е 2. Математическая модель динамики реактора (3.12), (3.22), (3.24) или в первом приближении (4.1) – (4.3) принадлежит классу Б, если удовлетворяются условия:

$$\xi_g=-\frac{W^*}{\ell_0 C_g}-\frac{a_g}{C_g}\sum_{h=1}^{G}\frac{C_h\ a_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}>0 \qquad (4.28)$$

при некоторых действительных числах $a_g\ (g=1,\dots,G)$.

Теорема 1У. Принадлежность классу Б означает, что корни характеристического полинома (4.10) системы (4.1) –(4.3) имеют отрицательные действительные части.

К сожалению, не имеется общих методов решения системы (4.27). В работе [8] система разрешающих уравнений Лурье проанализирована лишь для случая $G\le 4$*. Однако большое количество степеней свободы создает благоприятную ситуацию для исследования некоторых частных случаев. Пусть

$$C_1, C_2,\dots, C_{G_1}>0;\quad C_{G_1+1},\dots, C_G<0. \qquad (4.29)$$

Попробуем проверить следующую комбинацию:

$a_g=x>0$ при $g=1,\dots,G_1$;

$a_g=y>0$ при $g=G_1+1,\dots,G$.

---

* В работе [9] представлен метод решения для $G = 3$.

Тогда из (4.28) выводится следующий набор неравенств:

$$\xi_g = -\frac{W^*}{\ell_0 C_g} - \frac{x^2}{C_g}\sum_{h=1}^{G_1}\frac{C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}} + \frac{xy}{C_g}\sum_{h=G_1+1}^{G}\frac{-C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}} > 0,$$

$$g = 1,\ldots G_1;$$

$$\xi_g = \frac{W^*}{\ell_0(-C_g)} + \frac{yx}{(-C_g)}\sum_{h=1}^{G_1}\frac{C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}} - \frac{y^2}{(-C_g)}\sum_{h=G_1+1}^{G}\frac{-C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}} > 0,$$

$$g = G_1+1,\ldots,G,$$

или

$$\frac{W^*}{\ell_0} + x^2\sum_{h=1}^{G_1}\frac{C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}} < xy\sum_{h=G_1+1}^{G}\frac{-C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}, \tag{4.30}$$

$$g = 1,\ldots,G_1;$$

$$yx\sum_{h=1}^{G_1}\frac{C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}} > -\frac{W^*}{\ell_0} + y^2\sum_{h=G_1+1}^{G}\frac{-C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}, \tag{4.31}$$

$$g = G_1+1,\ldots,G.$$

Неравенство (4.31) всегда можно выполнить, если принять

$$-\frac{W^*}{\ell_0} + y^2\sum_{h=G_1+1}^{G}\frac{-C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}} < 0;$$

$$y < \sqrt{\frac{W^*}{\ell_0\gamma}}; \quad \gamma = \max_{g>G_1}\sum_{h=G_1+1}^{G}\frac{-C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}} > 0.$$

Ограничим y снизу:

$$y \geqslant \sqrt{\frac{\alpha W^*}{\ell_0\gamma}}, \quad 0<\alpha<1.$$

Тогда неравенство (4.30) и подавно будет удовлетворено, если в качестве y взять его нижнюю границу:

$$\frac{W^*}{\ell_0} + x^2\sum_{h=1}^{G_1}\frac{C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}} \leqslant x\sqrt{\frac{\alpha W^*}{\ell_0\gamma}}\sum_{h=G_1+1}^{G}\frac{-C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}. \tag{4.32}$$

В свою очередь, неравенства (4.32) будут удовлетворены, если $x>0$ взять таким, чтобы удовлетворялось неравенство

$$\frac{W^*}{\ell_0}+x^2\delta \leq x\sqrt{\frac{\alpha W^*}{\ell_0 \gamma}}\,\varkappa, \tag{4.33}$$

где $0<\delta=\max\limits_{g\leq G_1}\sum\limits_{h=1}^{G_1}\frac{C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}$; $\varkappa=\min\limits_{g\leq G_1}\sum\limits_{h=G_1}^{G}\frac{-C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}$.

Если существуют положительные решения $z_1, z_2>0$ уравнения

$$\frac{W^*}{\ell_0}+z^2\delta = z\sqrt{\frac{\alpha W^*}{\ell_0 \gamma}}\,\varkappa, \tag{4.34}$$

то, чтобы удовлетворить неравенству (4.33), достаточно взять x из интервала $[z_1, z_2]$, где

$$z_{1,2}=\frac{+\sqrt{\frac{\alpha W^*}{\ell_0\gamma}}\,\varkappa \pm \sqrt{\frac{\alpha W^*}{\ell_0\gamma}\varkappa^2-4\delta\frac{W^*}{\ell_0}}}{2\delta}.$$

Чтобы выполнялось $z_{1,2}>0$, нужно

$$\frac{\alpha\varkappa^2}{\gamma}>4\delta \qquad \text{или} \qquad \frac{\varkappa^2}{4\delta\gamma}>\frac{1}{\alpha}.$$

Так как α сколь угодно близко к единице, то можно записать

$$\frac{\varkappa^2}{4\delta\gamma}=\frac{\left[\min\limits_{g\leq G_1}\sum\limits_{h=G_1+1}^{G}\frac{-C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}\right]^2}{4\left\{\max\limits_{g\leq G_1}\sum\limits_{h=1}^{G_1}\frac{C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}\right\}\left\{\max\limits_{g>G_1}\sum\limits_{h=G_1+1}^{G}\frac{-C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}\right\}}>1. \tag{4.35}$$

Теорема У. Пусть в системе (4.3) выполняются неравенства (4.29). Если $0\leq G_1<G$, то неравенство (4.35) является одним из достаточных признаков принадлежности системы (4.1)-(4.3) классу Б. При $G_1=0$ она принадлежит классу А.

Замечание: условие (4.35) означает, что положительные коэффициенты $C_g\ (g=1,\dots,G_1)$ не должны быть чрезмерно велики, что физически достаточно очевидно.

Можно указать ряд полезных неравенств, являющихся необходимыми условиями выполнения (4.28). Умножим каждое из этих уравнений сначала на C_g^2, а затем на $\beta^{(g)}C_g^2$ и просуммируем результат по g. Тогда получим [см. (4.25), (4.21)]:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{W^*}{l_0}\sum_{g=1}^{G} C_g = -\sum_{g=1}^{G}\xi_g C_g^2 - F_0(C_g); \\ &\frac{W^*}{l_0}\sum_{g=1}^{G} C_g\beta^{(g)} = -\sum_{g=1}^{G}\xi_g\beta^{(g)}C_g^2 - \frac{1}{2}F_1(C_g). \end{aligned}\right\} \quad (4.36)$$

При F_0 и F_1 положительных квадратичных формах вытекает, что если условие (4.28) удовлетворено, то

$$\sum_{g=1}^{G} C_g < 0; \quad (4.37)$$

$$\sum_{g=1}^{G} \beta^{(g)}C_g < 0. \quad (4.38)$$

Если умножить каждое уравнение (4.28) на $C_g^2/\beta^{(g)}$ и затем сложить, то найдем:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{W^*}{l_0}\sum_{g=1}^{G}\frac{C_g}{\beta^{(g)}} = -\sum_{g=1}^{G}\frac{\xi_g C_g^2}{\beta^{(g)}} - \sum_{g,h=1}^{G}\frac{C_g a_g C_h a_h}{\beta^{(g)}(\beta^{(g)}+\beta^{(h)})} = \\ &= -\sum_{g=1}^{G}\frac{\xi_g C_g^2}{\beta(g)} - F_2(C_g\, a_g); \\ &F_2(C_g\, a_g) = \sum_{g,h=1}^{G}\frac{C_g a_g C_h a_h}{\beta^{(g)}(\beta^{(g)}+\beta^{(h)})} = \\ &= \sum_{g,h=1}^{G}\frac{C_g a_g C_h a_h}{\beta^{(g)}\beta^{(h)}} - \sum_{g,h=1}^{G}\frac{C_g a_g C_h a_h}{(\beta^{(g)}+\beta^{(h)})\beta^{(h)}}, \end{aligned}\right\} \quad (4.39)$$

или

$$\left.\begin{aligned}
&2\sum_{g,h=1}^{G}\frac{C_g a_g C_h a_h}{\beta^{(g)}(\beta^{(g)}+\beta^{(h)})}=\sum_{g,h=1}^{G}\frac{C_g a_g C_h a_h}{\beta^{(g)}\beta^{(h)}}=\left(\sum_{g=1}^{G}\frac{C_g a_g}{\beta^{(g)}}\right)^2,\\
&F_2(C_g a_g)=\frac{1}{2}\left(\sum_{g=1}^{G}\frac{C_g a_g}{\beta^{(g)}}\right)^2,
\end{aligned}\right\}\quad(4.40)$$

так что F_2 – знакопостоянная положительная квадратичная форма. Отсюда в дополнение к условиям (4.37), (4.38) получаем условие

$$\sum_{g=1}^{G}\frac{C_g}{\beta^{(g)}}<0. \qquad (4.41)$$

Если все C_g – положительны, то этим условиям удовлетворить нельзя, (4.28) невыполнимо, и система (4.1) – (4.3) не принадлежит классу Б.

Смысл неравенства (4.41) поясняется следующим образом. Рассмотрим передаточную функцию от мощности к реактивности (4.8):

$$\tilde{\varphi}(\lambda)=\sum_{g=1}^{G}\frac{C_g}{\lambda+\beta^{(g)}},\quad \tilde{\rho}(\lambda)=\tilde{\varphi}(\lambda)\cdot\delta\tilde{W}_{вх}(\lambda).$$

Если изменение мощности $\delta W_{вх}(t)$ происходит от момента $t=0$, когда имело место критическое состояние $\delta W_{вх}(0)=0$, то соответствующее изменение реактивности по правилам операционного исчисления описывается формулой:

$$\rho(t)=\int_0^t d\tau\,\varphi(t-\tau)\,\delta W_{вх}(\tau),\quad \varphi(t)=\sum_{g=1}^{G}C_g\exp[-\beta^{(g)}t].$$

Если изменение мощности имеет характер единичной ступенчатой функции Хевисайда:

$$\delta W_{вх}(t)=\eta(t)=\begin{cases}1 \text{ при } t\geqslant 0;\\ 0 \text{ при } t<0,\end{cases}$$

то

$$\rho(t)\equiv\theta(t)=\int_0^t d\tau\,\varphi(t-\tau)=\sum_{g=1}^{G}\frac{C_g}{\beta^{(g)}}[1-exp(-\beta^{(g)}t)]. \qquad (4.42)$$

Используя терминологию теории регулирования, назовем $\theta(t)$ переходной функцией разомкнутой цепи $\delta W_{\text{вх}}(t)\to\rho(t)$. Значение $\theta(\infty)$ определим как мощностной коэффициент

$$\theta(\infty)=\sum_{g=1}^{G}\frac{C_g}{\beta^{(g)}}. \qquad (4.43)$$

Тогда из неравенства (4.41) вытекает следствие: математическая модель динамики реактора может принадлежать классу Б только в том случае, если мощностной коэффициент (4.43) отрицателен.

Если график функции $\theta(t)$ дан (например, построен экспериментально), то его можно попытаться аппроксимировать конечным числом экспонент вида (4.42). Таким путем можно приближенно найти каноническое представление (4.3). Однако если какие-нибудь матрицы $\hat{\mathcal{B}}^{(\ell)}$ имеют кратные собственные значения, которым кроме собственных векторов принадлежат присоединенные (т.е. индекс каких-нибудь собственных значений $-\beta^{(g)}$ отличен от единицы), то представление (4.42) в принципе невозможно. Такой случай продемонстрирован в п.3 теоремы I. Полугруппа $\hat{T}(t,\hat{\mathcal{B}})$ в подобной ситуации уже не представима формулой (3.19), и мы не приходим к канонической форме уравнений. Тем не менее и в этом случае можно указать некоторое обобщение класса А, которое в книге [14] обозначается как А'. Однако выше было указано, что это исключительный случай и на подробностях мы здесь не останавливаемся.

Теорема У1. Если математическая модель динамики реактора принадлежит классам А, А' или Б, то соответствующее критическое состояние асимптотически устойчиво "в малом" (т.е. в линейном приближении).

Замечание: Асимптотическая устойчивость "в малом" означает, что матрица линеаризованной системы – гурвицева, т.е. все корни характеристического полинома имеют отрицательные действительные части. Из теории Ляпунова вытекает устойчивость и асимптотическая устойчивость "в большом" исходного нелинейного уравнения, если нелинейная поправка к линеаризованному уравнению в отклонениях имеет высший порядок малости, т.е. ее разложение в ряд Тейлора начинается с членов не ниже второго порядка. Из теоремы У1 следует, что матрица, составленная из коэффициентов линеаризованного уравнения - гурвицева. Следовательно мы получили, что нелинейная система уравнений в отклонениях (3.12), (3.22), (3.24) или (3.12) - (3.14) устойчива и асимптотически устойчива "в большом", если математическая модель реактора принадлежит классам А или Б. Отсюда не вытекает асиптотическая устойчивость в целом, т.е. при любых начальных значениях отклонения от стационарного состояния.

Повидимому асимптотическая устойчивость в целом рассмотренной системы в точечном приближении невозможна. Однако при некотором сужении классического понятия устойчивости в целом (это сужение мы обозначаем ниже в кавычках) можно получить полезные общие результаты.

§ 5. Устойчивость критического состояния "в целом"

Рассмотрим возможность обобщения теоремы У1 в смысле перехода от устойчивости "в малом" к устойчивости "в целом".

Существует известный метод, учитывающий тот факт, что с физической точки зрения вполне достаточно ограничиться такой областью значений отклонений δW, δC_i, в которой величины

$$W=\delta W+W^*;\quad C_i=\delta C_i+C_i^*$$

положительны. Вводя относительные значения отклонений

$$w=\frac{\delta W}{W^*},\quad r_i=\frac{\delta C_i}{C_i^*}, \tag{5.1}$$

можно эту область определить неравенствами

$$w>-1,\quad r_i>-1. \tag{5.2}$$

Тогда, учитывая, что $C_i^*=\tau_i\beta_i W^*$, систему (3.12), (3.22) (3.24) легко привести к виду:

$$\dot w=\frac{\rho}{l_0}(w+1)+\sum_{i=1}^{P_0}\frac{\beta_i}{l_0}(r_i-w); \tag{5.3}$$

$$\dot{r}_i = \frac{w - r_i}{\tau_i} \quad \text{или} \quad \dot{r}_i = \frac{(w+1)-(r_i+1)}{\tau_i} \tag{5.4}$$

$$\rho(t) = (I, \tilde{\rho}(t)), \quad \dot{\tilde{\rho}}(t) = \hat{A}\tilde{\rho}(t) + C W^* w(t); \tag{5.5}$$

$$\tilde{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_G \end{pmatrix}, \quad \hat{A} = diag[-\beta^{(1)}, \ldots, -\beta^{(G)}],$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_G \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$C_g \neq 0, \quad g = 1, \ldots, G.$$

Можно весьма просто убедиться, что если начальные значения отклонений $w(0)$, $r_i(0)$ лежат в области (5.2), то и значения $w(t)$, $r_i(t)$ в силу уравнений (5.3) лежат в (5.2) (см. также [10], с. 303–304). Действительно, из (5.4) следует:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\ln(r_i+1) = \frac{\dot{r}_i}{r_i+1} = -\frac{1}{\tau_i} + \frac{1}{\tau_i}\cdot\frac{w+1}{r_i+1};\\
&\ln\frac{r_i(t)+1}{r_i(0)+1} = -\frac{1}{\tau_i} + \frac{\beta_i}{\tau_i}\int_0^t d\tau\,\frac{w(\tau)+1}{r_i(\tau)+1};\\
&r_i(t)+1 = (r_i(0)+1)\exp\left[-\frac{t}{\tau_i} + \frac{\beta_i}{\tau_i}\int_0^t d\tau\,\frac{w(t)+1}{r_i(t)+1}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{5.6}$$

Из (5.3) вытекает

$$\frac{\dot{w}(t)}{w+1} = \frac{\rho}{\ell_0} + \sum_{i=1}^{\rho_0}\frac{\beta_i}{\ell_0}\left[\frac{r_i+1}{w+1} - 1\right];$$

$$
\left.
\begin{aligned}
&w(t)+1=(w(0)+1)\exp\Big[\int_0^t \frac{\rho(\tau)d\tau}{\ell_0}-\frac{\beta t}{\ell_0}+\\
&+\sum_{i=1}^{P_Q}\beta_i\int_0^t\frac{d\tau}{\ell_0}\,\frac{r_i(\tau)+1}{w(\tau)+1}\Big],\ \beta=\sum_{i=1}^{P_Q}\beta_i\ .
\end{aligned}
\right\}
\qquad (5.7)
$$

Отсюда видно, что во всей области существования и непрерывности решения $t\in[0,T]$ имеет место $w(t)+1>0$, $r_i(t)+1>0$ при $w(0)+1>0, r_i(0)+1>0$, т.е. решения $w(t)$, $r_i(t)$ не выходят за пределы области (5.2). Следовательно, если тривиальное решение систем (5.1) – (5.5) устойчиво или асимптотически устойчиво с начальными значениями $w(0)$, $r_i(0)>-1$, то решения вообще не выходят за пределы области (5.2).

О п р е д е л е н и е 3. Мы говорим, что критическое состояние реактора, динамика которого описывается математической моделью (3.12), (3.22), (3.24) или (5.3) – (5.5), асимптотически устойчиво "в целом", если тривиальное решение системы (5.3) – (5.5) асимптотически устойчиво при любых значениях $w(0)$, $r_i(0)$ в области (5.2) и при любых действительных начальных значениях вектора $\rho(0)$ (т.е. величин $\rho_g(0)$, $g=1,\ldots,G$).

Из формул (5.6), (5.7) непосредственно не видно, при каких условиях реализуется асимптотическая устойчивость. Для построения функции Ляпунова рассмотрим функцию

$$
\psi(x)=x-\ln(x+1)=\int_0^x du\,\frac{u}{u+1}\ . \qquad (5.8)
$$

Из этого определения видно, что $\psi(x)$ – знакоопределенная положительная функция и

$$
\left.
\begin{aligned}
&\psi(0)=0;\quad \psi(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}\infty;\quad \psi(x)\xrightarrow[x\to-1+0]{}-\infty;\\
&\dot\psi(x)=\frac{x\,\dot x}{x+1}\ .
\end{aligned}
\right\}
\qquad (5.9)
$$

Поэтому функцию Ляпунова можно пытаться строить в виде

$$V(t)=\ell_0\Psi(w)+\sum_{i=1}^{p_g}\beta_i\tau_i\Psi(r_i)+(\hat{\xi}\tilde{\rho},\tilde{\rho})+F_0(\tilde{\rho}) \qquad (5.10)$$

(см. также [3], с. 27 – 29). Здесь $F_0(\tilde{\rho})=F_0(\rho_g)$ – знакоопределенная положительная квадратичная форма, использованная в (4.20); $\xi=diag[\xi_1,\ldots,\xi_g]$. Дифференцируя (5.10), получаем

$$\dot{V}=\frac{w\,\dot{w}}{w+1}\ell_0+\sum_{i=1}^{p_0}\beta_i\tau_i\frac{r_i\,\dot{r}_i}{r_i+1}+2(\hat{\xi}\tilde{\rho},\dot{\tilde{\rho}})+\frac{dF_0(\tilde{\rho})}{dt}.$$

В силу уравнений (5.3), (5.4) имеем

$$\frac{\ell_0 w\dot{w}}{w+1}+\sum_{i=1}^{p_0}\beta_i\tau_i\frac{r_i\,\dot{r}_i}{r_i+1}=w\rho+\frac{w}{w+1}\sum_{i=1}^{p_g}\beta_i(r_i-w)-$$

$$-\sum_{i=1}^{p_0}\frac{r_i(r_i-w)}{(r_i+1)\tau_i}\beta_i\tau_i=w\rho+\sum_{i=1}^{p_g}\beta_i(r_i-w)\left(\frac{w}{w+1}-\frac{r_i}{r_i+1}\right)=$$

$$=w\rho-\sum_{i=1}^{p_0}\beta_i\frac{(w-r_i)^2}{(w+1)(r_i+1)}. \qquad (5.11)$$

Таким же способом, как и (4.26), находим производную

$$\dot{V}=w\sum_{g=1}^{G}\rho_g\left[1+\xi_g c_g 2W^*+a_g\sum_{h=1}^{G}\frac{a_h c_h\,2W^*}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}}\right]+$$

$$+2(\hat{\xi}\hat{A}\tilde{\rho},\tilde{\rho})-F_1(\tilde{\rho})-\sum_{i=1}^{p_0}\beta_i\frac{(w-r_i)^2}{(w+1)(r_i+1)}, \qquad (5.12)$$

где $F_1(\tilde{\rho})=F_1(\rho_g)$ – знакопостоянная положительная квадратичная форма, проанализированная в (4.25). Требуя, чтобы $\dot{V}$ была не положительна, приходим к системе квадратных уравнений:

$$1+\xi_g C_g 2W^* + a_g \sum_{h=1}^{G} \frac{a_h C_h 2W^*}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}} = 0, \tag{5.13}$$

которая совпадает с (4.27), если заменить $C_g \to C_g \frac{2W^{*2}}{\ell_0}$. Отсюда следует, что если (5.13) имеет решение

$$\xi_g = -\frac{1}{C_g 2W^*} - \frac{a_g}{C_g} \sum_{h=1}^{G} \frac{a_h C_h}{\beta^{(g)}+\beta^{(h)}} > 0, \tag{5.14}$$
$$g=1,\dots,G,$$

при некоторых действительных числах a_g, то

$$\dot{V}(t) = 2(\hat{\xi}\hat{A}\tilde{\rho},\tilde{\rho}) - F_1(\tilde{\rho}) -$$

$$-\sum_{i=1}^{P_0} \beta_i \frac{(w-r_i)^2}{(w+1)(r_i+1)} \le (\hat{\xi}\hat{A}\tilde{\rho},\tilde{\rho}) \le 0. \tag{5.15}$$

Если $\dot{W}(t) \equiv 0$, то из (5.15) следует $\tilde{\rho}(t) \equiv 0$, $w(t) \equiv \equiv r_i(t)$. Тогда из (5.4) вытекает $w(t) \equiv 0$, так что $r_i(t) \equiv 0$. Поэтому, применяя теорему Барбашина – Красовского, убеждаемся, что тривиальное решение нелинейной системы (5.3) – (5.5) асимптотически устойчиво "в целом", так что по определению 3 устойчиво "в целом" и соответствующее критическое состояние.

Ясно, что тем самым устанавливается асимптотическая устойчивость критического состояния для моделей классов А и Б. Этот же результат справедлив и для модели A'. Таким образом, теорема У1 обобщается.

Теорема УП. Если математическая модель динамики реактора принадлежит классам A, или A', или $Б$, то соответствующее критическое состояние асимптотически устойчиво "в целом".

З а м е ч а н и е: когда функция Ляпунова может быть выбрана в виде (5.10), то, как мы видели, число групп P_0 запаздывающих нейтронов не оказывает на свойство асимптотической устойчивости "в целом" никакого влияния. В частности, можно совсем исключить запаздывающие нейтроны, положив в

(5.3) $\beta_i = 0,\ i=1,\dots,\rho_0$. Иными словами, в классах А, А$'$, Б запаздывающие нейтроны не оказывают дестабилизирующего влияния.

Этот результат в общей форме сформулирован в теореме В.М. Попова (см. [3]).

§ 6. О допустимом положительном температурном коэффициенте реактивности

В работе [9] проведен расчет области Ω (4.14) для быстрого реактора типа БН-350, где все каналы были приближенно сведены к одному типу, разбиения по высоте не проводилось (т.е. было принято $M = 1$), технологический канал состоял из трех зон: теплоноситель (натрий), оболочка твэла (нержавеющая сталь) и горючее твэла (двуокись урана), так что $N = 3$.

Если обозначить α_1 , α_2 , α_3 – температурные коэффициенты реактивности для ядерного горючего твэла, его оболочки и теплоносителя, соответственно, то система неравенств (4.13) примет вид:

$$-\alpha_1 - 0{,}156\,\alpha_2 - 0{,}127\,\alpha_3 < 0;$$

$$-0{,}128\,\alpha_1 + \alpha_2 + 0{,}831\,\alpha_3 < 0;$$

$$-0{,}0035\,\alpha_1 + 0{,}484\,\alpha_2 - \alpha_3 < 0.$$

Если числа α_1, α_2 , α_3 удовлетворяют этим неравенствам, то система принадлежит классу А. Нетрудно видеть, что неравенствам можно удовлетворить при положительном значении α_1 . Для наглядности положим $\alpha_2 = 0$. Область значений α_1 , α_3,где неравенства удовлетворяются, представлена на рис. 2. Прямая ОВ ограничивает допустимую область положительных значений натриевого коэффициента реактивности α_3 при достаточно большом по абсолютной величине значении отрицательного коэффициента реактивности топлива (допплеровский коэффициент реактивности) α_1 . Однако видно, что обычные отрицательные значения допплеровского коэффициента компенсируют лишь весьма малые положительные значения натриевого коэффициента. Например, если $\alpha_1 = -1\cdot 10^{-5}\,\frac{1}{{}^{\circ}C}$,то максимально допустимое значение натриевого положительного коэффициента реактивности $\alpha_3 \cong 0{,}0035 \cdot 10^{-5} \frac{1}{^\circ C}$.

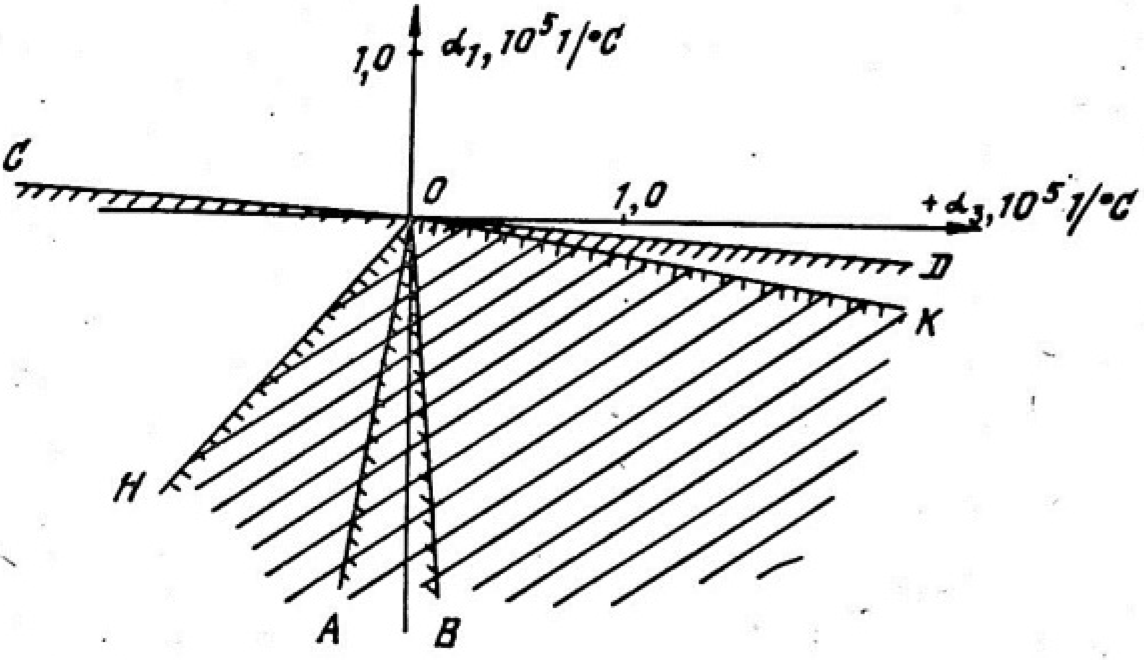

Рис. 2. Область устойчивости по температурным коэффициентам реактивности α_1, α_3 ($\alpha_2 = 0$)

Интересно отметить, что неравенство (4.41), если учесть (3.26), описывает полупространство в пространстве G-измерений, расположенное под гиперплоскостью, уравнение которой имеет вид:

$$\sum_{g=1}^{G} \frac{C_g}{\beta^{(g)}} = \sum_{g=1}^{G} \frac{1}{\beta^{(g)}} \sum_{i=1}^{T} \gamma_{gi} (\alpha)_i = \sum_{i=1}^{T} \mu_i (\alpha)_i = 0, \qquad (6.1)$$

где $\mu_i = \sum_{g=1}^{G} \frac{\gamma_{gi}}{\beta^{(g)}}, \quad i = 1, \ldots, T.$

На рис. 2 это полупространство ограничено заштрихованной снизу прямой COD. Интересно, что уравнение (6.1) соответствует так называемому "адиабатическому приближению", когда в уравнениях (3.24) можно пренебречь производными $\dot{\rho}_g$ (т.е. когда $|\dot{\rho}_g| \ll \beta^{(g)} |\rho_g|$). Это соответствует медленному процессу изменения мощности. Тогда получаем

$$\rho_q = \frac{C_q}{\beta^{(q)}}\,\delta W(t); \quad \sum_{q=1}^{G} \frac{C_q}{\beta^{(q)}}\,\delta W(t) = \rho(t); \tag{6.2}$$

$\rho(t)<0$ при $\delta W(t)>0$ и $\rho(t)>0$ при $\delta W(t)<0$, что создает чисто отрицательную обратную связь по реактивности.

Мы не останавливаемся на том, что в этом случае возникает асимптотическая устойчивость критического состояния (в адиабатическом приближении). Сумму $\sum_{q=1}^{G} C_q/\beta^{(q)}$ можно назвать "мгновенным мощностным коэффициентом" [см. (4.43)], его отрицательность обеспечивает асимптотическую устойчивость относительно медленных процессов "в целом". Отсюда, конечно, никак не следует асимптотическая устойчивость "в целом" системы (3.12), (3.22), (3.24). Но рис. 2 наводит на мысль, о том, что истинная область допустимых положительных значений α_3 шире, чем та, которую дает область АОС. Действительно, метод разрешающих уравнений Лурье (что соответствует классу Б) дает допустимую область НОК значений коэффициентов α_1, α_3 значительно более широкую, чем АОВ, что понятно, так как класс Б включает в себя класс А. Прямая СОD проходит весьма близко к прямой ОК.

Если нужно быстро оценить допустимые значения положительных коэффициентов реактивности, то вполне можно пользоваться простым уравнением (6.1). Следует только учитывать, что вытекающее из него расположение граничной линии СОD определяет полупространство, за пределы которого не должно выходить значение вектора температурного коэффициента реактивности. Но область устойчивости по его компонентам (см. рис. 2) может составлять только часть этого пространства.

§ 7. Учет системы регулирования мощности реактора

Мы исследовали устойчивость реактора в режиме саморегулирования при наличии обратных связей по температуре топлива и теплоносителя. Однако развитый аппарат анализа позволяет приближенно учесть и влияние системы регулирования реактора на устойчивость его стационарного состояния.

Автоматическая система регулирования представляет собой дополнительную обратную (как правило отрицательную) связь между отклонением мощности реактора от стационарного уровня и вводимой извне реактивностью, например, с помощью поглощающих нейтроны стержней. Эта дополнительная обратная связь может быть описана уравнениями той же структуры, что и уравнения "внутренних" обратных связей (3.14). Тогда с формально-математической точки зрения все полученные здесь результаты останутся в силе и нужно лишь переопределить некоторые обозначения.

Будем считать, что каналы в реакторе пронумерованы таким образом, что первые L каналов - с регуляторами. Тогда в уравнениях (3.12) - (3.14) для $\ell=1,\dots,L$ $\delta x_\ell(t)$ - смещение регулятора из положения в стационарном состоянии; $\alpha_\ell^{(k)}$ - вес единицы длины ℓ -го регулятора в k -поясе; матрицы $\hat{B}^{(\ell)}$ и векторы Q_ℓ определяются структурой и принципом действия системы регулирования, в частности, такими факторами, как формирование сигналов датчиков уровня мощности, усиление сигнала, его запаздывание, инерционность исполнительного механизма.

Уравнения (3.14) при $\ell=1,\dots,L$ описывают теперь движение органов регулирования, вызванное отклонением мощности реактора, а в уравнении (3.13) выделяется слагаемое $\sum_{\ell=1}^{L}(\alpha_\ell,\delta x_\ell)$, определяющее вносимую системой регулирования реактивность.

Таким образом, изложенные в настоящей главе методы позволяют прогнозировать устойчивость реактора, снабженного системой регулирования, в тех случаях, когда применимо точечное приближение и описание регуляторов уравнениями (3.14).

Глава II

УСТОЙЧИВОСТЬ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ РЕАКТОРА С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

§ 8. Линейная и нелинейная устойчивость критического состояния реактора в одногрупповом диффузионном приближении

Нестационарный одногрупповой баланс нейтронов (без обратной связи)

$$\frac{\partial n}{\partial t}=\hat{L}\,n, \quad \hat{L}=div\,v D\nabla+(k_\infty-1)\,v\,\Sigma_a \tag{8.1}$$

(где v – скорость нейтрона; $D=D(\vec{r})$ – одногрупповой коэффициент диффузии; $\Sigma_a=\Sigma_a(\vec{r})$ – макроскопическое сечение захвата; $k_\infty=k(\vec{r})$ – одногрупповой коэффициент размножения в бесконечной среде; $n(t)=n(\vec{r},t)$ (нейтрон/см^3) – плотность нейтронного газа), имеет вид эволюционного уравнения, которое надлежит рассматривать в гильбертовом пространстве H_V функций, суммируемых (по Лебегу) на V с квадратом.

Начальным условием для эволюционного уравнения (8.1) является

$$n(0)=n(\vec{r},0)\in H_V. \tag{8.2}$$

В качестве V здесь имеется в виду обязательно невогнутый конечный трехмерный объем. Будем считать, что все функции $D(\vec{r})$, $\Sigma_a(\vec{r})$, $k_\infty(\vec{r})$ – кусочно-непрерывны (в частности, кусочно-постоянны) внутри V с конечными разрывами на кусочно-гладких поверхностях конечного числа открытых областей V_i, $i=1,2,\ldots$, внутри V (например, активная зона $V_{а.з}$, отражатель, экран $V_э$, отдельные части активной зоны и т.п.). Предполагается, что поверхности объема V и его зон V_i всюду имеют нормаль, за исключением стыков их гладких частей, которые не должны иметь острых углов.

Коэффициент диффузии D принимается постоянным внутри зон, с конечными разрывами на их границах и всюду больше нуля. Если реактор гетерогенный, то k_∞, Σ_a и D рассматриваются как гомогенизированные, т.е. усредненные по элементарным ячейкам, которые могут рассматриваться как зоны V_i.

Чтобы задача была поставлена, будем считать, что областью определения $D(\hat{L})$ оператора $\hat{L}$ является множество функций $f=f(\vec{r})\in H_V$ со свойствами:

1) $\hat{L}f\in H_V,\ f\in D(\hat{L});$ (8.3)

2) $\gamma_1(\vec{r})\vec{n}^{(0)}(\vec{r})\nabla f(\vec{r})+\gamma_2(\vec{r})\cdot f(\vec{r})=0;$ (8.4)

где $\vec{r}\in\Gamma=\bar{V}\setminus V;\quad \gamma_1(\vec{r}),\gamma_2(\vec{r})\geqslant 0,\qquad \gamma_1^2(\vec{r})+\gamma_2^2(\vec{r})\neq 0.$

Функции $\gamma_1(\vec{r}),\gamma_2(\vec{r})$ считаются непрерывными на гладких частях поверхности Γ ;

3) из свойства 1 вытекает: $f(\vec{r})$ непрерывна на $\bar{V}$ (в частности, на границах включений $V_i\subseteq V$) и имеет непрерывные внутри V_i, V (вплоть до их границ) частные производные до второго порядка включительно;

4) нормальная составляющая вектора "тока" $\vec{i}(\vec{r})=-vD(\vec{r})\nabla f(\vec{r})$ непрерывна на границах включений V_i.

Свойства 3 и 4 будем называть условиями сшивания.

Свойство 2 подразумевает разные возможности, например: $\gamma_1(\vec{r})\equiv 0$, тогда $f(\vec{r})=0$ при $\vec{r}\in\Gamma$, что имеет место, когда Γ – экстраполированная граница; $\gamma_2(\vec{r})=const>0$, $\gamma_1(\vec{r})\equiv 1$. Для плоского случая это означает, что на границе задана логарифмическая производная функции $f(\vec{r})$. Все эти возможности будем называть соответствующими краевыми условиями.

Известно, что уравнение (8.1) достаточно хорошо описывает некоторые типы реакторов (например, большие реакторы на тепловых нейтронах, размеры зон которых заметно превосходят значение корня квадратного из квадрата длины миграции) и не очень быстрые процессы, для которых во всяком случае имеет место

$$\left|T\frac{\partial\vec{i}}{\partial t}\right|\Big/\left|\vec{i}\right|\ll 1,\quad T=\frac{1}{3\Sigma_{tr}v}.$$

Свойства оператора $\hat{L}$, определенного на подмножестве $D(\hat{L})$ из H_V, хорошо известны.

Теорема УШ. Совокупность функций $\psi_n\in H_V$ называется ортонормированной, если*

$$(\psi_n,\psi_m)=\delta_{nm}.$$

---

* Всюду в тексте $(\cdot,\cdot)$ означает скалярное произведение, т.е. интеграл по всему фазовому пространству. В данном случае $(f,g)=\int_V f(\vec{r})\overline{g(\vec{r})}d\vec{r}$. Черта – символ комплексного сопряжения.

Все функции из ортонормированной системы $\{\psi_n\} \subset H_\nu$ линейно-независимы, и имеет место неравенство Бесселя

$$\|f\|^2 \geqslant \sum_{n=0}^{\infty} |(f, \psi_n)|^2, \quad f \in H_\nu .$$

Если для любой функции $f \in H_\nu$

$$\|f\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(f, \psi_n)|^2, \tag{8.5}$$

то ортонормированная система $\{\psi_n\}$ называется полной в H_ν. Если $\{\psi_n\}$ – полна, то для любой $f \in H_\nu$

$$f = \lim_{n \to \infty} S_n, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} (f, \psi_k) \cdot \psi_k$$

(где имеется в виду предел по норме в H_ν), что записывается в виде обобщенного ряда Фурье:

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} (f, \psi_n) \cdot \psi_n . \tag{8.6}$$

Свойства оператора $\hat{L}$ даны в следующей теореме.

Теорема IX.

1. Оператор $\hat{L}$ самосопряженный, т.е. $(f, \hat{L}g) = (\hat{L}f, g)$ для любых $f, g \in D(\hat{L}) \subset H_\nu$, и, следовательно, $D(\hat{L})$ плотно в H_ν.

2. Спектр оператора $\hat{L}$ только точечный и состоит из счетного множества изолированных точек

$$\infty > \lambda_0 > \lambda_1 > \ldots > \lambda_n \xrightarrow[n \to \infty]{} -\infty, \tag{8.7}$$

расположенных на действительной оси. Собственное значение λ_0 – простое. Остальные могут иметь не более чем конечную кратность. В одномерном случае все λ_n – простые и $|\lambda_n|$ стремится к бесконечности как n^2.

В m-мерном случае $\lambda_n \approx -n^{\frac{2}{m}}$, так что в трехмерном пространстве имеет место оценка

$$\lambda_n \approx -n^{2/3}$$

(может быть выведена из примера в справочнике [5], с. 196).

3. Совокупность собственных функций $\psi_n (\lambda_n \psi_n = \hat{L}\psi_n)$ всегда может быть ортонормирована и является полной в H_V.

4. Собственная функция ψ_0 такая, что

$$\lambda_0 \psi_0 = \hat{L}\psi_0,$$

положительна, т.е. $\psi_0(\vec{r}) > 0$ при $\vec{r} \in V$.

5. Если $P(\vec{r})$ кусочно-непрерывна на V и имеет только конечные разрывы на поверхностях $V_i \subseteq V$, то $D(\hat{L}) = D(\hat{L} + P(\vec{r}))$ и оператор $\hat{L} + P(\vec{r})$ обладает теми же свойствами 1 – 4, что и оператор $\hat{L}$. При этом, если λ_0 и λ_0' – наибольшие (алгебраически) собственные значения операторов $\hat{L}$ и $\hat{L} + P(\vec{r})$, то при $P(\vec{r}) \geq 0$ $(P(\vec{r}) \not\equiv 0)$ $\lambda_0' > \lambda_0$, а при $P(\vec{r}) \leq 0$ $(P(\vec{r}) \not\equiv 0)$ $\lambda_0' < \lambda_0$ и вообще $P(\vec{r})$ можно выбрать так, что λ_0' будет любым действительным числом.

6. Если $\lambda_0 \leq 0$, то $(f, \hat{L}f) \leq \lambda_0 (f,f) = \lambda_0 \| f \|^2 \leq 0$ при любом $f \in D(\hat{L})$.

Оператор $\hat{L}$ относится к типу операторов задачи Штурма-Лиувилля. Разбор случая с кусочно-непрерывными коэффициентами и ссылки на соответствующую математическую литературу приводятся в работе [1].

Известно, что оператор $\hat{L}$ порождает в H_V голоморфную полугруппу $\hat{T}(t, \hat{L}) = e^{\hat{L}t}$, т.е. аналитическую операторную функцию во всей плоскости комплексного переменного t с разрезом по отрицательной действительной полуоси $(-\infty, 0]$ (см. [16]) и с нормой

$$\| \hat{T}(t, \hat{L}) \| = \| \exp(\hat{L}t) \| = \exp(\lambda_0 t). \tag{8.8}$$

В явном виде $\hat{T}(t, \hat{L})$ представляется формулой:

$$\hat{T}(t, \hat{L}) F = \exp(\hat{L}t) F = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(\lambda_n t) \hat{E}_n F, \tag{8.9}$$

где $\hat{E}_n$ – оператор проектирования H_V на конечномерное подпространство собственных функций, принадлежащих собственному значению λ_n. $\hat{E}_0 = (\cdot, \psi_0)\psi_0$ – одномерный проектор. Поэтому решение задачи (8.1), (8.2) имеет вид:

$$n(t) = n(\vec{r}, t) = \hat{T}(L, \hat{L}) n(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \exp(\lambda_n t) \cdot (n(0), \psi_n) \cdot \psi_n(\vec{r}).$$

Частный вид этого выражения (голый гомогенный одно-родный реактор) хорошо известен в теории реакторов. Здесь мы имеем обобщение на случай кусочно-непрерывных сечений. По определению при $\lambda_0>0$ реактор является надкритическим, при $\lambda_0<0$ — подкритическим, при $\lambda_0=0$ — критическим.

Заметим, что полугруппа $\hat{T}(t,\hat{L})$ из (8.9) обладает более сильными свойствами, чем полугруппы класса (C_0). Справедлива следующая теорема.

<u>Теорема X.</u>

1. $\|\hat{L}\hat{T}(t,\hat{L})\|<\infty$ при $t>0$, откуда следует $\hat{T}(t,\hat{L})f\in D(\hat{L})$ при любой $f\in H_V$, $t>0$.

2. $\hat{T}(t,\hat{L})\in Q(H_V)$,*) т.е. полугруппа вполне непрерывна при $t>0$.

3. $\hat{T}^+(t,\hat{L})=\hat{T}(t,\hat{L})$ — свойство самосопряженности.

Отметим еще одно свойство.

<u>Теорема XI.</u> Оператор $exp(\hat{L}t)$ при $t\geqslant 0$ является положительным, т.е. преобразует каждую неотрицательную функцию из H_V в неотрицательную. С точки зрения физики процессов в реакторе, теорема очевидна, поскольку $n(t)=exp(\hat{L}t)n(0)$ является решением (8.1), а плотность нейтронного газа $n(t)=n(\vec{r},t)=$ $=exp(\hat{L}t)n(0)$ по своему смыслу положительная функция. Оператор (8.9) может быть представлен в виде:

$$exp(\hat{L}t)f=exp(\lambda_0 t)\hat{E}_0 f+\hat{T}_1(t)\cdot f. \tag{8.10}$$

Здесь $\hat{E}_0$ — одномерный проектор (поскольку λ_0 — простое) и его действие согласно (8.9) и п. 2 теоремы IX представляется формулой: $\hat{E}_0 f=(f,\psi_0)\cdot\psi_0$, а оператор $\hat{T}_1(t)$ имеет вид

$$\hat{T}_1(t)=\sum_{n=1}^{\infty} exp(\lambda_n t)\hat{E}_n=[\hat{T}(t,\hat{L})-exp(\lambda_0 t)\hat{E}(\lambda_0\hat{L})]f,$$

откуда следует:

$$\|\hat{T}_1(t)\|=M_1 exp(\lambda_1 t), \tag{8.11}$$

---

*) $Q(H_V)$ — множество вполне непрерывных на H_V операторов; $B(H_V)$ — множество ограниченных на H_V операторов.

и тогда

$$\| \exp(-\lambda_0 t) e^{\hat{L} t} - \hat{E}_0 \| = M_1 \exp[-(\lambda_0 - \lambda_1) t] \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} 0. \tag{8.12}$$

Определение 4. Если имеет место (8.10) с оценкой нормы (8.11), (8.12), то мы говорим, что решение задачи Коши

$$\frac{\partial t}{\partial t} = \hat{L} f, \; f(0) \in D(\hat{L}),$$

или любое обобщенное решение имеет асимптотическое представление

$$f(t) \approx \exp(\lambda_0 t) \hat{E}_0 f(0) = \exp(\lambda_0 t)(f(0), \psi_0) \psi_0 (\vec{r}). \tag{8.13}$$

Число $\lambda_0 - \lambda_1$ в (8.13) можно назвать постоянной времени переходного процесса.

Теорема ХП. Асимптотическое представление решения задачи (8.1), (8.2) имеет вид (8.13).

Пусть теперь реактор, описываемый уравнением (8.1), критический. По определению это означает, что $\lambda_0 = 0$, т.е. существует стационарное решение $n^* = n^*(\vec{r})$ уравнения (8.1), иначе говоря:

$$0 = \hat{L} n^*, \; n^* \in D(\hat{L}). \tag{8.14}$$

По теореме IX (п. 2, 4)

$$n^*(\vec{r}) = C \psi_0 (\vec{r}) > 0, \; C > 0. \tag{8.15}$$

Коэффициент C однозначно вычисляется из выражения

$$\int d\vec{r} \, \mathcal{E}_f \, v \, \Sigma_f (\vec{r}) n^*(\vec{r}) = W^*, \tag{8.16}$$

где $\mathcal{E}_f = \frac{1}{3{,}1 \cdot 10^3} \; \frac{\text{кВт}}{\text{деление/с}}$; W^* – заданная мощность реактора, кВт.

Вычитая (8.14) из (8.1), получаем уравнение в отклонениях:

$$\frac{\partial \delta n(t)}{\partial t} = \hat{L} \, \delta n(t), \; \delta n(t) = n(t) - n^*, \tag{8.17}$$

решением которого является

$$\delta n(t) = \exp(\hat{L} t) \delta n(0), \; t > 0. \tag{8.18}$$

В силу (8.8) ($\lambda_0 = 0$) имеем

$$\|\delta n(t)\| \leq \|e^{\hat{L}t}\| \cdot \|\delta n(0)\| = \|\delta n(0)\|, \tag{8.19}$$

что означает устойчивость стационарного решения (8.14) по Ляпунову. Существенную роль здесь играет п. 1 теоремы X, согласно которому всякое обобщенное решение при $t>0$ является одновременно и решением. Например, функция $\delta n(0)=\delta n(\vec{r},0)\in H_V$ может быть разрывной (лишь кусочно-непрерывной), так что $\delta n(0)\notin D(\hat{L})$. Но спустя любой сколь угодно малый промежуток времени $t>0$, эти разрывы будут сглажены, так как должно быть $\delta n(t)\in D(\hat{L})$. В этом состоит определенная специфика диффузионного приближения.

Мы можем убедиться, что наличие запаздывающих нейтронов не нарушает устойчивость критического состояния. Система уравнений в этом случае имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \hat{L}n - \beta k_\infty v \Sigma_a n + \sum_{i=1}^{p_0} \frac{Q_i}{\tau_i}; \\ \frac{\partial Q_i}{\partial t} &= -\frac{Q_i}{\tau_i} + \beta_i k_\infty v \Sigma_a n, \quad i=1,\dots,p_0, \end{aligned}\right\} \tag{8.20}$$

где $Q_i = Q_i(t,\vec{r})$ – концентрация эмиттеров запаздывающих нейтронов i-й группы (всего p_0 групп); $\beta = \sum_{i=1}^{p_0} \beta_i$, β_i – выход эмиттеров i-й группы относительно полного числа нейтронов деления.

Можно принять, что $\beta_i = \beta_i(\vec{r})$ – кусочно-непрерывная функция с конечными разрывами там же, где они наблюдаются у $k_\infty(\vec{r})$. Вне активной зоны $\beta_i(\vec{r})=0$ $(\vec{r}\notin V_{а.з})$ и

$$\sup \frac{1}{\beta_i(\vec{r})} < \infty, \quad \vec{r}\in V_{а.з}. \tag{8.21}$$

Полагая реактор критическим, видим, что система (8.20) имеет стационарное решение:

$$\left.\begin{aligned} 0 &= \hat{L}n^* - \beta k_\infty v \Sigma_a n^* + \sum_{i=1}^{p_0} \frac{Q_i^*}{\tau_i}; \\ 0 &= -\frac{Q_i^*}{\tau_i} + \beta_i k_\infty v \Sigma_a n^*, \quad i=1,\dots,p_0. \end{aligned}\right\} \tag{8.22}$$

Подставляя в верхнее уравнение $O_i^*/\tau_i = \beta_i k_\infty v \Sigma_a n^*$, получаем уравнение критического состояния $\hat{L} n^* = 0$, а вычитая (8.22) из (8.20), находим уравнение в отклонениях, которое записываем в форме эволюционного уравнения:

$$\frac{\partial \delta Y(t)}{\partial t} = \hat{A}\,\delta Y(t); \quad \delta Y(t) = \left.\begin{pmatrix} \delta n(t) \\ \vdots \\ \delta O_i(t) \end{pmatrix}\right\} P_0 + 1; \tag{8.23}$$

где $\delta n(t) = n(t) - n^*$; $\delta O_i(t) = O_i(t) - O_i^+$, $i = 1, \ldots, P_0$;

$$\hat{A} = \hat{\mathcal{L}} + \hat{\mathcal{K}}; \quad \delta Y(0) \in \mathcal{D}(\hat{A});$$

$$\mathcal{L} = \left.\begin{pmatrix} \hat{L}, & 0 \\ 0, & -\frac{1}{\tau_i} \end{pmatrix}\right\} P_0 + 1; \quad \mathcal{K} = \left.\begin{pmatrix} -\beta k_\infty v \Sigma_a, & \frac{1}{\tau_i} \\ \beta_i k_\infty v \Sigma_a, & 0 \end{pmatrix}\right\} P_0 + 1. \tag{8.24}$$

Здесь векторы имеют порядок (P_0 + 1), а матрицы – порядок ($P_0 + 1$) x ($P_0 + 1$) (для сокращения формы записи не переписываем все значения индекса i).

Прежде чем анализировать уравнение в отклонениях (8.23), нужно условиться, в каком функциональном пространстве будет произведен анализ. Естественно выбрать прямое произведение

$$\mathcal{H} = H_V \times \underbrace{H_{V_{a.з}} \times \ldots \times H_{V_{a.з}}}_{P_0 + 1\, раз} \tag{8.25}$$

и тогда

$$\mathcal{D}(\hat{A}) = \mathcal{D}(\hat{L}) \times H_{V_{a.з}} \times \ldots \times H_{V_{a.з}} \subset \mathcal{H}, \mathcal{D}(\hat{A}) \subset \mathcal{H}, \overline{\mathcal{D}(\hat{A})} = \mathcal{H}. \tag{8.26}$$

Если ввести скалярное произведение и норму в $\mathcal{H}$ в виде:

$$(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = (f_0, g_0) + \sum_{i=1}^{P_0} (f_i, \alpha_i g_i); \tag{8.27}$$

$$\mathcal{F} = \left.\begin{pmatrix} f_0 \\ f_i \end{pmatrix}\right\} P_0 + 1; \quad \mathcal{G} = \left.\begin{pmatrix} g_0 \\ g_i \end{pmatrix}\right\} P_0 + 1; \tag{8.28}$$

$$\| \mathcal{F} \| \equiv \sqrt{(\mathcal{F}, \mathcal{F})},$$

то $\mathcal{H}$ станет гильбертовым пространством. Заметим, что $\alpha_i = \alpha_i(\vec{r})$ – неизвестная пока кусочно-непрерывная функция, такая, что $\alpha_i(\vec{r})=0$ при $\vec{r} \notin V_{a.з}$, $\alpha_i(\vec{r})>0$, $\vec{r} \in V_{a.з}$, $\sup \alpha_i < \infty$.

Для доказательства существования и единственности решения уравнений (8.23) используется теория полугрупп операторов. Требуется установить, что оператор $\hat{A}$ порождает в $\mathcal{H}$ полугруппу $e^{\hat{A}t}$ класса (C_0), что делается дочтаточно просто и на деталях мы здесь не останавливаемся (см. [14]). Роль функции Ляпунова теперь будет играть функционал Ляпунова, который запишем в квадратичной форме:

$$V(t)=\|\delta Y(t)\|^2=(\delta Y(t),\delta Y(t))=(\delta n(t),\delta n(t))+\sum_{i=1}^{p_0}(\delta O_i,\alpha_i\delta O_i). \tag{8.29}$$

Здесь предполагается, что $\alpha_i(\vec{r})>0$ при $\vec{r}\in V_{a.з.}$ и $\alpha_i(\vec{r})=0$ при $\vec{r}\notin V_{a.з.}$

Дифференцируя, получаем:

$$\dot{V}(t)=2Re\left(\delta n(t),\frac{\partial\delta n(t)}{\partial t}\right)+\sum_{i=1}^{p_0}2Re\left(\delta O_i,\alpha_i\frac{\partial\delta O_i}{\partial t}\right). \tag{8.30}$$

Уравнение (8.23) в компонентах имеет вид:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial\delta n(t)}{\partial t}=\hat{L}\,\delta n(t)-\beta k_\infty v\Sigma_a\delta n(t)+\sum_{i=1}^{p_0}\frac{\delta O_i(t)}{\tau_i};\\&\frac{\partial\delta O_i(t)}{\partial t}=-\frac{\delta O_i(t)}{\tau_i}+\beta_i k_\infty v\Sigma_a\delta n(t);\ i=1,\dots,p_0.\end{aligned}\right\} \tag{8.31}$$

Подставляя в верхнее уравнение $\frac{\delta O_i}{\tau_i}=-\frac{\partial\delta O_i}{\partial t}+\beta_i k_\infty v\Sigma_a\delta n$,

получаем

$$\frac{\partial\delta n(t)}{\partial t}=\hat{L}\,\delta n(t)-\sum_{i=1}^{p_0}\frac{\partial\delta O_i(t)}{\partial t}. \tag{8.32}$$

Тогда в силу уравнений (8.31) и (8.32) приводим уравнение (8.30) к виду:

$$\dot{V}(t)=2(\delta n,\hat{L}\delta n)-\sum_{i=1}^{p_0}2Re\left(\delta n,\frac{\partial\delta O_i}{\partial t}\right)+\sum_{i=1}^{p_0}2Re\left(O_i\alpha_i,\frac{\partial\delta O_i}{\partial t}\right),$$

$$=2(\delta n,\hat{L}\delta n)-\sum_{i=1}^{q}2Re\left(\delta n-Q_i\alpha_i,\frac{\partial\delta Q_i}{\partial t}\right).$$

Здесь $-\delta Q_i\alpha_i+\delta n=\delta n+\alpha_i\tau_i\frac{\partial\delta Q_i}{\partial t}-$

$$-\alpha_i\tau_i\beta_i k_\infty v\Sigma_a\delta n=\alpha_i\tau_i\frac{\partial\delta Q_i}{\partial t},$$

если принять

$$\alpha_i(\vec{r})=\frac{1}{\tau_i\beta_i(\vec{r})k_\infty(\vec{r})v\Sigma_a(\vec{r})}. \qquad (8.33)$$

Тогда

$$\dot V(t)=2(\delta n,\hat{L}\delta n)-\sum_{i=1}^{P_0}2\left(\alpha_i\tau_i\frac{\partial\delta Q_i}{\partial t},\frac{\partial\delta Q_i}{\partial t}\right)\leq 0, \qquad (8.34)$$

так как по свойству 6 теоремы IX $(\delta n,\hat{L}\delta n)\leq 0$, поскольку $\delta n(t)\subset D(\hat{L})$. Отсюда следует:

$$V(t)\leq V(0);\ \|\delta Y\|^2\equiv\|\hat{T}(t,\hat{A})\delta Y(0)\|^2\leq\|\delta Y(0)\|^2;$$

$$\|\delta Y(t)\|\equiv\|\hat{T}(t,\hat{A})\delta Y(0)\|\leq\|\delta Y(0)\|,$$

если $\delta Y(0)\in\mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}})$, $\mathcal{D}(\hat{\mathcal{L}})$ плотно в $\mathcal{H}$. Поэтому

$$\|\hat{T}(t,\hat{A})\|\leq 1,\ \|\delta Y(t)\|\leq\|\delta Y(0)\|$$

при любом $\delta Y(0)\in\mathcal{H}$.

Мы получили устойчивость критического состояния реактора при наличии запаздывающих нейтронов по норме $\|\cdot\|$.

Асимптотическую устойчивость стационарного состояния $n^*=n^*(\vec{r})$ нельзя обнаружить, пока не введены в рассмотрение какие-либо формы обратных связей.

Рассмотрим сначала температурную обратную связь. Зависимость от температуры $T=T(\vec{r})$ макроскопических одногрупповых сечений $\Sigma_a=\Sigma_a(T)$ и $k=k(T)$ хорошо известны в теории реакторов. Коэффициент диффузии D и скорость нейтрона v можно принять не зависящими от температуры, что справедливо для широких ячеек.

Обозначим

$$(k(T)-1)v\Sigma_a(T)=B(T).$$

Эта величина, пропорциональная материальному параметру зон $V_i \subset V$ и, следовательно, является функцией $\vec{r}$. Само поле температур описывается нестационарным уравнением

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \hat{C}T + av\Sigma_f(T)n, \tag{8.35}$$

где $\hat{C}$ – оператор переноса тепла, который обычно принимается линейным, a – некоторый переводной коэффициент.

Нестационарное поле нейтронов описывается уравнением

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \hat{L}(T)n, \quad \hat{L}(T) = \operatorname{div} vD\nabla + B(T), \tag{8.36}$$

а в критическом состоянии имеем:

$$0 = \hat{L}(T^*)n^*; \tag{8.37}$$

$$0 = \hat{C}T^* + av\Sigma_f(T^*)n^*. \tag{8.38}$$

Эта система нелинейных уравнений всегда имеет единственное и положительное решение, когда зависимость Σ_f от T не очень сильна. Вычитая из (8.36) уравнение (8.37); а из (8.35) – (8.38) образуем систему уравнений в отклонениях относительно величин

$$\delta T = T - T^*, \quad \delta n = n - n^*; \tag{8.39}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \delta n}{\partial t} &= \hat{L}(T)n - \hat{L}(T^*)n^* = \hat{L}(T^*)\delta n + (\hat{L}(T) - \hat{L}(T^*))n = \\ &= \hat{L}(T^*)\delta n + (\hat{L}(T) - \hat{L}(T^*))n^* + (\hat{L}(T) - \hat{L}(T^*))\delta n; \\ \frac{\partial \delta T}{\partial t} &= \hat{C}\delta T + av(\Sigma_f(T) - \Sigma_f(T^*))n^* + \\ &+ av\Sigma_f(T^*)\delta n + av(\Sigma_f(T) - \Sigma_f(T^*))\delta n. \end{aligned}\right\} \tag{8.40}$$

Представим зависимость сечения от температуры двумя членами разложения в ряд Тейлора в виде $\Sigma_i(T) = \Sigma_i(T^*) - \Sigma_i'(T^*)\delta T$ (как это обычно делается в теории реакторов), тогда:

$$B(T) = B(T^*) + B'(T^*)\delta T;$$

$$\Sigma_f(T) = \Sigma_f(T^*) + \Sigma_f'(T^*)\delta T,$$

и мы получаем следующую систему нелинейных уравнений в отклонениях:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \delta n}{\partial t} &= \hat{L}^{*}\delta n + B'(T^{*})n^{*}\delta T + B'(T^{*})\delta T\delta n; \\ \frac{\partial \delta T}{\partial t} &= \hat{C}\delta T + av\Sigma_f'(T^{*})n^{*}\delta T + av\Sigma_f(T^{*})\delta n + \\ &\quad + av\Sigma_f'(T^{*})\delta T\delta n. \end{aligned}\right\} \qquad (8.41)$$

Здесь обозначено $\hat{L}^{*}=\hat{L}(T^{*})$. Последние два слагаемых в этих уравнениях образуют нелинейную поправку к системе линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \delta n}{\partial t} &= \hat{L}^{*}\delta n + B'(T^{*})n^{*}\delta T; \\ \frac{\partial \delta T}{\partial t} &= av\Sigma_f(T^{*})\delta n + [\hat{C} + av\Sigma_f'(T^{*})n^{*}]\delta T, \end{aligned}\right\} \qquad (8.42)$$

которые мы запишем в виде эволюционного уравнения:

$$\frac{\partial \delta Y}{\partial t} = \hat{A}\,\delta Y, \qquad (8.43)$$

где $\delta Y = \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta T \end{pmatrix}$; $\hat{A} = \begin{pmatrix} \hat{L}^{*} & B'(T^{*})n^{*} \\ av\,\Sigma_f'(T^{*}), & \hat{C}_1 \end{pmatrix}$;

$$\hat{C}_1 = [\hat{C} + av\Sigma_f'(T^{*})n^{*}]$$

в векторном гильбертовом пространстве $\delta Y \in H_V \times H_V = \mathcal{H}_V$. Это означает, что $\delta n \in H_V$, $\delta T \in H_V$. Скалярное произведение двух векторных функций $Y_1 \in \mathcal{H}_Y$, $Y_2 \in \mathcal{H}_V$ должно иметь вид

$$(Y_1, Y_2) = (y_1^{(1)}, y_2^{(1)}) + (y_1^{(2)}, y_2^{(2)}),$$

где обозначено $Y_1 = \begin{pmatrix} y_1^{(1)} \\ y_2^{(1)} \end{pmatrix}$, $Y_2 = \begin{pmatrix} y_1^{(2)} \\ y_2^{(2)} \end{pmatrix}$. Отсюда следует, что норма вектора $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$

$$\|Y\| = \sqrt{(Y, Y)} = \sqrt{(y_1, y_2) + (y_2, y_2)} = \sqrt{\|y_1\|^2 + \|y_2\|^2}. \qquad (8.44)$$

Чтобы продемонстрировать на примере этой задачи применение обобщенного прямого (или второго) метода Ляпунова, примем упрощенное представление оператора переноса тепла $\hat{C}_7$ в виде "инерционного звена" с запаздыванием $\tau = \tau(\vec{r})$, которое может быть функцией положения точки $\vec{r} \in V$. Тогда второе уравнение системы (8.42) принимает вид:

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} = a v \Sigma_f (T^*) \delta n - \frac{\delta T}{\tau(\vec{r})} \qquad (8.45)$$

и тогда

$$\mathcal{H}_V = H_V \times H_{V_{a.э}} .$$

В этом приближении отражен тот физически очевидный факт, что в каждой точке $\vec{r} \in V$ отклонение поля температур от стационарного "следит" за изменением тепловыделения (первое слагаемое в правой части (8.45)) с характерным для этой точки пространства запаздыванием $\tau(\vec{r}) > 0$. Для тех мест объема V, где тепловыделения за счет делений нет, а прочие формы тепловыделения пренебрежимо малы (например, в отражателе теплового реактора), принимается $\delta T = 0$.

Составим функционал Ляпунова* в квадратичной форме в виде:

$$V(t) = V(\delta Y(t)) = (\delta n(t), \delta n(t)) + (\alpha \delta T, \delta T), \qquad (8.46)$$

где $\alpha = \alpha(\vec{r}) > 0$ – неизвестная пока функция (по аналогии с (8.40)) Составляя в силу уравнений (8.42), (8.45) производную $\dot{V}(t)$, получим:

$$\dot{V}(t) = 2(\delta n(t), \delta \dot{n}(t)) + 2(\alpha \delta T, \delta \dot{T}) =$$

$$= 2(\delta n(t), \hat{L}^* \delta n + B'(T^*) n^* \delta T) + 2(\alpha \delta T, -\frac{\delta T}{\tau} + a v \Sigma_f \delta n) =$$

$$= 2(\delta n(t), \hat{L}^* \delta n(t)) - 2\left(\frac{\alpha \delta T(t)}{\tau}, \delta T(t)\right) + 2[(\delta n(t), B'(T^*) n^* \delta T) +$$

$$+ (\alpha \delta T(t), a v \Sigma_f \delta n(t))] = 2(\delta n(t), \hat{L}^* \delta n(t)) - 2(\alpha \delta T, \delta T) +$$

$$+ (\delta n(t), [B'(T^*) n^* + \alpha a v \Sigma_f] \delta T), \; \Sigma_f = \Sigma_f (T^*). \qquad (8.47)$$

---

* В функциональных векторных пространствах функцию Ляпунова принято называть функционалом Ляпунова.

Если $\alpha = \alpha(\vec{r})$ всюду, где $\delta T \neq 0$, положительна, то функционал Ляпунова (8.46) – знакоопределенная положительная функция, т.е. может быть равна нулю только в тривиальном случае ($\delta n(t) \equiv 0$, $\delta T(t) \equiv 0$). Для устойчивости стационарного (т.е. критического) состояния реактора достаточно, чтобы $\dot{V}(t)$ была знакопостоянная положительная функция. Иначе говоря, достаточно, чтобы

$$\dot{V}(t) \leq 0. \tag{8.48}$$

Для этого прежде всего требуется, чтобы выражение в квадратных скобках в правой части уравнения (8.47) равнялось бы нулю. Тогда должно быть

$$\alpha(\vec{r}) = \frac{-B'(T^*)\,n^*}{av\Sigma_f(T^*)}. \tag{8.49}$$

Здесь $\Sigma_f(T^*) = \Sigma_f[T^*(\vec{r})] > 0$ при $\vec{r} \in V_{a.з.}$ Чтобы имело место $\alpha(\vec{r}) > 0$ при $\vec{r} \in V_{a.з}$ (т.е. везде в $\mathcal{V}$, где есть тепловыделение от деления) нужно, чтобы имело место

$$-B'[T^*(\vec{r})] > 0 \tag{8.50}$$

при $\vec{r} \in V_{a.з}$. Тогда в силу (8.47) получим:

$$\dot{V}(t) = 2(\delta n(t), \hat{L}^*\delta n(t)) - 2\left(\frac{\alpha}{\tau}\delta T, \delta T\right). \tag{8.51}$$

По п. 6 теоремы IX убеждаемся, что

$$(\delta n(t), \hat{L}^*\delta n(t)) \leq 0, \tag{8.52}$$

если $\delta n(t) \in D(\hat{L}^*)$, и тогда наблюдалось бы свойство (8.48). Что это действительно так, можно убедиться с помощью п. 1 теоремы X, откуда видно, что оператор $\hat{T}(t, \hat{L}^*) = e^{\hat{L}^* t}$ имеет при любом $t > 0$ областью своих значений $D(\hat{L}^*)$.

Известно, что эквивалентным уравнением по отношению к первому уравнению системы (8.42) является интегральное уравнение

$$\delta n(t) = e^{\hat{L}^* t}\delta n(0) - \int_0^t dt' e^{\hat{L}^*(t-t')} B'(T^*)\,n^*\delta T(t').$$

Учитывая сказанное, мы видим, что как первое, так и второе слагаемое в правой части этого уравнения осуществляют отображение $H_V \to \mathcal{D}(\hat{L}^*)$, что и доказывает, что $\delta n(t) \in \mathcal{D}(\hat{L}^*)$ при любых $\delta n(0) \delta T \in H_V$, если $t > 0$.

Таким образом, (8.52) установлено и из (8.51) следует (8.48). Интегрируя это неравенство (что законно), получаем:

$$V(t) \le V(0)$$

или

$$\sqrt{(\delta n(t), \delta n(t)) + (\alpha \delta T(t), \delta T(t))} \le \sqrt{(\delta n(0), \delta n(0)) + (\alpha \delta T(0), \delta T(0))}. \quad (8.53)$$

Обозначим

$$A = \max\{1, \sup_{\vec{r} \in V_{a.з}} \alpha(\vec{r})\}, \quad a = \min_{r \in V_{a.з}}\{1, \inf_{r \in V_{a.з}} \alpha(\vec{r})\},$$

$$0 < a \le A < \infty.$$

Тогда получим

$$a\|\delta Y(t)\| \le A\|\delta Y(0)\|, \quad \|\delta Y(t)\| \le \frac{A}{a}\|\delta Y(0)\| \quad (8.54)$$

при любом $\delta Y(0) \in \mathcal{H}_V$. Это означает, что по любому $\varepsilon > 0$ можно выбрать такое $\delta = \varepsilon \frac{a}{A}$, что при $\|\delta Y(0)\| \le \delta$ имеет место $\|\delta Y(t)\| \le \varepsilon$ для любого $t \ge 0$.

Это означает устойчивость (по Ляпунову) стационарного состояния

$$Y^* = \begin{pmatrix} n^* \\ T^* \end{pmatrix}.$$

Однако из (8.48) (при выполнении неравенства (8.50)) вытекает большее, а именно – асимптотическая устойчивость ("в малом") состояния Y^*. В случае векторных числовых функций мы попытались бы применить к неравенству (8.48) теорему Барбашина – Красовского. В случае векторного функционального пространства такая техника вообще не правомерна.

Посмотрим, что вытекает из предположения, что хотя бы в какой-то момент времени $t = t_0 > 0$ неравенство (8.48) превращается в равенство $\dot{V}(t_0) = 0$.

Из (8.48) следует, что $V(t)$ невозрастающая функция t и поэтому должно быть:

$$V(t) = const = V(0) \quad \text{при} \quad 0 \le t \le t_0,$$
$$\dot{V}(t) \equiv 0 \quad \text{при} \quad 0 \le t \le t_0.$$

Тогда из (8.51), (8.52) вытекает:

$$\delta T(t) \equiv 0 \qquad \text{при} \quad 0 \le t \le t_0; \qquad (8.55)$$

$$(\delta n(t), \hat{L}^* \delta n(t)) \equiv 0 \qquad \text{при} \quad 0 \le t \le t_0. \qquad (8.56)$$

Так как по п. 3 теоремы IX система собственных функций $\{\psi_k\}_{k=0}^{\infty} \subset H_V$ полна в H_V, то:

$$\delta n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (\delta n(t), \psi_k) \psi_k,$$

$$\hat{L}^* \delta n(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\delta n(t), \psi_k) \lambda_k \psi_k,$$

$$(\delta n(t), \hat{L}^* \delta n(t)) = \sum_{k=1}^{\infty} |(\delta n(t), \psi_k)|^2 \lambda_k$$

и из (8.56) немедленно следует:

$$(\delta n(t), \psi_k) = 0, \ k = 1, 2, \dots;$$

$$\delta n(t) \equiv c(t) \psi_0, \ 0 \le t \le t_0,$$

а из (8.45), (8.55) имеем $C(t) \equiv 0$, т.е. при $0 \le t \le t_0$

$$\delta n(t) \equiv 0. \qquad (8.57)$$

Мы оставляем без доказательства тот факт, что оператор $\hat{A}$ из (8.43) порождает в H_V полугруппу $e^{\hat{A}t}$ класса (C_0), что делается достаточно просто.

Так как $\delta Y(t)$ при $t > t_0$ представлено в виде

$$\delta Y(t) = e^{\hat{A}(t-t_0)} \delta Y(t_0),$$

то поскольку из (8.57), (8.55) следует $\delta Y(t_0) = 0$, отсюда вытекает, что на всей временной полуоси возможно только тривиальное решение $\delta Y(t) \equiv 0$ при $t \ge 0$.

Таким образом, знак равенства в (8.48) возможен только в случае тривиального решения. Следовательно, должно выполняться строгое неравенство $\dot{V}(t)<0$. Поскольку $V(t)$ знакоопределенная положительная функция, то можно записать:

$$\frac{\dot{V}(t)}{V(t)}=\frac{d\ln V(t)}{dt}<0.$$

Тогда должна существовать постоянная $C=C(\delta Y(0))>0$, зависящая в общем случае от начального значения $\delta Y(0)\in D(\hat{A})$, такая, что

$$\frac{d\ln V(t)}{dt}\leqslant -C(\delta Y(0))<0,$$

откуда после интегрирования получаем:

$$V(t)\leqslant e^{-C(\delta Y(0))t}V(0)\xrightarrow[t\to\infty]{}0. \tag{8.58}$$

Заметим, что в данной задаче $D(\hat{A})=D(\hat{L}^{*})\times H_{V_{a.з}}$. Но поскольку имеет место отображение $e^{\hat{L}t}$: $H_V\to D(\hat{L}^{*})$, то ограничение $\delta Y(0)\in D(\hat{A})$ можно снять и считать, что предельный переход (8.58) справедлив при любом $\delta Y(0)\in\mathcal{H}_V$. Но тогда уже при любом $\delta Y(0)\in\mathcal{H}_V$ наблюдается предельный переход (8.58), что в силу замкнутости в себе $\mathcal{H}_V$ означает, что существует $\inf\limits_{\{\delta Y(0)\in\mathcal{H}_V\}} C(\delta Y(0))=C>0$, и мы имеем

$$V(t)\leqslant e^{-Ct}V(0)\xrightarrow[t\to\infty]{}0. \tag{8.59}$$

По определению $V(t)$ можно рассматривать как квадрат эквивалентной нормы $|||\cdot|||$, полагая

$$|||Y|||=\sqrt{(y_1,y_1)+(\alpha\, y_2,y_2)},\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix},$$

$$y_1\in H_V,\quad y_2\in H_{V_{a.з}},$$

так как из (8.53), (8.54) следует:

$$a\|\delta Y(t)\|\leqslant\sqrt{V(Y(t))}=|||\delta Y(t)|||\leqslant A\|\delta Y(t)\|, \tag{8.60}$$

тогда из (8.59) вытекает

$$\| \delta Y(t) \| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0.$$

Это означает асимптотическую устойчивость по норме в $\mathcal{H}_V$ линеаризованной задачи, т.е. устойчивость и асимптотическую устойчивость "в малом".

Однако устойчивость "в малом" предполагает малость нелинейных поправок к уравнениям (8.42). Чтобы пояснить смысл этого понятия, запишем систему нелинейных уравнений (8.41) в операторной форме:

$$\frac{\partial \delta Y}{\partial t} = \hat{A}\,\delta Y + Q\,\delta Y; \quad \delta Y(t)\Big|_{t=0} = \delta Y(0), \qquad (8.61)$$

где действие нелинейного оператора Q определяется формулой:

$$Q\,\delta Y = \begin{pmatrix} -B'(T^*)\,\delta T\,\delta n \\ a v \Sigma_f'(T^*)\,\delta T\,\delta n \end{pmatrix}, \quad \delta Y = \begin{pmatrix} \delta n \\ \delta T \end{pmatrix}. \qquad (8.62)$$

Малость нелинейной поправки следует понимать в том смысле, что $\| Q\,\delta Y \|$ является величиной высшего порядка малости по сравнению с $\| \delta Y \|$, так что

$$\lim_{\| \delta Y \| \to 0} \frac{\| Q\,\delta Y \|}{\| \delta Y \|} = 0. \qquad (8.63)$$

В пространстве $\mathcal{H}_V$ установить такой предельный переход не удается, поскольку оно не допускает произведения своих элементов, но можно воспользоваться свойством полугруппы $e^{\hat{L}t}$ отображать H_V в $D(\hat{L}^*)$, где $D(\hat{L}^*)$ по определению принадлежит множеству непрерывных на V функций, которое в свою очередь принадлежит L_V^∞ – пространству функций, ограниченных на V по существенному максимуму своей абсолютной величины с нормой

$$\| f \|_\infty = \underset{\vec{r} \in V}{\operatorname{vrai\,max}} | f(\vec{r}) |, \quad f \in L_V^\infty.$$

Из вышесказанного следует, что при $t>0$ $\delta n(t)$, $\delta T(t) \in L_V^\infty$, что дает возможность рассматривать задачу (8.61) в пространстве

$$\mathcal{H}_V^\infty = L_V^\infty \times L_V^\infty \qquad (8.64)$$

с нормой

$$\|Y\|^{\infty}=max\{\|y_1\|_{\infty},\|y_2\|_{\infty}\},$$
$$Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \tag{8.65}$$

которое допускает произведение своих элементов (т.е. является B -алгеброй). Например,

$$\|Q\delta Y\|^{\infty}=max\{\|B'(T^*)\delta T\delta n\|_{\infty}, av\|\Sigma_f'(T^*)\delta T\delta n\|_{\infty}\}\leq$$

$$\leq max\{\|B'(T^*)\|_{\infty}, av\|\Sigma_f'(T^*)\|_{\infty}\}\|\delta T\|_{\infty}\|\delta n\|_{\infty}.$$

Но $\|\delta T\|_{\infty}\leq\|\delta Y\|^{\infty}$, $\|\delta n\|_{\infty}\leq\|\delta Y\|^{\infty}$. Обозначая

$$P=max\{\|B'(T^*)\|_{\infty}, av\|\Sigma_f'(T^*)\|_{\infty}\},$$

получаем

$$\left.\begin{aligned} &\|Q\delta Y\|^{\infty}\leq P[\|\delta Y\|^{\infty}]^2, \\ &\frac{\|Q\delta Y\|^{\infty}}{\|\delta Y\|^{\infty}}\leq P\|\delta Y\|^{\infty}\xrightarrow[\|\delta Y\|^{\infty}\to 0]{} 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.66}$$

Таким образом, условие "малости" оператора Q - выполнено. Запишем уравнение (8.61) в виде эквивалентного интегрального уравнения:

$$\delta Y(t)=e^{\hat{A}t}\delta Y(0)+\int_0^t dt' e^{\hat{A}(t-t')}[Q\delta Y(t')]. \tag{8.67}$$

Заметим теперь, что если из правой и левой части неравенства (8.59) извлечь квадратный корень, то из определения нормы (8.60) и из неравенства (8.59) следует:

$$|||\delta Y(t)|||\leq e^{-\omega_0 t}|||\delta Y(0)|||, \omega_0=\frac{C}{2} \tag{8.68}$$

или

$$|||e^{\hat{A}t}\delta Y(0)|||\leq e^{-\omega_0 t}|||\delta Y(0)|||,$$

так что для нормы полугруппы $e^{\hat{A}t}$ мы имеем

$$|||e^{\hat{A}t}\delta Y(0)|||\leq e^{-\omega_0 t}.$$

Переходя к норме $\|\cdot\|$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_V$, получим:

$$a\|e^{\hat{A}t}\delta Y(0)\| \le e^{-\omega_0 t} A\|\delta Y(0)\|$$

$$\|e^{\hat{A}t}\| \le M_0 e^{-\omega_0 t}, \quad M_0 = \frac{A}{a} > 1, \tag{8.69}$$

откуда видно, что переход к другой норме пространства не меняет тип полугруппы (т.е. число ω_0).

Переходя от нормы пространства $\mathcal{H}_V$ к норме пространства $\mathcal{H}_V^\infty$, мы получаем такой же результат. Это является следствием того, что $\mathcal{H}_V$, состоящее из векторных функций, суммируемых с квадратом, включает в себя как часть множество векторных функций ограниченных по существенному максимуму. При таком сужении оператора полугруппы $e^{\hat{A}t}$ его резольвентное множество может только расшириться, а спектр (определяемой радиусом круга $e^{-\omega_0 t}$ на комплексной плоскости), может только сузиться [5]. Отсюда вытекает, что по операторной норме в пространстве $\mathcal{H}_V^\infty$ имеет место:

$$\|e^{\hat{A}t}\|^\infty \le M_1 e^{-\omega_0 t}, \quad M_1 \ge M_0. \tag{8.70}$$

Оценивая левую и правую часть уравнения (8.67) по норме $\|\cdot\|^\infty$, получаем:

$$\|\delta Y(t)\|^\infty \le e^{-\omega_0 t} M_1 \|\delta Y(0)\|^\infty + \int_0^t dt' M_1 e^{-\omega_0 (t-t')} \|Q\delta Y(t')\|^\infty.$$

Если учесть свойство (8.66) оператора Q, то последует неравенство

$$\|\delta Y(t)\|^\infty \le e^{-\omega_0 t} M_1 \|\delta Y(0)\|^\infty + M_1 P \int_0^t dt' e^{-\omega_0 (t-t')} [\|\delta Y(t')\|^\infty]^2. \tag{8.71}$$

Это выражение принадлежит к типу интегральных неравенств, для числовых функций, хорошо известных в теории устойчивости. Запишем неравенство в общем виде:

$$y(t) \le e^{-\omega_0 t}\xi + K\int_0^t dt' e^{-\omega_0 (t-t')} y^2(t') \tag{8.71a}$$

и будем искать его решение в множестве неотрицательных числовых функций, зависящих от $t \in [0, T]$, $T > 0$.

Интеграл здесь имеет смысл нелинейного положительного оператора $Ay=K\int_0^t dt' e^{-\omega_0(t-t')} y^2(t')$.

Известно, что если A – оператор сжатия, т.е. если $|Ay|\leq \leq \gamma$ при $|y|\leq\gamma$ и $|Ay_1-Ay_2|\leq q|y_1-y_2|$, $q<1$ для любых y_1, y_2, таких, что $|y_1|, |y_2|\leq\gamma$, то решение неравенства (8.71а) можно писать в виде:

$$y(t)\leq\psi(t),$$

где $\psi(t)$ – решение уравнения

$$\psi(t)=e^{-\omega_0 t}\xi+K\int_0^t dt' e^{-\omega_0(t-t')}\psi^2(t').$$

Дифференцируя, убеждаемся, что это уравнение эквивалентно следующему нелинейному дифференциальному уравнению:

$$\dot\psi(t)=-\omega_0\psi(t)+K\psi^2(t),\ \psi(0)=\xi,$$

которое имеет очевидное решение

$$\psi(t)=\frac{1}{e^{\omega_0 t}\frac{1}{\psi(0)}-\frac{K}{\omega_0}(e^{\omega_0 t}-1)}=\frac{e^{-\omega_0 t}}{\frac{1}{\psi(0)}-\frac{K}{\omega_0}+e^{\omega_0 t}},$$

удовлетворяющее неравенству

$$0<\psi(t)\leq\frac{e^{-\omega_0 t}}{\frac{1}{\psi(0)}-\frac{K}{\omega_0}}\quad \text{при } \frac{1}{\psi(0)}>\frac{K}{\omega_0},\ 0<\psi(0)<\frac{\omega_0}{K}.$$

Можно, например, взять $\frac{1}{\psi(0)}>\frac{2K}{\omega_0}$ и тогда

$$0<\psi(t)\leq e^{-\omega_0 t}2\psi(0),\ \psi(0)<\frac{\omega_0}{2K}.$$

Не трудно проверить, что если выбрать

$$\gamma<\frac{\omega_0}{2K},$$

то условия сжатия будут соблюдены. Отсюда следует

$$y(t)\leq\psi(t)\leq e^{-\omega_0 t}2\psi(0)$$

при

$$\psi(0) \leq \gamma < \frac{\omega_0}{2K}.$$

Применяя этот результат к неравенству (8.71), получаем

$$\|\delta Y(t)\|^{\infty} \leq e^{-\omega_0 t} 2M_1 \|\delta Y(0)\|^{\infty} \tag{8.72}$$

при

$$M_1 \|\delta Y(0)\|^{\infty} \leq \gamma < \frac{\omega_0}{2M_1 P}. \tag{8.73}$$

Использованные здесь константы не зависят от интервала $[0, T]$ и, следовательно, формулы (8.72), (8.73) могут быть распространены на всю временную полуось $[0, \infty)$. Неравенство (8.72) означает асимптотическую устойчивость критического состояния Y^*, а неравенство (8.73) определяет размеры "области притяжения", в пределах которой могут быть расположены нормы начальных отклонений без нарушения асимптотической устойчивости.

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующих предложений.

<u>Теорема XIII.</u> Пусть оператор $\hat{A}: H \to H$ с плотной в гильбертовом пространстве H областью определения $D(\hat{A})$ $(\overline{D(\hat{A})} = H)$ образует в H полугруппу $e^{\hat{A}t}$ со свойством $e^{\hat{A}t} f \in D(\hat{A})$ при $t > 0$ и при любом $f \in H$, так что решение задачи Коши

$$\frac{dy(t)}{dt} = \hat{A} y(t), \quad y(t)\Big|_{t=0} = y(0) \tag{8.74}$$

имеет вид:

$$y(t) = e^{\hat{A}t} y(0), \quad y(t) \in D(\hat{A})$$

при $t > 0$ и при любом $y(0) \in H$.

Пусть функционал $V = [y, y]$, где $[\cdot, \cdot]$ скалярное произведение, которое порождает в H норму $|||y||| = \sqrt{[y, y]}$, эквивалентную норме $\|y\| = \sqrt{(y, y)}$. Если в силу уравнения (8.74) имеет место

$$\dot{V}(t) = \frac{d}{dt}\left[y(t), y(t)\right] \leq 0, \tag{8.75}$$

то тривиальное решение уравнения (8.74) устойчиво. При этом функционал $\dot V(t)$ обладает тем свойством, что если $\dot V(t_0)=0$ хотя бы при некотором $t_0>0$, то $\dot V(t)\equiv 0$ при $t\geqslant 0$.

Если же $\dot V(t)\equiv 0$ возможно только в тривиальном случае $(y(t)\equiv 0)$, то тривиальное решение асимптотически устойчиво и $\|e^{\hat A t}\|\leq Me^{-\beta t}$, $\beta>0$.

Теорема XIУ. Пусть дано нелинейное уравнение вида:

$$\frac{dy(t)}{dt}=\hat A y(t)+Qy(t),\quad y(t)\Big|_{t=0}=y(0)\in X, \tag{8.76}$$

где $\hat A: X\to X$ порождает в B -пространстве X полугруппу с оценкой нормы

$$\|e^{\hat A t}\|\leq M_0 e^{-\beta t}, \tag{8.77}$$

а для нелинейного оператора Q имеет место оценка

$$\|Qy\|\leq P\|y\|^2,\quad P>0. \tag{8.78}$$

Тогда можно указать такое $\gamma>0$, при котором при $\|y(0)\|\leq\gamma$ решение $y(t)$ существует, единственно, неограниченно продолжимо на всю временную полуось $t\in[0,\infty)$, и сверх того выполняется

$$\|y(t)\|\leq M_1 e^{-\beta t}\|y(0)\|,\quad M_1\geqslant M_0. \tag{8.79}$$

Иначе говоря, тривиальное решение $y(t)\equiv 0$ устойчиво и асимптотически устойчиво в большом.

Отметим, что специфическое свойство (8.78) оператора привело к тому, что константа спада β в линейной и в нелинейной задаче оказалась одной и той же.

Температурные эффекты по своей природе являются слабыми и их действие вполне возможно оценить с помощью теории малых возмущений, когда прямой анализ выполнить не удается. Например, функция $B'(T^*(r))$ не во всех местах рассматриваемого объема может удовлетворять неравенству (8.50) и тогда невозможно с помощью рассмотренной техники установить знакоопределенность функции $\dot V(t)$.

Теория малых возмущений позволяет прямым путем установить существование ведущего соответственного значения полугруппы $e^{\hat A t}$.

Рассмотрим оператор A в форме (8.43), слабым возмущением здесь следует считать функции $\hat{B}'(T^*)$ и $\Sigma_f'(T^*)$. Поэтому невозмущенный оператор должен иметь вид:

$$\hat{A}_0 = \begin{pmatrix} \hat{L}^*, & 0 \\ av\Sigma_f(T^*), & \hat{C} \end{pmatrix}, \tag{8.80}$$

а уравнение на собственные значения и собственные функции записывается в форме:

$$\left.\begin{aligned} \lambda\psi &= \hat{L}^*\psi; \\ \lambda\theta &= \hat{C}\theta + av\Sigma_f(T^*)\psi. \end{aligned}\right\} \tag{8.81}$$

Легко видеть, что $\lambda = 0$ и вектор $Y_0 = \begin{pmatrix}\psi_0 \\ \theta_0\end{pmatrix}$ являются собственным значением и собственным вектором задачи

$$\lambda Y_0 = \hat{A}_0 Y_0, \tag{8.82}$$

где нужно положить $\theta_0 = (-\hat{C})^{-1} av\Sigma_f(T^*)\psi_0$; $(-\hat{C})^{-1}$ – по физическому смыслу положительный ограниченный оператор. Поскольку температура должна "следить" с запаздыванием за тепловыделением, то спектр оператора $\hat{C}$ обязательно сдвинут влево относительно мнимой оси. Следовательно, $\lambda = 0$ – крайне правая точка спектра оператора $\hat{A}_0$, являющаяся одновременно ведущим собственным значением. Тогда $e^{\lambda t} = 1$ при $\lambda = 0$ является ведущим собственным значением полугруппы $e^{\hat{A}_0 t}$. Оператор

$$\hat{A} - \hat{A}_0 = \Delta\hat{A} = \begin{pmatrix} 0, & B'(T^*)n^* \\ 0, & av\Sigma_f'(T^*)n^* \end{pmatrix}$$

порождает малые возмущения ограниченного оператора $e^{\hat{A}_0 t}$.
По известной теореме Рэллиха (например, [2], с. 350) малое возмущение не может изменить кратности собственного значения и его положения на плоскости комплексного переменного как ведущего собственного значения, которое должно быть найдено из уравнений

$$\lambda'\psi' = \hat{L}^*\psi' + B'(T^*)n^*\theta';$$

$$\lambda'\theta' = \hat{C}\theta' + av\Sigma_f'(T^*)n^*\theta' + av\Sigma_f'(T^*)\psi';$$

которые в векторной форме имеют вид:

$$\lambda' Y' = \hat{A} Y'.$$

Невозмущенное уравнение записываем в сопряженной форме

$$\lambda Y_0^+ = \hat{A}_0^+ \quad Y_0^+ = 0.$$

Умножая первое скалярное на Y_0^+, второе на Y' и вычитая один результат из другого, приходим к тождественному соотношению:

$$\lambda'(Y', Y_0^+) = ((\hat{A} - \hat{A}_0) Y', Y_0^+).$$

Формула теории малых возмущений возникает после замены Y' на Y_0 и тогда, предполагая нормировку $(Y_0, Y_0^+) = 1$, получаем:

$$\lambda' = ((\hat{A} - \hat{A}_0) Y_0, Y_0^+). \tag{8.83}$$

При этом справедливы предельные переходы

$$\underset{\|\hat{A} - \hat{A}_0\| \to 0}{\lambda' \to \lambda_0}, \qquad Y'(Y', Y_0^+) \xrightarrow[\|\hat{A} - \hat{A}_0\| \to 0]{} Y_0.$$

Решение невозмущенного уравнения (8.82) мы уже знаем. Сопряженное по отношению к (8.82) уравнение записывается как

$$\left.\begin{aligned} &\lambda \psi_0^+ = \hat{L}^* \psi_0^+ + a v \Sigma_f (T^*) \theta_0^+; \\ &\lambda \theta_0^+ = \hat{C}^+ \theta_0^+ \end{aligned}\right\} \tag{8.84}$$

и при $\lambda = \lambda_0 = 0$ имеет решение $\psi_0^+ = \psi_0$, $\theta_0^+ = 0$, так что

$$Y_0^+ = \begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда по формуле (8.83) находим:

$$\lambda' = \left[\begin{pmatrix} B'(T^*) n^* \theta_0 \\ a v \Sigma_f'(T^*) n^* \theta_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \psi_0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = (B'(T^*) n^* \theta_0, \psi_0), \tag{8.85}$$

где $\theta_0 = (-\hat{C})^{-1} a v \Sigma_f (T^*) \psi_0 > 0$ вычисляется по известной технике решения задачи теплопередачи (теплопроводность, перенос тепла в технологическом канале и т.п.). Так как $\theta_0, \psi_0 > 0$, то из (8.85) следует, что при выполнении условия (8.50) $\lambda' < 0$, что и приводит к асимптотической устойчивости критического состояния.

В то же время формула (8.85) является более общим условием устойчивости. Если окажется, что $\lambda' > 0$, то критическое состояние реактора будет неустойчиво и при отсутствии системы управления реактором цепная реакция при малых отклонениях нейтронного поля от стационарного распределения пойдет в разгон. Способ уточнения значения λ', вычисленного по формуле теории малых возмущений, дан в конце этого раздела.

Случай $\lambda' < 0$ при наличии только температурных эффектов удается получить далеко не всегда (хотя указания на это имеются). Задачей управления реактором является поддержание стационарного распределения нейтронного поля типа $\psi_0 = \psi_0(\vec{r})$. Обычно эта задача возлагается на стержневое управление. В нашем распоряжении имеется только одна возможность: описать действие стержней с помощью гомогенизированных сечений.

Пусть h_ℓ – координата, фиксирующая положение ℓ-го стержня. Следовательно можно рассматривать h_ℓ как некоторую функцию $h = h(\vec{r})$ положения стержня в реакторе, а сечение поглощения стержня записывается в виде:

$$\Sigma_a^{(CT)} = \Sigma_a^{(CT)}(h).$$

Пусть $h^* = h^*(\vec{r})$ определяет такое положение стержней, которое соответствует критическому состоянию реактора. Тогда уравнение в отклонениях примет вид:

$$\frac{\partial \delta n}{\partial t} = \hat{L}^* \delta n - \left[\Sigma_a^{(CT)}(h) - \Sigma_a^{(CT)}(h^*)\right] v n^* - \left[\Sigma_a^{(CT)}(h) - \Sigma_a^{(CT)}(h^*)\right] v \delta n, \tag{8.86}$$

где $\hat{L}^* = v \,\mathrm{div}\, D \nabla + B - v \Sigma_a^{(CT)}(h^*)$. Эффект стержней мы рассматриваем в "чистом" виде, не учитывая температурной зависимости.

Гомогенизацию сечения стержней следует производить таким образом, чтобы существовали производные $\Sigma_a^{(CT)}(h)$ по h в окрестности значения $h = h^*$. Тогда, ограничиваясь двумя членами разложения в ряд Тейлора, можем писать

$$\Sigma_a^{(CT)}(h) - \Sigma_a^{(CT)}(h^*) = \Sigma_a^{(CT)\prime}(h^*) \delta h. \tag{8.87}$$

Закон управления величиной δh может быть задан в самой различной форме.

Предположим, что в реакторе существует система датчиков по показаниям которых можно восстановить поле тепловых нейтронов, хотя бы с некоторым запаздыванием $\tau=\tau(\vec{r})$. Если бы можно было писать $\delta h = a\delta n$, то дело сводилось бы к рассмотренному выше случаю. Более общий случай можно записать в виде уравнения

$$\frac{\partial \delta h}{\partial t} = -\frac{\partial h}{\tau} + \frac{\hat{Q}\,\delta n}{\tau}, \tag{8.88}$$

где $\hat{Q}$ — некоторый интегральный оператор:

$$\hat{Q}\delta n = \int\limits_V d\vec{r}_0\, \delta n(\vec{r}_0, t)\, \rho(\vec{r}_0 \to \vec{r}), \tag{8.89}$$

который мы будем считать положительным.

Интересно рассмотреть вырожденный случай, полагая

$$\rho(\vec{r}_0 \to \vec{r}) = \varphi(\vec{r}_0) f(\vec{r});$$
$$\varphi(\vec{r});\ f(\vec{r}) > 0.$$

Тогда

$$\hat{Q}\delta n = f(\delta n(t), \varphi). \tag{8.90}$$

Эта операция легко может быть осуществлена с помощью ЭВМ. Система уравнений в отклонениях принимает вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \delta n}{\partial t} &= \hat{L}^*\delta n - v\,\Sigma_a^{(CT)'}(h^*)\,n^*\delta h - v\,\Sigma_a^{(CT)'}\delta n\,\delta h, \\ \frac{\partial \delta h}{\partial t} &= -\frac{\delta h}{\tau} + \frac{f}{\tau}(\delta n(t), \varphi), \end{aligned}\right\} \tag{8.91}$$

Его линеаризованная форма сводится к системе уравнений

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \delta n}{\partial t} &= \hat{L}^*\delta n - v\,\Sigma_a^{(CT)'}(h^*)\,n^*\delta h; \\ \frac{\partial \delta h}{\partial t} &= -\frac{\delta h}{\tau} + \frac{f}{\tau}(\delta n(t), \varphi). \end{aligned}\right\} \tag{8.92}$$

Попробуем использовать функционал Ляпунова в форме (8.60), а функции f, φ, τ подобрать так, чтобы получить асимптотическую устойчивость. Пусть

$$V(t) = |||\delta Y(t)|||^2 = (\delta n(t), \delta n(t)) + (\alpha\delta h, \delta h). \tag{8.93}$$

Тогда

$$\dot V(t)=(\delta n(t),\hat{L}^{*}\delta n)-v(\delta n(t),\Sigma_a^{(CT)'}(h^{*})n^{*}\delta h(t))-$$

$$-\left(\frac{\alpha}{\tau}\delta h,\delta h\right)+\left(\alpha\delta h,(\delta n(t),\varphi)\frac{f}{\tau}\right).$$

Нам нужно, чтобы второе и четвертое слагаемые взаимно уничтожались. Достичь этого можно единственным образом, принимая

$$\varphi(\vec r)=\Sigma_a^{(CT)'}(h^{*}(\vec r))n^{*}(\vec r), \tag{8.94}$$

$$f(\vec r)=const=f,\ \tau(\vec r)=const=\tau.$$

Тогда из (8.91) следует, что δh – скаляр, который может быть вынесен за знак скалярного произведения. Норму пространства $\mathcal{H}_V$ следует изменить, полагая

$$\mathcal{H}_V=H_V\times\Phi, \tag{8.95}$$

где Φ – поле комплексных чисел, а скалярное произведение записать как

$$(Y_1,Y_2)=\left(y_1^{(1)},\ y_2^{(1)}\right)+y_1^{(2)}\cdot y_2^{(2)}, \tag{8.96}$$

принимая $y_1^{(2)}\cdot y_2^{(2)}=y_1^{(2)}\cdot\overline{y_2^{(2)}}$. Норма будет иметь вид:

$$\|Y\|=\sqrt{\|y^{(1)}\|^2+\|y^{(2)}\|^2}. \tag{8.97}$$

Функционал V примет форму:

$$V(t)\equiv\||\delta Y(t)\||^2=(\delta n(t),\delta n(t))+\alpha\delta h(t)\cdot\delta h(t); \tag{8.98}$$

а $\dot V(t)$ будет равна*:

$$\dot V(t)=(\delta n(t),\hat{L}^{*}\delta n)-v(\delta n(t),\Sigma_a^{(CT)'}(h^{*})n^{*})\delta h(t)-$$
$$-\frac{\alpha}{\tau}|\delta h(t)|^2+\frac{\alpha f}{\tau}\delta h(t)(\delta n(t),\Sigma_a^{(CT)'}(h^{*})n^{*}). \tag{8.99}$$

Чтобы второе и четвертое слагаемые уничтожились, нужно принять

$$v=\frac{\alpha f}{\tau}\quad \text{или}\quad \alpha=\frac{v\tau}{f}. \tag{8.100}$$

---

* Скаляр всегда может быть вынесен за знак скалярного произведения.

Здесь достаточно принять

$$\left.\begin{aligned} &\Sigma_a^{(CT)'}[h^*(\vec r)] \geqslant 0, \\ &\Sigma_a^{(CT)'}[h^*(\vec r)] \not\equiv 0. \end{aligned}\right\} \tag{8.101}$$

Тогда

$$\dot V(t) = (\delta n(t), \hat L^* \delta n(t)) - \frac{\alpha}{\tau}|\delta h(t)|^2 \leq 0.$$

Применяя теорему XШ, получим устойчивость "в малом" критического состояния. Использование теоремы XIУ дает возможность получить асимптотическую устойчивость "в большом".

Напомним, что нелинейная поправка в уравнении вида (8.76) со свойством (8.78) определяет размеры области притяжения, но не меняет характер спада вида

$$\|Y(t)\| \leq M e^{-\beta t}\|Y(0)\|,\ \beta > 0,\ M > 1.$$

Рассмотренное здесь управление можно назвать управлением скаляром.

Можно указать случай скалярного управления, когда число β находится прямым путем. Это случай управления равномерно распределенной плотностью поглотителя (управления плотностью борной кислоты в водо-водяном реакторе или плотностью газа ^3He в приближении гомогенизированных сечений).

Скаляром здесь является равномерно распространенная по реактору плотность ядер поглотителя $N(t)$, зависящая от t как от параметра. Если микроскопическое сечение поглотителя обозначить $\sigma_a^{(п)}$, то

$$\Sigma_a^{(п)} - \Sigma_a^{(п)*} = \sigma_a^{(п)} \delta N(t),\ \delta N(t) = N(t) - N^*,$$

где N^* – плотность поглотителя в критическом состоянии. Тогда

$$\hat L^* = \operatorname{div} D \nabla + B - v \sigma_a^{(п)} N^*;$$

$$\frac{\partial \delta n(t)}{\partial t} = \hat L^* \delta n(t) - v\sigma_a^{(п)} n^* \delta N(t) - v\sigma_a^{(п)} \delta n(t) \delta N(t);$$

$$\frac{d\delta N(t)}{dt} = -\frac{\delta N(t)}{\tau} + \frac{f}{\tau}(\delta n(t), n^*)$$

(здесь f, τ – скаляры). Линеаризованная система имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\delta N(t)}{dt} &= -\frac{\delta N(t)}{\tau} + \frac{f}{\tau}(\delta n(t), n^*); \\ \frac{\partial \delta n(t)}{\partial t} &= \hat{L}^* \delta n(t) - v\sigma_a^{(n)} \delta N(t) n^*. \end{aligned}\right\} \qquad (8.102)$$

Пространство $\mathcal{H}_V$, скалярное произведение и норма сохраняют форму (8.95), (8.96), (8.97). Рассмотрим уравнение для вычисления собственных значений и собственных функций, производя подстановку $n^*(\vec{r}) = C\psi_0(\vec{r})$. Тогда C может быть нормирована на мощность реактора с помощью формулы

$$W^* = \int_V d\vec{r}\, \Sigma_f(\vec{r}) n^*(\vec{r}) = C\int_V d\vec{r}\, \Sigma_f(\vec{r})\psi_0(\vec{r})$$

и мы получим

$$\left.\begin{aligned} \lambda\psi &= \hat{L}^*\psi - v\sigma_a^{(n)} C\psi_0\theta; \\ \lambda\theta &= -\frac{\theta}{\tau} + \frac{fC}{\tau}(\psi, \psi_0). \end{aligned}\right\} \qquad (8.103)$$

Из нижнего уравнения находим

$$\theta = \frac{fC(\psi, \psi_0)}{\tau(\lambda + \frac{1}{\tau})},$$

а подстановка в верхнее дает

$$\lambda\psi = \hat{L}^*\psi - \frac{v\sigma_a^{(n)} C\psi_0 fC(\psi, \psi_0)}{\tau(\lambda + \frac{1}{\tau})}. \qquad (8.104)$$

Умножим это уравнение справа на ψ_0 (скалярно). Так как $\hat{L}^*\psi_0 = 0$, то $(\hat{L}^*\psi, \psi_0) = (\psi, \hat{L}^*\psi_0) = 0$,

$$\lambda(\psi, \psi_0) = -\frac{v\sigma_a^{(n)} C^2 f(\psi_0, \psi_0)(\psi, \psi_0)}{\tau(\lambda + \frac{1}{\tau})},$$

где в силу ортонормированности $(\psi_0, \psi_0) = 1$, и поэтому λ удовлетворяет уравнению

$$\lambda = -\frac{v\sigma_a^{(n)}c^2 f}{\tau(\lambda+\frac{1}{\tau})}, \quad \lambda\left(\lambda+\frac{1}{\tau}\right)+\frac{v\sigma_a^{(n)}c^2 f}{\tau}=0. \qquad (8.105)$$

Корни этого уравнения

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2\tau}\left(1 \pm \sqrt{1-2v\sigma_a^{(n)}c^2 f}\right).$$

Здесь f играет роль коэффициента усиления обратной связи. При малом f

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2\tau}\left[1 \pm \left(1 - v\sigma_a^{(n)}c^2 f\right)\right];$$

$$\lambda_1 = -\frac{v\sigma_a^{(n)}c^2 f}{2\tau}, \quad \lambda_2 = -\frac{1}{2\tau}\left(2 - v\sigma_o^{(n)}c^2 f\right).$$

При очень глубокой обратной связи

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{2\tau}\left[1 \pm i\sqrt{v\sigma_a^{(n)}\cdot c^2 f - 1}\right]$$

при $v\sigma_a^{(n)}c^2 f > 1$. Действительные корни превращаются в два комплексно сопряженных. Поэтому

$$\beta = \min\{-\operatorname{Re}\lambda_1, -\operatorname{Re}\lambda_2\} > 0. \qquad (8.106)$$

Мы здесь не учитываем естественного ограничения, означающего, что величина $N(t)=N^*+\delta N(t)$ не должна быть отрицательной, т.е. всегда должно быть

$$N^* + \delta N(t) \geqslant 0.$$

Учет этого ограничения должен сказаться на величине области притяжения, на чем мы здесь не останавливаемся. Таким образом, первое уравнение системы (8.102) обеспечивает асимптотическую устойчивость критического состояния "в большом".

Интересно отметить, что совершенно такой же результат наблюдается и в общем газокинетическом рассмотрении в двух предположениях: 1) рассеянием на ядрах поглотителя можно пренебречь, если считать, что его концентрация мала по сравнению с плотностью других ядер; 2) сечение поглотителя строго следует закону $\frac{1}{v}$, как это имеет место в очень широкой области изменения энергии для ядер ^{10}B, ^{3}He.

Запаздывающие нейтроны во всех наших примерах не оказывают дестабилизирующего влияния. Мы видели, что они не нарушают устойчивости критического состояния в реакторе без обратных связей в одногрупповом диффузионном приближении. То же наблюдается в общей газокинетической модели ([2], гл.7). Это очевидно, поскольку в стационарном случае запаздывание не играет роли. Во всех учебниках по теории реакторов показывается, что в некритическом состоянии в точечном приближении запаздывающие нейтроны задерживают разгон или затухание цепной реакции, т.е. не меняют знака ведущего собственного значения, а лишь смещают его ближе к действительной оси. То же наблюдается и в распределенных моделях. Примеры в одногрупповом приближении и в общей газокинетической модели даны в книге [14].

В любых моделях переноса нейтронов с учетом действия обратных связей и системы регулирования задача может быть сведена к виду (так же, как получено (8.104)):

$$\lambda\psi=(\hat{L}^{*}+\hat{a}(\lambda))\psi, \tag{8.107}$$

где оператор $\hat{a}(\lambda)$ описывает изменение нейтронно-физических свойств среды под воздействием совокупности обратных связей и системы управления. Оператор $\hat{L}^{*}$ имеет следующую структуру:

$$\hat{L}^{*}=\hat{\mathcal{L}}+\hat{R},$$

где $\hat{\mathcal{L}}$ включает в себя неограниченную часть, возникающую в теории переноса и обратим, а $\hat{R}$ – ограниченный оператор, связанный с размножением нейтронов (см., например, [2]). Считая известными решения прямой и сопряженной критических задач

$$0=\hat{L}^{*}\psi_0, \quad 0=(\hat{L}^{*})^{+}\psi_0^{+},$$

из (8.107) легко получить уравнения

$$\lambda=\frac{(\hat{a}(\lambda)\psi,\psi_0^{+})}{(\psi,\psi_0^{+})}; \tag{8.108}$$

$$\psi=\hat{\mathcal{L}}^{-1}[\hat{R}-\lambda+\hat{a}(\lambda)]\psi, \tag{8.109}$$

причем (8.109) при фиксированном λ представляет собой обычное условно-критическое уравнение и может быть решено с помощью соответствующих ЭВМ-программ.

Уравнения (8.108) и (8.109) позволяют построить удобный для реализации итерационный процесс вычисления спектральной границы

$$\lambda^{(k+1)}=\frac{(\hat{a}(\lambda^{(k)})\psi^{(k)},\psi_0^+)}{(\psi^{(k)},\psi_0^+)}; \qquad (8.110)$$

$$\psi^{(k+1)}=\frac{1}{m_0^{(k+1)}}\hat{\mathcal{L}}^{-1}[\hat{K}-\lambda^{(k+1)}+\hat{a}(\lambda^{(k+1)})]\psi^{(k+1)}, \qquad (8.111)$$

$$(k=0,1,2,\dots)$$

где $m_0^{(k)}$ – аналог $k_{эф}$ в условно-критической задаче. В качестве значений на нулевой итерации естественно взять

$$\lambda^{(0)}=0, \quad \psi^{(0)}=\psi_0. \qquad (8.112)$$

В большинстве случаев зависимость оператора переноса нейтронов от параметров обратных связей и системы регулирования оказывается достаточно слабой, что приводит к малости (по норме) оператора $\hat{a}(\lambda)$. Кроме того, $\hat{a}(\lambda)$ – аналитическая функция λ. Два этих обстоятельства позволяют обосновать сходимость итерационного процесса (8.110) – (8.112). При должной нормировке $\psi^{(k)}$ получаем:

$$\lambda^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}\lambda; \qquad \psi^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}\psi; \qquad m_0^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}1.$$

§ 9. Условия устойчивости "в большом" для нелинейной распределенной модели кипящего канального реактора

В данном параграфе с помощью комбинированного подхода (второй метод Ляпунова – теория возмущений) исследуется нелинейная модель кипящего канального реактора.

Пусть реактор имеет форму пластины толщиной ℓ, ограниченной в двух других направлениях. Отражатели расположены сверху и снизу активной зоны. Для описания переноса нейтронов используется нестационарное одногрупповое одномерное диффузионное уравнение. Тепломассоперенос в технологических каналах описывается уравнением "инерционного звена" для температуры твэлов и уравнением сохранения энергии для одномерного двухфазного потока относительно энтропии теплоносителя S в предположениях постоянства весового расхода на входе и по всей длине канала и постоянства давления по длине канала [14, 15] . Нелинейная система уравнений имеет вид:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\partial n}{\partial t}=\hat{L}(T,S)n, \\ &\frac{\partial T}{\partial t}=-\frac{T}{\tau}+Bn; \\ &\frac{\partial S}{\partial t}=-u(S)\frac{\partial S}{\partial z}+\frac{v(S)}{\theta(S)}q(T,S), \end{aligned}\right\} \tag{9.1}$$

где $\hat{L}(T,S)=\frac{\partial}{\partial z}vD\frac{\partial}{\partial z}+[k_\infty(T,S)-1]v\Sigma_a(T,S)$; $n(z,t)$, $T(z,t)$, $S(z,t)$ – плотность нейтронов, температура твэла и энтропия теплоносителя соответственно в сечении $z\in[0,\ell]$ в момент времени t ; v – скорость тепловых нейтронов; $D(z)$ – коэффициент диффузии; $\Sigma_a(z)$ – макроскопическое сечение поглощения; $k_\infty(z)$ – локальный коэффициент размножения в бесконечной среде; $\tau(z)$ – характеристика тепловой инерционности твэла; $B(z)n$ – тепловыделение в твэле (B – коэффициент пропорциональности); $u(S)$ – скорость теплоносителя; $v(S)$ – удельный объем теплоносителя; $\theta(S)$ – температура теплоносителя (при кипении $\theta(S)=const$) ; $q(T,S)$ – тепловой поток от твэла в теплоноситель, отнесенный к единице объема теплоносителя.

Граничные и начальные условия для системы (9.1) имеют вид:

$$n+d_0\frac{\partial n}{\partial z}\bigg|_{z=0}=0;\ n+d_\ell\frac{\partial n}{\partial z}\bigg|_{z=\ell}=0;\ S(0,t)=S_0=const; \tag{9.2}$$

$$n(z,0)=n(0);\ T(z,0)=T(0);\ S(z,0)=S(0). \tag{9.3}$$

Будем рассматривать такой режим реактора, при котором в технологических каналах отсутствует экономайзерный участок, то есть $S_0\geqslant S_H$ (S_H – энтропия теплоносителя на линии насыщения при заданном давлении P) и весовой расход теплоносителя постоянен – $G(z,t)=const$. В дальнейшем энтропию S будем отсчитывать от S_H . В этом случае имеет место соотношение

$$u[S(z,t)]=\frac{u_0}{\vartheta_0}\vartheta[S(z,t)],\ \vartheta(S)=\vartheta_{ж}+\frac{\vartheta_п-\vartheta_ж}{S_п}S, \tag{9.4}$$
$$0\leq S\leq S_п,$$

где u_0, ϑ_0 – скорость и удельный объем теплоносителя на входе в канал; $\vartheta_{ж}$ – удельный объем теплоносителя в жидком состоянии (считается $\vartheta_{ж}(S)=const$); $\vartheta_п$, $S_п$ – удельный объем и энтропия насыщенного пара. Из соотношения (9.4) получаем:

$$u(S)\frac{\partial S}{\partial z}=\frac{u_0}{\vartheta_0}\left[\vartheta_{ж}\frac{\partial S}{\partial z}+\frac{1}{2}\left(\frac{\vartheta_п-\vartheta_ж}{S_п}\right)\frac{\partial}{\partial z}S^2\right]. \tag{9.5}$$

Будем считать, что функции $[k_\infty(T,S)-1]v\Sigma_a(T,S)$, $\frac{\vartheta(S)}{\theta}q(T,S)$ и S^2 в окрестности стационарного решения системы (9.1) $n^*(z)$, $T^*(z)$, $S^*(z)$ (существование которого предполагается) представимы в виде двух членов ряда Тейлора. Переходя в уравнениях (9.1) к отклонениям $x(z,t)=n(z,t)-n^*(z)$, $y(z,t)=T(z,t)-T^*(z)$, $s(z,t)=S(z,t)-S^*(z)$, получаем нелинейную систему уравнений относительно x, y, s:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial x}{\partial t}=\hat{L}^*x-Py+Qs+f(x,y,s);\\
&\frac{\partial y}{\partial t}=-\frac{1}{\tau}y+bx;\\
&\frac{\partial s}{\partial t}=-u^*\frac{\partial s}{\partial z}+By,
\end{aligned}\right\} \tag{9.6}$$

где $\hat{L}^*=\hat{L}(T^*,S^*)$; $-P(z)=\hat{L}^{*\prime}_T n^*=\{[k_\infty(T^*,S^*)-1]v\Sigma_a(T^*,S^*)\}'_T\cdot n^*$;

$$Q(z)=\hat{L}^{*\prime}_S n^*=\{[k_\infty(T^*,S^*)-1]v\Sigma_a(T^*,S^*)\}'_S\cdot n^*$$

(штрихи означают производную Фреше оператора по векторному аргументу [4]); $f(x,y,s)=\hat{L}^{*\prime}_T xy+\hat{L}^{*\prime}_S xs=-k_T(z)xy+k_S(z)xs$; $-k_T(z)=[(k_\infty-1)v\Sigma_a]^{*\prime}_T$; $k_S(z)=[(k_\infty-1)v\Sigma_a]^{*\prime}_S$; $u^*(z)=u[S^*(z)]$; $B(z)=\frac{\vartheta(S^*)}{\theta}q(T^*,S^*)'_T$.

Граничные и начальные условия для системы (9.6) принимают вид:

$$x+d_0\frac{\partial x}{\partial z}\Big|_{z=0}=0;\ x+d_l\frac{\partial x}{\partial z}\Big|_{z=l}=0;\ s(0,t)=0; \tag{9.7}$$

$$x(z,0)=x(0);\ y(z,0)=y(0);\ s(z,0)=s(0). \qquad (9.8)$$

Если в первом уравнении системы (9.6) отбросить члены Q_s и $f(x,y,s)$, то оно вместе со вторым уравнением образует замкнутую систему:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \hat{L}^* x - Py; \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -\frac{1}{\tau} y + \varepsilon x. \end{aligned}\right\} \qquad (9.9)$$

Введем новую независимую переменную $\varphi(z,t)$ по формуле

$$\varphi = \frac{1}{\beta} y - x, \qquad (9.10)$$

где функция $\beta = \beta(z) > 0$ будет определена ниже. Перепишем систему (9.9) в новых переменных x, φ :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \hat{L}^* x - P\beta x - P\beta\varphi; \\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} &= -\frac{1}{\tau_1}\varphi - [\hat{L}^* - P_1] x, \end{aligned}\right\} \qquad (9.11)$$

где $\dfrac{1}{\tau_1} = \dfrac{1}{\tau} - P\beta; \quad P_1 = P\beta - \dfrac{1}{\tau} + \dfrac{\varepsilon}{\beta}.$

Систему (9.11) будем рассматривать в прямом произведении гильбертовых пространств $H_2^{(\alpha)} = H \times H_\alpha$. Скалярные произведения и нормы определены по формулам:

$$(f,g) = \int_0^\ell f(z) g(z)\,dz; \quad \|f\|^2 = (f,f) < \infty, \text{ если } f,g \in H;$$

$$(f,g)_\alpha = (\hat{\alpha} f, g), \quad \|f\|_\alpha^2 = (\hat{\alpha} f, f) < \infty, \text{ если } f,g \in H_\alpha;$$

$$(X,Y)_{H_2^\alpha} = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)_{H_2^{(\alpha)}} = (x_1, y_1) + (x_2, y_2)_\alpha;$$

$$\|X\|_{H_2^{(\alpha)}}^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|_\alpha^2; \quad x_1, y_1 \in H; \quad x_2, y_2 \in H_\alpha,$$

где $\hat{\alpha}$ – некоторый положительный самосопряженный оператор.

Построим функционал Ляпунова для системы (9.11) в виде

$$V(t) = (x,x) + (\hat{\alpha}\varphi, \varphi). \qquad (9.12)$$

6-2111

Запишем производную $\dot V(t)$ в силу системы (9.11):

$$\frac{1}{2}\dot V(t)=(x,[\hat{L}^*-P_\beta]x)-(x,P_\beta\varphi)-\left(\frac{1}{\tau_1}\varphi,\hat\alpha\varphi\right)-(\hat\alpha\varphi,[\hat{L}^*-P_1]x)\leq$$

$$\leq-(P_\beta x,x)-\left(\frac{1}{\tau_1}\varphi,\hat\alpha\varphi\right)-(\varphi,[\hat\alpha(\hat{L}^*-P_1)+P_\beta]x). \quad (9.13)$$

При записи неравенства здесь учтено, что для "критического" оператора $\hat{L}^*$ имеет место оценка $(\hat{L}^*x,x)\leq 0,\ x\in D(\hat{L}^*)$. Выберем теперь $\hat\alpha$ так, чтобы аннулировать последнее слагаемое в выражении (9.13):

$$\hat\alpha=-P_\beta[\hat{L}^*-P_1]^{-1}=P_\beta\hat{R}([\hat{L}^*-P_1],0), \quad (9.14)$$

где $\hat{R}([\hat{L}^*-P_1],0)$ – резольвента $\hat{R}([\hat{L}^*-P_1],\lambda)$ оператора $[\hat{L}^*-P_1]$ при $\lambda=0$, являющаяся самосопряженным оператором [14]. Чтобы определенный таким образом оператор $\hat\alpha$ был самосопряженным, достаточно функцию $\beta(z)$ выбрать так, чтобы $P(z)\beta(z)=c=const,\ c>0$, то есть положить

$$\beta(z)=\frac{c}{P(z)}. \quad (9.15)$$

Оператор $\hat\alpha$ будет, кроме того, положительным, если выполняется условие

$$\underset{z\in[0,l]}{P_1(z)\geq 0},\qquad \underset{z\in\Omega}{P_1(z)\neq 0},\qquad \Omega\subset[0,l],\ mes[\Omega]>0. \quad (9.16)$$

Считая выполненными условия (9.14), (9.15), (9.16), получаем цепочку неравенств:

$$\frac{1}{2}\dot V(t)\leq-c(x,x)-\left(\left[\frac{1}{\tau}-c\right]\varphi,\hat\alpha\varphi\right)\leq-c(x,x)-\inf\left[\frac{1}{\tau(z)}-c\right](\hat\alpha\varphi,\varphi)\leq$$

$$\leq-\min\left\{c,\inf_{z\in[0,l]}\left[\frac{1}{\tau(z)}-c\right]\right\}\cdot\left[(x,x)+(\hat\alpha\varphi,\varphi)\right]. \quad (9.17)$$

Таким образом, из соотношения (9.17) получаем, что для $\dot V(t)$ имеет место оценка

$$\dot V(t)\leq-2\omega_0\cdot V(t), \quad (9.18)$$

где $\omega_0=\min\left\{c,\inf\limits_{z\in[0,l]}\left[\frac{1}{\tau(z)}-c\right]\right\}=c$, если $c\in\left(0,\frac{1}{2\tau^{(0)}}\right)$,

$\tau^{(0)}=\sup\limits_{z\in[0,l]}[\tau(z)]$; $\qquad \tau_0=\inf\limits_{z\in[0,l]}[\tau(z)]$.

Следовательно, с учетом условий (9.16), ω_0 может принимать следующие значения:

$$\omega_0 \in \Delta = \left\{\omega_0 :\ 0 < \omega_0 < \frac{1}{2\tau(0)};\ \ P_1 = \omega_0 - \frac{1}{\tau} + \frac{P\beta}{\omega_0} > 0\right\} =$$

$$= \left\{\omega_0 : 0 < \omega_0 < \omega_\Delta = Re\left[\frac{1}{2\tau_0} - \sqrt{\frac{1}{4\tau_0^2} - \inf_{z\in[0,l]}(P\beta)}\,\right]\right\} \tag{9.19}$$

(окончательно значение ω_0 будет выбрано ниже исходя из условия получения наилучших оценок при использовании теории возмущений).

Из неравенства (9.18) следует оценка для полугруппы, соответствующей системе (9.11):

$$\|\hat{T}(\hat{A}_0, t)\|_{H_2^{(\alpha)}} \le exp(-\omega_0 t);\ \hat{A}_0 = \begin{pmatrix} [\hat{L}^* - P\beta] - P\beta \\ -[\hat{L}^* - P_1] - \frac{1}{\tau_1} \end{pmatrix}. \tag{9.20}$$

Получим теперь оценку, аналогичную (9.20), в пространстве $H_2 = H \times H$ (сделать это необходимо потому, что в пространстве $H_2^{(\alpha)} = H \times H_\alpha$ не удается использовать теорию возмущений, так как $H_\alpha \supset H$).

Из оценки (9.20) следует, что для x -компоненты решения системы (9.11) выполняется неравенство

$$\|x(t)\|^2 \le exp(-2\omega_0 t)[\|x(0)\| + \|\varphi(0)\|_\alpha^2]. \tag{9.21}$$

Зная свойства оператора $\hat{L}^*$ и явный вид оператора $\hat{\alpha}$, нетрудно установить, что для пространств H_α и H имеет место соотношение:

$$\|f\|_\alpha \le N \cdot \|f\|, \quad \text{если } f \in H, \tag{9.22}$$

где

$$N = N(\omega_0) = \frac{\omega_0}{\inf\limits_{z\in[0,l]} \left[\omega_0 - \frac{1}{\tau} + \frac{P\beta}{\omega_0}\right]}.$$

Теперь перепишем неравенство (9.21), используя соотношения (9.10), (9.15), (9.22):

$$\|x(t)\|^2 \le exp(-2\omega_0 t)\cdot[\|x(0)\|^2 + \|\frac{1}{\beta}y(0) - x(0)\|_\alpha^2] \le$$

$$\le exp(-2\omega_0 t)[\|x(0)\|^2 + 2N^2\|\frac{1}{\beta}y(0)\|^2 + 2N^2\|x(0)\|^2] \le$$

$$\leq \exp(-2\omega_0 t)\left[(1+2N^2)\|x(0)\|^2+2N^2\left(\frac{P^{(0)}}{\omega_0}\right)^2\|y(0)\|^2\right], \qquad (9.23)$$

где $P^{(0)}=\sup\limits_{z\in[0,e]}[P(z)]$. Рассматривая второе уравнение системы (9.9) как неоднородное, его решение можно записать в виде [16]:

$$y(t)=\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)y(0)+\int_0^t \exp\left(-\frac{t-u}{\tau}\right)Bx(u)du. \qquad (9.24)$$

Используя очевидное соотношение

$$\left\|\exp\left(-\frac{t}{\tau(z)}\right)f(z)\right\|\leq \exp\left(-\frac{t}{\tau^{(0)}}\right)\|f(z)\|, f\in H,$$

и неравенство (9.23), получаем из выражения (9.24) оценку для y -компоненты решения системы (9.9) по норме пространства H:

$$\|y(t)\|^2\leq 2\exp\left(-2\frac{t}{\tau^{(0)}}\right)\|y(0)\|^2+2\left[\int_0^t \exp\left(-\frac{t-u}{\tau^{(0)}}\right)B^{(0)}\|x(u)\|du\right]^2\leq$$

$$\leq \exp(-2\omega_0 t)\left\{\|x(0)\|^2\frac{2B^{(0)2}(1+2N^2)}{(1/\tau^{(0)}-\omega_0)^2}+\|y(0)\|^2\left[2+\frac{4B^{(0)2}N^2(P^{(0)}/\omega)^2}{(1/\tau^{(0)}-\omega_0)^2}\right]\right\}. \qquad (9.25)$$

Из неравенства (9.23) и (9.25) следует:

$$\left\|\begin{pmatrix}x(t)\\ y(t)\end{pmatrix}\right\|^2_{H_2}=\|x(t)\|^2+\|y(t)\|^2\leq M_0^2(\omega_0)\exp(-2\omega_0 t)\left\|\begin{pmatrix}x(0)\\ y(0)\end{pmatrix}\right\|^2_{H_2}, \qquad (9.26)$$

где

$$M_0^2(\omega_0)=\max\left\{(1+2N^2)\left[1+\frac{2B^{(0)2}}{(1/\tau^{(0)}-\omega_0)^2}\right], 2+2N^2\left(\frac{P^{(0)}}{\omega_0}\right)^2\left[1+\frac{2B_0^2}{(1/\tau^{(0)}-\omega_0)^2}\right]\right\}.$$

Отсюда определяется искомая оценка для полугруппы, соответствующей системе (9.9), по норме пространства H_2:

$$\|\hat{T}(\hat{A},t)\|_{H_2}\leq M_0(\omega_0)\exp(-\omega_0 t),\ \hat{A}=\begin{pmatrix}\hat{L}^{*}-P\\ B & -\frac{1}{\tau}\end{pmatrix}. \qquad (9.27)$$

Величину $\omega_0>0$ можно понимать как "запас устойчивости", обусловленный отрицательной обратной связью по температуре горючего $(-P(z)<0)$. Этот "запас" мы будем в дальнейшем "тратить", чтобы учесть влияние обратной связи по паросодержанию теплоносителя и нелинейных членов системы (9.6) с помощью теории возмущений.

Рассмотрим третье уравнение системы (9.6):

$$\frac{\partial s}{\partial t}=\hat{\Gamma}s+By, \tag{9.28}$$

где оператор $\hat{\Gamma}$ действует по формуле $\hat{\Gamma}f(z)=-u^*(z)\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Решение этого уравнения можно записать в виде [16]:

$$s(z,t)=\hat{T}(\hat{\Gamma},t)s(0)+\int_0^t\hat{T}(\hat{\Gamma},t-u)By(z,u)\,du, \tag{9.29}$$

где $\hat{T}(\hat{\Gamma},t)$ – полугруппа, порождаемая оператором $\hat{\Gamma}$. Для $\hat{T}(\hat{\Gamma},t)$ можно получить оценку [17]:

$$\|\hat{T}(\hat{\Gamma},t)\|\le\eta[t_\ell-t], \tag{9.30}$$

где $\eta(t)=\begin{cases}0, t<0;\\ 1, t\geqslant 0;\end{cases}$ – функция Хевисайда; $t_\ell=\displaystyle\int_0^\ell\frac{dz}{u^*(z)}$ – время прохождения теплоносителя по каналу.

Используя соотношения (9.30) и (9.27), из представления (9.29) определяем оценку решения уравнения (9.28):

$$\|s(z,t)\|^2\le 2\|s(0)\|^2\eta(t_\ell-t)+2\Big[\int_0^t\eta(t_\ell-t+u)B^{(0)}M_0\exp(-\omega_0 u)\|y(u)\|du\Big]^2\le \tag{9.31}$$

$$\le\exp(-2\omega_0 t)\Big\{2\|s(0)\|^2\exp(2\omega_0 t_\ell)+2\Big(\frac{B^{(0)}M_0}{\omega_0}\Big)^2[\exp(\omega_0 t_\ell)-1]^2(\|x(0)\|^2+\|y(0)\|^2)\Big\},$$

где $B^{(0)}=\sup\limits_{z\in[0,\ell]}[B(z)]$.

Таким образом, собирая неравенства (9.27) и (9.31), получаем оценку для решения системы (9.6) (без членов Qs и $f(x,y,s)$:

$$\|x(z,t)\|^2+\|y(z,t)\|^2+\|s(z,t)\|^2\le$$

$$\leq M_3^2 \exp(-2\omega_0 t)(\|x(0)\|^2+\|y(0)\|^2+\|s(0)\|^2), \qquad (9.32)$$

где $M_3^2(\omega_0)=\max\{M_0^2(\omega_0)[1+\frac{2B^{(0)2}}{\omega_0^2}(\exp(\omega_0 t_e)-1)^2], 2\exp(2\omega_0 t_e)\}$.

Следовательно, для полугруппы, соответствующей системе (9.6) (без членов $Qs+f(x,y,s)$), имеет место оценка:

$$\|\hat{T}(\hat{A}_3,t)\|_{H_3}\leq M_3(\omega_0)\exp(\omega_0 t), \quad \hat{A}_3=\begin{pmatrix} \mathcal{L}^*-P & 0 \\ B & -\frac{1}{\tau} & 0 \\ 0 & B & \hat{P} \end{pmatrix}, \qquad (9.33)$$

где H_3 – прямое произведение гильбертовых пространств

$H_3=H\times H\times H$ с нормой $\left\|\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right\|_{H_3}^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\|x_3\|^2$,

$x_1,x_2,x_3\in H$; $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\in H_3$.

Соотношение (9.33) позволяет учесть обратную связь по паросодержанию, которая описывается функцией $Q(z)$ в системе (9.6), и определить ее "допустимую величину" (с точки зрения устойчивости). Используя теорию возмущений полугрупп [4], [16], получаем:

$$\|\hat{T}(\hat{A}_3+\hat{Q}_3,t)\|_{H_3}\leq M_3(\omega_0)\exp[-\omega_3(\omega_0)\cdot t], \qquad (9.34)$$

где

$$\hat{Q}_3=\begin{pmatrix} 0 & 0 & Q(z) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \omega_3(\omega_0)=\omega_0-\|\hat{Q}_3\|_{H_3}\cdot M_3(\omega_0).$$

Значение величины ω_0 выбирается исходя из конкретной постановки задачи. Например, если заданы все параметры системы, то чтобы судить об ее устойчивости, нужно максимизировать ω_3:

$$\bar{\omega}_3=\sup_{\omega\in\Delta}[\omega-\|\hat{Q}\|_{H_3}\cdot M_3(\omega)]=\omega_3(\omega_0), \qquad (9.35)$$

где ω_0 – то значение из интервала Δ, которое доставляет супремум в выражении (9.35); Δ определено выражением (9.19).

Если же требуется найти допустимую величину обратной связи по паросодержанию (при прочих заданных параметрах), то ω_0 выбирается из условия

$$\omega_0 - \|\hat{Q}_3\|_{H_3}^{(доп.)} \cdot M_3(\omega_0) = 0,$$

то есть условием устойчивости $(\omega_3 \geqslant 0)$ будет неравенство

$$\|\hat{Q}_3\|_{H_3} \leq \|\hat{Q}_3\|_{H_3}^{(доп)} = \sup_{\omega \in \Delta} \left[\frac{\omega}{M_3(\omega)}\right] = \frac{\omega_0}{M_3(\omega_0)}. \tag{9.36}$$

Аналогичную процедуру оптимизации оценки (9.34) по ω_0 можно произвести при наличии какого-либо другого "свободного" параметра системы.

Переходя к анализу нелинейного члена в системе (9.6), мы предполагаем, что коэффициенты системы таковы, что

$$\omega_3 = \omega_0 - \|\hat{Q}_3\|_{H_3} \cdot M_3(\omega_0) > 0. \tag{9.37}$$

Чтобы выделить часть области допустимых начальных отклонений, воспользуемся результатами работы [13], которые могут быть сформулированы как теорема.

<u>Теорема ХУ.</u> Пусть: 1) эволюционный оператор линеаризованной системы (9.6) подчиняется неравенству $\|\hat{U}(t,\tau)\| \leq C_0 \exp[-\alpha(t-\tau)]$; 2) для системы (9.6) справедлива локальная теорема существования (теорема I, [13]); 3) нелинейный член в системе (9.6) имеет вид $f(x,y,s) = \hat{C}_1 xy + \hat{C}_2 xs$, где $\hat{C}_1, \hat{C}_2 \in B(H)$, $\|\hat{C}_1\|, \|\hat{C}_2\| \leq M$. Тогда система (9.6) асимптотически устойчива, если начальные значения таковы, что

$$\left.\begin{aligned} &\|y(t)\| + \|s(t)\| < \frac{\alpha}{M} - \varepsilon; \\ &\lim_{t\to\infty} \|y(t)\| = \lim_{t\to\infty} \|s(t)\| = 0 \end{aligned}\right\} \text{при } \|x(t)\| \leq \|x(0)\| \exp(-\gamma t), \quad \gamma > 0,\ \varepsilon > 0. \tag{9.38}$$

Как установлено выше, для линеаризованной системы имеет место оценка (9.34), следовательно п. 1 выполнен и $C_0 = M_3$, $\alpha = \omega_3$. Справедливость п. 2 этой теоремы устанавливается просто. Операторы $\hat{C}_1$ и $\hat{C}_2$ в нашей задаче есть операторы умножения на функции $-k_T(z)$ и $k_S(z)$ соответственно, которые считаются достаточно гладкими. Число M определяется следующим образом:

$$M = \max\left\{ \sup_{z\in[0,\ell]} |k_T(z)|, \sup_{z\in[0,\ell]} |k_S(z)| \right\}. \qquad (9.39)$$

Оценки для $\|y(t)\|$ и $\|s(t)\|$ уже получены (см. формулы (9.25) (9.31)). С их помощью легко показать, что условия (9.38) выполняются, если $A\|x(0)\|+B\|y(0)\|+C\|s(0)\| \le \frac{\overline{\omega}_3}{M}-\varepsilon$, где числа A, B, C определяются соответствующими аналитическими формулами.

Теорема ХУI. Пусть имеется реактор, динамика которого описывается системой (9.6). Если имеет место отрицательная обратная связь по температуре горючего $(-P(z)<0)$ и коэффициенты системы таковы, что выполняются условия (9.16) и (9.36), то критическое состояние реактора n^*, T^*, S^* асимптотически устойчиво "в малом". Если, кроме того, выполняется условие (9.37), то имеет место асимптотическая устойчивость "в большом", причем часть области допустимых начальных отклонений определяется неравенством:

$$A\cdot\|x(0)\|+B\|y(0)\|+C\|s(0)\| \le \frac{\overline{\omega}_3}{M}-\varepsilon, \quad \varepsilon>0. \qquad (9.40)$$

В рамках изложенной в этом параграфе методики не удается точно учесть запаздывающие нейтроны. Однако если рассматриваются достаточно медленные процессы, уравнения нейтронной кинетики с запаздывающими нейтронами могут быть сведены к одному уравнению, математически эквивалентному тому, которое входит в исходную модель (9.1). Получим это приближенное уравнение, рассматривая, для упрощения выкладок, одну группу запаздывающих нейтронов. Уравнения нейтронной кинетики можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n(t)}{\partial t} &= D\Delta n + \frac{k_\infty - 1 - \beta}{\ell_0} n + \lambda C; \\ \frac{\partial C(t)}{\partial t} &= -\lambda C + \frac{k_\infty \beta}{\ell_0} n, \end{aligned} \qquad (9.41)$$

где $C(\vec{r},t)$ – концентрация носителей запаздывающих нейтронов; λ – время жизни запаздывающих нейтронов; ℓ_0 – время жизни мгновенных нейтронов; остальные обозначения общеприняты. Система (9.41) эквивалентна, как легко проверить, уравнению

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t}=D\Delta n+\frac{k_\infty-1-\beta}{\ell_0}n+\lambda\Big[C_0\exp(-\lambda t)+$$
$$+\frac{k_\infty\beta}{\ell_0}\int_0^t n(t-\tau)\exp(-\lambda\tau)d\tau\Big], \qquad (9.42)$$

где $C_0=C(\vec{r},0)$ – начальное распределение носителей.

Будем рассматривать процессы, характерные времена которых превышают время жизни запаздывающих нейтронов $(\geqslant 2\div 3\frac{1}{\lambda})$. Пусть, кроме того, нас интересует решение уравнения (9.42) при $t\geqslant(2\div 3)\frac{1}{\lambda}$. Тогда слагаемым $C_0\exp(-\lambda t)$ можно, очевидно, пренебречь. Первое предположение позволяет разложить подынтегральную функцию $n(t-\tau)$ в ряд Тейлора около точки $\tau=0$ и ограничиться двумя членами ряда:

$$n(t-\tau)\cong n(t)-\tau\frac{\partial n}{\partial \tau}. \qquad (9.43)$$

Используя представление (9.43) и рассматривая времена $t\geqslant(2\div 3)\frac{1}{\lambda}$, получаем:

$$\frac{k_\infty\beta}{\ell_0}\lambda\int_0^t n(t-\tau)\exp(-\lambda\tau)d\tau\cong\frac{k_\infty\beta}{\ell_0}\Big[\Big(\int_0^t\lambda\exp(-\lambda\tau)d\tau\Big)n(t)-$$

$$-\frac{\partial n(t)}{\partial t}\int_0^t\lambda\tau\exp(\lambda\tau)d\tau\Big]\cong\frac{k_\infty\beta}{\ell_0}\Big[n(t)\int_0^\infty\lambda\exp(-\lambda\tau)d\tau-$$

$$-\frac{\partial n(t)}{\partial t}\int_0^\infty\lambda\tau\exp(-\lambda\tau)d\tau\Big]=\frac{k_\infty\beta}{\ell_0}n(t)-\frac{k_\infty\beta}{\ell_0}\cdot\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\partial n(t)}{\partial t}. \qquad (9.44)$$

Подставляя результат (9.44) в (9.42), находим искомое приближенное уравнение

$$\frac{1}{\ell_0}\Big(\ell_0+\frac{k_\infty\beta}{\lambda}\Big)\frac{\partial n}{\partial t}=D\Delta n+\frac{k_\infty-1}{\ell_0}n,$$

которое можно переписать в хорошо знакомом виде

$$\frac{\partial n(t)}{\partial t}=D_1\Delta n+\frac{k_\infty-1}{\ell_T}n, \qquad (9.45)$$

где
$$D_1 = D\left(\frac{\ell_0}{\ell_1}\right), \quad \ell_1 = \left(\ell_0 + \frac{k_\infty \beta}{\lambda}\right).$$

Легко видеть, что в приближенном уравнении (9.45) влияние запаздывающих нейтронов учитывается путем введения вместо времени жизни мгновенных нейтронов ℓ_0 некоторого эффективного, учитывающего явление запаздывания, времени жизни ℓ_1.

Уравнение (9.45) в математическом смысле эквивалентно уравнению нейтронной кинетики, входящему в систему (9.1). Поэтому все результаты, полученные в этом параграфе, будут справедливы и в том случае, если рассматриваются не слишком быстрые процессы и нейтронная кинетика (с запаздывающими нейтронами) описывается уравнением (9.45).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Габетлер Г.И., Мартино М.А. Теоремы существования и теория спектров для многогрупповой диффузионной модели. — В кн.: Теория ядерных реакторов/Под ред. Г.Биркхофа и Э.Вигнера/Пер. с англ./Под ред. Г.А. Батя. — М.: 1963; с. 145.

2. Шихов С.Б. Вопросы математической теории реакторов. Линейный анализ. — М.: Атомиздат, 1973.

3. Горяченко В.Д. Методы исследования устойчивости в ядерных реакторах. — М.: Атомиздат, 1977.

4. Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1970.

5. Функциональный анализ./Под ред. С.Г.Крейна.–2–е изд. — М.: Наука, 1972.

6. Усачев Л.Н. Уравнение для ценности нейтронов, кинетика нейтронов и теория возмущений. — В кн.: Реакторостроение и теория реакторов. — М.: 1955, с. 251.

7. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. — М.: Машиностроение, 1973.

8. Лурье А.И. Некоторые нелинейные задачи автоматической теории регулирования. — Л.: Гостехтеориздат, 1951.

9. Горбунов В.П., Попыкин А.И., Шихов С.Б. К вопросу об асимптотической устойчивости ядерного реактора. — В кн.: Вопросы ат. науки и тех. Сер. динамика яд. энерг. установок. — М.: 1972, вып. 1(2), с. 43.

10. Попов В.М. Гиперустойчивость автоматических систем. – М.: Наука, 1970.

11. Smets H.B. Stability in the large of heterogeneous power.– Bull. Cl. Sci. Acad. Roy. Belg., 1961, v. 47, N6, p. 382.

12. Smets H.B. Stability in the large and boundedness of some reactor models.– J. Nucl. Energy, 1963, v. 17, p. 329.

13. Крянев А.В. К вопросу об устойчивости решений нелинейных распределенных уравнений реактора. – Физика ядерных реакторов. – М.: 1968, вып. 1, с. 183 – 191.

14. Горбунов В.П., Шихов С.Б. Нелинейная динамика ядерных реакторов. (Анализ методами А.М. Ляпунова). – М.: Атомиздат, 1975.

15. Шихов С.Б., Щукин Н.В. Условия устойчивости "в большом" для нелинейной распределенной модели кипящего канального реактора. – Физика ядерных реакторов. – М., 1978, вып. 7, с. 98 – 106.

16. Като Т. Теория возмущений линейных операторов/Пер. с англ./Под ред. В.П. Маслова. – М.: Мир, 1972.

17. Шихов С.Б., Щукин Н.В. Метод устойчивости кипящего канального реактора. – Физика ядерных реакторов. – М.: 1978, вып. 7, с. 83 – 97.

18. Филипчук Е.Ф., Потапенко П.Т., Постников В.В. Управление нейтронным полем ядерного реактора. – М.: Энергоиздат, 1981.

19. Емельянов И.Я., Ефанов А.И., Константинов Л.В. Научно-технические основы управления ядерными реакторами. – М.: Энергоиздат, 1981.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Редактор Е.Н. Кочубей
Техн. редактор З. И. Хазова
Корректор Е.А. Жадан

Л-99316 Подписано в печать 1/III-83г.
Формат 60х84 1/16 Объем 5,75 п.л. Уч.-изд.л. 5,0
Тираж 160 экз. Цена 35 коп. Изд. № 091-1
Заказ 2111

Типография МИФИ, Каширское шоссе, 31