

559.2  
1731  
МФТИ

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

А. А. Петрухин



ФАКУЛЬТЕТ  
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ  
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

**СЕЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ**

Москва 1987

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

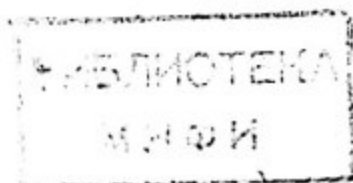
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

---

А. А. Петрухин

СЕЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Утверждено  
редсоветом института  
в качестве учебного пособия



Москва 1987

539.2  
1731

Петрухин А. А. Сечения электромагнитных процессов взаимодействия заряженных частиц. — М.: МИФИ, 1987. — 40 с.

Учебное пособие написано на основе лекций по разделу "Электромагнитные взаимодействия" курса экспериментальной ядерной физики. В нем рассматриваются основные процессы электромагнитного взаимодействия заряженных частиц: упругое и неупругое рассеяние, тормозное излучение и образование электрон-позитронных пар. Хотя сечения этих процессов были вычислены довольно давно, в последние годы был получен целый ряд новых результатов, которые еще не нашли своего отражения в учебных пособиях.

Учебное пособие предназначено для студентов и аспирантов инженерно-физических специальностей и будет полезно для научных работников, специализирующихся в области ядерной физики.

Рецензенты:

И.В. Ракобольская, С.А. Славатинский

## Г. УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ

Исследование процессов рассеяния является основным методом изучения характеристик взаимодействия и структуры частиц в ядерной физике. В частности, по результатам рассеяния  $\alpha$ -частиц было установлено существование ядра в атоме и оценены его размеры. В дальнейшем анализ рассеяния электронов высокой энергии дал информацию об электромагнитной структуре ядер и нуклонов.

Рассеяние называется упругим, если число и внутреннее состояние взаимодействующих частиц не изменяется. При упругом рассеянии суммарная кинетическая энергия частиц до и после столкновения сохраняется.

### 1. Кинематика процесса

Диаграммы. Фейнмановская диаграмма процесса, соответствующая однофотонному обмену, приведена на рис. 1,а. Здесь  $p_i(E_i, \vec{p}_i)$  — четырехимпульсы частиц,  $q$  — переданный четырехимпульс. Импульсные диаграммы в  $L$ - и  $C$ -системах приведены соответственно на рис. 1,б и в. В  $L$ -системе обычно предполагается, что частица  $m_2$  до столкновения покоится.  $\theta$  — угол рассеяния налетающей частицы,  $\psi$  — угол вылета покоившейся частицы. Особенно просто выглядит упругое рассеяние в  $C$ -системе, где оно сводится к повороту импульсов на угол  $\theta^*$ .

Инварианты. При описании процесса упругого рассеяния\* удобно пользоваться лоренц-инвариантными переменными  $s$ ,  $t$  и  $u$ . Определения этих величин, а также их связь с измеряемыми характеристиками процесса и ограничения, накладываемые на кинематику рассеяния приведены в табл. 1. Формулы (Т.10), (Т.11), (Т.12) могут быть получены и обычным путем из законов сохранения энергии и импульса:

$$E_1 + E_2 = E_1' + E_2', \quad \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' \quad (1)$$

Решая систему (1), можно получить связи между различными кинематическими переменными.

\* Используется система  $\hbar = c = 1$ .

Таблица 1

## Инварианты и углы упругого рассеяния

Инвариант	Л-система	Ц-система	Углы рассеяния в Л-системе
$(p_1 + p_2)^2$	$m_1^2 + m_2^2 + 2m_2 E_1$ (Т.1)	$(E_1^* + E_2^*)^2 E^{*2}$ (Т.7)	$\cos(\theta + \varphi) = \frac{(E_1' - m_2)(E_2' - m_2)}{p_1' p_2'}$ (Т.10)
$S = (p_1' + p_2')^2$	$m_1^2 + m_2^2 + 2E_1' E_2' - 2p_1' p_2' \cos(\theta + \varphi)$ (Т.2)	$-4p^{*2} \sin^2 \frac{\theta^*}{2}$ (Т.8)	$\cos \theta = \frac{E_1 E_1' - m_2 (E_1 - E_1') - m_1^2}{p_1 p_1'}$ (Т.11)
$(p_1 - p_1')^2$	$2m_1^2 - 2E_1 E_1' + 2p_1 p_1' \cos \theta$ (Т.3)	$m_1^2 + m_2^2 - 2E_1^* E_2^* - 2p^{*2} \cos \theta^*$ (Т.9)	$\cos \varphi = \frac{(E_1 + m_2)(E_2' - m_2)}{p_1 p_2'}$ (Т.12)
$t = q^2 = (p_2' - p_2)^2$	$2m_2^2 - 2m_2 E_2' = -2m_2 \nu$ (Т.4)	$m_1^2 + m_2^2 - 2m_2 E_1'$ (Т.6)	
$(p_1 - p_1')^2$	$m_1^2 + m_2^2 - 2E_1 E_1' + 2p_1 p_1' \cos \varphi$ (Т.5)		
$u = (p_1' - p_2')^2$	$m_1^2 + m_2^2 - 2m_2 E_1'$ (Т.6)		

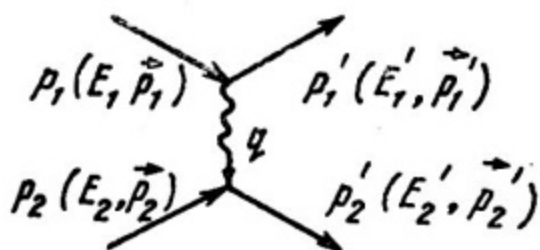
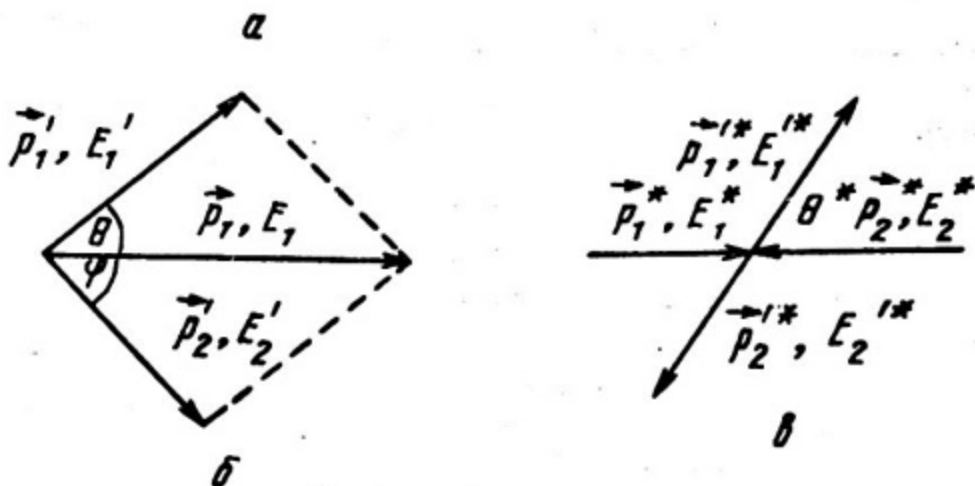


Рис. 1



Из (Т.1) (см. табл. 1) видно, что в ультрарелятивистском случае  $\sqrt{s} \rightarrow \sqrt{2m_1 E_1}$ , т.е. растет лишь как корень квадратный из лабораторной энергии. Например, для Серпуховского ускорителя ( $E_1 = 70$  ГэВ)  $\sqrt{s} \approx 12$  ГэВ. С этой точки зрения более эффективными являются столкновения частиц во встречных пучках. Используя (Т.1) и (Т.7) для эквивалентной лабораторной энергии, можно получить

$$E_{\text{ЭКВ}} = \frac{s}{2m} \approx \frac{2E^{*2}}{m}, \quad (2)$$

где  $m$  — масса сталкивающихся частиц.

Величина  $q^2$  при упругом рассеянии однозначно связана с переданной энергией (Т.4). Отрицательный знак  $q^2$  связан с выбором метрики  $p^2 = m^2$ . Довольно часто вводится величина  $Q^2 = -q^2$ , которая положительна.

В большинстве экспериментов по упругому рассеянию обычно измеряются угол вылета, энергия и импульс рассеянной частицы, поэтому для определения  $q^2$  используется (Т. 3). Она может быть упрощена для некоторых предельных случаев (табл.2).

Таблица 2

Область	$m_2 \neq \infty$	$m_2 \rightarrow \infty$
Ультррелятивистская ( $E \approx p \gg m$ )	$-4E_1 E_1' \sin^2 \theta / 2$	$-4E_1^2 \sin^2 \theta / 2$
Релятивистская	$2m_2^2 - 2E_1 E_1' + 2p_1 p_1' \cos \theta$	$-4p_1^2 \sin^2 \theta / 2$
Нерелятивистская ( $T \ll m$ )	$-2m_1 (T_1 + T_1' - 2\sqrt{T_1 T_1'} \cos \theta)$	$-8m_1 T_1 \sin^2 \theta / 2$

Отметим, что в Ц-системе всегда  $q^2 = -4p^{*2} \sin^2 \frac{\theta^*}{2}$ .  
 Для ультррелятивистской области можно записать еще одну полезную формулу

$$q^2 = - \frac{4E_1^2 \sin^2 \theta / 2}{1 + \frac{2E_1}{m_2} \sin^2 \theta / 2} \quad (3)$$

Переданная энергия  $\Delta$  может быть определена только для Л-системы. Она равна кинетической энергии покоившейся до рассеяния частицы  $\Delta = E_1 - E_1' = E_2' - E_2$ . В Ц-системе она равна нулю, так как  $E_1^* = E_1'^*$  и  $E_2^* = E_2'^*$ . Интересной особенностью релятивистской кинематики является то, что в ультррелятивистском пределе максимальное значение переданной энергии  $\Delta_{\text{МАКС}}$  стремится к энергии налетающей частицы независимо от ее массы. Действительно, из (Т.12) для лобового соударения ( $\varphi=0$ ) можно получить

$$\Delta_{\text{МАКС}} = \frac{E_1^2 - m_1^2}{E_1 + \frac{m_1^2 + m_2^2}{2m_2}} \quad (4)$$

При  $E_1 \rightarrow \infty$ ,  $\Delta_{\text{МАКС}} \rightarrow E_1$ .

В нерелятивистском пределе (4) переходит в

$$\Delta_{\text{МАКС}} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} T_1, \quad (5)$$

где  $T_1$  — кинетическая энергия налетающей частицы. Из (5) видно, что вся энергия может быть передана только при  $m_1 = m_2$  (пример бильiardных шаров).

## 2. Сечение

Метод расчета фейнмановских диаграмм [1; 2]. В нашу задачу не входит детальное изучение этого метода. Однако некоторые основные идеи мы обсудим.

В общем случае вероятность перехода из начального (н) в конечное состояние (к) записывается в виде

$$d\omega = 2\pi |M_{HK}|^2 d\varphi_n, \quad (6)$$

где  $M_{HK}$  — матричный элемент перехода;  $d\varphi_n$  — элемент фазового объема частиц в конечном состоянии. Для упругого рассеяния двух частиц сечение для Ц- и Л-систем

$$d\sigma = \frac{|M|^2 dt}{64\pi s p^{*2}} = \frac{|M|^2 dt}{64\pi p_1^2 m_2^2} \quad (7)$$

Матричный элемент определяется типом взаимодействия и видом участвующих в рассеянии частиц. В случае электромагнитного рассеяния точечных бесспиновых (скалярных) частиц вид матричного элемента определяется особенно просто. Спуская некоторые несущественные для понимания детали, можно записать

$$M = A_1 Pr A_2, \quad (8)$$

где  $A$  — амплитуды (вершинные функции);  $Pr$  — пропагатор. Для точечных бесспиновых частиц с электрическим зарядом  $Ze$

$$A_1 = Z_1 e \sqrt{4\pi} (p_1 + p_1'), \quad A_2 = Z_2 e \sqrt{4\pi} (p_2 + p_2'). \quad (9)$$

Для фотонов  $Pr = -1/q^2$ . Таким образом, задача вычисления матричного элемента сводится к перемножению четырехимпульсов рассеивающихся частиц

$$M = \frac{4\pi Z_1 Z_2 e^2}{q^2} (p_1 + p_1')(p_2 + p_2'). \quad (10)$$

Используя соотношения  $p_1 = p_1' + q$  и  $p_2' = p_2 + q$ , получим

$$M = \frac{4\pi Z_1 Z_2 e^2}{q^2} [4(p_1 p_2) + q^2]. \quad (11)$$

С учетом  $(p_1 p_2) = E_1 m_2$  и  $e^2 = \alpha$  сечение (7) записывается в виде

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 \alpha^2}{\beta_1^2 q^4} \left(1 + \frac{q^2}{4m_2 E_1}\right)^2 \quad (12)$$

Формула Резерфорда. Множитель, стоящий перед скобкой в (12), представляет собой знаменитую формулу Резерфорда для рассеяния точечных бесспиновых частиц на неподвижном силовом центре ( $m_2 \rightarrow \infty$ ). Чтобы получить зависимость от угла рассеяния, необходимо воспользоваться одной из формул табл. 2 и соотношением  $dq^2 = \rho_1^2 d\Omega/\pi$ . Обычно формулу Резерфорда записывают в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 \alpha^2}{4\beta_1^2 \rho_1^2} \frac{1}{\sin^4 \theta/2}, \quad (13)$$

которая всегда справедлива в  $\Pi$ -системе, а в  $L$ -системе в предположении  $m_2 \rightarrow \infty$ . При невыполнении этого условия необходимо учитывать дополнительный член в круглых скобках (12). Величину поправки можно оценить, перейдя к переменной  $\vartheta$ . При этом  $dq^2 = 2m_2 d\vartheta$ ,

$$\frac{d\sigma}{d\vartheta} = \frac{2\pi Z_1^2 Z_2^2 \alpha^2}{m_2 \vartheta^2 \beta_1^2} \left(1 - \frac{\vartheta}{2E_1}\right)^2. \quad (14)$$

При  $\vartheta \ll E_1$  поправка незначительна. Из (14) видно, что при  $\vartheta \rightarrow 0$ ,  $\beta_1 \rightarrow 0$  сечение становится бесконечно большим, и все заряженные частицы должны взаимодействовать друг с другом, как далеко бы они не находились.

Учет спина. Для электромагнитного рассеяния фермионов (электронов, мюонов, протонов) при выводе сечений должен учитываться вклад от взаимодействия магнитных моментов. Мы рассмотрим два случая: рассеяние частицы со спином  $1/2$  на бесспиновой частице и рассеяние двух частиц со спином  $1/2$ . Соответствующие записи для матричных элементов подобны (8), хотя и более сложные, так как волновые функции описываются спинорами. Окончательные результаты можно записать в виде

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 \alpha^2}{\beta_1^2 q^4} \left(1 + \frac{q^2}{2m_2 E_1} + \frac{q^2}{4E_1^2}\right) \quad (15)$$

для случая  $J_1 = 1/2$ ;  $J_2 = 0$  и

$$\frac{d\sigma}{dq^2} = \frac{4\pi Z_1^2 Z_2^2 \alpha^2}{\beta_1^2 q^4} \left(1 + \frac{q^2}{2m_2 E_1} + \frac{q^2}{4E_1^2} \frac{m_1^2 + m_2^2}{m_2^2} + \frac{q^4}{8E_1^2 m_2^2}\right) \quad (16)$$

для случая  $J_1 = 1/2$ ;  $J_2 = 1/2$ .

Сравнение (15) и (16) с (12) показывает, что спин частиц влияет на величину поправочного члена и проявляется наиболее сильно при больших передаваемых четырехимпульсах (энергиях). Подставляя в (15) значение  $q^2$ , получим формулу Мотта

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{Z_1^2 Z_2^2 \alpha^2}{4p_1^2 \beta_1^2} \frac{1 - \beta_1^2 \sin^2 \theta/2}{\sin^4 \theta/2}, \quad (17)$$

которая справедлива всегда в Ц-системе, а в Л-системе при  $m_2 \rightarrow \infty$ .

В ультрарелятивистской области ( $\beta_1 \approx 1$ ) для рассеяния электронов и мюонов ( $Z_1 = 1$ ) на ядрах используется выражение

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Mott}} = \frac{Z_2^2 \alpha^2 \cos^2 \theta/2}{4E_1^2 \sin^4 \theta/2 \left(1 + \frac{2E_1}{m_2} \sin^2 \theta/2\right)}, \quad (18)$$

учитывающее отдачу ядра.

Формула (16) важна при рассмотрении рассеяния частиц на свободных электронах. Ее целесообразно записать через энергию, переданную электрону  $\nu$ . Подставляя  $q^2 = -2m_2\nu$ , получим формулу Баба

$$\frac{d\sigma}{d\nu} = \frac{2\pi Z_1^2 \alpha^2}{\beta_1^2 m_e \nu^2} \left[ 1 - \beta_1^2 \frac{\nu}{\nu_{\text{МАКС}}} + \frac{1}{2} \left(\frac{\nu}{E_1}\right)^2 \right], \quad (19)$$

где  $\nu_{\text{МАКС}}$  дается (4).

$e^-e^-$  и  $e^+e^-$ -рассеяние. Специфика этих процессов обусловлена тем, что в обоих случаях обычной диаграммы (рис. 2, а)

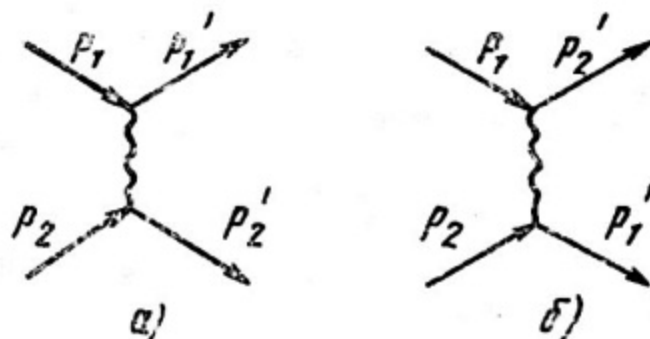


Рис. 2

недостаточно. Для  $e^-e^-$ -рассеяния из-за тождественности электронов необходимо учитывать еще одну диаграмму, которая называется обменной и обусловлена неотличимостью двух электронов (рис. 2, б). В матричный элемент дают вклад обе диаграммы, а в сечении появится еще и интерференционный член.

Сечение  $e^-e^-$ -рассеяния впервые было получено Меллером (меллеровское рассеяние) и для  $\Pi$ -системы имеет вид:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{4\alpha^2(s-2m^2)^2}{s(s-4m^2)^2} \left[ \frac{4}{\sin^4\theta^*} - \frac{3}{\sin^2\theta^*} + \frac{(s-4m^2)^2}{4(s-2m^2)^2} \left( 1 + \frac{4}{\sin^2\theta^*} \right) \right], \quad (20)$$

где  $m=m_1=m_2=1.7e$ ;  $s$  (Т.7). В нерелятивистском пределе

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega^*} &= \frac{\alpha^2}{4m^2\beta^{*4}} \left( \frac{4}{\sin^4\theta^*} - \frac{3}{\sin^2\theta^*} \right) = \\ &= \frac{\alpha^2}{16m^2\beta^{*4}} \left( \frac{1}{\sin^4\theta^*/2} + \frac{1}{\cos^4\theta^*/2} - \frac{1}{\sin^2\theta^*/2} - \frac{1}{\cos^2\theta^*/2} \right). \end{aligned} \quad (21)$$

Последняя формула наглядно иллюстрирует вклад обменной диаграммы и интерференционного члена.

Диаграммы  $e^-e^+$ -рассеяния приведены на рис. 3. Диаграмма на рис. 3,б носит название аннигиляционной и учитывает тот факт, что электрон и позитрон являются античастицами.

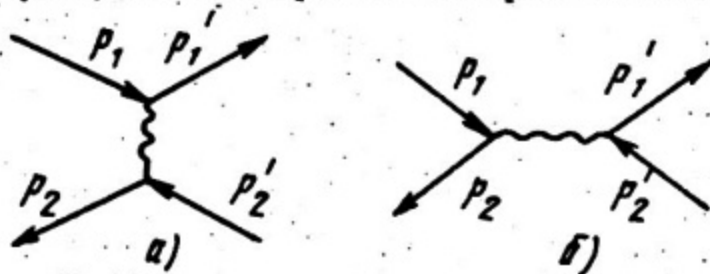


Рис. 3

Сечение  $e^-e^+$ -рассеяния было получено Баба в 1936 г. Формула имеет довольно громоздкий вид, поэтому запишем ее лишь для двух предельных случаев:

- для ультрарелятивистского

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{\alpha^2}{2s} \left[ \frac{1+\cos^4\theta^*/2}{\sin^4\theta^*/2} + \frac{1}{2} (1+\cos^2\theta^*) - \frac{2\cos^4\theta^*/2}{\sin^2\theta^*/2} \right], \quad (22)$$

- для нерелятивистского

$$\frac{d\sigma}{d\Omega^*} = \frac{\alpha^2}{16m^2\beta^{*4}} \frac{1}{\sin^4\theta^*/2}, \quad (23)$$

где  $m=m_e=m_{e^+}$ . В последнем случае аннигиляционная диаграмма вклада не дает (сравните с (21)).

### 3. Формфакторы

Определения. До сих пор мы рассматривали рассеяние точечных частиц. Однако в ряде случаев необходимо учитывать внутреннюю структуру частиц (ядра, нуклоны).

В первом борновском приближении учет распределения заряда сводится к умножению сечения для точечной частицы на квадрат формфактора

$$\sigma = \sigma_{\text{точечн}} F^2(q^2). \quad (24)$$

В большинстве экспериментов по рассеянию легких частиц (электронов и мюонов) на ядрах и нуклонах переданная энергия мала по сравнению с переданным импульсом и с хорошей точностью можно считать  $|q^2| = |\vec{q}|^2$ .

Обычно формфактор определяется как фурье-образ плотности заряда.

$$F(q^2) = \int_V \rho(\vec{r}) e^{i\vec{q}\vec{r}} dV, \quad (25)$$

где  $\rho(\vec{r})$  — плотность распределения заряда, нормированная на 1,

$$\int_V \rho(\vec{r}) dV = 1. \quad (26)$$

Для сферически симметричного распределения заряда формула (25) упрощается

$$F(q^2) = \frac{4\pi}{q} \int_0^\infty \rho(r) \sin(qr) r dr. \quad (27)$$

Обратное преобразование записывается в виде

$$\rho(r) = \frac{1}{2\pi^2 r} \int_0^\infty F(q) \sin(qr) q dq. \quad (28)$$

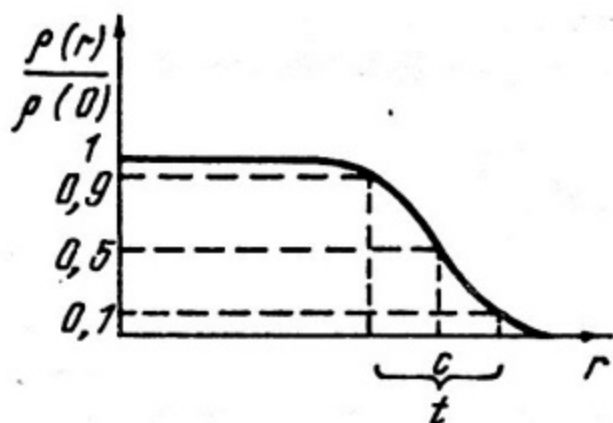
Из (28) видно, что для точного определения  $\rho(r)$  необходимо измерять формфактор в бесконечном интервале переданных импульсов. В противном случае задача восстановления распределения заряда становится неоднозначной и приходится использовать различные теоретические модели. В приложении 2 приведены некоторые употребляемые распределения заряда и соответствующие им формфакторы.

Распределение заряда. Исследование упругого рассеяния электронов высоких энергий на атомных ядрах показало [3], что для ядер с  $A \geq 16$  плотность распределения заряда характеризуется наличием внутренней сферической области с практически постоянной плотностью и внешнего поверхностного слоя, в котором плотность быстро спадает. Такими свойствами

обладает распределение Ферми, которое широко используется для описания ядер

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-c}{a}\right)} \quad (29)$$

Форма распределения показана на рис. 4. Распределение характеризуется двумя параметрами: радиусом половинной плотности  $c$



и величиной  $a$ , которая характеризует скорость спада плотности в поверхностном слое. Толщина поверхностного слоя  $t$  определяется как расстояние, на котором плотность изменяется от 90 до 10% своего максимального значения. Непосредственным вычислением легко получить

$$t = 4a \ln 3 \approx 4,4a \quad (30)$$

Рис. 4

Нормировочный коэффициент  $\rho_0$  можно определить, подставляя (29) в (26). Интеграл вычисляется разложением подинтегральной функции в ряд Тейлора. В результате получим

$$\rho_0 = \frac{3}{4\pi c^3} \left(1 + \frac{\pi^2 a^2}{c^2}\right)^{-1} \quad (31)$$

Величины параметров  $a$  и  $c$  можно определить, сопоставляя экспериментальные и теоретические (с учетом формфактора) значения сечений. Результаты показывают, что величина  $a$  практически не зависит от массового числа и для  $A \approx 20$  равна  $(0,57 \pm 0,07) \cdot 10^{-13}$  см. Радиус половинной плотности  $c$  в первом приближении пропорционален  $A^{1/3}$ , однако значительно лучшие результаты дает выражение  $c(Z) = 1,03 Z^{0,42} \cdot 10^{-13}$  см.

Для легких ядер ( $A < 20$ ) довольно часто приходится учитывать конкретную структуру, в том числе влияние оболочечных эффектов.

Формфакторы нуклонов. При изучении рассеяния электронов и мюонов на протонах, необходимо использовать (16), которую для  $E_1 \gg m$  можно преобразовать к виду

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{Мотт}} \left[1 - \frac{q^2}{2m^2} \tan^2 \theta/2\right] \quad (32)$$

Так как протон обладает аномальным магнитным моментом  $\alpha$ , сечение записывается в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left\{ 1 - \frac{q^2}{4m_p^2} \left[ 2(1+\alpha)^2 \operatorname{tg}^2 \theta/2 + \alpha^2 \right] \right\}. \quad (33)$$

Чтобы учесть распределения электрического заряда, нормального и аномального магнитных моментов, необходимо ввести два формфактора  $F_1(q^2)$  и  $F_2(q^2)$ , называемых формфакторами Дирака и Паули, соответственно:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left\{ F_1^2 - \frac{q^2}{4m_p^2} \left[ 2(F_1 + \alpha F_2)^2 \operatorname{tg}^2 \theta/2 + \alpha^2 F_2^2 \right] \right\}. \quad (34)$$

Формула (34), полученная Розенблотом, справедлива и для нейтронов при соответствующем выборе нормировки формфакторов

$$F_1(0) = 1, F_2(0) = 1, \alpha = +1,79 \text{ для протонов;} \\ F_1(0) = 0, F_2(0) = 1, \alpha = -1,91 \text{ для нейтронов.}$$

Довольно часто используется другой набор формфакторов:

$$G_E = F_1 + \frac{\alpha q^2}{4m_p^2} F_2, \quad G_M = F_1 + \alpha F_2, \quad (35)$$

которые, однако, не являются фурье-образами пространственных распределений электрического заряда и магнитного момента. Используя эти формфакторы, (34) можно записать в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} \left[ \frac{G_E^2 - \frac{q^2}{4m_p^2} G_M^2}{1 - q^2/4m_p^2} - \frac{q^2}{2m_p^2} G_M^2 \operatorname{tg}^2 \theta/2 \right]. \quad (36)$$

При фиксированном  $q^2$  зависимость  $(d\sigma/d\Omega)/(d\sigma/d\Omega)_{Mott}$  от  $\operatorname{tg}^2 \theta/2$  изображается на графике прямой линией, которая позволяет найти значения формфакторов  $G_E^2$  и  $G_M^2$ .

Экспериментальное исследование упругого рассеяния электронов на протонах показывает, что в широком интервале переданных импульсов формфакторы описываются простой дипольной формулой:

$$G_{E,p} = \frac{G_{M,p}}{\mu_p} = \frac{G_{M,n}}{\mu_n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{q^2}{0,71}\right)^2}, \quad (37)$$

соответствующей экспоненциальному распределению заряда и магнитного момента (см. приложение 2) со среднеквадратичным радиусом

$$R = \sqrt{\frac{12}{0,71}} \Gamma \text{эВ}^{-1} = 4 \Gamma \text{эВ}^{-1} \approx 8 \cdot 10^{-14} \text{ см.}$$

## II. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ

### 4. Кинематика процесса

Диаграммы тормозного излучения приведены на рис. 5, из которого видно, что рождение фотона в процессе взаимодействия двух частиц может происходить в четырех различных вариантах, отличающихся друг от друга видом частицы, испускающей фотон, и временем его испускания (до или после взаимодействия). Жирными линиями отмечены виртуальные состояния излучающей частицы. Испускание фотона заряженной частицей без взаимодействия запрещено законами сохранения энергии и импульса.

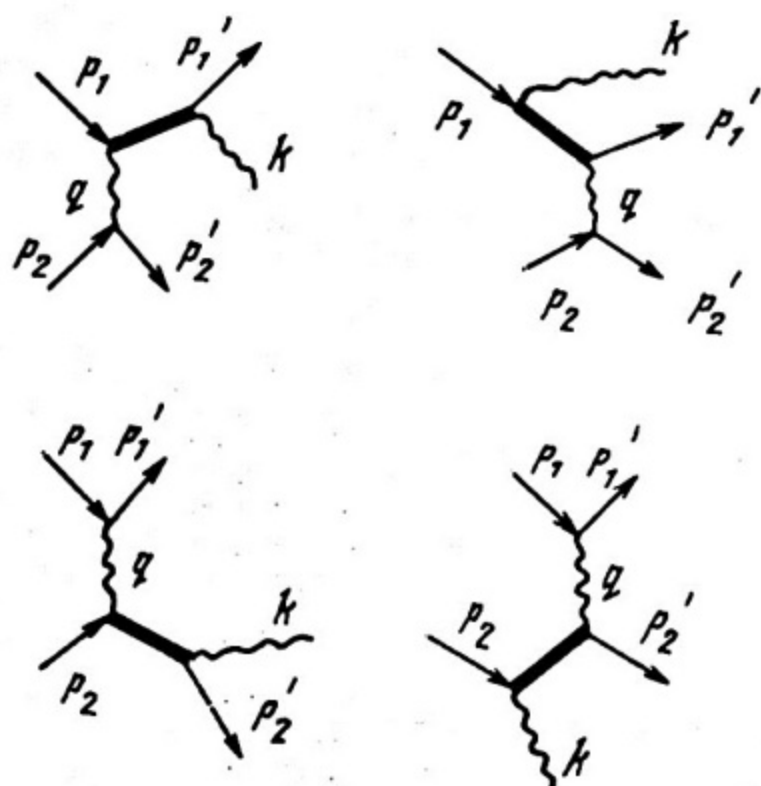


Рис. 5

Чтобы оценить вклад различных диаграмм, рассмотрим структуру матричного элемента при тормозном излучении. В отличие от упругого рассеяния (8) матричный элемент должен содержать три вершинных функции и два пропагатора. К уже известному из описания процесса упругого рассеяния пропагатору  $P_r = -1/q^2$  добавляется второй пропагатор, который описывает излучающую частицу. В соответствии с правилами Фейнмана вид этого пропагатора зависит от спина частицы и для  $J = 1/2$  равен  $i/(\hat{p} - m)$ , где  $\hat{p} = \gamma_\mu p_\mu$  ( $\mu = 1, 2, 3, 4$ ), а  $\gamma_\mu$  — четырехрядные матрицы Дирака. Наличие величин, пропорциональных массе в знаменателе, приводит к тому, что сечение процесса оказывается обратно пропорциональным квадрату массы излучающей частицы. Так как обычно рассматриваются процессы тормозного излучения электронов и мюонов на ядрах, то вкладом двух нижних диаграмм пренебрегают. Действительно, даже при излучении мюона на протоне их вклад составляет менее 1%.

Переданный импульс. В отличие от процесса упругого рассеяния при тормозном излучении импульс, переданный ядру, является функцией кинематических переменных трех частиц. Так как энергия  $\nu$ , переданная ядру, обычно не измеряется, то величина  $q$  неизвестна, и чтобы получить сечение, необходимо по  $q$  проинтегрировать.

Для процесса тормозного излучения законы сохранения энергии и импульса записываются в виде

$$E_1 = E'_1 + \omega + \nu, \quad \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{k} + \vec{q}. \quad (38)$$

Переданная ядру энергия  $\nu$ , как правило, мала по сравнению с  $E_1$ ,  $E'_1$  и  $\omega$  и четырехимпульс  $q$ , переданный ядру, практически имеет только пространственную компоненту, и с хорошей точностью можно записать

$$-q^2 \approx |\vec{q}|^2. \quad (39)$$

Поэтому в дальнейшем величина  $q$  будет обозначать абсолютное значение  $|\vec{q}|$ .

Эффективная область излучения со стороны больших  $q$  (малых  $r$ ) обрезается на расстояниях порядка комptonовской длины волны излучающей частицы  $\lambda_m = 1/m_1$ . При высоких энергиях

$q_{\text{МАКС}} \gg m_1$ , поэтому при интегрировании по  $q$  обычно полагают  $q_{\text{МАКС}} = \infty$ . Минимальное значение  $q_{\text{МИН}}$  можно определить из второго уравнения (38). Величина  $q$  будет минимальной, если три остальных вектора лежат на одной прямой  $q_{\text{МИН}} = p_1 - p'_1 - k$ .

Абсолютная величина  $q_{\text{мин}}$  обозначается обычно  $\delta$

$$\delta = p_j - p'_j - \kappa = \sqrt{E_1^2 - m_j^2} - \sqrt{E_1'^2 - m_j^2} - \omega \quad (40)$$

В ультрарелятивистском пределе, разлагая корни в ряд, получим с учетом  $E_1 - E_1' - \omega = 0$

$$\delta = \frac{m_j^2 \omega}{2E_1 E_1'} \quad (41)$$

Области экранирования. Из (41) видно, что при  $E_1 \rightarrow \infty$   $\delta \rightarrow 0$ , и соответствующие расстояния  $r \sim 1/q$ , на которых проходит частица, увеличиваются и могут превысить размеры атомов. В соответствии с этим различают три области: отсутствия экранирования (ОЭ)  $\delta R_a \gg 1$ ; неполного экранирования (НЭ)  $\delta R_a \sim 1$ ; полного экранирования (ПЭ)  $\delta R_a \ll 1$ , где  $R_a$  — радиус атома.

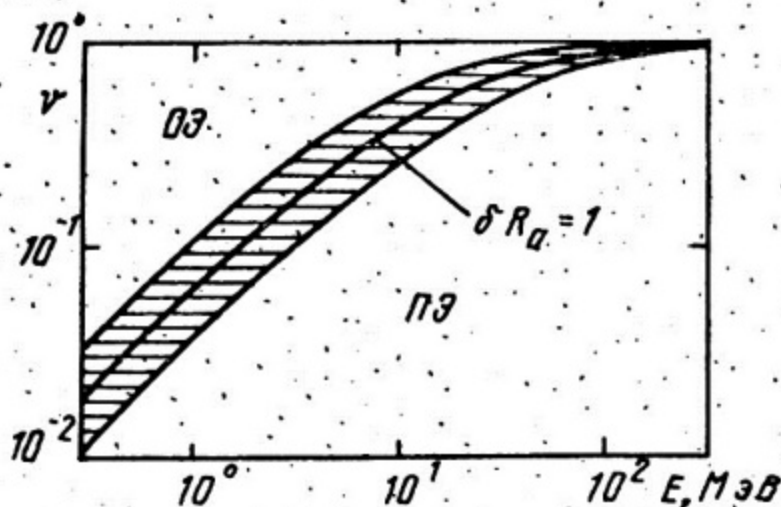


Рис. 6

На рис. 6 приведены области экранирования для электронов в координатах  $E, \nu$ , где  $\nu = \omega/E_1$  — относительная доля энергии, переданная  $\gamma$ -кванту. Через эту переменную минимальный переданный импульс будет выражаться

$$\delta = \frac{m_j^2 \nu}{2E_1(1-\nu)} \quad (42)$$

### 5. Сечение

Основные характеристики. Диаграммы Фейнмана позволяют получить некоторые характеристики процессов, не производя каких-либо вычислений. Для диаграмм рис. 5 матричный элемент будет пропорционален трем вершинным функциям и двум пропагаторам

$$M \sim A_1 P \Gamma_1 A_2 P \Gamma_2 A_3 \quad (43)$$

Наличие второго дополнительного пропагатора, как уже обсуждалось, приводит к появлению квадрата массы излучающей частицы в знаменателе выражения для сечения.

Вершинные функции включают в себя заряд, поэтому матричный элемент будет пропорционален квадрату заряда излучающей частицы и заряду частицы-мишени, а сечение, соответственно, будет пропорционально четвертой степени заряда излучающей частицы и квадрату заряда частицы-мишени. Таким образом,

$$\sigma_T \sim \frac{Z_1^4 Z_2^2}{m_1^2} \alpha^3. \quad (44)$$

Как видно из (44), наибольшее значение процесс тормозного излучения имеет для легких частиц, особенно для электронов. Поэтому очень часто вводят так называемый классический радиус электрона  $r_0 = \alpha / m_e = 2,82 \cdot 10^{-13}$  см, и сечение для других частиц (например, мюонов) записывают в виде

$$\sigma_T \sim \alpha \left( Z r_0 \frac{m_e}{m_1} \right)^2, \quad (45)$$

где  $Z$  — заряд ядра.

Общий вид сечения. Сечение тормозного излучения на точечном ядре, проинтегрированное по углам вылета частиц и просуммированное по поляризациям, было получено Бете и Гайтлером, и для ультрарелятивистского случая может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} \sigma(E_1, \omega) = & \alpha \left( 2 Z r_0 \frac{m_e}{m_1} \right)^2 E_1^{-2} \frac{d\omega}{\omega} \times \\ & \times \left[ (E_1^2 + E_1'^2) \mathcal{P}_1(\delta) - \frac{2}{3} E_1 E_1' \mathcal{P}_2(\delta) \right]. \end{aligned} \quad (46)$$

Функции  $\mathcal{P}_1(\delta)$  и  $\mathcal{P}_2(\delta)$  незначительно отличаются друг от друга при малых  $\delta$ , а при больших  $\delta$  они равны. Поэтому с хорошей точностью выражение (46) можно упростить, заменив  $\mathcal{P}_2(\delta)$  на  $\mathcal{P}_1(\delta)$ . Опуская индекс, получим:

$$d\sigma(E_1, \omega) = 4\alpha \left( Z r_0 \frac{m_e}{m_1} \right)^2 \left( \frac{E_1^2 + E_1'^2 - \frac{2}{3} E_1 E_1'}{E_1^2} \right) \frac{d\omega}{\omega} \mathcal{P}(\delta), \quad (47)$$

где

$$\mathcal{P}(\delta) = \int_0^{\delta_{\text{макс}}} \Psi(q, \delta) \frac{dq}{q^3}. \quad (48)$$

Функция  $\Psi(q, \delta)$  в общем случае имеет сложный вид, но для наиболее важных областей может быть записана в виде довольно простых выражений

$$\Psi(q, \delta) = (q - \delta)^2 \quad \text{при } q \ll m_1; \quad (49)$$

$$\Psi(q, \delta) = 4m_1^2 \sqrt{\frac{\xi}{\xi+1}} \ln(\sqrt{\xi+1} + \sqrt{\xi}), \quad (50)$$

где  $\xi = q^2/4m_1^2$  при  $\delta \ll q$ . Выбрав некоторое  $q_0$ , такое, что  $\delta \ll q_0 \ll m_1$ , можно записать:

$$\Phi(\delta) = \int_{\delta}^{q_0} \frac{(q-\delta)^2}{q^3} dq + \int_{q_0}^{\infty} 4m_1^2 \sqrt{\frac{\xi}{1+\xi}} \ln(\sqrt{1+\xi} + \sqrt{\xi}) \frac{dq}{q^3}. \quad (51)$$

Первый интеграл равен  $\ln \frac{q_0}{\delta} - \frac{3}{2}$ , а второй  $\ln \frac{m_1}{q_0} + 1$ . Выражение обоих интегралов (51) через логарифмы дало основание записывать (48) в виде

$$\Phi(\delta) = \int_{\delta}^{m_1} \frac{(q-\delta)^2}{q^3} dq + 1 = \ln \frac{m_1}{\delta} - \frac{1}{2}. \quad (52)$$

При этом надо помнить, что единица в (52) есть второй интеграл (51) от  $m_1$  до  $\infty$ .

Формула (52) справедлива для электронов в кулоновском поле ядра. При малых  $\delta$  (больших  $r$ ) кулоновское поле обрезается атомными электронами, а для достаточно массивных частиц (например, для мюонов  $\lambda_{\mu} = 2 \cdot 10^{-13}$  см) результат может измениться из-за влияния конечных размеров ядра.

## 6. Формфакторы

В общем случае необходимо учитывать четыре фактора: два атомных (упругий  $F_a$  и неупругий  $\mathcal{F}_a$ ) и два ядерных (упругий  $F_N$  и неупругий  $\mathcal{F}_N$ ). Упругие факторы — обычные фурье-образы распределения заряда в атоме или ядре (см. (25)), а неупругие факторы характеризуют возбуждение электронов атома или нуклонов ядра в процессе тормозного излучения. С учетом этих четырех факторов (48) запишется в виде:

$$\varphi(\delta) = \int_{\delta}^{\infty} \left[ (F_{\beta} - F_{\alpha})^2 + \frac{1}{Z} (F_{\beta} + F_{\alpha}) \right] \Psi(q, \delta) \frac{dq}{q^3} \quad (53)$$

Упругий атомный формфактор. При расчете влияния атомного формфактора (53) можно упростить, так как в этой области  $q \ll \pi_1$ . Полагая ядро точечным, с учетом (49) и (52) получим

$$\varphi(\delta) = \int_{\delta}^{\pi_1} \left[ 1 - F_{\alpha}(q) \right]^2 \frac{(q - \delta)^2}{q^3} dq + 1, \quad (54)$$

$F_{\alpha}(q)$  можно рассчитать, воспользовавшись какой-либо моделью атома. Обычно используется модель Томаса - Ферми, которая хорошо описывает атомы с  $Z \gtrsim 10$ . Однако расчеты по этой модели приходится производить численно, так как нет хороших аналитических выражений для распределения плотности электрического заряда.

Рассмотрим некоторые частные случаи. В модели Томаса - Ферми радиус атома

$$R_{\alpha} = \frac{b}{\alpha m_e Z^{1/3}}, \quad b = \frac{1}{2} \left( \frac{3\pi}{4} \right)^{2/3} = 0,885. \quad (55)$$

Если  $\delta \gg \frac{1}{R_{\alpha}}$ , экранирование отсутствует и (54) переходит в (52), которое дает логарифмический рост сечения от  $\delta$ . В другом крайнем случае при  $\delta \rightarrow 0$  (полное экранирование)  $\varphi(\delta)$  стремится к константе, которую можно интерпретировать как величину логарифма при  $\delta$ , соответствующем некоторому эффективному радиусу  $R_{эф} = \alpha R_{\alpha}$ , на котором прекращается логарифмический рост. Эта константа дает величину радиационного логарифма. При  $\delta = (R_{эф})^{-1}$  он равен

$$L_{раг} = \varphi(0) = \ln(\pi_1 R_{эф}) = \ln \left( \frac{\alpha b}{\alpha} \frac{\pi_1}{m_e} Z^{-1/3} \right). \quad (56)$$

Численные расчеты дают для  $\alpha$  значение  $2,5 \div 2,6$  и соответственно:

$$L_{раг} = \ln \left[ (183 - 190) \frac{\pi_1}{m_e} Z^{-1/3} \right]. \quad (57)$$

Если излучающая частица - электрон, то

$$L_{раг} = \ln \left[ (183 \div 190) Z^{-1/3} \right]. \quad (58)$$

В промежуточной области экранирования обычно пользуются табличными результатами численных расчетов. Однако очень хорошее приближение дает простая формула

$$\varphi(\delta) = \ln \frac{190 \frac{m_1}{m_e} Z^{-1/3}}{1 + \frac{190 \sqrt{e} \delta Z^{-1/3}}{m_e}}, \quad (59)$$

которая в предельных случаях больших и малых  $\delta$  переходит в (52) и (57) соответственно.

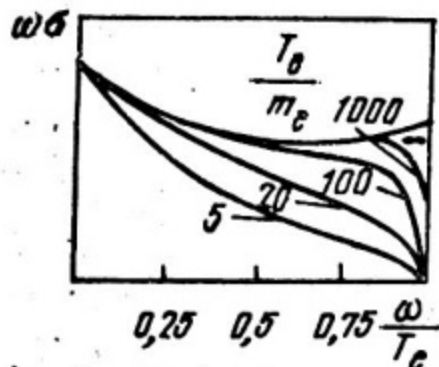


Рис. 7

Отметим, что для различных частиц экранирование наступает при разных энергиях. Если для электронов экранирование существенно в области МэВных энергий, то для мюонов — в области сотен гигаэлектронвольт.

Зависимость сечения от  $\omega$  и кинетической энергии электронов  $T_e$  для свинца приведена на рис. 7.

#### Упругий ядерный формфактор.

Влияние размеров ядра существенно при  $q \sim 1/R_{\text{я}} \sim 100$  МэВ. Поведение подинтегральной функции  $\Psi(q, \delta)$  в этой области (см. (50)) зависит от массы излучающей частицы. Для электронов высоких энергий вклад области  $q \gtrsim 100$  МэВ практически несуществен и влияние формфактора ядра на сечение тормозного излучения электронов пренебрежимо мало.

Для мюонов высоких энергий вклад области  $q \gtrsim m_{\mu} \sim 100$  МэВ существен, и влияние формфактора необходимо учитывать. Так как в этой области  $\delta \ll q$ , то можно использовать (50)

$$\varphi(\delta) = \int_{\delta}^{\infty} F_{\text{я}}^2 4\pi^2 \sqrt{\frac{\xi}{1+\xi}} \ln(\sqrt{\xi+1} + \sqrt{\xi}) \frac{dq}{q^3}. \quad (60)$$

Для вычисления формфактора  $F_{\text{я}}(q)$  использовалось распределение Ферми (29).

Влияние ядерного формфактора удобно описывать в виде поправки к логарифмическому члену

$$\varphi(\delta) = \ln \frac{m_{\mu}}{\delta} - \frac{1}{2} - f(Z). \quad (61)$$

Результаты численных расчетов показывают, что с хорошей точностью

$$f(Z) = \ln(K Z^{1/3}), \quad (62)$$

где  $K \approx 5/2$ . Объединяя (59) и (62), получим

$$\varphi(\delta) = \ln \frac{\frac{2}{3} 190 \frac{m_\mu}{m_e} z^{-2/3}}{1 + \frac{190 \sqrt{e} \delta}{m_e z^{1/3}}} \quad (63)$$

Поправку  $f(z)$  можно также оценить, изменив верхний предел интегрирования в (48) и выразив его через массу частицы, например мюона:

$$q_{\text{макс}} = \frac{1}{R_\mu} = \frac{(1,2+1,5)m_\mu}{z^{1/3}}$$

При этом подставлять его надо во второй интеграл выражения (51), а не вместо  $m_1$  в интеграле (52).

Неупругие формфакторы. Возбуждение атома приводит к дополнительному вкладу в сечение тормозного излучения, который характеризуется неупругим атомным формфактором

$$F_a(q) = \frac{a^4 q^4}{1 + a^4 q^4}, \quad (64)$$

где  $a = \frac{1194}{\sqrt{e} m_e z^{2/3}}$ . Соответствующие вычисления радиационного логарифма дают величину  $L_{\text{раг}} = \ln(1194 z^{-2/3})$ . Для  $z = 10 \div 90$  отношение

$$\ln \frac{(1194 z^{-2/3})}{(190 z^{-1/3})} = 1,17 \pm 0,03.$$

Поэтому обычно вклад в сечение атомных электронов учитывают заменой  $z^2$  в (47) на  $z(z+\zeta)$ , где  $\zeta = 1,1 - 1,2$ . Очень часто, когда не требуется большой точности, полагают, что  $\zeta=1$ .

Влияние возбуждения ядра и, соответственно, неупругого ядерного формфактора на сечение тормозного излучения значительно меньше. Поправка составляет менее 1% и уменьшается с ростом  $z$ . Поэтому ею обычно пренебрегают.

### III. ОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР

Рассмотрим следующий шаг в усложнении фейнмановских диаграмм. Рис. 8 иллюстрирует переход от упругого рассеяния (а) к тормозному излучению (б) и затем к образованию пары "частица-античастица" (в). Заметим, что без рассеяния, т.е. без взаимодействия со второй частицей, невозможно ни излучение, ни образование пар, так как это противоречит одновременному выполнению законов сохранения энергии и импульса.

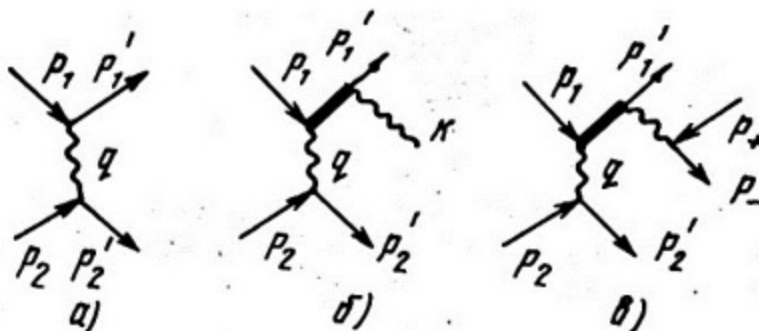


Рис. 8

Прежде, чем рассматривать образование электрон-позитронных пар заряженными частицами (диаграмма 8,в), целесообразно проанализировать более простой процесс — образование пар  $\gamma$ -квантами.

### 7. Образование электрон-позитронных пар $\gamma$ -квантами

Диаграммы процесса приведены на рис. 9. Одна из образовавшихся частиц пары обменивается виртуальным  $\gamma$ -квантом с третьей частицей (обычно с ядром), обеспечивая выполнение законов сохранения энергии и импульса.

С практической точки зрения процессы тормозного излучения электронов и образования электрон-позитронных пар  $\gamma$ -квантами совершенно различны. Однако с точки зрения диаграмм Фейнмана эти процессы очень близки, а в некотором смысле и идентичны. Действительно, топологически диаграммы рис. 9 и 8,б идентичны, а если учесть, что на фейнмановских диаграммах античастица — это частица, движущаяся в обратном (по времени) направлении, то и вовсе тождественны. Следует только учесть разницу в кинематике. По этой причине основные характеристики сечения образования пар должны быть такими же, как и у тормозного излучения. В частности, сечение должно быть обратно пропорционально квадрату массы образующихся частиц, и поэтому наиболее вероятным будет образование электрон-позитронных пар.

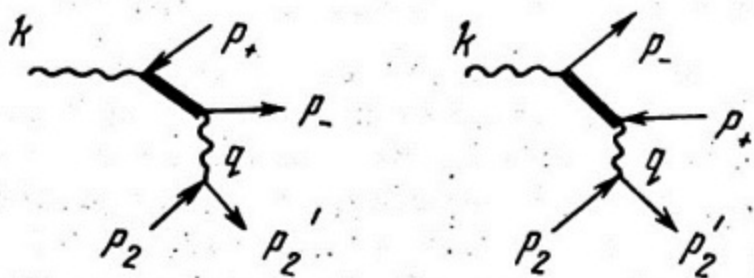


Рис. 9.

Кинематика процесса. Законы сохранения энергии и импульса для процесса образования пар можно записать в виде:

$$\omega = E_+ + E_- + \nu; \quad \vec{\kappa} = \vec{p}_+ + \vec{p}_- + \vec{q}. \quad (65)$$

Как и в процессе тормозного излучения, энергией отдачи ядра обычно пренебрегают, и отличие в законах сохранения энергии сводится к знаку между энергиями заряженных частиц:

$$\left. \begin{array}{l} \text{тормозное излучение} \quad \omega = E_1 - E_1'; \\ \text{образование пар} \quad \omega = E_+ + E_- \end{array} \right\} \quad (66)$$

Чтобы учесть асимметрию в распределении энергии между частицами пары, обычно вводят параметр

$$\rho = \frac{E_+ - E_-}{E_+ + E_-} = \frac{E_+ - E_-}{\omega}. \quad (67)$$

Возводя (67) в квадрат, можно получить полезное в дальнейшем соотношение

$$E_+ E_- = \frac{\omega^2 (1 - \rho^2)}{4}. \quad (68)$$

Минимальный переданный импульс для процесса образования пар  $\gamma$ -квантами получается тем же способом, как и для тормозного излучения (см. п. 4):

$$\delta = \frac{\pi^2 \omega}{2E_+ E_-}, \quad (69)$$

сравнение которого с (41) подтверждает глубокую физическую аналогию между процессами.

Подставляя (68) в (69), получим

$$\delta = \frac{2\pi^2}{\omega (1 - \rho^2)}. \quad (70)$$

Из (70) видно, что равному распределению энергии между частицами пары ( $\rho = 0$ ) соответствуют малые  $\delta$ , а при увеличении асимметрии в распределении энергии  $\delta$  увеличивается.

Сечение процесса можно получить из (47), внося следующие изменения. Во-первых, переменные  $E_1, \omega$ , для которых записано сечение, необходимо заменить на  $\omega, E_+$  или  $E_-$ ; во-вторых,  $E_1$  и  $E_1'$  в скобках следует заменить на  $E_+$  и  $E_-$ , изменив знак "минус" перед произведением  $E_1 E_1'$  на "плюс" в соответствии с (66). Учитывая также, что имеется только одна масса  $m_e$ , выражение (47) преобразуется к виду

$$d\sigma(\omega, E_+) = 4\alpha (Zr_0)^2 \frac{(E_+^2 + \frac{2}{3}E_+E_- + E_-^2)}{\omega^2} \frac{dE_+}{\omega} \mathcal{F}(\delta), \quad (71)$$

где  $\mathcal{F}(\delta)$  дается (48).

Так как сечение симметрично относительно  $E_+$  и  $E_-$ , то удобно его выразить через параметр асимметрии  $\rho$ . Учитывая, что  $d\rho = 2dE_+/\omega = 2dE_-/\omega$ , получим

$$d\sigma(\omega, \rho) = 2\alpha Z^2 r_0^2 \frac{2+\rho^2}{3} d\rho \mathcal{F}(\delta). \quad (72)$$

Влияние формфакторов. Учет атомных формфакторов (упругого и неупругого) приводит к тем же результатам, которые были получены для тормозного излучения. Отличие состоит в том, что минимальный переданный импульс  $\delta$  дается выражением (70). В результате для  $\mathcal{F}(\delta)$  получим

$$\mathcal{F}(\delta) = \ln \frac{190 Z^{-1/3}}{1 + \frac{190 \sqrt{e} 2 m_e Z^{-1/3}}{\omega(1-\rho^2)}}. \quad (73)$$

Что касается ядерных формфакторов (упругого и неупругого), то их влияние несущественно при образовании электрон-позитронных пар, так как вклад в сечение области  $q \sim (R_A)^{-1} \gg m_e$  пренебрежимо мал. Зависимость сечения образования электрон-позитронных пар от  $\omega$  и  $\rho$  приведена на рис. 10.

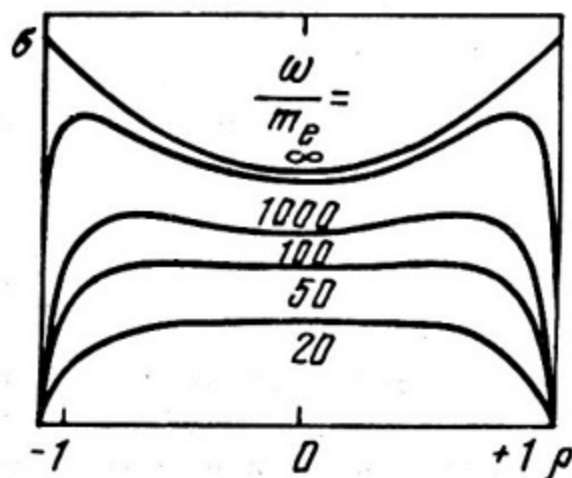


Рис. 10

Полное сечение образования электрон-позитронных пар  $\gamma$ -квантами можно получить из (72) путем интегрирования по  $\rho$ . Оно логарифмически зависит от  $\omega$  в области отсутствия экранирования

$$\sigma(\omega) = \alpha Z^2 r_0^2 \left[ \frac{28}{9} \ln \frac{2\omega}{m_e} - \frac{218}{27} \right], \quad (74)$$

а при асимптотически высоких энергиях выходит на константу, соответствующую полному экранированию

$$\sigma(\omega \rightarrow \infty) = \alpha Z^2 r_0^2 \frac{28}{9} \ln 190 Z^{-1/3} \quad (75)$$

### 8. Образование электрон-позитронных пар заряженными частицами

Диаграммы процесса приведены на рис. 11. Левые и правые диаграммы различаются видами частиц, которые обмениваются виртуальным  $\gamma$ -квантом с ядром. Все диаграммы приводят к следующей зависимости:

$$\sigma \sim \frac{\alpha^4 Z^2}{\pi^2}, \quad (76)$$

где  $Z$  - заряд ядра,  $\pi$  - масса частицы, обменивающейся виртуальным  $\gamma$ -квантом с ядром.

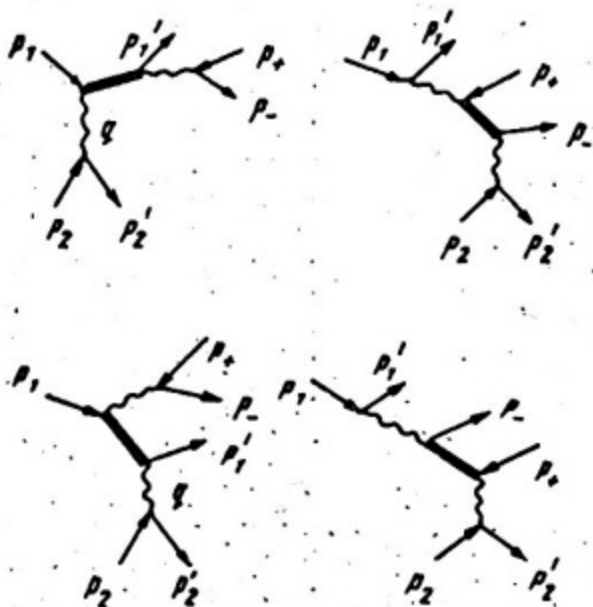


Рис. 11

Если налетающая частица имеет массу  $m_1 \gg m_e$ , то основной вклад в сечение будут давать правые диаграммы. Однако при большой доле энергии, переданной паре, вклад левых диаграмм становится преобладающим.

Практически процесс образования  $e^-e^+$ -пар важен для мюонов высоких энергий. При этом малые передачи дают определяющий вклад в потери энергии, а большие передачи - в образование каскадных ливней (подробнее см. [4]). Поэтому в дальнейшем в качестве налетающей частицы будет рассматриваться мюон.

Кинематика процесса определяется законами сохранения энергии и импульса

$$E_1 = E'_1 + \varepsilon_+ + \varepsilon_- + \nu; \quad \vec{p}_1 = \vec{p}'_1 + \vec{p}_+ + \vec{p}_- + \vec{q}. \quad (77)$$

Энергией отдачи ядра, как обычно, пренебрегают ( $\nu \approx 0$ ). Для описания процесса удобно ввести безразмерные переменные

$$\rho = \frac{\varepsilon_+ - \varepsilon_-}{\varepsilon_+ + \varepsilon_-} = \frac{E_+ - E_-}{E} \quad \text{и} \quad \nu = \frac{\varepsilon}{E_1}. \quad (78)$$

В общем случае энергетическая зависимость сечения определяется тремя переменными  $E_1$ ,  $\varepsilon_+$  и  $\varepsilon_-$  или  $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$ . Так как сечение симметрично по отношению к электрону и позитрону, то удобно пользоваться переменными  $E$ ,  $\nu$ ,  $\rho$ . Переход от переменных  $\varepsilon_+$  и  $\varepsilon_-$  к  $\nu$  и  $\rho$  осуществляется с помощью (78) и якобиана  $d\varepsilon_+ d\varepsilon_- = \frac{E^2 \nu}{2} d\nu d\rho$ .

Минимальный переданный ядру импульс можно получить из (77) обычным путем, полагая  $\nu \approx 0$ . Для ультрарелятивистских энергий

$$\delta = \frac{m_\mu^2 \varepsilon}{2E_1 E'_1} + \frac{m_e^2 \varepsilon}{2\varepsilon_+ \varepsilon_-} = \frac{m_\mu^2 \nu}{2E_1(1-\nu)} + \frac{2m_e}{E_1(1-\rho^2)} \frac{1}{\nu}. \quad (79)$$

Первое слагаемое совпадает с  $\delta$  для тормозного излучения (41), а второе с  $\delta$  для образования пар  $\gamma$ -квантами (69). Если ввести параметр  $\xi$ , равный отношению первого и второго слагаемых

$$\xi = \left( \frac{m_\mu}{m_e} \right)^2 \frac{\nu^2}{1-\nu} \frac{1-\rho^2}{4}, \quad (80)$$

то  $\delta$  можно выразить в виде

$$\delta = \frac{2m_e^2(1+\xi)}{E_1 \nu (1-\rho^2)}. \quad (81)$$

Области процесса. В зависимости от величины параметра  $\xi$  можно выделить две области: I ( $\xi < 1$ ) и II ( $\xi > 1$ ). Деление на эти области в координатах  $E$  и  $\nu$  для образования электрон-позитронных пар мюонами показано на рис. 12 для  $\rho = 0$ , при этом условии  $\xi = 1$  переходит в  $\nu = \frac{2m_e}{m_\mu}$  (см. (80)). Часто это значение принимают за границу между областями I и II независимо от величины  $\rho$ . Из (80) видно, что это не так. На рис. 12 приведена также область экранирования ядра атомными электронами, которая разделяет области I и II

на две подобласти: отсутствия экранирования (ОЭ) и полного экранирования (ПЭ).

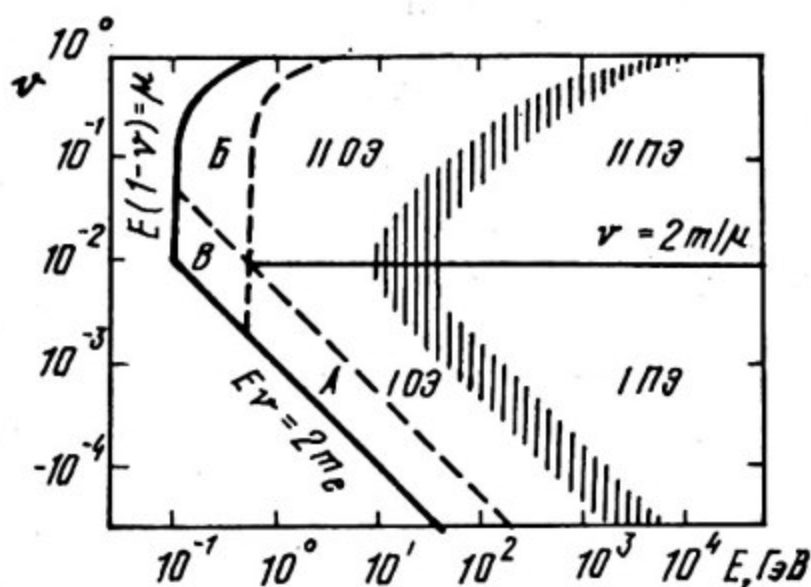


Рис. 12

Следует отметить, что в целом для этого процесса по сравнению с тормозным излучением и образованием пар  $\gamma$ -квантами полное экранирование наступает при более высоких энергиях, так как всегда существенна область I ОЭ, хотя вклад ее в сечение, естественно, уменьшается.

Сечение образования электрон-позитронных пар мюонами можно записать в виде

$$\sigma(E, \nu, \rho) = \frac{2}{3\pi} (Z\alpha r_0)^2 \frac{1-\nu}{\nu} \left( \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \Phi_\mu + \Phi_e \right), \quad (82)$$

где функции  $\Phi_\mu$  и  $\Phi_e$  дают вклад левых и правых ( $\mu^-$  и  $e^-$ -диаграмм) соответственно. Хотя расчетам этого сечения было посвящено много работ, получить аналитические выражения, подобные формулам для тормозного излучения или образования  $e^-e^+$ -пар фотонами, даже для ультрарелятивистского предела не удалось. В приложении 3 приведены достаточно простые аппроксимационные формулы, дающие хорошую точность ( $\sim 1\%$ ).

Часто требуется не дифференциальное по  $\rho$  сечение, а интегральное

$$\sigma(E, \nu) = 2 \int_0^{\rho_{\text{макс}}} \sigma(E, \nu, \rho) d\rho. \quad (83)$$

Прямое интегрирование (82) возможно только численно, поэтому для  $\sigma(E, \nu)$  используются различные приближенные выражения. Для наиболее интересной области I ПЭ Кельнером и Котовым было получено следующее выражение

$$\sigma(E, \nu) = \frac{56}{9\pi} (Z\alpha r_0)^2 \frac{1}{\nu} \ln \frac{m_e K}{m_\mu \nu} \ln (190Z^{-1/3}), \quad (84)$$

где  $K \approx 1,8$ .

Вклад областей I и II в полное сечение  $\sigma(E)$  при различных энергиях приведен в табл. 3.

Таблица 3

Области	Энергия, ТэВ			
	0,01	0,1	1	10
I	90,8	96,3	98,2	99,0
II	9,2	3,7	1,8	1,0

Влияние формфактора ядра на сечение образования электрон-позитронных пар мюонами меньше, чем при тормозном излучении, так как основной вклад дают  $e$ -диаграммы, когда с ядром обмениваются виртуальным  $\gamma$ -квантом электроны (позитроны). Тем не менее, оно существенно.

Если использовать распределение Ферми (29) для вычисления упругого формфактора, то его влияние, так же как и в случае тормозного излучения, сводится к поправкам к логарифмическим членам функций  $\mathcal{F}_\mu$  и  $\mathcal{F}_e$  (см. приложение 3)

$$L'_\mu = L_\mu - \ln \left[ \frac{3}{2} Z^{1/3} \sqrt{(1 + \frac{1}{\xi})(1 + \gamma_\mu)} \right]; \quad (85)$$

$$L'_e = L_e - \frac{1}{2} \ln \left[ 1 + \left( \frac{3}{2} \frac{m_e}{m_\mu} Z^{1/3} \right)^2 (1 + \xi)(1 + \gamma_e) \right],$$

где  $L_\mu$  и  $L_e$  - функции (П.6) и (П.7).

#### IV. НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ

Рассеяние называется неупругим, если при взаимодействии часть энергии идет на возбуждение рассеивающихся частиц (обеих или одной) или, при достаточно высоких энергиях, на обра-

зование новых частиц. Обычно рассматривается неупругое взаимодействие электронов и мюонов с нуклонами и ядрами, когда образуются вторичные мезоны. Поэтому в литературе для описания этих процессов широко используется термин "электророждение мезонов". Естественно, такой процесс не является чисто электромагнитным. В силу того, что образующиеся частицы являются ядерноактивными, это взаимодействие называют также ядерным. Особенно часто это название используется в физике космических лучей, где наличие ядерноактивных частиц нередко служит основой идентификации взаимодействий такого рода. Таким образом, в современном понимании данного вопроса все три термина обозначают один и тот же процесс.

### 9. Кинематика процесса

Диаграмма процесса приведена на рис. 13,б. На рис. 13,а,в для сравнения приведены диаграммы упругого рассеяния на ядре и поглощения ядром  $\gamma$ -кванта (фотоядерное взаимодействие), которые являются двумя предельными случаями неупругого рассеяния. От упругого рассеяния оно отличается тем, что переданная при рассеянии энергия  $\nu$  не целиком переходит в кинетическую энергию, а частично идет на увеличение массы второй частицы, которая затем может распасться на несколько других частиц. От фотоядерного взаимодействия оно отличается тем, что квадрат переданного четырехимпульса не равен нулю, в то время как при взаимодействии реального фотона  $q^2 = 0$ .

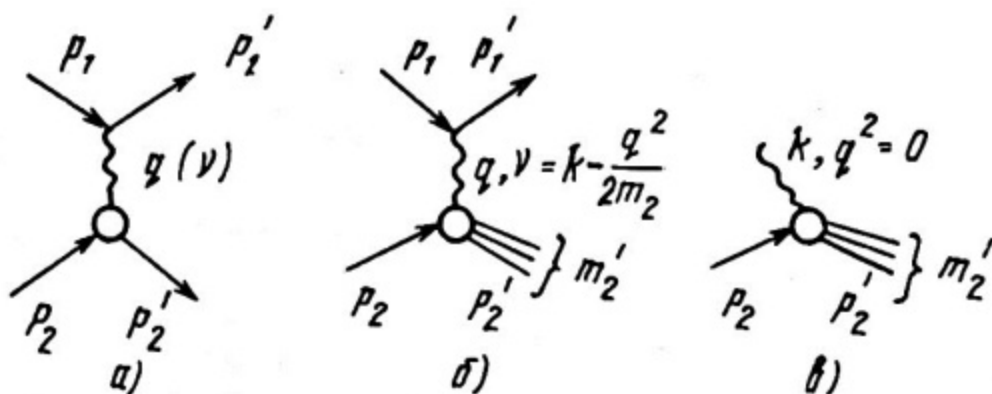


Рис. 13

Переданный четырехимпульс при неупругом рассеянии не связан однозначно с переданной энергией  $\nu$ , как при упругом рассеянии, а меняется в широких пределах. Рассмотрим адрон-

ную вершину (рис. 13). Для четырехимпульсов запишем  $p_2' = p_2 + q$ . Возводя в квадрат, получим

$$p_2'^2 = p_2^2 + 2p_2 q + q^2. \quad (86)$$

Для неупругого рассеяния

$$m_2'^2 = m_2^2 + 2m_2 \nu + q^2, \quad (87)$$

а для фотоядерного процесса

$$m_2'^2 = m_2^2 + 2m_2 \kappa. \quad (88)$$

Сопоставление (87) и (88) показывает, что при электророжде-нии для образования той же массы  $m_2'$  требуется энергия, боль-шая, чем при фоторождении. Переходя к переменной  $Q^2 = -q^2$ , можно записать  $\nu = \kappa + Q^2/2m_2$ . С учетом  $m_2' = m_2 + \Delta m$  для  $Q^2$  по-лучим

$$Q^2 = +2m_2 \nu - \Delta m (2m_2 + \Delta m). \quad (89)$$

Переход к пределу  $\Delta m \rightarrow 0$  дает упругое рассеяние. При  $Q^2 \rightarrow 0$  и  $\Delta m \rightarrow m_2(\sqrt{1+2\nu/m_2}-1)$  получим фотоядерное взаимодействие.

Минимальный переданный импульс можно получить из со-отношения (Т. 3), которое справедливо как для упругого, так и для неупругого рассеяния. Минимальное значение  $Q_{\text{мин}}^2$  будет при  $\theta = 0$ . Более удобная формула получается для ультрареля-тивистского случая. Выражая  $p_1$  и  $p_1'$  через  $E_1$  и  $E_1'$  и ис-пользуя приближенные разложения для корней, как это было сделано при определении  $\delta$  в тормозном излучении, можно по-лучить

$$Q_{\text{мин}}^2 = \frac{m_1^2 \nu^2}{E_1 E_1'} = \frac{m_1^2 \nu^2}{E_1 (E_1 - \nu)} = \frac{m_1^2 \nu^2}{1 - \nu}, \quad (90)$$

где  $\nu = \nu/E_1$ .

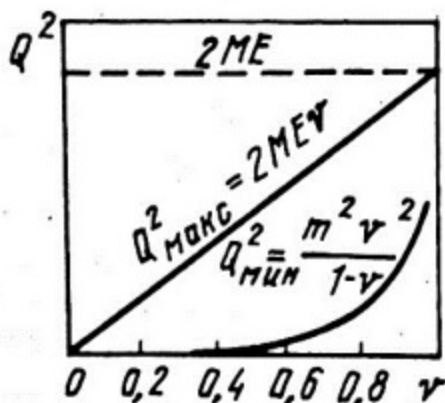


Рис. 14

Максимальное значение  $Q$  будет соответствовать упругому рассеянию  $Q_{\text{макс}}^2 = 2m_2 \nu$ . Область изменения  $Q$  в зависимости от  $\nu$  приведена на рис. 14. Верхняя граница соответ-ствует упругому рассеянию, когда  $\Delta m = 0$ . Нижняя граница очень близка к фо-тоядерному процессу, но ему не тожд-ественна, так как  $Q_{\text{мин}}^2 \neq 0$ . При заданных  $E_1$  и  $\nu$  степень неупру-гости задается углом рассеяния на-летающей частицы.

## 10. Сечение

В связи с существованием двух предельных процессов для неупругого рассеяния, его сечение вычислялось в рамках обобщения либо сечения упругого рассеяния, либо фотоядерного взаимодействия.

Выражение через структурные функции  $W_1$  и  $W_2$ . Сечение упругого рассеяния на нуклонах (34) было обобщено на процесс неупругого рассеяния путем замены упругих формфакторов  $F_1(Q^2)$  и  $F_2(Q^2)$  на структурные функции  $W_1(Q^2, \nu)$  и  $W_2(Q^2, \nu)$ , зависящие уже от двух независимых переменных в соответствии с кинематикой процесса. Дрелл и Валечка получили сечение в виде

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dp_1'} = \frac{2\alpha^2}{Q^4} \left( \frac{p_1'^2}{E_1' p_1} \right) \left\{ \left[ 2(E_1 E_1' - p_1 p_1' \cos\theta - 2m_1^2) \right] W_1 + \right. \\ \left. + \left[ E_1 E_1' + p_1 p_1' \cos\theta + m_1^2 \right] W_2 \right\}. \quad (91)$$

В ультрарелятивистском случае (91) переходит в

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE_1'} = \frac{\alpha^2}{4E_1'^2 \sin^4\theta/2} \left[ \cos^2\theta/2 W_2 + 2\sin^2\theta/2 W_1 \right]. \quad (92)$$

Зависимость сечения от  $Q^2$  и  $\nu$  можно получить, используя выражение (Т. 3) (см. табл.1) и якобиан перехода

$$\frac{d\Omega dE_1'}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi}{E_1 E_1'}$$

В результате получим

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{4\pi\alpha^2}{Q^4 E_1'^2} \left[ (E_1 E_1' - Q^2) W_2 + (Q^2/2 - m_1^2) W_1 \right]. \quad (93)$$

Выражение через  $\sigma_t$  и  $\sigma_s$ . С другой стороны, сечение неупругого рассеяния можно записать как обобщение фотонуклонного взаимодействия, введением, помимо сечения поперечно поляризованных (обычных) фотонов  $\tilde{\sigma}_t$ , сечения продольно поляризованных фотонов  $\tilde{\sigma}_s$ , которое при взаимодействии реальных  $\gamma$ -квантов тождественно равно нулю. Следуя работе Ханда, сечение можно представить в виде:

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{\alpha}{\pi} (\Gamma_t \tilde{\sigma}_t + \Gamma_s \tilde{\sigma}_s), \quad (94)$$

где функции  $\Gamma_t$  и  $\Gamma_s$  даются выражениями

$$\Gamma_t = \frac{\kappa}{Q^2(Q^2 + \nu^2)E_1^2} \left[ E_1 E_1' + \frac{\nu^2}{2} \left( 1 - \frac{2m_1^2}{Q^2} \right) + \frac{Q^2}{4} - m_1^2 \right], \quad (95)$$

$$\Gamma_s = \frac{\kappa}{Q^2(Q^2 + \nu^2)E_1^2} \left[ E_1 E_1' - \frac{Q^2}{4} \right]. \quad (96)$$

Часто сечение записывается в виде

$$\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2} = \frac{\alpha}{\pi} \Gamma_t \sigma_{\text{вирт}}(\nu, Q^2), \quad (97)$$

где  $\sigma_{\text{вирт}} = \sigma_t + \epsilon \sigma_s$ , а поляризационный фактор  $\epsilon = \Gamma_s / \Gamma_t$  дается выражением

$$\epsilon = \frac{4E_1 E_1' - Q^2}{4E_1 E_1' + 2\nu^2 \left( 1 - 2m_1^2 / Q^2 \right) + Q^2 - 4m_1^2}. \quad (98)$$

Связь структурных функций  $W_1$  и  $W_2$  с  $\sigma_t$  и  $\sigma_s$  может быть получена сопоставлением (93) и (94)

$$W_1 = \frac{\kappa}{4\pi^2\alpha} \sigma_t; \quad W_2 = \frac{\kappa}{4\pi^2\alpha} \frac{Q^2}{Q^2 + \nu^2} (\sigma_t + \sigma_s). \quad (99)$$

Запись сечения через структурные функции обычно используется при исследовании больших  $Q^2$ , т.е. глубоконеупругих процессов, позволяющих исследовать структуру нуклонов. Запись сечения через  $\sigma_t$  и  $\sigma_s$  чаще используется при исследованиях в области малых  $Q^2$ . Эта область интересна тем, что в пределе ( $Q^2 \rightarrow 0$ ) дает фотоядерное взаимодействие и тем самым позволяет независимо определить фотоядерное или фотонуклонное сечение. Интерес к подобным исследованиям обусловлен большими трудностями в получении монохроматических пучков  $\gamma$ -квантов высоких энергий.

В области малых  $Q^2$  сечение взаимодействия виртуальных  $\gamma$ -квантов  $\sigma_{\text{вирт}}$  может быть представлено в виде

$$\sigma_{\text{вирт}}(\nu, Q^2) = \sigma_{\gamma N}(\kappa) F(Q^2), \quad (100)$$

где  $\sigma_{\gamma N}$  - сечение фоторождения на нуклоне при энергии  $\gamma$ -кванта  $\kappa$ , а  $F(Q^2)$  - неупругий (структурный) формфактор нуклона:

$$F(Q^2) = \left( 1 + \frac{Q^2}{m_0^2} \right)^{-1}, \quad (101)$$

где  $m_0$  — эффективная масса виртуальных векторных частиц, в которые может превратиться фотон. Заметим, что в отличие от упругого рассеяния, сечение (100) зависит от первой степени неупругого формфактора.

В области высоких энергий ( $E_1 \gg 100$  ГэВ)  $\sigma_{\gamma N}$  довольно слабо меняется с энергией, поэтому сечение (97) можно проинтегрировать по  $Q^2$  с учетом (100) и (101):

$$\frac{d\sigma}{d\nu} = \frac{\alpha}{\pi} \sigma_{\gamma N} \frac{1}{\nu} \left\{ \nu - 1 + \left[ 1 - \nu + \frac{\nu^2}{2} \left( 1 + \frac{2m_1^2}{m_0^2} \right) \right] \times \right. \\ \left. \times \ln \frac{\frac{E_1^2(1-\nu)}{m_1^2} \left[ 1 + \frac{m_1^2 \nu^2}{m_0^2(1-\nu)} \right]}{1 + \frac{E_1 \nu}{m_0} \left( 1 + \frac{m_0}{2m_p} + \frac{E_1 \nu}{m_0} \right)} \right\}, \quad (102)$$

где  $\nu = \nu/E_1$ .

## 11. Некоторые модельные представления

Векторная доминантность. Адроподобный характер взаимодействия фотонов высоких энергий привел к появлению модели векторной доминантности, суть которой сводится к введению виртуальных превращений  $\gamma$ -кванта в векторные мезоны  $\rho$ ,  $\omega$ ,  $\varphi$  и т.д. В этой модели величина  $m_0$  в неупругом формфакторе должна быть порядка массы  $\rho$ -мезона, самого легкого из векторных мезонов. Экспериментальные данные не противоречат этой модели, хотя значение  $m_0$ , полученное в различных работах, колеблется в широких пределах

$$m_0^2 = (0,4 \div 1) \Gamma^2 \text{ЭВ}^2 = (0,6 \div 1,5) m_\rho^2. \quad (103)$$

Масштабная инвариантность (скейлинг). В 1969 г. Бьеркен предсказал существование следующего явления. При  $Q^2 \rightarrow \infty$  и  $\nu \rightarrow \infty$ , но при конечном их отношении  $\omega = 2m_p \nu / Q^2$ , структурная функция нуклона  $W_2(\nu, Q^2)$  должна зависеть лишь от  $\omega$ , которая представляет собой обратную величину переданного четырехимпульса в единицах максимально возможного.

Экспериментально скейлинг был обнаружен при неупругом рассеянии электронов. Обработка многих экспериментальных данных привела к следующей зависимости:

$$\nu W_2(\nu, Q^2) = \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^3 \left[ 1,27 + 0,58 \left(1 - \frac{1}{\omega}\right) - 1,65 \left(1 - \frac{1}{\omega}\right)^2 \right]. \quad (104)$$

Партоны. Из (104) видно, что при  $\omega \rightarrow \infty$  величина  $\sqrt{W_2}$ , которая играет роль обычного неупругого формфактора, стремится к константе. Выход формфактора на константу свидетельствует о точечной структуре мишени. Однако обычно (см. п. 3) формфакторы стремятся к константе, равной единице при  $q^2 \rightarrow 0$ , что понятно, так как соответствующая длина волны стремится к бесконечности, и любой объект представляется точечным. В случае неупругого рассеяния выход формфактора на константу происходит в области больших переданных импульсов и энергий. Поэтому в данном случае мы имеем дело с проявлением точечных объектов при малых длинах волн, которые не чувствуются при больших длинах волн в области меньших энергий.

Эти точечные структуры, обнаруженные в нуклонах при неупругом взаимодействии, получили название партонов (от английского слова *part* - часть). Созданная на этой основе партонная модель оказалась весьма плодотворной не только в описании неупругого взаимодействия, но и сильного взаимодействия адронов.

Теневой эффект. Мы рассмотрели сечение неупругого рассеяния заряженных частиц на отдельных нуклонах. С точки зрения электромагнитного взаимодействия ядро можно рассматривать как  $A$  нуклонов, если не делать различия между взаимодействием с протонами и нейтронами, или  $Z$  протонов и  $N$  нейтронов, если эту разницу учитывать.

Адроподобный характер взаимодействия фотонов с нуклонами ядра должен приводить к эффектам, подобным тем, которые возникают при взаимодействии адронов друг с другом. Из-за взаимного экранирования нуклонов в ядрах сечения взаимодействия нуклонов и пионов с ядрами связаны с сечениями  $\sigma_{NN}$  и  $\sigma_{\pi N}$  соотношениями  $\sigma_{NA} \approx A^{2/3} \sigma_{NN}$  ;  $\sigma_{\pi A} \approx A^{3/4} \sigma_{\pi N}$ . Соответственно, для фотоядерного взаимодействия

$$\sigma_{\gamma A} = A^2 \sigma_{\gamma N} = A_{\text{эф}} \sigma_{\gamma N} \quad (105)$$

В общем случае  $A_{\text{эф}}$  зависит от  $K$ , однако в области высоких энергий ( $K \gtrsim 10$  ГэВ) перестает зависеть от  $K$  и в соответствии с двухкомпонентной моделью взаимодействия реальных фотонов стремится к значению

$$A_{\text{эф}} = 0,22A + 0,78A^{0,89} \quad (106)$$

Последнее выражение означает, что в 78% случаев фотон проявляет себя как тяжелая векторная частица, а в 22% случаев такого превращения не происходит.

Для неупругого взаимодействия  $A_{\text{эп}}$  зависит не только от  $\nu$ , но и от  $Q^2$ . При малых  $Q^2$   $A_{\text{эп}}(\nu, Q^2) \rightarrow A_{\text{эп}}(K)$ .

Более подробные сведения о моделях взаимодействия реальных и виртуальных фотонов можно найти в [5].

#### СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фейнман Р.П. Теория фундаментальных процессов. — М.: Наука, 1978.
2. Жижин Е.Д., Никитин Ю.П. Диаграммная техника в применении к теории электромагнитных взаимодействий. — М.: МИФИ, 1985.
3. Хофштадтер Р. Рассеяние электронов и структура ядер. — В сб.: Электромагнитная структура ядер и нуклонов. М., 1958, с. 11 — 133.
4. Кокоулин Р.П., Петрухин А.А. Сечение прямого образования электрон-позитронных пар мюонами высоких энергий. — В сб.: Элементарные частицы и космические лучи. М., 1973, с. 26 — 36.
5. Фейнман Р.П. Взаимодействие фотонов с адронами. — М.: Мир, 1975.

1. Релятивистская кинематика

1. Основные формулы:  $E^2 = p^2 + m^2$  ;  $\beta = \frac{p}{E} = \frac{dE}{dp}$  ;  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  ;  $E = \gamma mc^2$  ;  $T = m(\gamma - 1)c^2$  ;  $p = \gamma m\beta c = m\sqrt{\gamma^2 - 1}c$  ;  $p^2 = 2mT + T^2/c^2$ .

2. Операции над четырехимпульсами:  $(p_1 + p_2)^2 = p_1^2 + 2p_1 p_2 + p_2^2$  ;  $p_1 p_2 = E_1 E_2 - \vec{p}_1 \vec{p}_2 = E_1 E_2 - p_1 p_2 \cos\theta$  ;  $p^2 = E^2 - \vec{p}^2 = m^2 c^4$ .

Для упругого рассеяния  $p_1^2 = p_1'^2 = m_1^2 c^4$  ;  $p_2^2 = p_2'^2 = m_2^2 c^4$ .

3. Лоренц-инвариантные переменные  $s, t, u$  - см. табл.1,  $s + t + u = 2m_1^2 c^4 + 2m_2^2 c^4$ .

4. Переход к Ц-системе в упругом рассеянии:

	1-я частица	2-я частица
$E^*$	$\frac{s + m_1^2 c^4 - m_2^2 c^4}{2\sqrt{s}}$	$\frac{s + m_2^2 c^4 - m_1^2 c^4}{2\sqrt{s}}$
$p^*$	$\frac{p_1 m_2}{\sqrt{s}}$	

$\beta^*$  и  $\gamma^*$  легко вычисляются по формулам  $\beta^* = \frac{p^*}{E^*}$  ;  $\gamma^* = \frac{E^*}{m c^2}$ .

2. Формфакторы для некоторых моделей

Среднеквадратичный радиус распределения плотности заряда

$$R^2 = \overline{r^2} = 4\pi \int_0^\infty r^4 \rho(r) dr . \quad (\text{П.1})$$

при нормировке

$$4\pi \int_0^\infty r^2 \rho(r) dr = 1 . \quad (\text{П.2})$$

Безразмерный радиус  $y = r/R$ .

Безразмерный переданный импульс  $x = qR$  :

Модель	$4\pi r_0^3 \rho(r)$	$F(q)$
Юкавы-1	$\frac{\sqrt{2}}{y^2} \exp(-\sqrt{2}y)$	$\frac{\sqrt{2} \operatorname{arctg}(x/\sqrt{2})}{x}$
Юкавы-2	$\frac{6}{y} \exp(-\sqrt{6}y)$	$(1 + \frac{x^2}{6})^{-1}$
Экспоненциальная	$12\sqrt{3} \exp(-\sqrt{12}y)$	$(1 + \frac{x^2}{12})^{-2}$
Гауссовская	$3\sqrt{\frac{6}{\pi}} \exp(-3y^2/2)$	$\exp(-\frac{x^2}{6})$

При использовании среднеквадратичного радиуса в качестве параметра моделей для малых значений  $x$  все формфакторы сводятся к простому разложению

$$F(x) = 1 - \frac{x^2}{6} + \dots \quad (\text{П.3})$$

### 3. Сечение образования электрон-позитронных пар мюонами высоких энергий [4]

$$\frac{d\sigma(E, \nu, \rho)}{d\nu d\rho} = \frac{2}{3\pi} \frac{Z_2^2 \alpha^4}{m_e^2} \frac{1-\nu}{\nu} \left( \frac{m_e^2}{m_\mu^2} \mathcal{P}_\mu + \mathcal{P}_e \right);$$

где  $\mathcal{P}_\mu = \left\{ \left[ (1+\rho^2)(1+\frac{3}{2}\eta) - \frac{1}{\xi}(1+2\eta)(1-\rho^2) \right] \ln(1+\xi) + \frac{\xi(1-\rho^2-\eta)}{1+\xi} + (1+2\eta)(1-\rho^2) \right\} L_\mu;$  (П.4)

$$\mathcal{P}_e = \left\{ \left[ (2+\rho^2)(1+\eta) + \xi(3+\rho^2) \right] \ln\left(1 + \frac{1}{\xi}\right) + \frac{1-\rho^2-\eta}{1+\eta} - (3+\rho^2) \right\} L_e;$$
 (П.5)

$$L_\mu = \ln \frac{A_0 \frac{m_\mu}{m_e} Z^{-1/3} \sqrt{(1+1/\xi)(1+\gamma_\mu)}}{1 + \frac{2m_e \sqrt{e} A_0 Z^{-1/3} (1+\xi)(1+\gamma_\mu)}{E\nu(1-\rho^2)}};$$
 (П.6)

$$L_e = L_n \frac{A_0 Z^{-1/3} \sqrt{(1+\xi)(1+\gamma_e)}}{1 + \frac{2m_e \sqrt{E} A_0 Z^{-1/3} (1+\xi)(1+\gamma_e)}{E\nu(1-\rho^2)}}; \quad (\text{П.7})$$

$$\gamma_\mu = \frac{4+\rho^2+3\eta(1+\rho^2)}{(1+\rho)^2(\frac{3}{2}+2\eta)L_n(3+\xi)+1-\frac{3}{2}\rho^2}; \quad (\text{П.8})$$

$$\gamma_e = \frac{5-\rho^2+4\eta(1+\rho^2)}{2(1+3\eta)L_n(3+1/\xi)-\rho^2-2\eta(2-\rho^2)}; \quad (\text{П.9})$$

$$\xi = \left(\frac{\pi_\mu \nu}{2m_e}\right)^2 \frac{1-\rho^2}{1-\nu}; \quad \eta = \frac{\nu^2}{2}(1-\nu); \quad A_0 \approx 190.$$

$$\frac{4m_e}{E} = \nu_{\text{МИН}} \leq \nu \leq \nu_{\text{МАКС}} = 1 - \frac{\pi_\mu}{E};$$

$$0 \leq |\rho| \leq \rho_{\text{МАКС}} = \sqrt{1 - 4\pi_e/E\nu} \left[ 1 - 6\pi_\mu^2/E^2(1-\nu) \right].$$

Приведенные формулы дают точность  $\sim 1\%$  для  $E \gg 5 \text{ ГэВ}$  при условии релятивизма всех частиц.

## СОДЕРЖАНИЕ

I. УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ.....	3
II. ТОРМОЗНОЕ ИЗЛУЧЕНИЕ.....	14
III. ОБРАЗОВАНИЕ ЭЛЕКТРОН-ПОЗИТРОННЫХ ПАР....	21
IV. НЕУПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ.....	28
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	35
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	36

Петрухин Анатолий Афанасьевич

СЕЧЕНИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ПРОЦЕССОВ  
ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Редактор Е.Н. Кочубей  
Техн. редактор Н.М. Воронцова  
Корректор Е.А. Захарченко

---

Л-59825                      Подписано в печать 2/VI-1987      Формат 60x84 1/16  
Объем 2,5 п.л.              Уч.-изд.л. 2,0      Тираж 250 экз.  
Цена 15 коп.                Изд. № 073-1              Заказ 628

---

Типография МИФИ, Каширское шоссе, 31