

521.039  
П30

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

---

К  
Т. Е. Петрова, М. Ф. Хромова

Численный метод  
решения одномерной  
диффузионной задачи  
с источником

Москва 1981

621.03  
П.30

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

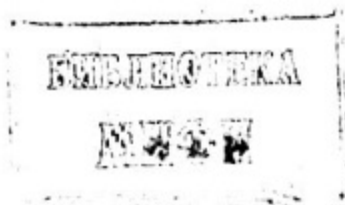
МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

---

Т. Е. Петрова, М. Ф. Хромова

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД  
РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ ДИФFUЗИОННОЙ ЗАДАЧИ  
С ИСТОЧНИКОМ

Утверждено  
редсоветом института  
в качестве учебного пособия



Москва 1981

УДК 621.039.5

Петрова Т.Е., Хромова М.Ф. Численный метод решения одномерной диффузионной задачи с источником. - М.: Изд. МИФИ, 1981, 32 с.

Учебное пособие предназначено для освоения студентами численного метода одномерного расчета ядерного реактора в диффузионно-многогрупповом приближении, необходимого при выполнении домашнего задания по курсу "Теория ядерных реакторов".

В пособии излагается алгоритм численного метода, рассматривается схема его применения для расчета реактора с отражателем в двухгрупповом приближении. Указана последовательность расчета плотностей потоков быстрых и тепловых нейтронов и эффективного коэффициента размножения, приведены основные формулы и пример расчета численным методом реактора с отражателем.

Пособие рассчитано на студентов, специализирующихся в области теории и методов расчета ядерных реакторов.

© Московский инженерно-физический институт, 1981 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Численные методы нашли широкое применение при проведении расчетов ядерных реакторов. Это объясняется прежде всего громоздкостью аналитических многогрупповых решений в многозонных реакторах [7], связанной с необходимостью сложных вычислений определителей высокого порядка. Причем эти сложные вычисления приходится проводить дважды: при определении критического размера и при вычислении плотностей потоков нейтронов в реакторе.

Численные методы лишены этих недостатков, а кроме того, имеют явное преимущество, так как позволяют контролировать правильность проводимых вычислений на любой стадии расчета, чего нельзя легко сделать при решении задачи аналитическим методом. Однако использование численных методов сопряжено с применением цикла последовательных приближений при вычислении критического размера реактора.

В данном пособии не ставится задача дать обзор всех существующих численных методов расчета, которые могут быть использованы при решении реакторных задач; они изложены во многих книгах и монографиях [4, 2] и т.д. В пособии приводится одна из многих схем численного метода расчета одномерного реактора в диффузионном приближении, которая впервые была предложена С. Б. Шиховым [8].

### 1. АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО МЕТОДА

Рассмотрим алгоритм одного из численных методов, основанного на замене дифференциального уравнения диффузии конечно-разностным и решении его методом разностной факторизации. Замена дифференциального уравнения конечно-разностным может быть осуществлена различными способами, но наиболее удобными и точными из них являются схемы "непрерывного счета". Эта идея впервые была предложена А. Н. Тихоновым и А. А. Самарским [5]. Рассмотрим одну из таких схем, которая была разработана С. Б. Шиховым для одномерных областей.

### 1.1. Получение конечно-разностного уравнения

Каждое из уравнений многогрупповой системы для случая одномерной геометрии запишем в следующей форме:

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{dJ}{dr} = Q(r) - \Sigma(r) \varphi(r), \quad (1.1)$$

$$J(r) = -r^\alpha \mathcal{D} \frac{d\varphi}{dr}, \quad (1.2)$$

где  $J(r) = r^\alpha i(r)$  — полный диффузионный поток через поверхность  $r^\alpha$  ( $\alpha = 0, 1, 2$  для плоской, цилиндрической и сферической геометрии соответственно);  $Q(r)$  — плотность генерации нейтронов в рассматриваемую группу за счет делений и упругих и неупругих переходов из вышерасположенных групп;  $\Sigma$  — макроскопическое сечение поглощения и увода из данной группы.

Функции  $\varphi(r)$  и  $J(r)$  всюду непрерывны, в том числе и на границах раздела, где  $Q(r)$ ,  $\Sigma(r)$  и  $\mathcal{D}(r)$  могут испытывать разрыв. В центре симметрии при  $r = 0$  и на экстраполированной границе ( $r = R_0$ ) имеют место краевые условия  $J(0) = 0$  и  $\varphi(R_0) = 0$ .

На интервал изменения переменной  $r$  нанесем две системы узловых точек: основную  $r_l$  и вспомогательную  $r_{l+\frac{1}{2}}$ , так что  $r_l < r_{l+\frac{1}{2}} < r_{l+1}$  (рис. 1).

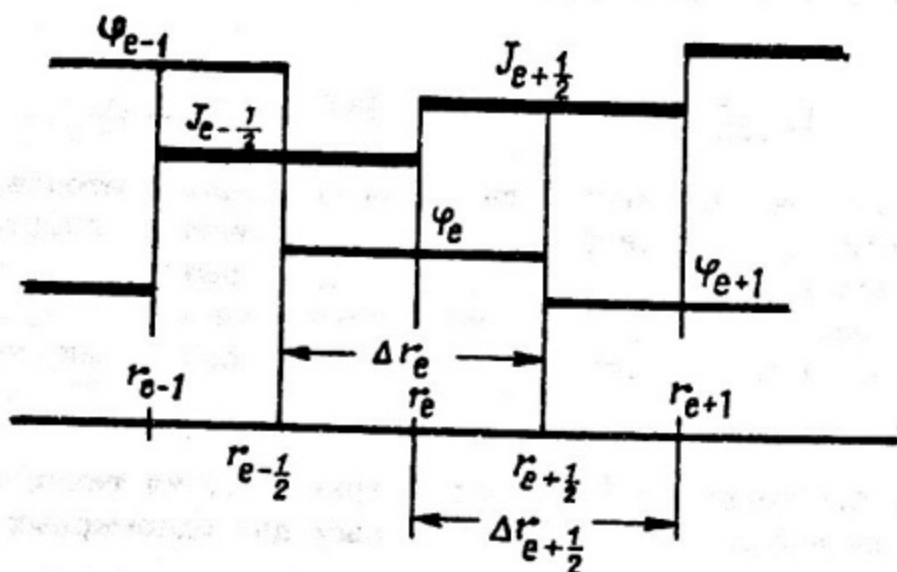


Рис. 1. Узловые точки и средние значения тока  $J_{l \pm \frac{1}{2}}$  и плотности потока  $\varphi_l$  в интервалах ( $l = 1, 2, 3, \dots, N$ )

Введем обозначения:

$$\Delta r_e = r_{e+\frac{1}{2}} - r_{e-\frac{1}{2}}, \quad (1.3)$$

$$\Delta V_e = \int_{r_{e-\frac{1}{2}}}^{r_{e+\frac{1}{2}}} \rho^\alpha d\rho = \frac{r_{e+\frac{1}{2}}^{\alpha+1} - r_{e-\frac{1}{2}}^{\alpha+1}}{\alpha+1} \approx r_e^\alpha \Delta r_e, \quad (1.4)$$

где  $r_{e+\frac{1}{2}} = r_e + \frac{\Delta r_e}{2} = r_{e+1} - \frac{\Delta r_{e+1}}{2}$  - координата средней точки интервала  $(r_e, r_{e+1})$ ;  $\Delta V_e$  - объем слоя между поверхностями  $r_{e+\frac{1}{2}}$  и  $r_{e-\frac{1}{2}}$ .

Умножим уравнение (1.1) на  $r^\alpha$  и проинтегрируем по интервалу  $(r_{e-\frac{1}{2}}, r_{e+\frac{1}{2}})$ :

$$\int_{r_{e-\frac{1}{2}}}^{r_{e+\frac{1}{2}}} \frac{dT}{dr} dr = \int_{r_{e-\frac{1}{2}}}^{r_{e+\frac{1}{2}}} r^\alpha Q(r) dr - \int_{r_{e-\frac{1}{2}}}^{r_{e+\frac{1}{2}}} r^\alpha \Sigma(r) \Psi(r) dr,$$

после чего получим:

$$J_{e+\frac{1}{2}} - J_{e-\frac{1}{2}} = \langle Q \rangle_e \Delta V_e - \Sigma_e \langle \Psi \rangle_e \Delta V_e,$$

где

$$J_{e+\frac{1}{2}} = J(r_{e+\frac{1}{2}}), \quad J_{e-\frac{1}{2}} = J(r_{e-\frac{1}{2}}).$$

Приближение численного метода заключается в том, что мы полагаем

$$\langle Q \rangle_e = Q(r_e) \equiv Q_e,$$

$$\langle \Psi \rangle_e = \Psi(r_e) \equiv \Psi_e.$$

Последнее уравнение с учетом этого приближения примет вид:

$$J_{e+\frac{1}{2}} - J_{e-\frac{1}{2}} = Q_e \Delta V_e - \Sigma_e \Psi_e \Delta V_e. \quad (1.5)$$

Далее рассмотрим уравнение (1.2) в интервале  $(r_e, r_{e+1})$ .  
 Предполагая  $J(r)$  внутри интервала постоянным и равным  $J_{e+\frac{1}{2}}$ ,  
 перепишем его в виде

$$\frac{dy}{dr} = - \frac{1}{r^\alpha \mathcal{D}(r)} J_{e+\frac{1}{2}}. \quad (1.6)$$

Интегрируя (1.6) в интервале  $(r_e, r_{e+1})$ , получим

$$y_{e+1} - y_e = -J_{e+\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{\mathcal{D}} \right\rangle_{e+\frac{1}{2}} \left\langle \frac{1}{r^\alpha} \right\rangle_{e+\frac{1}{2}} \Delta r_{e+\frac{1}{2}}, \quad (1.7)$$

где

$$\left\langle \frac{1}{\mathcal{D}} \right\rangle_{e+\frac{1}{2}} = \frac{\int_{r_e}^{r_{e+1}} \frac{dp}{\mathcal{D}(p) p^\alpha}}{\int_{r_e}^{r_{e+1}} \frac{dp}{p^\alpha}}, \quad (1.8)$$

$$\left\langle \frac{1}{r^\alpha} \right\rangle_{e+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\Delta r_{e+\frac{1}{2}}} \int_{r_e}^{r_{e+1}} \frac{dp}{p^\alpha}.$$

Введем обычную для одномерной задачи подстановку  $\mathcal{Y}(r) = \frac{I(r)}{r^{\alpha/2}}$   
 и определим из (1.7)

$$J_{e+\frac{1}{2}} = a_e I_e - b_e I_{e+1}, \quad (1.9)$$

где  $I_e = I(r_e)$ ,  $I_{e+1} = I(r_{e+1})$ ,

$$a_e = \frac{1}{r_e^{\alpha/2} \left\langle \frac{1}{r^\alpha} \right\rangle_{e+\frac{1}{2}} \delta_e}, \quad (1.10)$$

$$b_e = \frac{1}{r_{e+1}^{\alpha/2} \left\langle \frac{1}{r^\alpha} \right\rangle_{e+\frac{1}{2}} \delta_e}, \quad (1.11)$$

$$\delta_e = \left\langle \frac{1}{D} \right\rangle_{e+\frac{1}{2}} \Delta r_{e+\frac{1}{2}}. \quad (1.12)$$

В общем случае, когда коэффициент диффузии меняется внутри интервала, выражение для  $\left\langle \frac{1}{D} \right\rangle_{e+\frac{1}{2}}$  следует написать в виде

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{1}{D} \right\rangle_{e+\frac{1}{2}} &= \frac{\int_{r_e}^{r_{e+1}} \frac{d\rho}{D(\rho)\rho^\alpha}}{\int_{r_e}^{r_{e+1}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha}} = \\ &= \frac{\frac{1}{D_e} \int_{r_e}^{r_{e+\frac{1}{2}}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha} + \frac{1}{D_{e+1}} \int_{r_{e+\frac{1}{2}}}^{r_{e+1}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha}}{\int_{r_e}^{r_{e+1}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha}}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Тогда выражения для  $\delta_e$  в различной геометрии примут вид, указанный в табл. 1.1. Если же коэффициент диффузии остается постоянным внутри интервала, то

$$\delta_e = \frac{\Delta r_{e+\frac{1}{2}}}{D_e}.$$

Подставим (1.9) в (1.5) и получим конечно-разностное уравнение диффузии

$$I_{e+1} - A_e I_e + B_e I_{e-1} = -f_e, \quad (1.14)$$

где

$$\begin{aligned} A_e &= \frac{a_e}{b_e} + \frac{b_{e-1}}{b_e} + \frac{\Sigma_e \Delta V_e}{b_e r_e^{2/2}} = \\ &= \left( \frac{r_{e+1}}{r_e} \right)^{\alpha/2} + \left( \frac{r_{e-1}}{r_e} \right)^{\alpha/2} B_e + \lambda_e \delta_e \Sigma_e \Delta r_e, \end{aligned} \quad (1.15)$$

$$B_\ell = \frac{a_{\ell-1}}{b_\ell} = \frac{\delta_\ell}{\delta_{\ell-1}} \mu_\ell, \quad (1.16)$$

$$\mu_\ell = \left( \frac{r_{\ell+1}}{r_{\ell-1}} \right)^{\alpha/2} \frac{\langle \frac{1}{r^\alpha} \rangle_{\ell+\frac{1}{2}}}{\langle \frac{1}{r^\alpha} \rangle_{\ell-\frac{1}{2}}}, \quad (1.17)$$

$$\lambda_\ell = \frac{\Delta V_\ell}{\Delta r_\ell} \left( \frac{r_{\ell+1}}{r_\ell} \right)^{\alpha/2} \langle \frac{1}{r^\alpha} \rangle_{\ell+\frac{1}{2}}, \quad (1.18)$$

$$f_\ell = \lambda_\ell \delta_\ell q_\ell \Delta r_\ell, \quad (1.19)$$

$$q_\ell = r_\ell^{\alpha/2} Q_\ell. \quad (1.20)$$

Выражения для  $\mu_\ell$  и  $\lambda_\ell$  представлены в табл. 1.1. Величины  $\mu_\ell$  и  $\delta_\ell$  в цилиндрической геометрии очень быстро сходятся к единице. Для иллюстрации в табл. 1.2 приведены значения этих величин в зависимости от  $\ell$  для цилиндрической ( $\alpha = 1$ ) и сферической ( $\alpha = 2$ ) геометрий.

Уравнение (1.14) должно удовлетворять краевым условиям:

в центре симметрии диффузионный поток должен быть равен нулю:

$$J_{\frac{1}{2}} = 0; \quad (1.21)$$

плотность потока нейтронов на экстраполированной внешней границе должна обращаться в нуль:

$$\psi_N = 0 \quad \text{или} \quad I_N = 0. \quad (1.22)$$

Первое краевое условие используем для определения  $A_1$ . Полагая  $\ell = 1$  в (1.5), получаем

$$J_{\frac{1}{2}} = \frac{q_1 \Delta V_1}{r_1^{\alpha/2}} - \Sigma_1 \frac{I_1}{r_1^{\alpha/2}} \Delta V_1. \quad (1.23)$$

Таблица 1.1

$\alpha$	$\Delta V_e$	$\mu_e$	$\lambda_e$	$\gamma_e$
0	$\Delta r_e$	1	1	$\left( \frac{\Delta r_e}{\rho_e} + \frac{\Delta r_{e+1}}{\rho_{e+1}} \right) \frac{\Delta r_{e+\frac{1}{2}}}{\Delta r_e + \Delta r_{e+1}}$
1	$\frac{r_{e+\frac{1}{2}} - r_{e-\frac{1}{2}}}{2} = r_e \Delta r_e$	$\frac{\ln \frac{r_{e+1}}{r_e}}{\Delta r_{e+\frac{1}{2}}} \frac{\ln \frac{r_e}{r_{e-1}}}{\Delta r_{e-\frac{1}{2}}}$	$\sqrt{\frac{r_e r_{e+1}}{\Delta r_{e+\frac{1}{2}}}} \approx 1 - \frac{1}{24} \left( \frac{\Delta r_{e+\frac{1}{2}}}{r_e} \right)^2$	$\left( \frac{1}{\rho_e} \ln \frac{r_{e+\frac{1}{2}}}{r_e} + \frac{1}{\rho_{e+1}} \ln \frac{r_{e+1}}{r_{e+\frac{1}{2}}} \right) \frac{\Delta r_{e+\frac{1}{2}}}{\rho_e}$
2	$\frac{r_{e+\frac{1}{2}}^3 - r_{e-\frac{1}{2}}^3}{3} = r_e^2 \Delta r_e \left[ 1 + \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta r_e}{r_e} \right)^2 \right]$	1	$1 + \frac{1}{12} \left( \frac{\Delta r_e}{r_e} \right)^2$	$\frac{1}{2\rho_{e+\frac{1}{2}}} \left[ \frac{r_{e+1} \Delta r_e}{\rho_e} + \frac{r_e \Delta r_{e+1}}{\rho_{e+1}} \right]$

Таблица 1.2

$\ell$	$\alpha = 1$		$\alpha = 2$	
	$\mu_\ell$	$\lambda_\ell$	$\mu_\ell$	$\lambda_\ell$
1	0	0,940	0	1,333
2	1,035	0,990	1	1,037
3	1,005	0,995	1	1,013
4	1,000	1,000	1	1,007
5	1,000	1,000	1	1,000

Но согласно (1.9) имеем

$$J_{1/2} = a_1 I_1 - b_1 I_2. \quad (1.24)$$

Учитывая (1.23) и (1.24), получаем, что при  $\ell = 1$  уравнение (1.14) следует заменить уравнением

$$I_2 - A_1 I_1 = f_1, \quad (1.25)$$

где

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{a_1}{b_1} + \frac{\sum_1 \Delta V_1}{b_1 r_1^{\alpha/2}} = \\ &= \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^{\alpha/2} + \sum_1 \Delta r_1 \lambda_1 r_1. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Второе краевое условие (1.22) будет реализовано в процессе решения конечно-разностного уравнения.

## 1.2. Решение конечно-разностного уравнения

Непосредственное решение конечно-разностных уравнений второго порядка с помощью разработанных в линейной алгебре методов часто затрудняется быстрым накоплением ошибок округления. Накопление ошибок связано с тем, что разностные уравнения имеют два характеристических числа, одно из которых положительное. Поэтому ошибки округления распространяются от узла к узлу экспоненциально с положительным характеристическим числом [4].

Трудности решения одномерных конечно-разностных уравнений диффузионного типа были преодолены лишь с помощью метода разностной факторизации или "прогонки". В основу метода положена идея факторизации обыкновенных дифференциальных уравнений, предложенная Э. Айнсом и развитая в дальнейшем применительно к уравнениям диффузии В. С. Владимировым [3]. Сущность этого метода заключается в том, что решение разностных уравнений второго порядка сводится к последовательному решению более простых разностных уравнений первого порядка. Для этого попытаемся записать решение конечно-разностного уравнения (1.14) в виде

$$I_{\ell+1} = \alpha_{\ell} I_{\ell} - \beta_{\ell} \quad (1.27)$$

или

$$I_{\ell-1} = \frac{I_{\ell} + \beta_{\ell-1}}{\alpha_{\ell-1}}. \quad (1.28)$$

После подстановки (1.27) и (1.28) в (1.14) должно получиться тождество

$$I_{\ell} \left( \alpha_{\ell} + \frac{\beta_{\ell}}{\alpha_{\ell-1}} - A_{\ell} \right) - \beta_{\ell} + \frac{\beta_{\ell-1}}{\alpha_{\ell-1}} B_{\ell} \equiv -f_{\ell}. \quad (1.29)$$

Приравнивая к нулю коэффициенты перед  $I_{\ell}$ , а свободный член этого уравнения к его правой части, получим следующие два соотношения для коэффициентов  $\alpha_{\ell}$  и  $\beta_{\ell}$ :

$$\alpha_{\ell} = A_{\ell} - \frac{\beta_{\ell}}{\alpha_{\ell-1}}, \quad (1.30)$$

$$\beta_{\ell} = f_{\ell} + \frac{\beta_{\ell-1}}{\alpha_{\ell-1}} B_{\ell}. \quad (1.31)$$

Соотношение (1.30) позволяет найти последовательными вычислениями все коэффициенты  $\alpha_{\ell}$  при известном  $\alpha_1$ , а соотношение (1.31) позволяет вычислять все коэффициенты  $\beta_{\ell}$  с помощью уже вычисленных коэффициентов  $\alpha_{\ell}$  при известном  $\beta_1$ . Значения  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  можно получить, сравнивая (1.25) и (1.27) при  $\ell = 1$ . Поскольку эти уравнения должны совпадать, следовательно,

$$\alpha_1 = A_1, \beta_1 = f_1.$$

Для вычисления  $I_\ell$  реализуем второе краевое условие:  
 $I_N = 0$ .

Тогда из уравнения (1.28) получим

$$I_{N-1} = \frac{\beta_{N-1}}{\alpha_{N-1}}. \quad (1.32)$$

Зная  $I_{N-1}$ , можно последовательно вычислить все  $I_\ell$  через  $I_{\ell+1}$  по формуле (1.28), начиная с  $\ell=N-1$  до  $\ell=1$  включительно. После чего вычисляются значения плотности потока нейтронов:

$$\varphi_\ell = \frac{I_\ell}{r_\ell \alpha_\ell}. \quad (1.33)$$

Таким образом, решение уравнения (1.14) свелось к последовательному решению уравнений (1.30), (1.31) и (1.28).

Полученный алгоритм можно применять для решения широкого круга задач. При решении некоторых задач оказывается достаточным однократное использование алгоритма, например, при расчете распределения плотностей потоков нейтронов в неразмножающих средах с внешним источником достаточно сделать одну прогонку (или итерацию). Однако при решении многих задач численным методом возникает необходимость многократного использования алгоритма. Например, расчет распределения плотностей потоков нейтронов в ядерном реакторе требует проведения многих итераций источника [7], причем количество итераций зависит от заданной точности и от параметров реактора (см. Приложение).

### 1.3. Соотношение баланса

При решении конечно-разностных уравнений полезно использовать некоторые контрольные соотношения, с помощью которых можно судить о точности решения конечно-разностных уравнений. Эти контрольные уравнения называют конечно-разностными соотношениями баланса (в отличие от точных уравнений баланса). Выполнение конечно-разностных соотношений баланса свидетельствует о факте, что система конечно-разностных уравнений диффузии решена с заданной точностью, что ни один нейтрон не выпал из рассмотрения [4].

В представленной выше схеме уравнение (1.5) является конечно-разностным соотношением баланса для слоя объема  $\Delta V_e$ :

$$J_{e+\frac{1}{2}} - J_{e-\frac{1}{2}} = Q_e \Delta V_e - \sum_c \varphi_c \Delta V_e,$$

где  $J_{e+\frac{1}{2}}$  определяется по (1.9).

Это соотношение представляет собой запись баланса нейтронов: полное число нейтронов, родившееся в объеме  $\Delta V_e$  ( $Q_e \Delta V_e$ ), минус полное число уведенных из него за счет поглощения и увода ( $\sum_c \varphi_c \Delta V_e$ ) равно числу ушедших нейтронов из  $\Delta V_e$  ( $J_{e+\frac{1}{2}}$ ) минус число вошедших в него ( $J_{e-\frac{1}{2}}$ ).

Если левую и правую части соотношения баланса просуммировать от  $\ell = m$  до  $\ell = n$ , то получим соотношение баланса в слое между поверхностями  $r_m^\alpha$  и  $r_n^\alpha$ :

$$J_{n+\frac{1}{2}} - J_{m-\frac{1}{2}} = \sum_{\ell=m}^n (Q_\ell - \sum_c \varphi_c) \Delta V_\ell. \quad (1.34)$$

Чтобы получить соотношение баланса для всего объема реактора, необходимо суммирование проводить от  $\ell = 1$  до  $\ell = N-1$ :

$$J_{N-\frac{1}{2}} = \sum_{\ell=1}^{N-1} (Q_\ell - \sum_c \varphi_c) \Delta V_\ell. \quad (1.35)$$

В случае, когда соотношение баланса для всего объема реактора не выполняется, т.е. левая часть (1.35) не равна правой, то, сужая область суммирования, можно обнаружить слой, в котором допущена ошибка при решении конечно-разностного уравнения.

При проведении расчета в многогрупповом приближении проверку балансного соотношения следует проводить в каждой группе нейтронов.

Однако необходимо заметить, что приведенные выше соотношения вовсе не характеризуют степень близости приближенного решения задачи к точному решению исходного дифференциального уравнения. Для суждения о степени близости приближенного решения к точному вводятся так называемые точные уравнения баланса, получаемые непосредственно из дифференциального уравнения диффузии [4]. Эти соотношения можно

использовать для суждения о погрешностях, допускаемых численным методом. Однако выполнение точных соотношений баланса является необходимым, но недостаточным условием точности расчета, проводимого численным методом, так как точность расчета еще зависит и от точности решения конечно-разностных уравнений.

## 2. СХЕМА РАСЧЕТА РЕАКТОРА С ОТРАЖАТЕЛЕМ В ДВУХГРУППОВОМ ДИФFUЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Расчет реактора численным методом проводится в определенной последовательности и включает в себя составление групповых констант, выбор интервалов разбиения физических зон на расчетные, формирование источников нейтронов, расчет пространственных распределений плотностей потоков нейтронов и эффективного коэффициента размножения. Весь этот расчетный комплекс можно условно разбить на этапы, последовательность выполнения которых прослеживается на примере расчета реактора с отражателем в двухгрупповом диффузионном приближении и обсуждается специфика расчетов на каждом этапе.

### 2.1. Двухгрупповые уравнения и константы расчета

Приведенная выше система уравнений (1.1) и (1.2) может быть представлена в виде одного уравнения, полученного подстановкой (1.2) в (1.1):

$$\frac{1}{r^\alpha} \frac{d}{dr} r^\alpha \mathcal{D} \frac{d\psi}{dr} - \Sigma \psi + Q = 0. \quad (2.1)$$

В форме (2.1) может быть записано каждое из уравнений в многогрупповом диффузионном приближении и, в частности, уравнения для плотностей потоков быстрых и тепловых нейтронов в двухгрупповом диффузионном приближении, имеющие вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_b \Delta \psi_b - \Sigma_{ab} \psi_b + \nu_f \Sigma_f \psi_b + \nu_f \Sigma_f \psi_t &= 0, \\ \mathcal{D}_t \Delta \psi_t - \Sigma_a \psi_t + \rho \Sigma_d \psi_b &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

В (2.2) индексом "б" помечены параметры, относящиеся к быстрой группе, а индексом "т" - к тепловой группе нейтронов.

Из сравнения (2.2) и (2.1) получим для промежуточно-теплового реактора (называемого в дальнейшем промежуточным), что в быстрой группе

$$D = D_f; \quad \Sigma = \Sigma_{ad}^f; \quad Q = \nu_f^f \Sigma_f^f \varphi_f + \nu_f^T \Sigma_f^T \varphi_T = Q_f,$$

а в тепловой группе

$$D = D_T; \quad \Sigma = \Sigma_a^T; \quad Q = \rho \Sigma_d^f \varphi_f = Q_T,$$

где  $\rho$  - вероятность избежать резонансного поглощения. Для реактора на тепловых нейтронах ( $\Sigma_a^f = 0, \Sigma_f^f = 0$ ) система (2.2) примет вид:

$$\begin{aligned} D_f \Delta \varphi_f - \Sigma_d^f \varphi_f + \nu_f^T \Sigma_f^T \varphi_T &= 0, \\ D_T \Delta \varphi_T - \Sigma_a^T \varphi_T + \rho \Sigma_d^f \varphi_f &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Соответственно в быстрой группе

$$D = D_f; \quad \Sigma = \Sigma_d^f; \quad Q = \nu_f^T \Sigma_f^T \varphi_T = \frac{\kappa_\infty}{\rho} \Sigma_a^T \varphi_T = Q_f,$$

а в тепловой группе

$$D = D_T; \quad \Sigma = \Sigma_a^T; \quad Q = \rho \Sigma_d^f \varphi_f = Q_T.$$

Системы уравнений (2.2) и (2.3) справедливы для каждой зоны реактора, т.е. в случае двухзонной задачи - для активной зоны и отражателя, в котором  $Q_f$  будет равно нулю.

Для вычисления входящих в (2.2) и (2.3) двухгрупповых констант для каждой зоны реактора может быть использован, например, метод, описанный в работе [1]. В расчетах численным методом полученные константы удобно свести в табл. 2, 1.

В таблице индексом "1" помечены константы, относящиеся к активной зоне реактора, а индексом "2" - к отражателю. Следует заметить, что в тепловом реакторе  $\Sigma_{ad}^f$  и  $D_f$  вычисляются как  $\frac{\xi \Sigma_s}{\Delta u}$  и  $\frac{\tau \xi \Sigma_s}{\Delta u}$  соответственно, где  $\Delta u$  при принятом разбиении на группы есть следующая величина:

$$\Delta u = \int_{E_T}^{2MэВ} \frac{dE}{E} = 18,2.$$

В этом случае в результате расчета численным методом будет получено распределение интегральной плотности потока  $\varphi_\sigma$  в интервале  $\Delta u$ . Если же положить

$$\Sigma_{ad}^\sigma = \xi \Sigma_s \quad \text{и} \quad \mathcal{D}_\sigma = \tau \xi \Sigma_s, \quad (2.4)$$

то будут получены значения  $\varphi_\sigma$  в  $\Delta u$  раз меньше.

Таблица 2.1

Реактор	Константа	Быстрая группа		Тепловая группа	
		Активная зона	Отражатель	Активная зона	Отражатель
Тепловой	$\Sigma$	$\frac{(\xi \Sigma_s)_1}{\Delta u}$	$\frac{(\xi \Sigma_s)_2}{\Delta u}$	$\Sigma_{a_1}^\tau$	$\Sigma_{a_2}^\tau$
	$\mathcal{D}$	$\frac{(\tau \xi \Sigma_s)_1}{\Delta u}$	$\frac{(\tau \xi \Sigma_s)_2}{\Delta u}$	$\mathcal{D}_{\pi_1}$	$\mathcal{D}_{\pi_2}$
Промежуточный	$\Sigma$	$\Sigma_{ad_1}^\sigma$	$\Sigma_{ad_2}^\sigma$	$\Sigma_{a_1}^\tau$	$\Sigma_{a_2}^\tau$
	$\mathcal{D}$	$\mathcal{D}_{\sigma_1}$	$\mathcal{D}_{\sigma_2}$	$\mathcal{D}_{\pi_1}$	$\mathcal{D}_{\pi_2}$

## 2.2. Разбиение физических зон реактора на интервалы

В каждой зоне реактора для каждой группы нейтронов интервал разбиения выбирается из условия

$$\Delta r \leq \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mathcal{D}}{\Sigma_{ad}}}$$

В расчетах тепловых реакторов в двухгрупповом приближении интервал разбиения в каждой зоне следует выбирать менее  $L$  и  $\sqrt{\tau}$ , причем он может быть одинаковым для обеих групп.

В правильности выбранного интервала можно убедиться, сравнивая два решения: одно — с выбранным интервалом, другое —

с интервалом, например, в два раза меньшим. Если уточнение, связанное с уменьшением интервала не существенно, то уменьшать выбранный интервал нет смысла, так как с уменьшением интервала увеличивается количество вычислительных операций и, следовательно, падает точность вычислений.

Кроме того, проверять правильность выбранного шага можно, сравнивая известные аналитические решения простых задач с решением тех же задач численным методом.

При разбиении зон реактора на интервалы и выборе узловых точек необходимо обратить внимание на следующие моменты, характерные для предлагаемого численного метода расчета реактора (принятая схема разбиения активной зоны и отражателя на интервалы представлена на рис. 2). Будем полагать, для определенности, что внутри каждой зоны реактора интервалы разбиения одинаковы, т.е. в активной зоне —  $\Delta r_1$ , а в отражателе —  $\Delta r_2$ . Тогда узловая точка с номером 1 —  $r_1$  будет находиться на расстоянии  $\frac{\Delta r_1}{2}$  от центра реактора. Все узловые точки  $r_e$  в активной зоне будут находиться друг от друга на расстоянии  $\Delta r_1$ . Последняя узловная точка в активной зоне (припишем ей номер  $n$ ) должна находиться на расстоянии  $\frac{\Delta r_1}{2}$  от границы активной зоны и отражателя. Так как при разбиении зон реактора на интервалы принимается сквозная нумерация узловых точек, первая точка в отражателе будет иметь номер  $(n+1)$  и должна лежать на расстоянии  $\frac{\Delta r_2}{2}$  от границы активной зоны и отражателя. Расстояния между узловыми точками в отражателе будут также одинаковы и равны  $\Delta r_2$ . Предпоследняя узловная точка, лежащая в отражателе (припишем ей номер  $(N-1)$ ), должна находиться на расстоянии  $\Delta r_2$  от края отражателя, а на краю отражателя, точнее на экстраполированной границе, будет лежать точка с номером  $N$ .

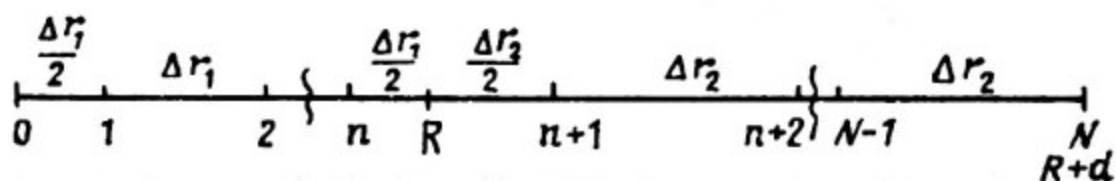


Рис. 2. Схема разбиения активной зоны и отражателя на интервалы:

$R$  — радиус активной зоны;  $d$  — толщина отражателя

### 2.3. Последовательность расчета плотностей потоков быстрых и тепловых нейтронов численным методом

Расчет распределения плотностей потоков нейтронов по реактору начинают с быстрой группы. По формулам, приведенным в разделе 1, и, используя константы для быстрой группы нейтронов, рассчитывают коэффициенты  $\beta_e$ ,  $B_e$  и  $A_e$  в каждой узловой точке активной зоны и отражателя. В этих расчетах следует обратить внимание на вычисление коэффициента  $\beta_e$ . В точке  $n$  — последней в активной зоне — даже при равномерном разбиении активной зоны на интервалы  $\delta r_n$  вычисляют по общей формуле (1.12) с использованием (1.13), тогда как в этом случае внутри каждой зоны  $\beta_e = \frac{\Delta r_e}{\rho_e}$ .

Далее рассчитывают распределения источников быстрых нейтронов. Используемый метод итерации источников предполагает задание произвольного распределения источников быстрых нейтронов в нулевом приближении —  $Q_{\sigma}^{(0)}(r_e)$ . Однако чем точнее задано распределение источников, тем быстрее будет сходиться метод итерации. Будем полагать, что в тепловом реакторе в активной зоне

$$Q_{\sigma_1}^{(0)}(r_e) = \frac{K_{\infty}}{\rho} \sum_a \tau_a \psi_{\pi_1}^{(0)}(r_e),$$

где  $\psi_{\pi_1}^{(0)}(r_e)$  — распределение плотности потока тепловых нейтронов по активной зоне в одногрупповом приближении. Для сферического реактора

$$\psi_{\pi_1}^{(0)}(r_e) \approx \frac{\sin \alpha_1 r_e}{\alpha_1 r_e},$$

где

$$\alpha_1^2 = \frac{K_{\infty} - 1}{L_1^2 + \tau_1^2}.$$

В активной зоне промежуточного реактора можно положить  $Q_{\sigma_1}^{(0)}(r_e) = 1$ . В отражателе и теплового и промежуточного реактора  $Q_{\sigma_2}^{(0)}(r_e) = 0$ , если отражатель не содержит делящихся ядер.

Далее вычисляются коэффициенты  $f_\ell, \alpha_\ell, \beta_\ell$ , причем необходимо обратить внимание на то, что  $\alpha_1 = A_1$ , а  $\beta_1 = f_1$ . И, наконец, вычисляются значения  $I_{\delta_\ell}$  в каждой узловой точке реактора. Расчет  $I_{\delta_\ell}$  производят от  $\ell = N-1$  до  $\ell = 1$ .  $I_{\delta_N} = 0$ , что следует из краевого условия. В остальных точках значения  $I_{\delta_\ell}$  рассчитывают по приведенному в разделе 1 рекуррентному соотношению (1.28).

Распределение плотности потока быстрых нейтронов по реактору в первом приближении получают, разделив  $I_{\delta_\ell}$  на  $r_\ell^{\alpha/2}$ , т.е.  $\varphi_{\delta_\ell}^{(1)} = \frac{I_{\delta_\ell}}{r_\ell^{\alpha/2}}$ .

Полученные результаты расчета удобно оформить в виде табл. 2.2.

Таблица 2.2

	$\ell$	$r_\ell$	$\gamma_\ell$	$B_\ell$	$A_\ell$	$\alpha_\ell$	$Q_\ell$	$f_\ell$	$\beta_\ell$	$I_\ell$	$\varphi_{\delta_\ell}$
Активная зона	1	$\frac{\Delta r_1}{2}$	$\frac{\Delta r_1}{2\beta_1}$	-	$A_1$	$A_1$	$Q_1$	$f_1$	$f_1$	$I_1$	$\varphi_{\delta_1}$
	2	$r_1 + \Delta r_1$	-	1	$A_2$	$\alpha_2$	$Q_2$	$f_2$	$\beta_2$	$I_2$	$\varphi_{\delta_2}$
	3	$r_2 + \Delta r_1$	-	-	$A_3$	$\alpha_3$	$Q_3$	$f_3$	$\beta_3$	$I_3$	$\varphi_{\delta_3}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$n$	$R - \frac{\Delta r_1}{2}$	$\gamma_n$	$B_n$	$A_n$		$Q_n$	$f_n$			
Отражатель	$n+1$	$R + \frac{\Delta r_2}{2}$	$\frac{\Delta r_2}{2\beta_2}$	$B_{n+1}$	$A_{n+1}$		0	0			
	$n+2$	$r_{n+1} + \frac{\Delta r_2}{2}$	-	1			-	-			
	$n+3$	$r_{n+2} + \frac{\Delta r_2}{2}$	-	-			-	-			
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	$N-1$	$R + d - \frac{\Delta r_2}{2}$	-	1	$A_{N-1}$	$\alpha_{N-1}$	0	0	$\beta_{N-1}$	$\frac{\beta_{N-1}}{\alpha_{N-1}}$	$\varphi_{\delta(N-1)}$
	$N$	$R + d$	-	-	-	-	-	-	-	0	0

После того как получено  $\varphi_{\delta e}^{(1)}$ , приступают к расчету распределения плотности потока тепловых нейтронов по реактору. Теперь все коэффициенты рассчитывают, пользуясь константами для тепловой группы нейтронов. Получив значения  $\beta_e$ ,  $V_e$  и  $A_e$ , составляют источники нейтронов в тепловой группе, полагая, что тепловые нейтроны появляются в результате замедления (увода) нейтронов быстрой группы. Тогда распределение источников тепловых нейтронов в активной зоне и в отражателе теплового реактора можно рассчитать по формуле:

$$Q_{Te} = \frac{\rho(\xi \Sigma_s)_e}{\Delta c} \varphi_{\delta e},$$

а в промежуточном реакторе – по формуле

$$Q_{Te} = \rho \Sigma_{de}^{\delta} \varphi_{\delta e}.$$

После того как распределение источников тепловых нейтронов рассчитано, вычисления продолжают в той же последовательности, что и при расчете распределения плотности потока быстрых нейтронов. Результаты расчетов оформляют в виде аналогичной таблицы. В итоге получают распределение плотности потока тепловых нейтронов в первом приближении. На этом заканчивается первая итерация вычислений полей быстрых и тепловых нейтронов. Полученное распределение тепловых нейтронов используется далее для составления источников быстрых нейтронов в первом приближении. Расчет распределения плотностей потоков нейтронов во второй и последующих итерациях аналогичен расчету в первой итерации. Схема метода последовательных приближений при вычислении  $\varphi_{\delta e}$  и  $\varphi_{Te}$  представлена на рис. 3.

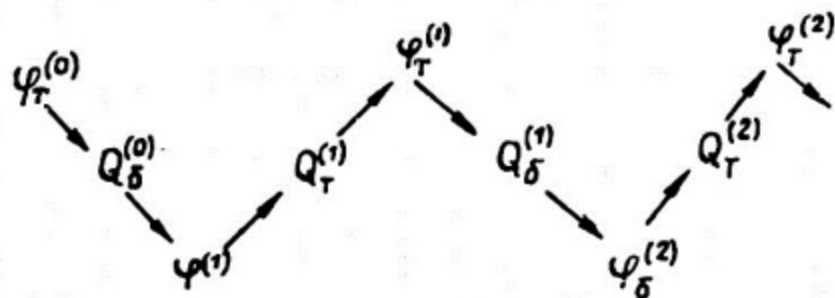


Рис. 3. Схема метода последовательных приближений

#### 2.4. Оценка эффективного коэффициента размножения

Численный метод позволяет найти значение  $K_{эфф}$  активной зоны. Точная формула для  $K_{эфф}$  имеет вид

$$K_{эфф} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\psi^{(n)}(r)}{\psi^{(n-1)}(r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q^{(n)}(r)}{Q^{(n-1)}(r)}, \quad (2.5)$$

где  $n$  — число итераций (см. Приложение).

После первой итерации можно оценить так называемый локальный эффективный коэффициент размножения, который будет зависеть от  $r$ :

$$K_{эфф}(r_e) \approx \frac{Q_{\sigma}^{(1)}(r_e)}{Q_{\sigma}^{(0)}(r_e)}. \quad (2.6)$$

Для теплового реактора сферической формы после первой итерации эффективный коэффициент размножения

$$K_{эфф}(r_e) \approx \frac{K_{\infty} \sum_a \psi_{\tau}^{(1)}(r_e)}{K_{\infty} \sum_a \psi_{\tau}^{(0)}(r_e)} = \frac{\psi_{\tau}^{(1)}(r_e)}{\frac{\sin \alpha_1 r_e}{\alpha_1 r_e}}. \quad (2.7)$$

Интегральный эффективный коэффициент размножения можно рассчитать по формуле

$$K_{эфф} \approx \frac{\sum_{\ell=1}^n Q_{\ell}^{(1)} \Delta V_{\ell}}{\sum_{\ell=1}^n Q_{\ell}^{(0)} \Delta V_{\ell}}, \quad (2.8)$$

где  $\Delta V_{\ell}$  — объем слоя  $\ell$  активной зоны.

Полученное значение  $K_{эфф}$  позволяет сделать вывод о критичности реактора, а следовательно, о том, насколько близок к критическому взятый размер активной зоны  $R$ . Если  $K_{эфф}$  сильно отличается от единицы, то следует изменить  $R$  в соответствующую сторону, и, производя расчет распределения

быстрых нейтронов, принять за распределение их источников  $Q_{\sigma}^{(1)}$ . Если значение  $K_{эфф}$  равно единице, т.е. выбранный размер оказался критическим, то итерационный процесс с целью уточнения распределения плотностей потоков быстрых и тепловых нейтронов следует производить до тех пор, пока соответствующие распределения в двух последующих итерациях не совпадут между собой. Число таких итераций определяется заданной точностью расчета эффективного коэффициента размножения.

## 2.5. Проверка правильности вычислений

Как было отмечено выше, с помощью балансных соотношений можно проверять правильность полученных численным методом результатов как в процессе расчетов распределений нейтронов по отдельным слоям, так и по реактору в целом. Проверку выполнения балансного соотношения по всему реактору следует проводить для каждой группы нейтронов.

## 3. ПРИМЕР РАСЧЕТА

Рассмотренный алгоритм численного метода был применен для расчета распределений плотностей потоков нейтронов в двухгрупповом приближении в тепловом реакторе соотражателем. Форма реактора – сферическая ( $\alpha = 2$ ), радиус активной зоны – 0,28 м, радиус активной зоны с отражателем – 0,67 м. Константы расчета, определенные в соответствии с видом (2.4), даны в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Константа	Быстрая группа		Тепловая группа	
	активная зона	отражатель	активная зона	отражатель
$\Sigma, м^{-1}$	6,22	6,22	7,25	$2,7 \cdot 10^{-1}$
$\varrho, м$	0,218	0,218	$9 \cdot 10^{-3}$	$9 \cdot 10^{-3}$

По схеме, указанной в разделе 2, было проведено три итерации. Результаты расчета распределения дифференциальной плотности потока быстрых нейтронов в первом приближении (первой итерации) представлены в табл. 3.2, а тепловых нейтронов — в табл. 3.3. Распределение плотностей быстрых и тепловых нейтронов, полученных во всех трех итерациях, приведены в виде графиков на рис. 4. Оценка величины эффективного коэффициента размножения по (2.8) после проведения первой итерации дала значение 0,840, а после третьей итерации — 0,834. Это говорит о том, что данный реактор подкритический.

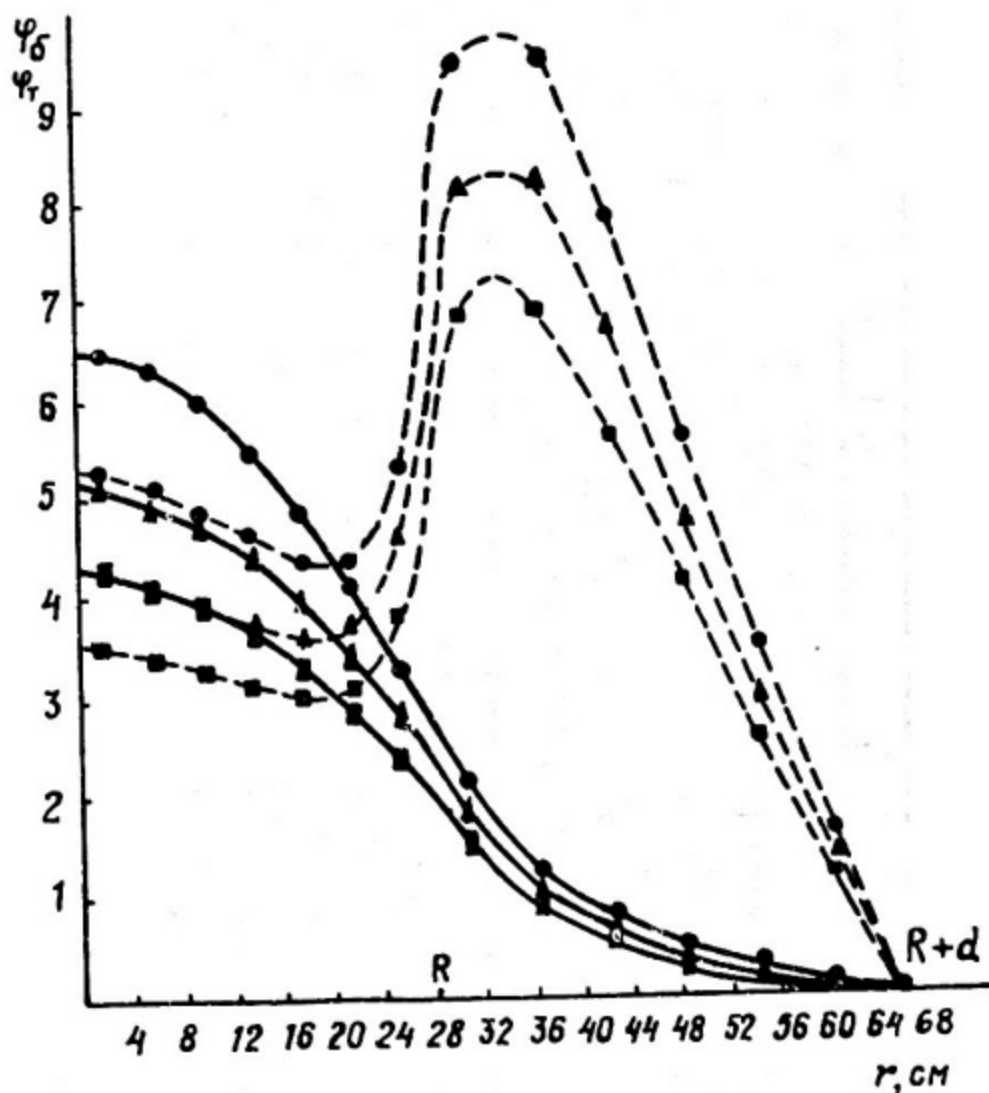


Рис. 4. Распределение плотностей потоков быстрых  $\psi_b$  (сплошная линия) и тепловых  $\psi_T$  (пунктирная линия) нейтронов по радиусу активной зоны и отражателя:

● — первая итерация; ▲ — вторая итерация; ■ — третья итерация

Таблица 3.2

$\rho$	$n_{ch}$	$\gamma_e$	$\lambda_e$	$B_e$	$A_e$	$\alpha_e$	$Q_e$	$f_e$	$P_e$	$I_e$	$\gamma_{02}$
1	2	0,183	1,333	-	3,061	3,061	0,999	1,95	1,950	12,770	6,385
2	6	0,183	1,037	1	2,047	1,720	0,987	4,495	5,132	37,140	6,190
3	10	0,183	1,013	1	2,046	1,465	0,964	7,148	10,132	58,748	5,875
4	14	0,183	1,007	1	2,046	1,363	0,929	9,587	16,503	75,934	5,424
5	18	0,183	1,000	1	2,046	1,312	0,885	11,707	23,815	86,995	4,833
6	22	0,183	1,000	1	2,046	1,284	0,831	13,423	31,575	90,323	4,106
7	26	0,225	1,000	1,230	2,289	1,331	0,769	18,031	48,278	84,400	3,246
8	31	0,275	1,000	1,222	2,322	1,404	0	0	44,324	64,058	2,066
9	37	0,275	1,000	1	2,103	1,391	0	0	31,570	45,674	1,233
10	43	0,275	1,000	1	2,103	1,384	0	0	22,696	31,879	0,741
11	49	0,275	1,000	1	2,103	1,380	0	0	16,399	21,425	0,437
12	55	0,275	1,000	1	2,103	1,378	0	0	11,883	13,168	0,239
13	61	0,275	1,000	1	2,103	1,377	0	0	8,623	6,262	0,103
14	67	0,275	1,000	1	-	-	0	0	6,262	0	0

Таблица 3.3

$l$	$r_l$ , см	$d_l$	$B_l$	$A_l$	$\alpha_l$	$Q_l$	$f_l$	$P_l$	$I_l$	$Y_{Te}$
1	2	4,444	-	4,718	4,718	0,397	18,814	18,814	10,431	5,216
2	6	4,444	1	3,336	3,124	0,385	42,582	46,570	30,399	5,067
3	10	4,444	1	3,306	2,986	0,365	65,726	80,633	48,395	4,840
4	14	4,444	1	3,298	2,963	0,337	84,454	111,458	63,874	4,562
5	18	4,444	1	3,294	2,957	0,301	96,696	134,313	77,801	4,322
6	22	4,444	1	3,293	2,955	0,255	100,023	145,445	95,746	4,352
7	26	5,458	1,228	3,817	3,401	0,202	114,891	175,333	137,485	5,288
8	31	6,667	1,222	2,328	1,969	0,129	160,448	223,446	292,252	9,427
9	37	6,667	1	2,108	1,6	0,077	114,194	227,676	351,999	9,513
10	43	6,667	1	2,108	1,483	0,046	79,282	221,580	335,522	7,803
11	49	6,667	1	2,108	1,434	0,027	52,976	202,389	275,999	5,633
12	55	6,667	1	2,108	1,411	0,015	33,035	174,171	193,394	3,516
13	61	6,667	1	2,108	1,399	0,006	14,655	138,093	98,708	1,618
14	67	6,667	1	2,108	1,393	0	0	98,708	0	0

## П Р И Л О Ж Е Н И Е

### ОЦЕНКА КРИТИЧНОСТИ РЕАКТОРА С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ИТЕРАЦИИ ИСТОЧНИКА

#### 1. Расчет коэффициента размножения реактора методом итерации источника

Как следует из теории ядерных реакторов, нестационарное уравнение диффузии для плотности потока нейтронов можно привести к стационарному уравнению для квазикритического реактора, уменьшив в  $K$  раз число вторичных нейтронов, рождающихся при делении.

Числа  $K$  образуют счетное множество, причем  $K_0 > K_1 > \dots > K_m$ . Покажем это, воспользовавшись для простоты одногрупповым приближением. В квазикритическом реакторе плотность потока нейтронов удовлетворяет уравнению

$$\Delta \varphi(r) + \frac{1}{L^2} \left( \frac{K_\infty}{K} - 1 \right) \varphi(r) = 0 \quad (\text{П.1})$$

и граничному условию  $\varphi|_S = 0$ , где  $S$  - экстраполированная поверхность реактора.

Уравнение (П.1) имеет счетное множество решений, которыми являются собственные функции  $\varphi_m$ , удовлетворяющие этому уравнению при значениях собственного числа

$$\frac{1}{L^2} \left( \frac{K_\infty}{K_m} - 1 \right) \equiv \alpha_m^2, \quad (\text{П.2})$$

причем  $\alpha_0^2 < \alpha_1^2 < \dots < \alpha_m^2$ . Из (П.2) следует, что

$$K_m = \frac{K_\infty}{1 + \alpha_m^2 L^2}, \quad (\text{П.3})$$

т.е. действительно чисел  $K$  счетное множество и  $K_0$  - наибольшее.

Известно, что из решений  $\varphi_m$  только  $\varphi_0$  всюду положительно, а соответствующее собственное число  $\alpha_0^2$  есть геометрический параметр реактора.

При этом

$$K_0 = \frac{K_\infty}{1 + \alpha_0^2 L^2} \quad (\text{П.4})$$

и его называют эффективным коэффициентом размножения реактора (в однокрупном диффузионном приближении).

$K_{\text{эфф}}$  можно определить, пользуясь методом итерации источника, из соотношения

$$K_{\text{эфф}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(n)}(r)}{\varphi^{(n-1)}(r)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q^{(n)}(r)}{Q^{(n-1)}(r)}, \quad (\text{П.5})$$

где  $\varphi^{(n)}(r)$  и  $\varphi^{(n-1)}(r)$ ,  $Q^{(n)}(r)$  и  $Q^{(n-1)}(r)$  -

распределения плотностей потоков нейтронов и источников в  $n$  и  $(n-1)$  итерациях соответственно. Покажем, что (П.5) справедливо.

Метод итерации источника полагает, что

$$\varphi(r) = \sum_n \varphi^{(n)}(r), \quad \text{где } \varphi^{(n)}(r) \text{ есть решение уравнения}$$

$$\mathcal{D}\Delta \varphi^{(n)}(r) - \Sigma_a \varphi^{(n)}(r) + K_\infty \Sigma_a \varphi^{(n-1)}(r) = 0 \quad (\text{П.6})$$

при условии, что  $\varphi^{(n)}|_S = 0$ .

Представим  $\varphi^{(n)}(r)$  в виде разложения по собственным функциям задачи  $\varphi_m(r)$ :

$$\begin{aligned} \varphi^{(0)}(r) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(0)} \varphi_m(r) \\ \varphi^{(1)}(r) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(1)} \varphi_m(r) \\ &\dots \dots \dots \\ \varphi^{(n)}(r) &= \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(n)} \varphi_m(r) \end{aligned} \quad (\text{П.7})$$

Подставим (П.7) в (П.6). Тогда для первой итерации получим уравнение

$$\sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(1)} (\mathcal{D}\Delta \varphi_m - \Sigma_a \varphi_m) + K_\infty \Sigma_a \sum_{m=0}^{\infty} C_m^{(0)} \varphi_m = 0. \quad (\text{П.8})$$



Так как  $K_0 > K_1 > \dots > K_m$ , то при  $n \rightarrow \infty$  получим что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(n)}(r)}{\varphi^{(n-1)}(r)}$  будет стремиться к значению  $K_0$ , т.е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(n)}(r)}{\varphi^{(n-1)}(r)} = K_0 = K_{эфф}, \quad (\text{П.14})$$

А так как в сделанных предположениях  $Q^{(n)} = K_\infty \sum_a \varphi^{(n)}(r)$ , то

$$K_{эфф} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{Q^{(n)}(r)}{Q^{(n-1)}(r)}, \quad \text{т.е. (П.5) выполняется.}$$

## 2. Оценка скорости сходимости метода итерации источника

Заклучение о скорости сходимости метода итерации источника можно сделать, исходя из неравенства  $\left(\frac{K_1}{K_0}\right)^n \ll 1$ , которое является условием перехода к асимметрическому распределению нейтронов в реакторе:  $\varphi^{(n)}(r) = K_0^n \zeta_0^{(0)} \varphi_0(r)$ .

Если  $\left(\frac{K_1}{K_0}\right)^n \ll 1$ , то можно говорить об установлении в реакторе собственного распределения нейтронов.

Насколько быстро происходит переход в реакторе к собственному распределению нейтронов, определяется числом итераций  $n$ . Очевидно, что если  $K_1 \ll K_0$ , то число  $n$  - невелико; если  $K_1 \sim K_0$ , то  $n$  может быть значительным. Соотношение между  $K_1$  и  $K_0$  зависит от размера и свойств ядерного реактора. Так, для сферического реактора без отражателя в одногрупповом приближении  $\alpha_m$  и  $K_m$  могут быть получены в виде

$$\alpha_m = \frac{\pi(m+1)}{R}, \quad (\text{П.15})$$

$$K_m = \frac{K_\infty}{1 + \pi^2(m+1)^2 \left(\frac{M}{R}\right)^2},$$

где  $M = \sqrt{L^2 + \tau}$  - длина миграции нейтронов в реакторе.

Тогда

$$K_0 = \frac{K_\infty}{1 + \pi^2 \left(\frac{M}{R}\right)^2},$$

$$K_1 = \frac{K_\infty}{1 + 4\pi^2 \left(\frac{M}{R}\right)^2}. \quad (\text{П.16})$$

Из (П.16) видно, что если  $R \ll M$ , то  $K_1 \ll K_0$ , а если  $R \gg M$ , то  $K_1 \sim K_0$ . Следовательно, можно говорить, что в реакторах малого размера собственное распределение нейтронов устанавливается быстро, а в больших реакторах (например, в больших тепловых реакторах) — после достаточно большого числа итераций.

Оценим число  $n$  для сферических реакторов с  $R = 0,1 M$  и  $R = 10 M$  при  $\left(\frac{K_1}{K_0}\right)^n = 10^{-2}$ . Несложный расчет позволяет получить  $n \approx 3$  для  $R = 0,1 M$  и  $n \approx 17$  для  $R = 10 M$ , что хорошо иллюстрирует сделанные выше выводы.

В общем случае количество итераций будет определяться точностью, с которой необходимо получить  $K_{эфф}$ .

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абагян Л. П., Базазянц Н. О., Бондаренко И. И., Николаев М. Н. Групповые константы для расчета ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1964.
2. Бахвалов Н. С. Численные методы. — М.: Наука, 1973.
3. Владимиров В. С. Приближенное решение одной краевой задачи для дифференциального уравнения второго порядка. — Прикладная математика и механика, 1955, 19, № 3.
4. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. — М.: Госкомиздат, 1961.
5. Тихонов А. Н., Самарский А. А. О разностных схемах для уравнений с разрывными коэффициентами. ДАН СССР, 1956, 108, 63.
6. Троянский В. Б., Шихов С. Б. Физический расчет реакторов в диффузионно-многогрупповом приближении. — В сб.: Некоторые вопросы инженерной физики. — М.: Атомиздат, 1963, 3, вып. 4.
7. Фейнберг С. М., Шихов С. Б., Троянский В. Б. Теория ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1978.
8. Шихов С. Б., Зарицкий С. М., Ракитин И. Д. Конечно-разностное представление формул теории возмущений для реактивных эффектов. — В сб.: Физика ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1970, вып. 2.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. Алгоритм численного метода.....	3
1.1. Получение конечно-разностного уравнения.....	4
1.2. Решение конечно-разностного уравнения.....	10
1.3. Соотношение баланса.....	12
2. Схема расчета реактора с отражателем в двухгрупповом диффузионном приближении.....	14
2.1. Двухгрупповые уравнения и константы расчета..	14
2.2. Разбиение физических зон реактора на интервалы.....	16
2.3. Последовательность расчета плотностей потоков быстрых и тепловых нейтронов численным методом.....	18
2.4. Оценка эффективного коэффициента размножения	21
2.5. Проверка правильности вычислений.....	22
3. Пример расчета.....	22
ПРИЛОЖЕНИЕ. Оценка критичности реактора с помощью метода итерации источника.....	26
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	30

Татьяна Евгеньевна Петрова,  
Мария Федосеевна Хромова

ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ОДНОМЕРНОЙ  
ДИФфуЗИОННОЙ ЗАДАЧИ С ИСТОЧНИКОМ

Редактор Н. Н. Антонова  
Технический редактор З. И. Хазова  
Корректор В. З. Решетникова

---

Л- 86723

Подписано в печать 9/х<sup>1</sup> - 1987г.

Формат 60x84 1/16. Объем 2 п.л. Уч.-изд.л. 1,75.

Изд. № 093-1.

Цена 8 коп.

Тираж 290.

Заказ 1887

---

Типография МИФИ, Каширское шоссе, 31.