

517
P31

93



МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Б. А. Вахненко А. С. Корсун А. А. Романов В. В. Шако



ФАКУЛЬТЕТ
ТЕХНИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ

**РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
И КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ
ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ**

Москва 1989

517
P31

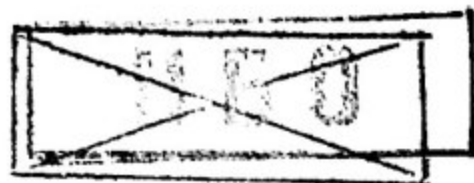
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Б.А. Вахненко А.С. Корсун А.А. Романов В.В. Шако

РЕАЛИЗАЦИЯ МЕТОДОВ
КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
И КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ
ДЛЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Под ред. Б.А. Вахненко



Утверждено
редсоветом института
в качестве учебного пособия



Москва 1989

Библиотечный
фонд
НИЯУ МИФИ
г. Москва

Вахненко Б.А., Корсун А.С., Романов А.А., Шако В.В. Реализация методов конечных элементов и конечных разностей для задач теплопроводности/Под ред. Б.А. Вахненко. М.: МИФИ, 1989. — 24 с.

Описывается применение метода конечных разностей и метода конечных элементов для решения задач теплопроводности на примере задачи об оробренной стенке. Представлено решение этой же задачи приближенным аналитическим методом.

В кратком введении в метод конечных элементов рассмотрены вариационный и проекционный методы для получения конечно-элементного представления задач, методика реализации, недостатки и преимущества метода. Решение задачи об оробренной стенке тремя указанными методами реализовано в виде программ для ЭВМ. Это позволяет провести сравнение методов между собой.

Пособие может быть рекомендовано для студентов старших курсов и инженеров.



Московский
инженерно-физический
институт, 1989 г.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В ряде устройств для улучшения теплосъема используются оребренные поверхности теплообмена. Этот способ улучшения теплосъема эффективен при малых коэффициентах теплоотдачи от поверхности к теплоносителю при высокой теплопроводности материала ребер. Развитие поверхности позволяет в этом случае либо увеличить потоки тепла при тех же температурных напорах, либо понизить температуру теплоотдающей поверхности, если тепловой поток через стенку остается неизменным.

Если же коэффициент теплоотдачи велик, а ребро изготовлено из материала с низким значением коэффициента теплопроводности, то оребрение может привести к уменьшению количества тепла, передаваемого через оребренную поверхность. В таком случае использование оребренных поверхностей нецелесообразно (например, при теплообмене при кипении).

Рассмотрим стенку с прямоугольными ребрами (рис. 1), через которую необходимо передать поток тепла Q (Вт) от одного теплоносителя (температура T_1 , коэффициент теплоотдачи α_1) ко второму, который имеет температуру T_2 , коэффициент теплоотдачи α_2 и омывает оребренную сторону стенки.

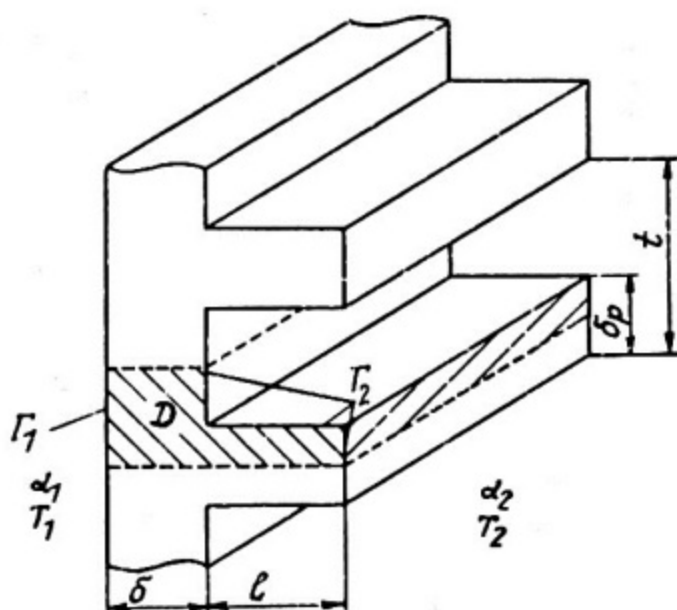


Рис. 1. Оребренная стенка

Целью работы является определение оптимальной высоты ребер $l_{опт}$, при которой масса разделяющей стенки минимальна. При этом толщина стенки δ , шаг t и толщина ребер δ_p предполагаются неизменными.

Увеличение высоты ребер приводит к увеличению коэффициента теплопередачи k и уменьшению площади S разделяющей теплоносители стенки, необходимой для передачи заданного потока тепла Q :

$$S = \frac{Q}{k(T_1 - T_2)}$$

Искомая суммарная масса стенки

$$M = \pi \cdot S,$$

где π – масса стенки единичной площади ($1/\text{м}^2$), S – площадь стенки (м^2).

При увеличении высоты ребер площадь S уменьшается, но π – растет. Наличие таких конкурирующих процессов является основой для постановки задачи оптимизации.

Эквивалентная ячейка, для которой необходимо решать задачу теплопроводности, выделена на рис. 1 в виде заштрихованной области D и показана более подробно на рис. 2.

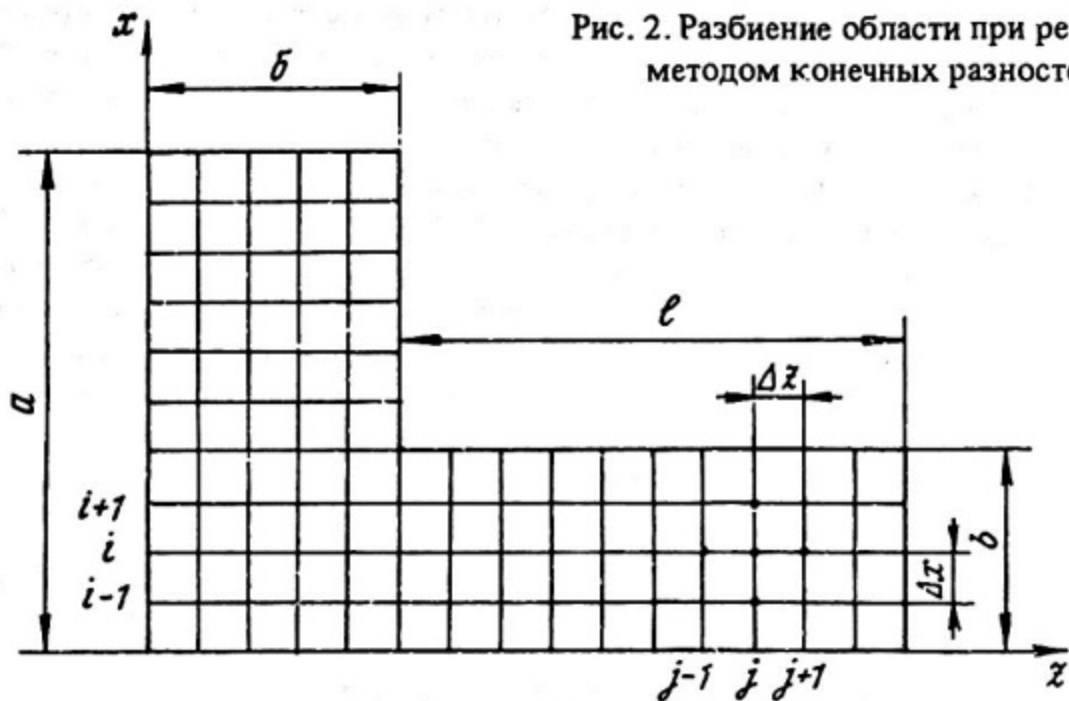


Рис. 2. Разбиение области при решении методом конечных разностей

Поле температур однородно вдоль оси y , т.е. $T = T(x, z)$. Через поверхности $x = 0$ и $x = a$ поток тепла отсутствует. Боковые поверхности Γ_1 и Γ_2 омываются теплоносителями: слева с температурой T_1 , справа – T_2 . Уравнение, описывающее поле температур в эквивалентной ячейке, имеет вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0; \quad (x, z) \in D, \quad (1)$$

граничные условия

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0, \quad x = 0, a; \quad (2)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial z} = \alpha_1 (T - T_1), \quad (x, z) \in \Gamma_1; \quad (3)$$

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha_2 (T - T_2), \quad (x, z) \in \Gamma_2. \quad (4)$$

Здесь $\frac{\partial T}{\partial n}$ — производная температуры по нормали к границе.

Ниже описываются три метода решения задачи (1)–(4): приближенный аналитический, конечно-разностный и конечно-элементный.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Так как число Био для ребра мало ($\frac{\alpha_2 \delta_p}{\lambda} \ll 1$), то можно принять, что температурное поле в ребре одномерное, т.е. температура в ребре изменяется только по x . Это позволит разбить задачу (1)–(4) на две. В начале решается уравнение теплопроводности в ребре, определяется некий эффективный коэффициент теплоотдачи $\alpha_{эф}$ (рис. 3,а), а затем ищется решение уравнения теплопроводности в прямоугольном элементе (рис. 3,б) с использованием полученного $\alpha_{эф}$ в качестве граничного условия.

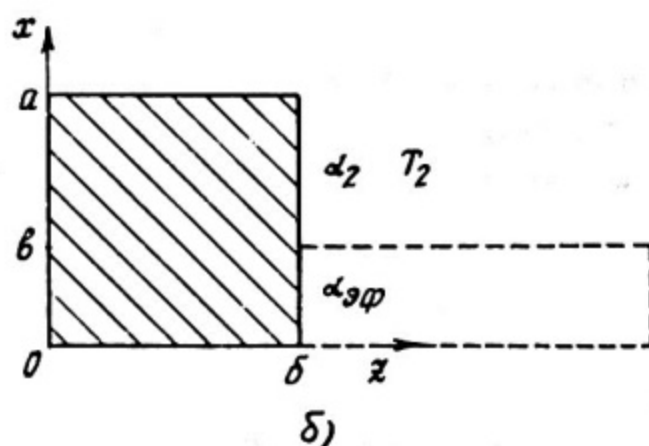
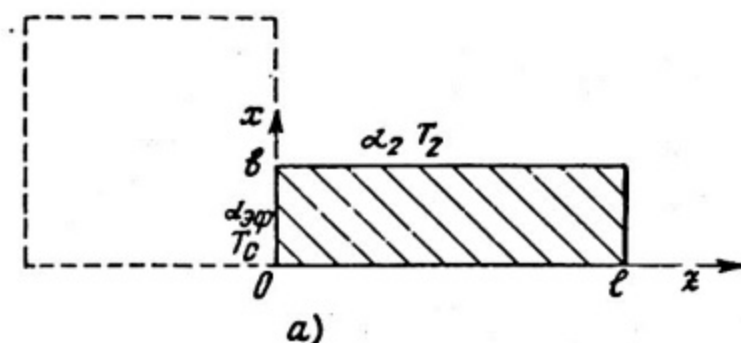


Рис. 3. Разбиение области при решении приближенным аналитическим методом

2.1. Поле температур в ребре. Эффективный коэффициент теплоотдачи

Уравнение теплопроводности тонкого ребра имеет вид (см. рис. 3,а)

$$\lambda F \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - q_F \Pi = 0, \quad (5)$$

где $q_F = \alpha_2 (T - T_2)$.

Введем новую переменную $\vartheta = T - T_2$ и, учитывая, что отношение периметра к площади поперечного сечения плоского ребра равно его полутолщине ($\Pi/F = 1/b$), получим

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \pi^2 \vartheta = 0, \quad \pi^2 = \frac{\alpha_2}{\lambda b}. \quad (6)$$

Граничные условия

$$-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=l} = \alpha_2 \vartheta; \quad (7)$$

$$\vartheta(x=0) = \vartheta_0 = T_0 - T_2.$$

Через T_0 в (7) обозначена температура в основании ребра.

Решение уравнения (6) при граничных условиях (7) имеет вид

$$\vartheta(x) = \vartheta_0 \left(\operatorname{ch} \pi x - \frac{\frac{\alpha_2}{\lambda \pi} + tk \pi l}{1 + \frac{\alpha_2}{\lambda \pi} tk \pi l} \operatorname{sh} \pi x \right). \quad (8)$$

Из (8) следует, что тепловой поток из стенки в ребро $\left(-\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=0} \right)$ пропорционален $(T_0 - T_2)$. Это означает, что влияние ребра эквивалентно заданию на поверхности стенки в месте присоединения ребра (см. рис. 3,б) эффективного коэффициента теплоотдачи

$$\alpha_{\text{эф}} = \frac{-\lambda}{\vartheta_0} \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \Big|_{x=0}.$$

Вычисления дают

$$\frac{\alpha_{\text{эф}}}{\alpha_2} = \frac{1}{\sqrt{Bi}} \frac{\sqrt{Bi} + tk \frac{l}{b} \sqrt{Bi}}{1 + \sqrt{Bi} tk \frac{l}{b} \sqrt{Bi}}. \quad (9)$$

Здесь $Bi = \frac{\alpha_2 b}{\lambda}.$

2.2. Коэффициент теплопередачи

Используя полученное значение $\alpha_{эп}$, задачу (1)–(4) можно свести к задаче теплопроводности в прямоугольнике (см. рис. 3,б):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0, \quad 0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq z \leq \delta \quad (10)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=0} &= 0; \\ \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=a} &= 0; \\ \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=0} &= -\frac{\alpha_1}{\lambda} (T(x=0) - T_1); \\ \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=\delta} &= -\frac{\alpha^*(x)}{\lambda} (T(x=\delta) - T_2), \end{aligned} \quad (11)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{z=\delta} = -\frac{\alpha^*(x)}{\lambda} (T(x=\delta) - T_2),$$

где

$$\alpha^*(x) = \begin{cases} \alpha_2, & b \leq x \leq a; \\ \alpha_{эп}, & 0 \leq x < b. \end{cases}$$

Задачу (10)–(11) также решим приближенно. Поскольку $\delta \ll a$, то будем пренебрегать перетечками тепла по пластине в направлении x (при этом найденный таким образом коэффициент теплопередачи будет несколько занижен по сравнению с действительным). В этом случае вместо (10) имеем

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0,$$

т.е. температура изменяется линейно по толщине стенки, а тепловой поток равен

$$q(x) = \begin{cases} \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{эп}}} & \text{на участке } 0 \leq x < b; \\ \frac{T_1 - T_2}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}} & \text{на участке } b \leq x < a. \end{cases}$$

Коэффициент теплопередачи оребренной стенки

$$k = \frac{\frac{1}{a} \int_0^a q(x) dx}{T_1 - T_2} =$$

$$= \frac{\frac{b/a}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{эф}}} + \frac{1-b/a}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}}{T_1 - T_2} \quad (12)$$

2.3. Масса стенки. Определение оптимальной высоты ребра

Необходимая поверхность теплообмена определяется из соотношения

$$S = \frac{Q}{k(T_1 - T_2)},$$

масса единицы поверхности стенки

$$m = \rho \left(\delta + l \frac{b}{a} \right),$$

и полная масса стенки

$$M(l) = mS = \frac{Q\rho \left(\delta + l \frac{b}{a} \right)}{(T_1 - T_2)k(l)} = \frac{Q\rho}{T_1 - T_2} F(l),$$

где

$$F(l) = \frac{\delta + l \frac{b}{a}}{\frac{b/a}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_{эф}(l)}} + \frac{1-b/a}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{\delta}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}}$$

Оптимальная высота ребер определяется из уравнения

$$\frac{dF}{dl} = 0. \quad (13)$$

Уравнение (13) решалось методом итераций. По найденному $l_{опт}$ определялись $\alpha_{эф}$, коэффициент теплопередачи k , поверхность и масса стенки.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

В методе конечных разностей дифференциальные уравнения приближенно представляются в виде конечно-разностных уравнений, связывающих

8

значения температур в конечном числе узловых точек. Схема размещения узловых точек в рассматриваемой области показана на рис. 2. Аппроксимация дифференциальных уравнений конечно-разностными может быть получена с помощью разложения в ряд Тейлора методом "балансов" и другими методами. При этом полученные разными методами конечно-разностные уравнения и их свойства могут быть различны.

Для получения конечно-разностного аналога уравнения (1) в данной работе используем прямую аппроксимацию вторых производных. Вторую производную $\partial^2 T / \partial x^2$ в точке (i, j) приближенно представим в виде

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{ij} \approx \left[\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} - \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j} \right] / \Delta x,$$

где индекс " $i + 1/2$ " соответствует координате $x_i + \frac{\Delta x}{2}$.

Представляя значения первых производных в виде

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i+\frac{1}{2},j} \approx \frac{T_{i+1,j} - T_{i,j}}{\Delta x}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{i-\frac{1}{2},j} \approx \frac{T_{i-1,j} - T_{i,j}}{\Delta x},$$

получим

$$\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\right)_{i,j} \approx \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2}.$$

Отсюда получаем конечно-разностный аналог уравнения (1):

$$\frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1}}{\Delta z^2} = 0.$$

При составлении конечно-разностных уравнений для граничных точек учитываются условия (2)–(4). В итоге общее количество уравнений оказывается равным числу неизвестных значений температуры в узловых точках.

Для решения полученной системы уравнений составлена программа "SBK", в результате выполнения которой производится расчет распределения температуры в элементе ребра, величины передаваемого теплового потока, коэффициента теплопередачи, массы.

3.1. Порядок выполнения расчета на ЭВМ

В начале работы производится выбор варианта задачи. Варианты задачи отличаются между собой значениями коэффициентов теплоотдачи, температур теплоносителя, коэффициента теплопроводности материала ребра, заданного теплового потока, который необходимо передать через обремененную поверхность, а также значениями геометрических параметров. При вводе

номера варианта на экране высвечивается таблица значений параметров. Изменяемой величиной является длина ребра.

Первый этап работы — расчет оптимальной длины ребра описанным выше приближенным аналитическим методом. Задается некоторое произвольное начальное значение длины ребра. После расчета на экран выводятся длины ребра (начальная и оптимальная) и соответствующие оптимальной длине коэффициент теплоотдачи, масса теплообменника, передаваемый через ребро тепловой поток.

На втором этапе производится численный расчет на основе метода конечных разностей. После введения значения длины ребра осуществляется автоматическое разбиение элементарной ячейки (см. рис. 2), и на экран выводятся общее количество и координаты точек разбиения по осям. После численного расчета полей температуры при заданном значении ζ на экран выводятся распределения температуры на трех участках поверхности ребра, значения величины теплового потока, коэффициента теплопередачи и массы теплообменника. Затем появляется сообщение: "Задайте новое значение длины ребра".

После ввода нового значения ζ процедура численного расчета повторяется. Так можно продолжать до тех пор, пока данных не станет достаточно для построения зависимости массы теплообменника от длины ребра с целью определения $\zeta_{опт}$, соответствующей минимальной массе теплообменника при заданном потоке Q . Далее следует построить график зависимости $M = f(\zeta)$, определить $\zeta_{опт}$ и сравнить со значением, рассчитанным ранее приближенным аналитическим методом.

По окончании работы на экран выводится итоговая таблица заданных значений ζ и рассчитанных величин Q , k и M .

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

4.1. Введение в метод конечных элементов

Построение решения задачи методом конечных элементов (МКЭ) осуществляется следующим образом.

Вместо краевой задачи, содержащей дифференциальное уравнение, описывающее данный процесс, а также граничные и начальные условия, рассматривается интегральное уравнение, эквивалентное этой системе. Интегральное уравнение может быть получено из соответствующей вариационной задачи, методом Галеркина и другими методами.

Проводится разбиение области решения на элементы: линейные отрезки; треугольные, прямоугольные, многоугольные элементы; тетраэдры, параллелепипеды соответственно для одномерных, двумерных и трехмерных задач.

На элементах выбираются точки (узлы). Узлы могут быть внутри элементов и обязательно на границах.

Искомая функция представляется на каждом элементе полиномом, который определяется с помощью значений этой функции в узлах элемента (узловых значений). Для каждого элемента может быть свой полином, но в целом по области функция должна быть кусочно-непрерывной.

Подстановка выбранного вида функции в интегральную формулировку задачи сводит получение приближенного решения к решению системы алгебраических уравнений относительно узловых значений функции.

Рассмотрим этапы построения решения методом конечных элементов подробнее.

В качестве примера эквивалентности краевой задачи и задачи в вариационной постановке рассмотрим функционал

$$J(u) = \iiint_D F(x, y, z, u_x, u_y, u_z, u) dx dy dz, \quad (14)$$

где u — функция непрерывная вместе со своими производными до второго порядка включительно, значения которой на границе области D заданы. Можно показать, что необходимое условие экстремума $J(u)$ состоит в том, что $u(x, y, z)$ должна удовлетворять уравнению Эйлера—Лагранжа:

$$\frac{\partial}{\partial x} F_{u_x} + \frac{\partial}{\partial y} F_{u_y} + \frac{\partial}{\partial z} F_{u_z} - F_u = 0. \quad (15)$$

В частности, уравнение теплопроводности

$$\Delta u + f(x, y, z) = 0 \quad (16)$$

с граничными условиями первого рода является необходимым условием минимизации функционала

$$J(u) = \iiint_D \frac{1}{2} (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 - 2uf) dx dy dz. \quad (17)$$

Соответствующие вариационные формулировки можно получить и для других граничных условий.

Решение вариационной задачи (17) вместо уравнения Эйлера (16) обладает тем преимуществом, что можно ослабить требования к функции u , а именно требовать наличия у u только кусочно-непрерывных первых производных, тогда как при рассмотрении уравнения Эйлера требуется существование у решения вторых производных.

Будем искать приближенное решение задачи в виде

$$u_N = \sum_{i=1}^N a_i \psi_i(x, y, z), \quad (18)$$

где $\{\psi_i\}$ — полная система линейно независимых функций. Тогда решение вариационной задачи классическим методом Ритца сводится к решению системы уравнений

$$\frac{\partial \mathcal{J}(u_N)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (19)$$

Система (19) будет линейной относительно неизвестных a_i , если функционал F квадратичен относительно u, u_x, \dots , как, например, в соотношении (17). Для этого оператор L задачи

$$Lu = f; \quad (20)$$

$$Gu = g \quad (21)$$

должен удовлетворять определенным условиям. Пусть, например, $Lu = \partial^2 u / \partial x^2$. Тогда при однородных граничных условиях второго рода или при $\varphi_i = 0$ на границе области справедливо

$$\frac{\partial \mathcal{J}(u_N)}{\partial a_i} = (L(u_N) - f, \varphi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (22)$$

Здесь введено обозначение для скалярного произведения $(f_1, f_2) = \int f_1 f_2 dx$ и использовано взятие интеграла по частям. Соотношение (22) показывает, что в случае данной конкретной задачи вариационный метод Ритца совпадает с методом Галеркина, который является частным случаем проекционного метода (метода взвешенных невязок).

Суть проекционного метода состоит в следующем. Решение некоторой задачи (20)–(21) ищем в виде (18). Подстановка приближенного решения в (20)–(21) приводит, вообще говоря, к возникновению отличных от нуля погрешностей (невязок)

$$L(u_N) - f = \varepsilon; \quad (23)$$

$$G(u_N) - g = \varepsilon_r, \quad (24)$$

если решение не выбрано специальным образом так, чтобы $\varepsilon = 0$ или $\varepsilon_r = 0$. Тогда минимизация этих невязок может быть осуществлена "проектированием" невязок на базисную систему $\{\psi_i\}$ (из условия ортогональности невязок каждой из базисных функций ψ_i). В частности, минимизация ε запишется в виде соотношения

$$(L(u_N) - f, \psi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (25)$$

В случае $\psi_{\xi} = \varphi_{\xi}$ системы (22) и (25) совпадают. Нужно отметить, что существует много задач, для которых нельзя подобрать соответствующий вариационный принцип. Однако проекционные методы в этих случаях остаются применимыми.

Если функции φ_{ξ} определены ненулевыми на всей области, то матрица системы (19) будет плотной. Решение систем уравнения с плотными матрицами требует значительных памяти и процессорного времени на ЭВМ.

Характерной особенностью метода конечных элементов наряду с использованием вариационных или проекционных методов является использование в качестве базисных функций $\{\varphi_{\xi}\}$ функций с конечными носителями (финитных функций).

Для построения таких функций область, в которой решается задача, разбивается на подобласти, которые называются *конечными элементами*. Например, одномерная область на рис. 4 разбивается на отрезки А, В и т.д. Затем на каждом элементе или на объединении их небольшого числа, примыкающих к данному узлу, строится финитная базисная функция, представляющая собой многочлен и равная нулю вне данного элемента или объединения элементов.

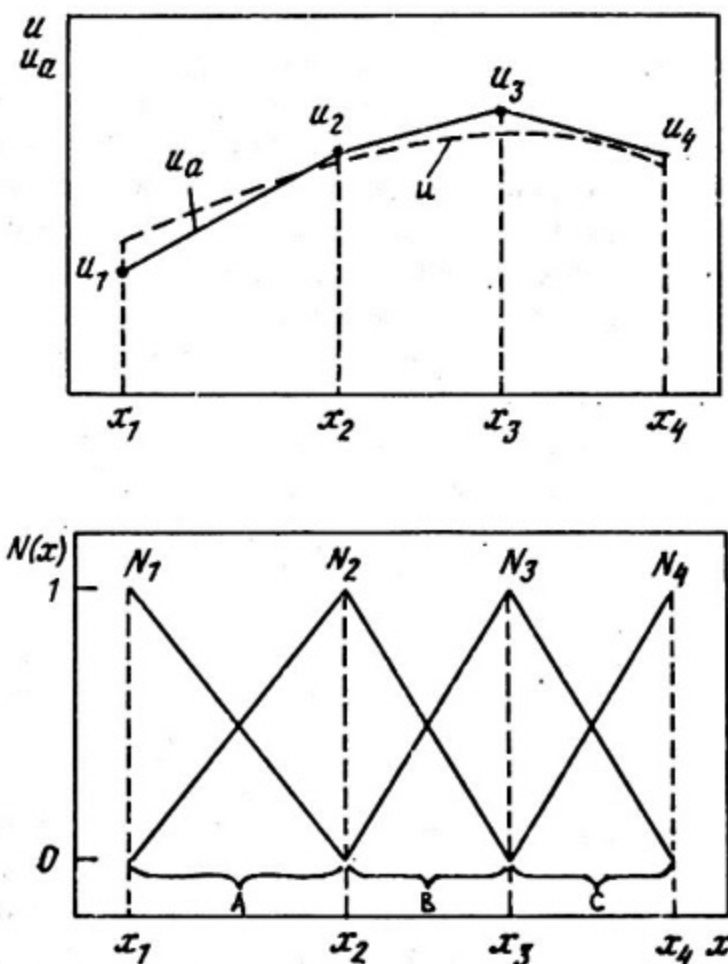


Рис. 4. Конечно-элементное решение при помощи линейных функций формы

Например, приближенное решение u_α для одномерной области $x_1 \leq x \leq x_4$ на рис. 4 можно представить в виде

$$u_\alpha = \sum_{i=1}^4 u_i N_i(x). \quad (26)$$

Сравнивая соотношения (18) и (26), можно видеть, что неизвестные коэффициенты α_i в (18) принимают смысл узловых значений u_i функции u_α , относительно которых и должна быть решена задача. В качестве базисных функций $\psi_i(x)$ использованы финитные функции $N_i(x)$ (часто называемые в литературе по конечным элементам функциями формы или интерполяционными функциями). В данном случае $N_i(x)$ представляют собой кусочно-линейные полиномы. Эти функции линейно убывают от максимального значения в данном узле, равного единице, до нуля в соседних узлах и остаются равными нулю в остальной части области. Таким образом, хотя представление (26) имеет глобальный характер, внутри каждого элемента только две функции формы и две узловые неизвестные дают в это представление вклад, отличный от нуля.

Если те же самые функции формы N_i используются в проекционном методе (25) и в качестве поверочных функций ψ_i (метод Галеркина), то при расчете содержащего невязку скалярного произведения (25) ненулевые вклады будут давать лишь два соседних элемента. Например, если $N_2(x)$ используется в качестве поверочной функции, то ненулевые вклады будут получены только от элементов А и В (см. рис. 4). Отсюда следует, что во втором алгебраическом уравнении, получаемом из системы (25), будут присутствовать в качестве неизвестных лишь узловые переменные u_1, u_2, u_3 . И в общем случае многомерных задач с базисными функциями более высокого порядка метод конечных элементов сводится к решению систем алгебраических уравнений с ленточными или разреженными матрицами. Это позволяет использовать для их решения специальные экономичные методы.

Сохраняя форму представления приближенного решения (26), рассмотрим случай кусочно-квадратичных функций $N_i(x)$ (рис. 5). Приближенное решение внутри каждого элемента определяется теперь тремя функциями формы. Применение метода Галеркина с N_3 в качестве поверочной функции приводит к появлению в алгебраическом уравнении уже пяти узловых неизвестных от u_1 до u_5 . Использование кубических функций формы увеличивает количество неизвестных уравнений до семи.

Если при решении задачи необходимо обеспечить непрерывность и первой производной, то это обеспечивает применение полиномов Эрмита. В этом случае в качестве узловых переменных рассматриваются и значения функции и значения первых производных. Если же требуется непрерывность высших производных, то можно применять В-сплайны.

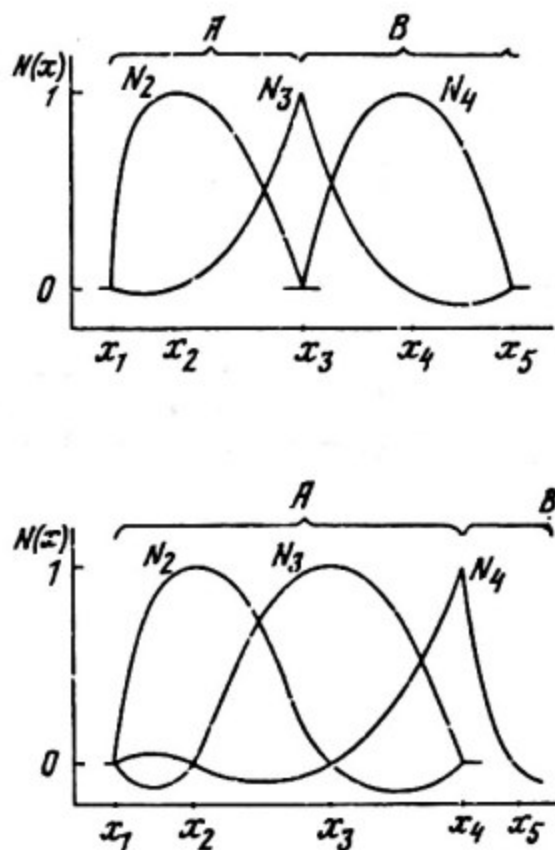


Рис. 5. Одномерные квадратичные и кубические функции формы

В качестве элементов для двумерных задач используются два основных семейства — треугольные и четырехугольные (рис. 6). Стороны могут быть прямыми или криволинейными. Количество узлов на сторонах и внутри элементов должно быть согласовано со степенью интерполирующего полинома. На рис. 7 показан вид квадратичных функций формы на треугольном элементе.

Форма некоторых трехмерных элементов показана на рис. 8.

Преимущества метода:

1. Возможность использования неравномерного разбиения в разных зонах области для повышения точности решения без существенного увеличения расчетных затрат.
2. Возможность достаточно точной аппроксимации границ сложной формы.
3. Возможность рассмотрения разрывных и смешанных граничных условий.

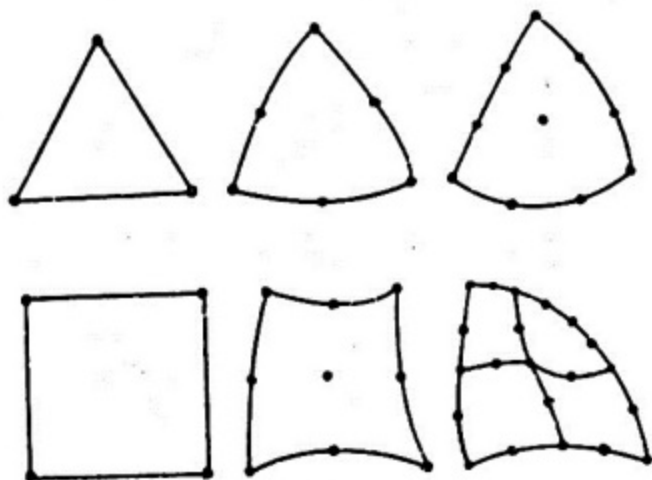


Рис. 6. Двумерные треугольные и четырехугольные элементы

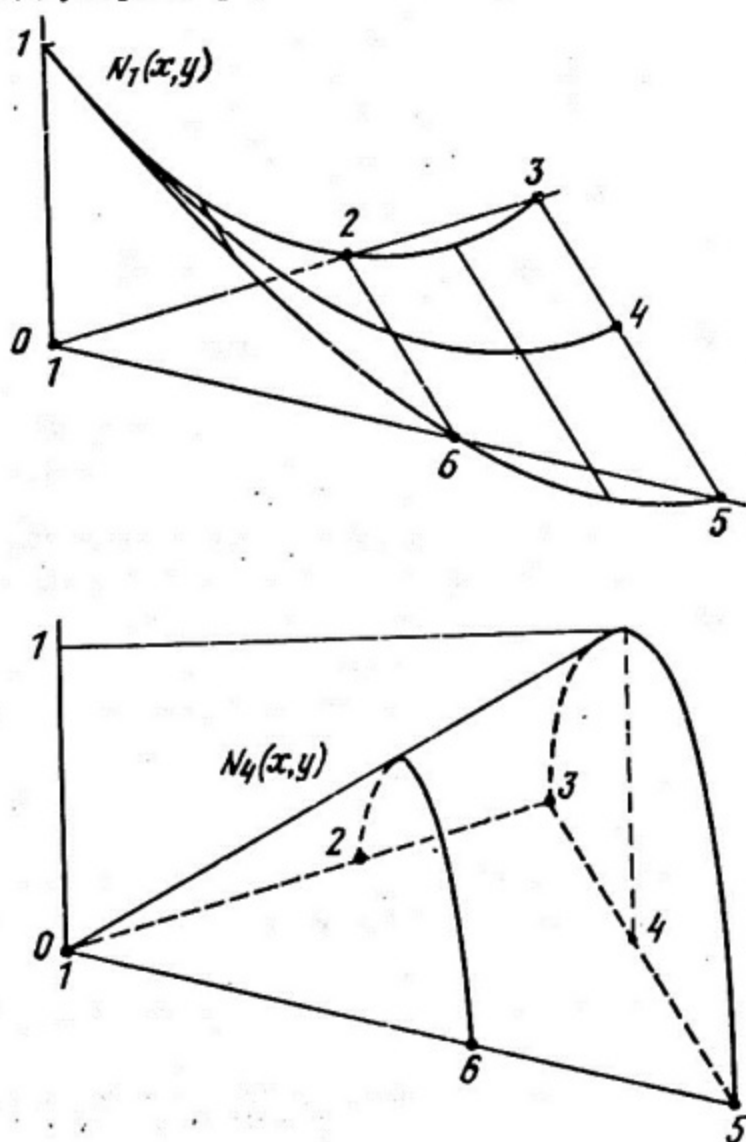


Рис. 7. Квадратичные функции формы на треугольном элементе

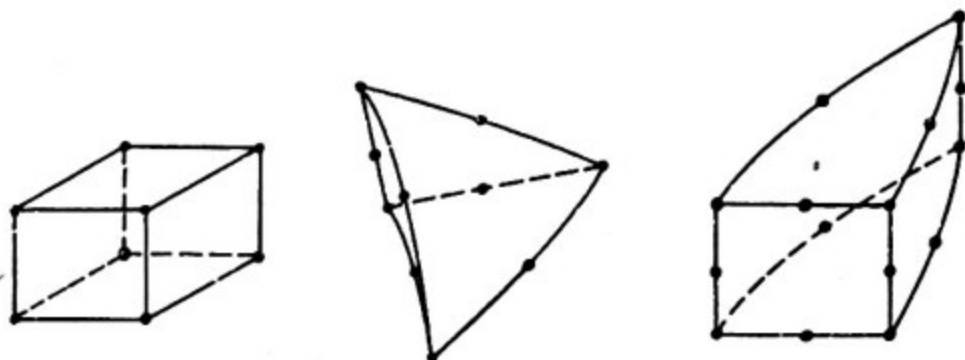


Рис. 8. Примеры трехмерных элементов

4. Возможность построения универсальных программ для решения задач определенного класса.

Основным недостатком метода можно считать, по-видимому, относительно большой объем необходимой памяти для ЭВМ.

4.2. Метод решения

Для решения задачи о ребре (1)–(4) используем МКЭ с методом Ритца в качестве способа аппроксимации.

В вариационной постановке решение краевой задачи (1)–(2) эквивалентно описанию функции $T(x, z)$, на которой имеет минимум функционал

$$J(T) = \lambda \int_D \left(\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z} \right)^2 \right) dx dz + \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \alpha (T - T_{\text{ж}})^2 d\Gamma ; \quad (27)$$

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_1, & (x, z) \in \Gamma_1 ; \\ \alpha_2, & (x, z) \in \Gamma_2 ; \end{cases}$$

$$T_{\text{ж}} = \begin{cases} T_1, & (x, z) \in \Gamma_1 ; \\ T_2, & (x, z) \in \Gamma_2 . \end{cases}$$

Минимизация функционала (27) осуществляется на конечном множестве значений температуры в узлах сетки из треугольных элементов, которыми покрывается расчетная область D . В пределах каждого элемента функция $T(x, z)$ аппроксимируется линейной функцией вида

ЭЛЕМЕНТАРНЫМ
ФОНД
НИЯУ МИФИ
г. Москва

$$T_l(x, z) = \varphi_i^l(x, z) T_i + \varphi_j^l(x, z) T_j + \varphi_k^l(x, z) T_k ; \quad (28)$$

$$\varphi_i^l(x, z) = \frac{1}{2S_l} (a_i^l + b_i^l x + c_i^l z) ; \quad (29)$$

$$a_i^l = x_j z_k - x_k z_j, \quad b_i^l = z_j - z_k, \quad c_i^l = x_k - x_j \quad (30)$$

(l — номер элемента (треугольника); i, j, k — номера узлов — вершин данного элемента; S_l — площадь элемента; x_i, z_i — координаты вершин; φ_i^l — функции формы).

Функционал (27) после замены гладкой функции $T(x, z)$, аппроксимирующей ее на всей области D совокупностью линейных функций $T_l(x, z)$, можно представить суммой по отдельным элементам:

$$J = \sum_{l=1}^L J_l.$$

Тогда условие экстремума функционала записывается в виде

$$\frac{\partial J}{\partial T_i} = \sum_{l=1}^L \frac{\partial J_l}{\partial T_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (31)$$

Здесь L — число элементов, M — число узловых точек в расчетной области.

Используя выражения для функций $T_l(x, z)$ (28) и функционала (27), после ряда преобразований можно получить систему линейных алгебраических уравнений относительно температур в узловых точках $T_i, i = 1, \dots, M$ вида

$$[Q] \{T\} = \{F\}, \quad (32)$$

где $\{T\}$ — вектор неизвестных узловых температур, $[Q]$ — матрица коэффициентов размером $M \times M$ с ленточной структурой, $\{F\}$ — вектор правой части.

Компоненты матрицы $[Q]$ и вектора $\{F\}$ определяются суммированием по элементам (т.е. по индексу " l " от 1 до L) соответствующих компонентов матриц $[\hat{Q}_l]$ размером 3×3 :

$$[\hat{Q}_l] = \frac{\lambda}{4S_l} \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{(\alpha_l \gamma_l)_{12}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(\alpha_l \gamma_l)_{13}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \frac{(\alpha_l \gamma_l)_{23}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

и трехкомпонентного вектора :

$$\left\{ \begin{matrix} \hat{F}_l \\ \hat{F}_l \end{matrix} \right\} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \frac{(\alpha_{T_{ж}} \gamma)_{12}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{(\alpha_{T_{ж}} \gamma)_{23}}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{(\alpha_{T_{ж}} \gamma)_{23}}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

Индексы "12", "13", "23" определяют стороны треугольника, γ — их длина. Величины B зависят от коэффициентов функций формы (29).

Каждый из компонентов матрицы $[\hat{Q}_l]$ и вектора $\{\hat{F}_l\}$ является слагаемым одного из компонентов матрицы $[Q]$ и вектора $\{F\}$ (рис. 9). Если 1-я, 2-я и 3-я вершины данного треугольника в общей (глобальной) нумерации узлов расчетной области имеют номера соответственно i, j, k , то соответствие между элементами матриц $[\hat{Q}_l]$ и $[Q]$, $\{\hat{F}_l\}$ и $\{F\}$ определяется простой заменой индексов "1", "2" и "3" в формулах (33), (34) на i, j и k .

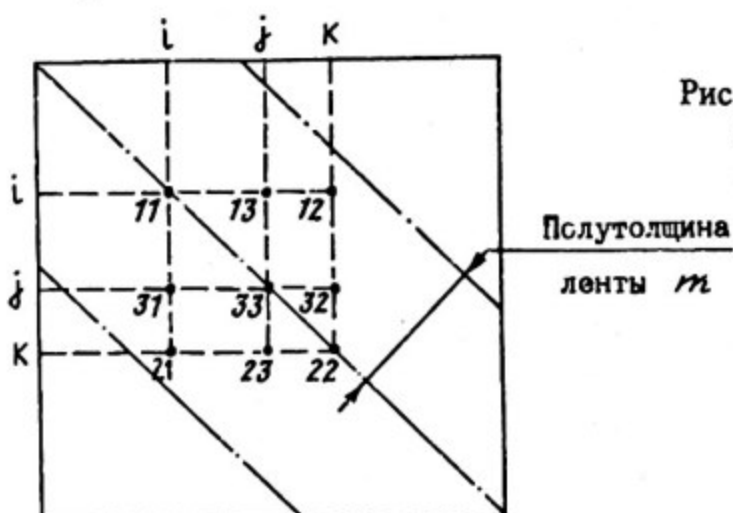


Рис. 9. Соответствие между элементами матриц $[\hat{Q}_l]$ и $[Q]$

Ширина ленты матрицы $[Q]$ определяется разностью номера строки и столбца ненулевого компонента матрицы, наиболее удаленного от главной диагонали. Из этого следует, что ширина ленты зависит от нумерации узлов разбиения. Чем меньше разность номеров i, j, k узлов, образующих треугольники, тем меньше ширина. Полуширина ленты m (рис. 9) выражается формулой

$$m = \max_{l=1, \dots, L} (|i-j|, |i-k|, |j-k|) + 1. \quad (35)$$

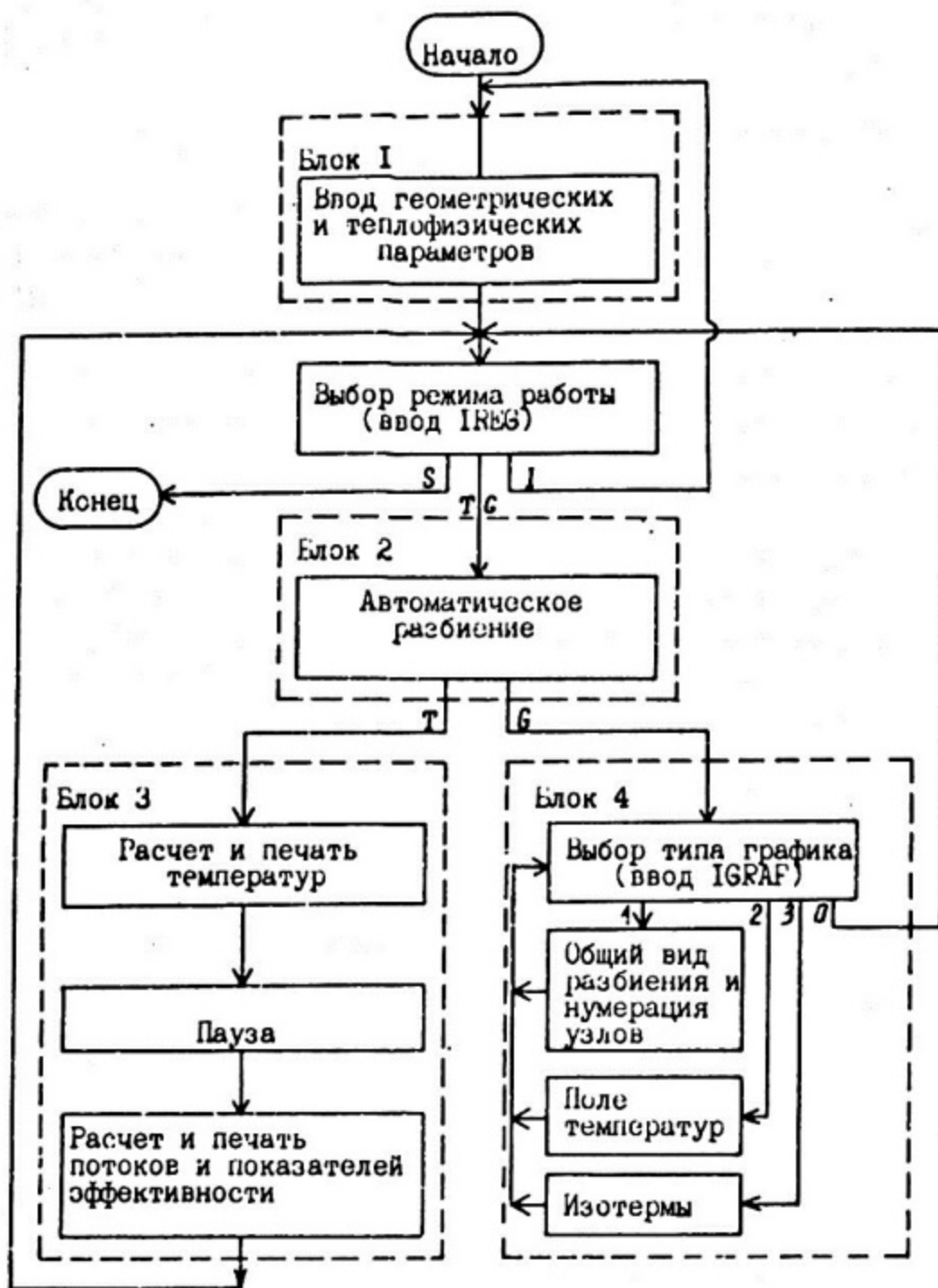


Рис. 10. Блок-схема программы MFERIB

4.3. Описание программы

Программа расчета поля температур в оребренной стенке *MFERIB* состоит из четырех основных блоков (рис. 10):

- 1) ввода геометрических и теплофизических параметров;
- 2) автоматического разбиения области на элементы;
- 3) расчета температур, потоков и показателей эффективности оребрения;
- 4) графического представления разбиения области и результатов расчета.

4.3.1. *Ввод параметров.* В качестве геометрических параметров вводятся величины X_1, Y_1, X_2, Y_2 , определяющие размеры ребра в миллиметрах (рис. 11); величины NX_1, NY_1, NX_2, NY_2 , соответствующие количеству равных отрезков, на которые разбиваются соответствующие участки границы области.

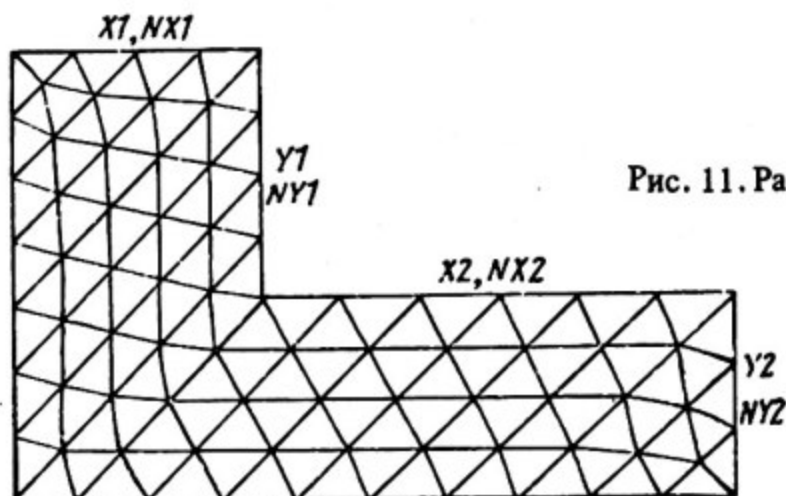


Рис. 11. Разбиение области на элементы

Теплофизические параметры:

AL_1, TG_1, AL_2, TG_2 – значения коэффициентов теплоотдачи и температуры жидкости с неоребренной и оребренной стороны соответственно;
 $LAMD$ – коэффициент теплопроводности материала ребра.

При вводе указанных исходных данных на экране высвечивается таблица с обозначением параметров и их начальными значениями. Если необходимо изменить указанное в таблице значение, следует набрать новое и нажать $\langle CR \rangle$. Если же указанное значение изменять не требуется, – просто нажать $\langle CR \rangle$. Изменив все требуемые значения, следует ввести управляющий символ $\langle CTRL \rangle / Z$, чтобы сообщить программе об окончании ввода исходных данных. Завершать ввод можно таким способом на любом параметре.

4.3.2. *Выбор режима работы.* После ввода данных производится выбор режима работы (т.е. выбор одного из четырех блоков). При вводе символов

•T•, •G•, "1" программа выходит соответственно на расчет температур, графический блок и ввод параметров. При вводе "S" программа завершает работу.

Блок автоматического разбиения области вызывается самой программой перед каждым обращением к блокам 3 и 4.

4.3.3. *Автоматическое разбиение области.* Для формирования системы уравнений (32) необходимо задание ряда массивов геометрических и теплофизических исходных данных. В том числе: массивов координат узлов разбиения; целочисленных массивов, определяющих номера узлов, образующих каждый элемент; массивов коэффициентов теплопроводности и тепловыделений в каждом элементе и других. В общем случае процедура ввода исходных данных отличается трудоемкостью и часто приводит к ошибкам. Поэтому обычно в программах, реализующих МКЭ, используется процедура автоматического разбиения области. Под этим подразумевается формирование перечисленных выше громоздких массивов с помощью специальных подпрограмм. Ценой некоторых ограничений, накладываемых на расположение узловых точек, эта процедура позволяет примерно на порядок уменьшить объем входной информации.

В программе *MPERIB* использован один из алгоритмов автоматического разбиения. Упомянутые ограничения состоят в том, что все расчетные точки располагаются на непересекающихся отрезках прямых, соединяющих противоположные участки границы (рис. 11). Приняв равномерное распределение узлов на каждом отрезке на границе и внутри области, можно свести все геометрические исходные данные к перечисленным выше.

После завершения работы блока на экран выводятся основные количественные характеристики разбиения: M — число узлов разбиения; NE — число элементов; MDN — полуширина ленты матрицы $[Q]$ (35).

4.3.4. *Расчет температур, потоков и показателей эффективности.* Расчет температур производится решением системы (32) методом Гаусса с учетом ленточной структуры матрицы $[Q]$. После вывода значений температуры в угловых точках области (подробные поля температур и изотермы можно вывести с использованием графического блока) и нажатия клавиши $\langle CR \rangle$ на экран выводятся значения тепловых потоков и показателей эффективности ребрения.

В качестве показателей эффективности используются величины $\eta_p, \epsilon, \eta_{op}$, рассчитанные по приближенным аналитическим зависимостям и численно:

$$\eta_p = \frac{Q_p}{2\alpha(T_0 - T_2)L}$$
 — коэффициент эффективности ребра, показывающий, во сколько раз тепловой поток, снимаемый с реального ребра, меньше потока с бесконечно проводящего ребра той же высоты L с температурой, равной T_0 — температуре в основании ребра;

$E = \frac{Q_p}{\alpha(T_p - T_2)b} = \zeta_p \frac{2L}{b}$ — коэффициент эффективности ребра, показывающий, во сколько раз ребро увеличивает тепловой поток с участка плоской неоребреной поверхности длиной b ;

$\zeta_{op} = \frac{Q_{op}}{Q_H}$ — коэффициент эффективности оребрения стенки.

Здесь Q_p — тепловой поток с ребра; Q_{op} — тепловой поток с единицы длины оребренной стенки;

$Q_H = \frac{a(T_1 - T_2)}{\frac{1}{\alpha_1} + \frac{e}{\lambda} + \frac{1}{\alpha_2}}$ — тепловой поток с единицы длины неоребреной стенки.

Кроме трех указанных показателей эффективности, на экран выводятся значения Q_p , Q_{op} , Q_H и число

$$B_i = \frac{\alpha_2 b}{\lambda} .$$

4.3.5. *Графическое представление результатов.* Поскольку решается двумерная задача теплопроводности, при анализе результатов расчета большое значение имеет наглядность представления результатов. Графический блок, входящий в состав расчетной программы, позволяет выводить двумерное поле температур и общий вид разбиения в нескольких режимах:

- 1) расположение узловых точек разбиения и их нумерация;
- 2) поле температур в виде чисел, выводимых в узловых точках;
- 3) изотермы.

Выбор этих режимов осуществляется после вызова графического блока при вводе параметра *IGRAF*:

IGRAF = 1 — первый режим,
 2 — второй режим,
 3 — третий режим,
 0 — выход из графического блока.

Для работы в первом режиме не требуется знание поля температур, поэтому им можно пользоваться для анализа разбиения области до расчета температур.

Борис Александрович Вахненко
Александр Сергеевич Корсун
Александр Александрович Романов
Валерий Васильевич Шако

Реализация методов конечных
элементов и конечных разностей
для задач теплопроводности

Под ред. Б.А. Вахненко

Редактор *Е.Г. Станкевич*
Техн. редактор *З.И. Хазова*
Корректор *Н.П. Молодчинова*

Тем. план 1989 г., поз. 34

Л-21425 Подписано в печать 20.09.89 г. Формат 60x84 1/16
Объем 1,5 п.л. Уч.издл. 1,0 Тираж 80 экз. Изд. № 084-1
Цена 10 коп. Заказ 1589

Московский инженерно-физический институт. Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское шоссе, 31