

621.039

0-66

93

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ



В. В. Орлов

# СТАТИКА ОДНОРОДНОГО ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА

*Конспект лекций*

МОСКВА 1983

621.039

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

0-66

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

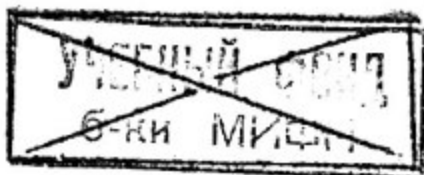
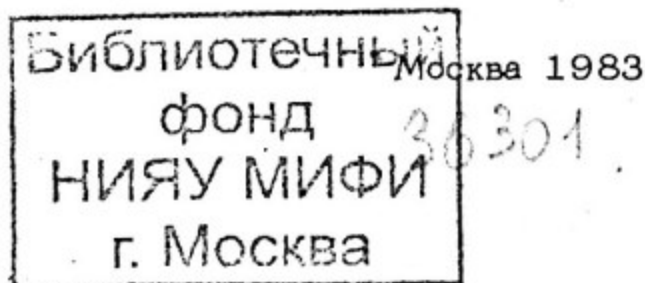
---

В. В. Орлов

СТАТИКА ОДНОРОДНОГО  
ЯДЕРНОГО РЕАКТОРА

Конспект лекций

Утверждено  
редсоветом института  
в качестве учебного пособия



Орлов В.В. Статика однородного ядерного реактора. -М.:  
Изд. МИФИ, 1983. - 104 с.

Конспект лекций знакомит студентов с современной теорией и методами расчета нейтронно-физических характеристик процесса переноса и размножения нейтронов в бесконечной однородной среде. Рассматриваются основные уравнения бесконечного реактора и методы их решения, излагаются методы расчета коэффициента размножения и его сомножителей в гомогенном реакторе.

Конспект рассчитан на студентов, специализирующихся в области теории и методов расчета ядерных реакторов. Знания, полученные студентами при изучении конспекта, необходимы при выполнении ими курсового и дипломного проектов и при проведении расчетов и проектировании ядерных реакторов различного назначения.

Рецензенты:

д.ф.-м.н. М.Н. Николаев, д.т.н. В.И. Солонин,  
к.т.н. И.Х. Ганев

© Московский инженерно-физический институт, 1983 г.

Редактор Е.Н. Кочубей  
Техн. редактор Н.М. Воронцова  
Корректор Н.М. Соболева

Л.- 82747

Подписано в печать 10/1-1984 г.

Формат 60x84 1/16

Объем 6,5 п.л.

Уч.-изд.л. 6,0

Тираж 250 экз.

Цена 45 коп.

Изд. № 094-1

Заказ 2260

Типография МИФИ, Каширское шоссе, 31



## ВВЕДЕНИЕ

Возможность осуществления цепной ядерной реакции деления стала ясной вскоре после открытия в 1939 году О. Ханом деления ядер урана под действием нейтронов. Я. Б. Зельдович и Ю. Б. Харитон в 1940 г. развили теорию цепной реакции деления. Таким образом, теория ядерных реакторов имеет 40-летнюю историю.

Необычайно быстрое развитие эта теория получила уже в военные и послевоенные годы в связи с работами по ядерному оружию. Первый ядерный реактор был пущен в США в декабре 1942 года под руководством Э. Ферми. Первый в СССР (как и в Европе) реактор, сооруженный под руководством И. В. Курчатова в Институте атомной энергии в Москве, был пущен в декабре 1946 года. В те же годы началось изучение возможностей и мирного использования энергии деления ядер, и к 1954 г. в г. Обнинске была построена и пущена первая в мире атомная электростанция.

Роль теории реакторов как в возникновении, так и в современном развитии ядерной технологии и промышленности весьма велика. В создании основ этой теории приняли участие многие выдающиеся физики-теоретики мира. К настоящему времени основы теории реакторов получили известную завершенность, но теория продолжает развиваться под влиянием практических потребностей во все более полном и точном описании процессов, происходящих в реакторах.

Теория реакторов возникла не на пустом месте. Она использовала достижения ядерной физики, газокINETической теории, развитой Максвеллом и Больцманом еще в 70-х годах прошлого века, созданной на ее основе теории переноса излучений, теории цепных химических реакций, развитой Н. Н. Семеновым, математической физики и других дисциплин.

В последние десятилетия широкое применение получила вычислительная техника, что оказало очень сильное влияние на теорию реакторов и направления ее дальнейшего развития, освободив от необходимости поисков сложных методов аналитического решения уравнений.

Усложнение задач, повышение требований к точности и полноте описания реакторов привели к естественному разделению труда специалистов, работающих в этой области. Теперь, как правило, различные специалисты и их группы занимаются анализом и обработкой ядерных данных, необходимых для расчетов, алгоритмами и программами численного расчета, проведением и анализом результатов расчетов определенных реакторных систем, анализом экспериментов и сравнением с ним. Разделение труда произошло и по типам реакторов (например, легководные, быстрые, каналные и т.д.), каждый из которых "обслуживается" своей группой физиков. Разделение труда и переход к машинным расчетам неизбежны и плодотворны для реакторной науки, но иногда ведут к ремесленнической обособленности, утрате культуры физического анализа и оценок, от чего хотелось бы предостеречь людей, готовящихся к работе в этой области.

Роль теории реакторов как единого языка, единой системы понятий и методов анализа особенно важна в этих условиях как для наилучшего решения той или иной задачи, так и для плодотворного сотрудничества людей, работающих на разных участках реакторной физики.

Изменения в характере работы над реакторами не могли не сказаться и на преподавании. Из курса теории реакторов выделились отдельные курсы по математическим методам решения реакторных задач, по нейтронным сечениям.

Настоящий курс представляет собой обработку лекций, которые автор читал в течение ряда лет в Московском инженерно-физическом институте, а до этого — в его Обнинском филиале.

Учитывая сказанное выше, автор не касался аспектов, связанных с численным решением уравнений реакторной теории, ограничиваясь общей постановкой задач и анализом основных теоретических моделей и приближений. Лишь в некоторых местах приводятся краткие сведения о нейтронных сечениях. Нейтронно-физические характеристики реального реактора находятся в тесной связи с разного рода техническими и другими его аспектами. На ряде примеров автор стремился продемонстрировать эти связи. Одной из главных своих задач автор считал доведение анализа, где это возможно, до выявления простейших зависимостей и до грубых оценок искомых величин. Владение аппаратом таких оценок чрезвычайно важно на всех стадиях изучения и разработки реактора.

# І. ЦЕПНАЯ РЕАКЦИЯ ДЕЛЕНИЯ И ГАЗОКИНЕТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ БОЛЬШМАНА

Нейтроны в среде ведут себя как идеальный разреженный газ нейтральных классических частиц, проявляющих свои волновые свойства лишь в актах столкновений с ядрами. Эффекты когерентного рассеяния проявляются иногда для медленных нейтронов, длина волны которых близка к расстояниям между атомами.

Вероятность взаимодействия нейтрона с ядрами определяется поперечным сечением взаимодействия  $\sigma$  см<sup>2</sup> и концентрацией ядер  $\rho \frac{M}{m^3}$ , причем  $\sigma$  является суммой парциальных сечений для различных типов взаимодействия:  $\sigma = \sum_x \sigma_x$ . Наиболее типичными взаимодействиями нейтронов с ядрами в диапазоне энергий нейтронов  $0 < E < 10$  МэВ, характерном для реакторов, являются: упругое ( $\sigma_{el}$ ) и неупругое ( $\sigma_{in}$ ) рассеяние, поглощение ( $\sigma_a$ ) с последующим испусканием  $\gamma$ -квантов ( $\sigma_c$ ), протонов или  $\alpha$ -частиц ( $\sigma_{n,p}$ ,  $\sigma_{n,\alpha}$ ) или с делением ядра ( $\sigma_f$ ):

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_a, \quad \sigma_a = \sigma_c + \sigma_{n,p} + \sigma_{n,\alpha} + \sigma_f, \quad \sigma_s = \sigma_{el} + \sigma_{in}.$$

Величина  $\Sigma$  1/см =  $\rho \sigma$ , называется макроскопическим сечением взаимодействия ( $\Sigma_x = \rho \sigma_x$ ).

Статистическое описание нейтронного газа и его взаимодействия со средой осуществляется с помощью функции распределения плотности нейтронов в пространстве координат  $\vec{r}$  и скоростей  $\vec{v}$ :  $n(\vec{r}, \vec{v}, t)$ .

Среднее число столкновений нейтронов с ядрами составляет  $n v \Sigma$ . Ниже в качестве функции распределения будет использоваться главным образом функция  $\psi(\vec{r}, \vec{v}, t) = v n(\vec{r}, \vec{v}, t)$  — распределение плотности потока нейтронов.

Описание нейтронного газа с помощью функций распределения  $n$  или  $\psi$  является практически полным, если число актов взаимодействия нейтронов с ядрами за характерные для макроскопических реакторных задач времена  $\Delta t \sim 1$  с и в объеме  $\Delta V \sim 1$  см<sup>3</sup> велико:  $\Delta \psi \Sigma \Delta V \Delta t \gg 1$ .

В противном случае функция  $\psi = \psi \Sigma$  является лишь математическим ожиданием плотности столкновений, а при наблюдении будут обнаруживаться флуктуации числа взаимодействий.

По уровню плотности или потока нейтронов реакторы подразделяются на реакторы "нулевой мощности", в которых на-

гревание элементов реактора за счет деления невелико и выделяющееся тепло отводится простейшими средствами или даже естественным путем (например, конвекцией воздуха), и на энергетические реакторы с высоким уровнем энерговыделения, требующие интенсивного охлаждения.

Для стационарных реакторов нулевой мощности плотность энерговыделения  $W = E_f \varphi \Sigma_f \Delta \bar{v}$  ( $E_f \cong 200 \text{ МэВ} \cong 3,2 \cdot 10^{-11} \text{ Дж}$ ) составляет  $W \sim 10^{-4} - 10^{-2} \text{ Вт/см}^3$ , что соответствует плотности делений  $\varphi_f = \frac{W}{E_f} \sim 10^7 - 10^9 \text{ дел/см}^3 \cdot \text{с}$ . Для стационарных энергетических реакторов энерговыделение достигает величин  $10^2 - 10^3 \text{ Вт/см}^3$  и  $\varphi_f \sim 10^{13} - 10^{14} \text{ дел/см}^3 \cdot \text{с}$ . Поэтому обычно статистическое описание нейтронов с помощью функций распределения является практически полным, а флуктуации интересующих нас величин пренебрежимо малы. Именно такому описанию реакторов посвящена основная часть курса. Вместе с тем встречаются специальные задачи, связанные с очень быстрыми процессами или с очень низкими плотностями нейтронов, а также с некоторыми методами исследования, основанными на анализе флуктуаций (нейтронных шумов), которые требуют учета и флуктуаций в нейтронных распределениях.

Статистическое описание нейтронного газа осуществляется с помощью упрощенного (линейного) уравнения Больцмана. Существенное упрощение этого уравнения в применении к нейтронам в реакторе связано с низкой плотностью нейтронов по сравнению с концентрацией ядер среды ( $\rho \sim 10^{22} - 10^{23} \text{ яд/см}^3$ ). Действительно, при  $\Sigma_f \sim 1 - 10^{-2} \text{ см}^{-1}$  и скорости нейтронов в диапазоне  $10^5 \text{ см/с} < v < 10^9 \text{ см/с}$ , плотность потока нейтронов в реакторе оказывается масштаба  $\varphi \Delta \bar{v} \sim \frac{\varphi_f}{\Sigma_f} \sim 10^7 - 10^{16} \text{ нейтр./см}^2 \cdot \text{с}$ , а плотность  $n \Delta \bar{v} \sim 1 - 10^9 \text{ нейтр./см}^3 \ll \rho$ . Поэтому можно пренебречь столкновениями нейтронов с нейтронами на фоне столкновений с ядрами, что приводит к линеаризации уравнений.

Однако в энергетических реакторах возникают нелинейности другого рода: за счет нейтронных столкновений (и особенно деления) изменяется температура, плотность, а иногда и агрегатное состояние среды, а также ее нуклидный состав (выгорание делящихся и других нуклидов, накопление новых нуклидов в ядерных реакциях). В результате входящие в уравнение сечения взаимодействия  $\Sigma_x$  оказываются зависящими от потока нейтронов  $\varphi$ . Однако изменения такого рода обычно происходят достаточно медленно по сравнению с "временем жизни" ней-

тронов  $\tau_c \sim \frac{1}{v \Sigma_a} \sim 10^{-9} - 10^{-3}$  с, что позволяет разделить задачи о распределении нейтронов (при заданном составе среды) и о составе и состоянии среды в зависимости от нейтронного потока.

Кроме координаты и скорости, нейтрон обладает еще одной характеристикой - спином  $\vec{S}$  (и связанным с ним магнитным моментом  $\vec{\mu}$ ). Обычно спины и магнитные моменты ядер и атомов среды распределены хаотически, что приводит к хаотическому распределению и спинов нейтронов. Поэтому, за исключением довольно экзотических (для реакторов) задач о распределении нейтронов в средах с поляризованными ядрами или с ориентированными магнитными моментами атомов (намагниченный ферромагнетик), спиновая переменная нейтронов усредняется и слабо влияет на состояние нейтронного газа.

Если не включать в рассмотрение монокристаллические вещества, где сечения столкновения медленных нейтронов могут зависеть от направления их движения по отношению к ориентации решетки, то среда может рассматриваться изотропной и сечения взаимодействия нейтронов  $\sigma(E)$  зависящими лишь от энергии нейтронов  $E = \frac{m_n v^2}{2}$ , а не от направления их движения  $\vec{v} = \frac{\vec{p}}{m}$ .

Кроме полных сечений  $\sigma(E)$ , газокинетическое уравнение требует знания дифференциальных сечений

$$\sigma(\vec{v} \rightarrow \vec{v}') \quad (\sigma(E) = \int \sigma(\vec{v} \rightarrow \vec{v}') d\vec{v}'),$$

характеризующих вероятность перехода  $\vec{v} \rightarrow \vec{v}'$  в результате столкновения нейтрона с ядрами. В принятых выше условиях дифференциальное сечение зависит лишь от угла между направлениями движения нейтрона до и после столкновения, а не в отдельности от  $\vec{v}$  и  $\vec{v}'$ :

$$\sigma(\vec{v} \rightarrow \vec{v}') = \sigma((\vec{v}, \vec{v}'), E \rightarrow E').$$

Следует заметить, что для быстрых нейтронов с орбитальным моментом относительно ядра, отличным от нуля, существует спин-орбитальное взаимодействие, приводящее к азимутальной зависимости дифференциального сечения рассеяния и к поляризации нейтронного спина, зависящей от угла рассеяния. Спин-орбитальное взаимодействие оказывает некоторое влияние на процессы переноса нейтронов, зависящее к тому же от напряженности магнитного поля за счет прецессии магнитного мо-

мента и спина нейтрона между столкновениями, но это влияние обычно невелико и не принимается в расчет в реакторных исследованиях.

В этих предположениях уравнение Больцмана для функции распределения нейтронов может быть получено из следующих простых рассуждений, касающихся баланса нейтронов в элементе фазового объема  $d\vec{r} d\vec{v} (dE d\vec{\Omega})$  за время  $dt$ . Выберем в качестве  $d\vec{r}$  цилиндр с основаниями  $dS$  (с центром в точке  $\vec{r}$ ) и  $dS'$  (с центром в точке  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\Omega} ds$ ) (рис.1).

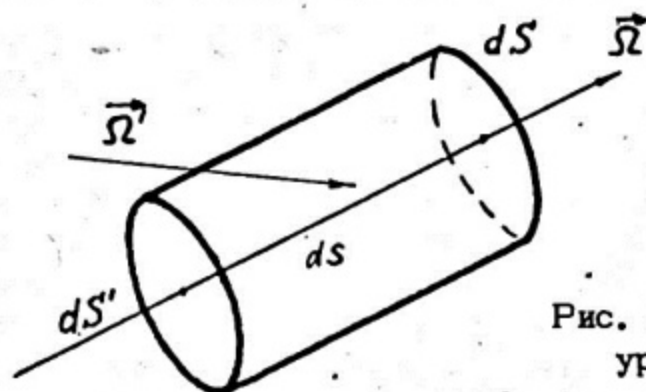


Рис. 1. Геометрия к выводу уравнения Больцмана

Число нейтронов с энергией  $E$ , пересекающих в направлении  $\vec{\Omega}$  площадку  $dS$  в течение времени  $dt$   $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) dS dt$ , складывается из следующих составляющих:

а) из нейтронов "пучка"  $(E, \vec{\Omega})$ , которые в момент времени  $t - \frac{ds}{v}$  пересекли  $dS'$  и с вероятностью  $(1 - ds \Sigma(E))$  достигли без столкновений площадки  $dS$ :

$$\varphi(\vec{r} - ds \vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}, t - \frac{ds}{v}) dS dt (1 - ds \Sigma(E));$$

б) из нейтронов других пучков  $(E', \vec{\Omega}')$ , попавших в объем цилиндра, испытавших рассеяние с переходом в пучок  $(E, \vec{\Omega})$ :

$$dS ds dt \int \varphi(\vec{r}', E', \vec{\Omega}', t) \Sigma_s(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow E) dE' d\vec{\Omega}'.$$

Эта величина  $\sim ds$ , и учет отклонения точки и момента рассеяния  $\vec{r}', t'$  от  $\vec{r}$  и  $t$  привел бы к поправкам, пропорциональным  $(ds)^2$ , которые обратятся в нуль при последующем устремлении  $ds \rightarrow 0$ ;

в) из нейтронов деления, появившихся в объеме  $dS ds$  с энергией  $E$  и направлением полета  $\vec{\Omega}$ . Считая рождение нейтронов при делении изотропным, получим:

$$\sigma_f(\vec{\Omega} \vec{\Omega}', E' \rightarrow E) = \frac{\nu_f(E')}{4\pi} \sigma_f(E') \chi(E', E),$$

где  $\nu_f(E)$  – среднее число нейтронов деления,  $\chi(E', E)$  – энергетический спектр нейтронов деления, нормированный к 1:  $\int \chi(E', E) dE = 1$ . Поток через  $dS$  нейтронов деления с точностью до величины  $\sim ds^2$ :

$$dS ds dt \frac{1}{4\pi} \int dE' \nu_f(E') \Sigma_f(E') \chi(E', E) \int d\vec{\Omega}' \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t);$$

г) из нейтронов, испущенных в  $(E, \vec{\Omega})$  внешним источником в объеме  $dS ds$  за время  $dt$ :  $Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) dS ds dt$ .

Разлагая в ряд с точностью до  $ds^2$

$$\varphi(\vec{r} - ds \vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}, t - \frac{ds}{v}) \approx \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) - \frac{\partial \varphi}{\partial s} - \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

(  $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$  – пространственная производная в направлении  $\vec{\Omega}$  ) и суммируя полученные величины, получим после отбрасывания величин  $\sim ds^2$  и сокращений:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial s} + \varphi \Sigma = \int dE' d\vec{\Omega}' \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) \Sigma_s(\vec{\Omega} \vec{\Omega}', E' \rightarrow E) + \frac{1}{4\pi} \int dE' \nu_f(E') \Sigma_f(E') \chi(E', E) \int d\vec{\Omega}' \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) + Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)^* \quad (1)$$

Величина  $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$  может быть также записана в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = (\vec{\Omega}, \text{grad } \varphi) = \text{div } \vec{\Omega} \varphi.$$

Полученное интегро-дифференциальное уравнение Больцмана требует постановки начальных (по  $t$ ) и граничных (по  $\vec{r}$ ) условий. Простейшие условия могут быть получены из следующих соображений. Если внешний источник нейтронов  $Q$  действует не бесконечно долгое время, то при  $t \rightarrow -\infty$ :

$$\varphi \rightarrow 0. \quad (2)$$

\*) Здесь принято, что нейтроны рождаются в момент деления. В действительности небольшая часть нейтронов появляется с запаздыванием, что будет учтено ниже, при рассмотрении динамики реактора.

Если рассматриваемую среду можно заключить в объем с выпуклой поверхностью  $S$ , вне которой нет вещества, способного рассеивать нейтроны или делиться под действием нейтронов, и нет источников нейтронов, то на поверхность  $S$  нет потока нейтронов извне:

$$\varphi|_S = 0 \quad \text{при} \quad (\vec{n}, \vec{\Omega}) < 0, \quad (3)$$

где  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к  $S$ .

В качестве внешнего источника нейтронов  $Q$ , не зависящего от  $\varphi$ , может служить космическое нейтронное излучение, спонтанное деление входящих в состав реактора изотопов,  $(\gamma, n)$ -или  $(\alpha, n)$ -реакции.

В частности, для запуска реакторов обычно используются специальные источники нейтронов на основе, например,  $\alpha$ -активного  $^{238}\text{Pu}$  (или  $^{208}\text{Po}$ , или  $^{224}\text{Ra}$ ) и  $^9\text{Be}$ , на котором идет реакция  $^9\text{Be} \cdot (\alpha, n)^{12}\text{C}$ .

Энергетический спектр нейтронов деления  $\chi(E, E')$  слабо зависит от энергии  $E'$  нейтронов, вызвавших деление. В дальнейшем, как правило, будет использоваться упрощенное уравнение со "стандартным" спектром деления  $\chi(E)$ . В случае смеси делящихся нуклидов "делительный" член в уравнении (1) должен быть записан в виде:

$$\frac{1}{4\pi} \sum_i \int dE' \nu_{fi}(E') \Sigma'_{fi}(E') \chi_i(E, E') \int d\Omega' \varphi.$$

Кроме рассеяния и деления, в уравнение (1) могут быть включены и другие члены, описывающие неупругое рассеяние:

$$\int dE' d\vec{\Omega}' \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) \Sigma'_{in}(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}', E' \rightarrow E),$$

реакцию  $(n, 2n)$ :

$$2 \int dE' d\vec{\Omega}' \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}', t) \Sigma'_{n,2n}(E') \chi_{n,2n}(E, E') \quad \text{и др.}$$

Для сокращения записи в дальнейшем будем использовать краткие операторные обозначения:

$$\hat{L}\varphi = \vec{\Omega} \vec{\nabla} \varphi + \varphi \Sigma - \int d\vec{\Omega}' \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) \Sigma'_s(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega});$$

$$\hat{G}\varphi = \frac{1}{4\pi} \int d\vec{\Omega}' \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) \nu_f \Sigma'_f \chi(E', E).$$

Тогда уравнение Больцмана примет вид:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \hat{L} \varphi = \hat{G} \varphi + Q. \quad (4)$$

В стационарном случае  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$  и  $\hat{L} \varphi = \hat{G} \varphi + Q$ . Га-зокинетическое уравнение отражает баланс нейтронов в элементе фазового объема. Интегрируя это уравнение по  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$ , получим соотношение баланса нейтронов для реактора в целом. Учтем, что  $\int d\vec{v} \int d\vec{r} \operatorname{div} v \vec{\Sigma} \varphi = \int d\vec{v} \int d\vec{r} (\vec{n} \vec{\Sigma}) \varphi = R$  - "утечка"

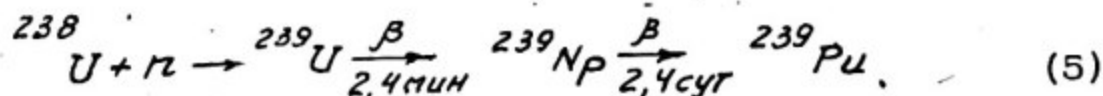
нейтронов, т.е. число нейтронов, вылетающих за 1 с из реактора. Далее,  $\int d\vec{r} \int d\vec{v} \int d\vec{v}' \varphi \Sigma_s(\vec{v}' \rightarrow \vec{v}) = \int d\vec{r} \int d\vec{v} \varphi \Sigma_s(E')$ , что сокращается с интегралом от  $\varphi \Sigma_s$  ( $\varphi \Sigma_s = \varphi \Sigma_s^a + \varphi \Sigma_s^f$ ). Обозначив  $\int d\vec{r} \int d\vec{v} \varphi \Sigma_a = A$  - скорость поглощения нейтронов,  $\int d\vec{r} \int d\vec{v} \varphi \Sigma_f = G$  - скорость генерации нейтронов за счет делений,  $\int d\vec{r} \int d\vec{v} Q = Q$  - скорость генерации нейтронов внешним источником, получим соотношение интегрального баланса  $R + A = G + Q$ .

Иногда вместо  $G$  будем использовать  $G = \gamma_f F$ , где  $F = \int d\vec{r} \int d\vec{v} \varphi \Sigma_f$  - скорость реакции деления.

### 1. Некоторые сведения о реакции деления и делящихся нуклидах

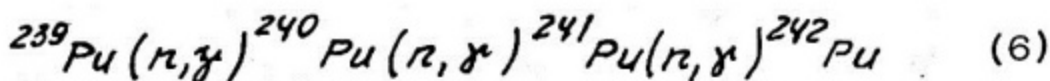
В природе существует единственный нуклид, делящийся под действием нейтронов любых энергий - это  $^{235}\text{U}$ , содержащийся в природном уране в количестве 0,72 ат%. Основная масса природного урана - это изотоп  $^{238}\text{U}$  (99,3%), который также делится, но лишь под действием достаточно быстрых нейтронов с энергией  $E > 1$  МэВ.

Поглощая нейтрон в реакции ( $n, \gamma$ ),  $^{238}\text{U}$  после двух распадов переходит в относительно стабильный нуклид  $^{239}\text{Pu}$ :



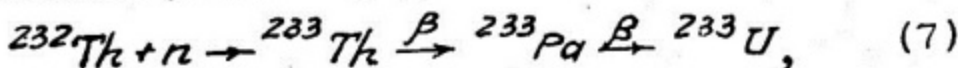
$^{239}\text{Pu}$  подобно  $^{235}\text{U}$  делится под действием нейтронов любых энергий. Он имеет достаточно длительный период  $\alpha$ -распада  $T_g = 24000$  лет.

Последующие реакции радиационного поглощения нейтронов приводят к образованию высших изотопов  $\text{Pu}$ :



( $T_{40} = 6000$  лет,  $T_{41} = 15$  лет), для которых реакция деления  ${}^{241}\text{Pu}$  не имеет энергетического порога, а порог деления  ${}^{240}\text{Pu}$  нейтронами ниже, чем для  ${}^{238}\text{U}$ .

Подобным же образом облучение в реакторе нейтронами природного нуклида  ${}^{232}\text{Th}$  приводит к образованию практически стабильного нуклида  ${}^{233}\text{U}$ :



не имеющего порога деления нейтронами.

Нечетные нуклиды  ${}^{235}\text{U}$ ,  ${}^{238}\text{Pu}$ ,  ${}^{233}\text{U}$ ,  ${}^{241}\text{Pu}$ , делящиеся под действием нейтронов любых энергий, будем называть делящимися нуклидами.

Реакции (5), (6), (7), в результате которых образуются искусственные делящиеся нуклиды, называются реакциями воспроизводства ядерного топлива. Нуклиды  ${}^{238}\text{U}$ ,  ${}^{232}\text{Th}$  (к ним можно присоединить и  ${}^{240}\text{Pu}$ ), которые при поглощении нейтронов перерабатываются в делящиеся нуклиды, называются сырьевыми (ядерное сырье). Композицию из сырьевых и делящихся нуклидов, используемую в реакторе для производства энергии и делящихся нуклидов (скажем,  ${}^{235}\text{U} + {}^{238}\text{U}$  или смеси  ${}^{232}\text{Th} + {}^{233}\text{U}$ ,  ${}^{238}\text{U} + {}^{239}\text{Pu}$  и др.), будем называть ядерным топливом.

Энергетическая зависимость сечений деления для делящихся и сырьевых нуклидов приведена на рис. 2 в единицах:  $1 \text{ барн} = 10^{-24} \text{ см}^2$ .

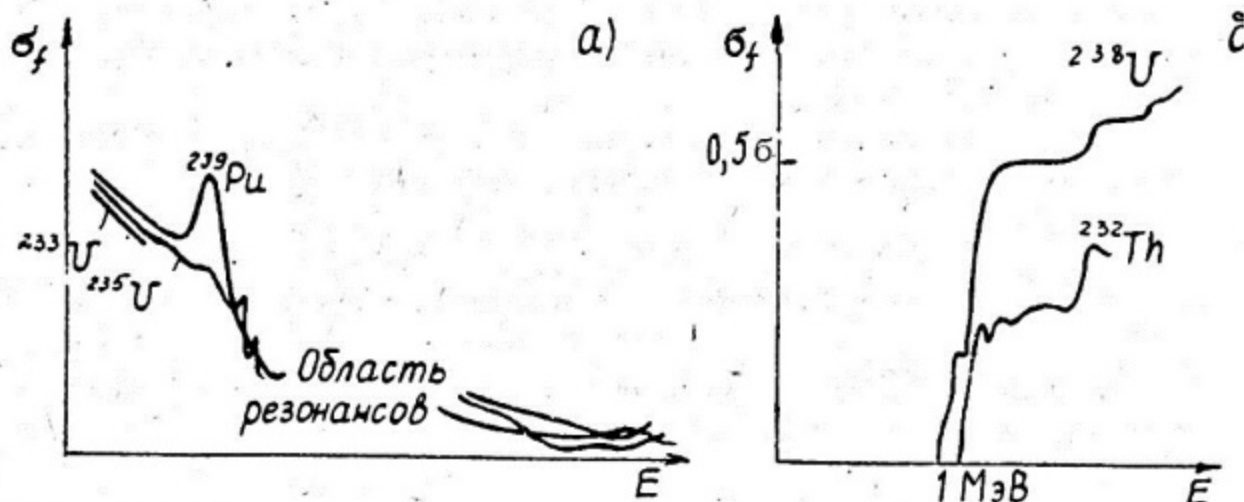


Рис. 2. Энергетическая зависимость сечений деления для делящихся (а) и сырьевых (б) нуклидов

При поглощении нейтрона делящимся нуклидом образуется возбужденное составное (компаунд) ядро, которое может распасться по двум каналам: с вероятностью  $W_f$  оно делится и с вероятностью  $1 - W_f$  испускает  $\gamma$ -кванты (реакция радиационного поглощения нейтрона,  $\sigma_c$ ) с переходом в сырьевой нуклид  $A + 1$ .\*). Последняя реакция играет в реакторах особенно вредную роль, так как без деления исчезают и нейтрон и делящееся ядро. Отношение вероятностей радиационного, поглощения и деления  $\alpha = \frac{1 - W_f}{W_f} = \frac{\sigma_c}{\sigma_f}$  зависит от энергии нейтронов (рис. 3).

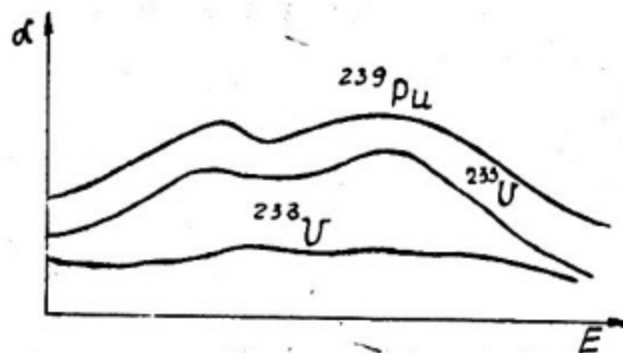


Рис. 3. Зависимости  $\alpha$  от энергии для делящихся нуклидов

Число нейтронов на деление  $\nu_f$  несколько возрастает с ростом энергий нейтронов.

Часто вместо величины  $\nu_f$  используют величину  $\nu(E) = \frac{\nu_f(E)}{1 + \alpha(E)}$  - число нейтронов в расчете на один поглощенный делящимся нуклидом нейтрон.

В табл. 1 приведены соответствующие величины для делящихся нуклидов для двух энергетических областей: для медленных нейтронов с  $E = \frac{3}{2} kT = 0,025$  эВ при комнатной температуре и для быстрых нейтронов (усреднение по спектру деления).

Таблица 1

Изотоп	$\sigma_f^T, \sigma$	$\nu_f^T$	$\alpha_T$	$\sigma_f^B, \sigma$	$\nu_f^B$	$\alpha_B$
$^{233}\text{U}$	531	2,46	0,09	2	2,6	0,04
$^{235}\text{U}$	585	2,42	0,17	1,3	2,52	0,08
$^{239}\text{Pu}$	741	2,88	0,37	1,8	3	0,06
$^{241}\text{Pu}$	1009	2,93	0,36	1,7	3,06	-

\*). Всегда открытым является и 3-й канал - испускание нейтрона (рассеяние), но оно не ведет к изменению ни числа нейтронов, ни числа атомов делящегося нуклида.

Усредненные по спектру деления при  $E > 1,4$  МэВ (эффективный порог) сечения деления сырьевых нуклидов составляют  $\sigma_f^{238} = 0,56$ ;  $\sigma_f^{232} = 0,16$ .

Энергетический спектр нейтронов деления несколько изменяется в зависимости от делящегося нуклида и энергии нейтрона, вызвавшего деление.  $\chi(E)$  для  $^{235}\text{U}$  (тепловые нейтроны) приведен на рис. 4.

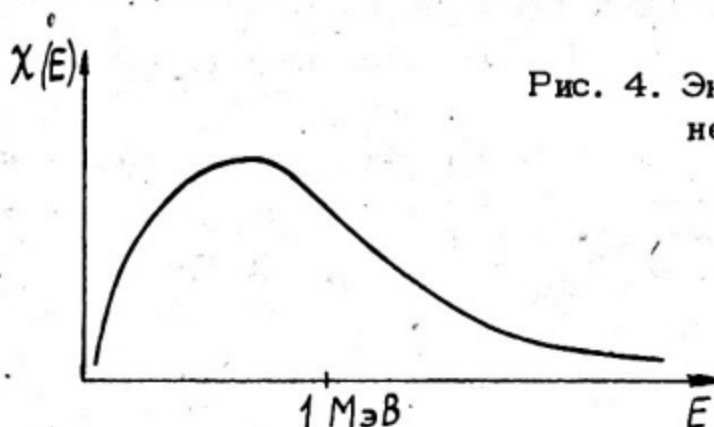


Рис. 4. Энергетический спектр нейтронов деления

Этот спектр может быть представлен формулой

$$\chi(E) = 0,77 \sqrt{E} e^{-\frac{E}{1,29}}$$

Зная величину  $E_f \approx 200$  МэВ, нетрудно найти количество топлива, необходимого для производства единицы тепловой энергии

$$\zeta = \frac{A}{6 \cdot 10^{23} E_f} \approx 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{МВт} \cdot \text{сут}} \approx 0,366 \frac{\text{т}}{\text{ГВт} \cdot \text{год}}$$

Эту величину интересно сравнить с обычными топливами. Приняв за теплотворную способность обычного топлива  $7 \times 10^6$  ккал/т (условное топливо, близкое к углю), получим, что 1 ГВт·год тепловой энергии соответствует 1,08 млн.т условного топлива. Отсюда видно, что 1 т разделившегося ядерного топлива соответствует около 3 млн.т обычных топлив.

## 2. Цепная реакция деления

Превышение  $\nu$  над 1 создает возможность развития цепной реакции деления (рис. 5).

Если бы все нейтроны деления поглощались делящимися нуклидами, то цепная реакция носила бы нарастающий характер, как на рис. 5. В действительности часть нейтронов погло-

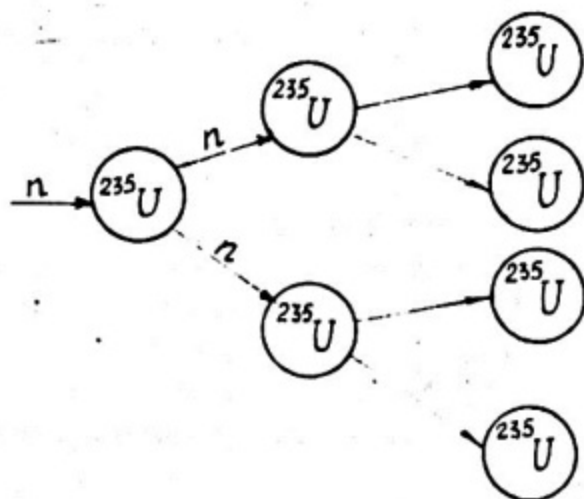


Рис. 5. Цепная реакция деления

шается неделимыми компонентами среды, часть вылетает наружу. Если делящиеся нуклиды поглощают небольшую долю нейтронов деления, то цепная реакция будет затухать. Отсюда видно, что существуют условия, при которых цепная реакция окажется стационарной. Характер цепной реакции зависит от баланса нейтронов, т.е. от состава и размеров размножающей среды (ядерного реактора).

В соответствии с характером цепной реакции реактор может быть критическим (стационарная реакция), надкритическим (нарастающая реакция) и подкритическим (затухающая реакция).

Анализ характера цепной реакции может быть выполнен исходя из газокинетического уравнения Больцмана.

Рассмотрим однородное уравнение (1) в отсутствие внешнего источника нейтронов ( $Q = 0$ ) и его решение в виде:

$$\varphi(\vec{r}, \vec{v}, t) = A \varphi(\vec{r}, \vec{v}) e^{\alpha t}.$$

Тогда  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \alpha \varphi$  и уравнение (1) примет вид:

$$\frac{\alpha}{v} \varphi + \hat{L} \varphi = \hat{G} \varphi; \quad \varphi|_S = 0, \quad (\vec{n} \vec{Q}) < 0. \quad (8)$$

Это — однородное уравнение с однородным граничным условием, которое имеет решение лишь при определенных (собственных) значениях величины  $\alpha$ . Перенумеруем собственные значения таким образом, что  $\alpha_0 > \alpha_1 > \alpha_2 > \dots > \alpha_n > \dots$ , а соответствующие собственные функции обозначим  $\varphi_n(\vec{r}, \vec{v})$ . Если эта система функций — полная, то решение исходной неоднородной задачи может быть представлено в виде:

$$\varphi(\vec{r}, \vec{v}, t) = \sum_n A_n \varphi_n(\vec{r}, \vec{v}) e^{\alpha_n t}.$$

При достаточно больших  $t \gg \frac{1}{\alpha_0 - \alpha_1}$  первый член этой суммы становится преобладающим и

$$\varphi(\vec{r}, \vec{v}, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} A_0 \phi_0(\vec{r}, \vec{v}) e^{\alpha_0 t} \quad (9)$$

Приведенный здесь вывод является крайне упрощенным. В действительности спектр собственных значений уравнения реактора сложный и содержит области непрерывного изменения  $\alpha$  в комплексной плоскости. Нам, однако, важно лишь, чтобы максимальное собственное число  $\alpha_0$  было действительным и изолированным ( $\alpha_0 - \alpha_1$ )  $> 0$ , а это для хорошо размножающих сред может быть строго доказано\*).

Из (9) следует ряд выводов, имеющих принципиальное значение для теории реакторов.

1. Характер цепной реакции определяется максимальным собственным числом уравнения (8)  $\alpha_0$ . При  $\alpha_0 > 0$  реактор надкритический и поток нейтронов в нем экспоненциально нарастает (через некоторое время после начала цепной реакции) по закону  $e^{\alpha_0 t}$ .

При  $\alpha_0 < 0$  реактор подкритический, и поток нейтронов в нем затухает по закону  $e^{-|\alpha_0| t}$ .

При  $\alpha_0 = 0$  реактор критический, так что через время  $t > \frac{1}{\alpha_0 - \alpha_1}$  в нем устанавливается стационарное распределение нейтронов  $\phi_0(\vec{r}, \vec{v})$ .

2. Спустя время  $t > \frac{1}{\alpha_0 - \alpha_1}$  после возбуждения цепной реакции, в течение которого затухает переходный процесс, в реакторе устанавливается распределение нейтронов в соответствии с собственной функцией  $\phi_0(\vec{r}, \vec{v})$ , являющейся решением уравнения (8) и не зависящей от условий возбуждения цепной реакции (от вида источника  $Q$ ).

Пусть  $\tau$  — время жизни одного "поколения" нейтронов в цепной реакции деления ( $\tau \sim \frac{1}{v \Sigma_a}$ ),  $M$  — среднее расстояние от точки рождения до точки поглощения ("длина миграции" нейтрона),  $a$  — линейные размеры реактора. Чтобы установилось распределение нейтронов по собственной функции  $\phi_0$ , нейтроны должны успеть пройти по всему реактору, "узнать" его состав и размеры.

\*). См., например, книгу С. Б. Шихова "Математическая теория ядерных реакторов".

В блуждающем процессе, каким является миграция нейтронов, суммируются средние квадраты смещений частиц. Если  $\lambda = \frac{l}{\Sigma}$  - длина свободного пробега нейтрона, а  $\frac{\Sigma}{\Sigma_a}$  - число столкновений нейтрона до поглощения, то

$$M^2 \sim \lambda^2 \cdot \frac{\Sigma}{\Sigma_a} \approx \frac{1}{\Sigma \Sigma_a}$$

Число поколений, необходимых для установления потока нейтронов по собственной функции  $N \sim \frac{a^2}{M^2}$ , а время установления

$$t \sim N\tau \sim \frac{\lambda}{v} \cdot \left(\frac{a}{\lambda}\right)^2$$

Таким образом, время установления собственного распределения нейтронов определяется размерами реактора по отношению к длине свободного пробега  $\lambda$  и энергетическим спектром нейтронов в реакторе ( $v$ ). Для больших реакторов, работающих на медленных нейтронах ( $v \sim 10^5$  см/с), при  $a \sim 10^3$  см и  $\lambda \sim 10$  см  $t \sim 1$  с. Для маленьких реакторов на быстрых нейтронах ( $v \sim 10^9$  см/с) при  $a \sim \lambda \sim 10$  см  $t \sim 10^{-8}$  с. Интегрируя (8) по  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$  и используя принятые ранее обозначения, получим:

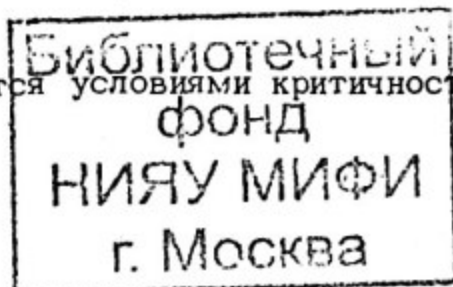
$$\alpha_0 = \frac{G - A - R}{N'} = \frac{\frac{G}{A+R} - 1}{\tau}, \quad (10)$$

где  $N' = \int d\vec{r} d\vec{v} \frac{\phi}{v}$  - количество нейтронов в реакторе;  $\frac{G}{A+R} = \frac{G P}{A} \sim \frac{v_f \Sigma_f P}{\Sigma_a}$  - отношение скоростей генерации и убыли нейтронов;  $P = \frac{A}{A+R}$  - вероятность избежать вылета (утечки) нейтронов из реактора;  $\tau = \frac{N'}{A+R} = \frac{N' P}{A} \sim \frac{P}{v \Sigma_a}$  зависит от состава  $\left(\frac{v_f \Sigma_f}{\Sigma_a}\right)$  и размеров ( $P$ ) реактора.

Уравнения

$$\frac{G P}{A} = 1 \text{ или } \frac{v_f \Sigma_f P}{\Sigma_a} = 1 \quad (11)$$

являются условиями критичности реактора.



### 3. Представление последовательных поколений. Коэффициент размножения

Вместо временного представления цепной реакции, использованного выше, часто оказывается полезным другой способ ее описания.

Представим себе следующую картину цепной реакции. Нейтроны, испущенные внешним источником  $Q$ , примем за первое поколение нейтронов. Часть этих нейтронов поглотится делющимися ядрами, что даст начало следующему – второму-поколению нейтронов, которые породят третье поколение и т.д. Эта картина соответствует методу решения уравнения (1), называемому методом итерации источника.

Рассмотрим уравнение:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \hat{L} \varphi_1 = Q, \quad \varphi_1|_S = 0, \quad (\vec{r}, \vec{\Omega}) < 0,$$

которое, очевидно, описывает распределение нейтронов 1-го поколения. Подставив решение этого уравнения в интеграл делений, получим для нейтронов второго поколения:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} + \hat{L} \varphi_2 = \hat{G} \varphi_1, \quad \varphi_2|_S = 0, \quad (\vec{r}, \vec{\Omega}) < 0.$$

Для потока нейтронов  $n$ -го поколения:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi_n}{\partial t} + \hat{L} \varphi_n = \hat{G} \varphi_{n-1}, \quad \varphi_n|_S = 0, \quad (\vec{r}, \vec{\Omega}) < 0.$$

Суммируя эти уравнения, получим для  $\varphi(\vec{r}, \vec{v}, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(\vec{r}, \vec{v}, t)$  исходное уравнение (1).

Если внешний источник нейтронов действует вблизи момента времени  $t = 0$ , временное поведение потоков нейтронов разных поколений будет соответствовать рис. 3.

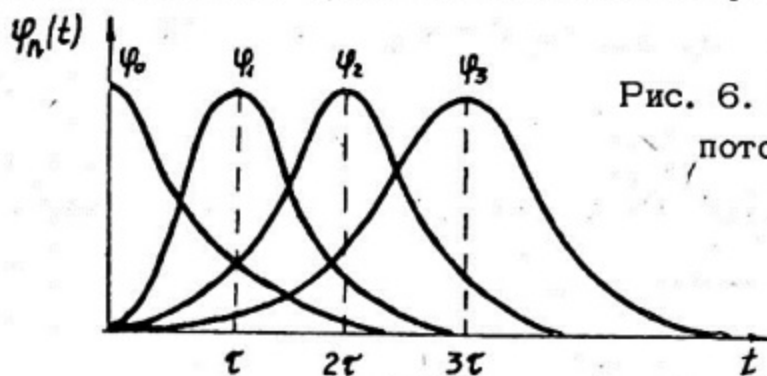


Рис. 6. Временное поведение потока нейтронов разных поколений

Введем суммарный поток нейтронов  $n$ -го поколения  $\phi_n(\vec{r}, \vec{v}) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(\vec{r}, \vec{v}, t) dt$ . Интегрируя уравнения для  $\psi_n(\vec{r}, \vec{v}, t)$  по времени и учитывая, что  $\psi_n(-\infty) = \psi_n(+\infty) = 0$ , получим систему:

$$\hat{L} \phi_n = \hat{G} \phi_{n-1} + \delta_{n0} Q, \quad \phi_n|_S = 0, \quad (\vec{r}, \vec{v}) < 0, \quad (12)$$

которая и является представлением последовательных поколений в описании цепной реакции, в котором номер поколения  $n$  служит аналогом времени  $t$  во временном представлении. Решая последовательно эту систему, как и во временном представлении, при  $n \gg N \sim \left(\frac{a}{M}\right)^2$  придем к некоторому собственному распределению нейтронов, которое будет изменяться от поколения к поколению лишь по амплитуде, т.е. для больших  $n$   $\phi_{n+1}(\vec{r}, \vec{v}) = \kappa \phi_n(\vec{r}, \vec{v})$ , где  $\kappa$  — не зависящая от  $n$  постоянная. Подставив отсюда  $\phi_{n-1} = \frac{1}{\kappa} \phi_n$  в уравнение (12), получим для  $\phi_n$  однородное уравнение (в котором можно опустить индекс  $n$ ):

$$\hat{L} \phi = \frac{1}{\kappa} \hat{G} \phi, \quad \phi|_S = 0, \quad (\vec{r}, \vec{v}) < 0. \quad (13)$$

Полученное уравнение имеет спектр собственных чисел  $K_m$  и собственные функции  $\phi^{(m)}(\vec{r}, \vec{v})$ . Расположим  $K_m$  в порядке убывания  $K_0 > K_1 > K_2 > \dots > K_m > \dots$  и предположим возможность представления  $\phi_n(\vec{r}, \vec{v})$  в виде ряда

$$\phi_n(\vec{r}, \vec{v}) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{n,m} \phi^{(m)}(\vec{r}, \vec{v}).$$

Подставив ряд в (12) и используя (13), получим:  $A_{n,m} = \kappa A_{n-1,m} = \dots = \kappa_m^n A_{0,m}$ , так что

$$\phi_n(\vec{r}, \vec{v}) = \kappa_0^n \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\kappa_m}{\kappa_0}\right)^n A_{0,m} \phi^{(m)}(\vec{r}, \vec{v}).$$

Так как при  $m > 0$   $\frac{\kappa_m}{\kappa_0} < 1$ , то при большом  $n$   $\phi_n(\vec{r}, \vec{v}) \xrightarrow{\kappa \rightarrow \infty} \kappa_0^n A_{00} \phi^{(0)}(\vec{r}, \vec{v})$ , причем условием перехода к этому асимптоти-

\* Как и во временном представлении, здесь предполагается, что  $K_0$  — изолированное и действительное собственное число, что всегда выполняется.

ческому выражению является  $\left(\frac{\kappa_0}{\kappa_1}\right)^n \gg 1$  или, логарифмируя,  $n \gg \frac{1}{\ln \frac{\kappa_0}{\kappa_1}} \approx \frac{\kappa_0}{\kappa_0 - \kappa_1}$  (при  $\kappa_0 - \kappa_1 \ll \kappa_0$ ).

Таким образом, и здесь с ростом  $n$  устанавливается собственное распределение нейтронов, определяемое собственной функцией уравнения  $\hat{L}' \phi_0 = \frac{1}{\kappa_0} \hat{G}' \phi_0$ , соответствующей максимальному собственному числу  $\kappa_0$ . Физический смысл  $\kappa_0$

(будем далее обозначать его просто  $\kappa$ ) ясен из определения  $\phi_{n+1} = \kappa \phi_n$ ;  $\kappa$  есть коэффициент размножения нейтронов, определяющий скорость роста (при  $\kappa > 1$ ) или спада (при  $\kappa < 1$ ) потока от поколения к поколению;  $\kappa > 1$  соответствует надкритическому реактору и совпадает с условием  $\alpha_0 > 0$ ,  $\kappa < 1$  - подкритическому реактору. В критическом реакторе  $\kappa = 1$  и  $\alpha_0 = 0$ , причем собственные функции  $\phi_0(\vec{r}, \vec{v})$  в обоих представлениях для критического реактора совпадают.

Уравнение (13) позволяет свести задачу о некритическом реакторе к решению стационарного уравнения, поэтому его иногда называют квазикритическим.

Если обозначить  $\frac{\nu_f}{\kappa} = \nu_{\text{эф}}$ , то эта величина может быть использована в качестве собственного числа. Это собственное число имеет наглядный смысл: если бы мы могли "регулировать" величину  $\nu_f$ , то реактор стал бы критическим при  $\nu_f = \nu_{\text{эф}}$ . Соответственно и коэффициент размножения  $\kappa$  обычно обозначают  $\kappa_{\text{эф}}$ .

Описанный здесь процесс итераций (12) используют и для практического решения задачи о коэффициенте размножения и распределении нейтронов в реакторе: задаваясь произвольным распределением источника  $Q$ , после некоторого числа итераций убеждаются в том, что распределение  $\phi_n(\vec{r}, \vec{v})$  с некоторой заданной точностью перестает изменяться от итерации к итерации. Коэффициент размножения  $\kappa$  с этой точностью оп-

ределяется из отношения  $\kappa \approx \frac{\phi_{n+1}}{\phi_n}$  (или  $\kappa \approx \frac{G_{n+1}}{G_n}$ , где

$G_n = \int d\vec{r}' d\vec{v}' \phi_n \nu_f \Sigma_f$ ). Сходимость процесса итераций определяется размерами реактора

$$n \gg \frac{\kappa_0}{\kappa_0 - \kappa_1} \sim \left(\frac{a}{M}\right)^2 \sim \left(\frac{a}{\bar{\alpha}}\right)^2 \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a}$$

Введенное выше определение поколения нейтронов и основанное на нем определение коэффициента размножения не являются единственно возможными. В разных задачах и разными авторами используются разные определения. Например, в реакторах с топливом  $^{235}\text{U} + ^{238}\text{U}$  иногда вводят понятие поколения нейтронов, начинающегося с деления  $^{235}\text{U}$ , а нейтроны, возникающие при делении  $^{238}\text{U}$ , относятся к тому же поколению, что и нейтроны, вызвавшие деление  $^{238}\text{U}$ . Соответствующий этому определению аналог уравнения (13) следующий:  $\hat{L}\Phi = \hat{G}_8\Phi + \frac{1}{K}\hat{G}_9\Phi$ .

Разумеется, при любом корректном определении приходят к одинаковым выводам относительно критичности реактора, хотя для некритического реактора значения  $K$  получаются разными.

Интегрируя уравнение (13) по  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$  и пользуясь обозначениями предыдущего раздела, получим выражение коэффициента размножения через интегральные величины

$$K = \frac{G}{R+A} = \frac{G}{A} \cdot P, \quad P = \frac{A}{R+A}.$$

С увеличением размеров реактора вероятность вылета нейтронов из него  $1-P$  падает и  $P \rightarrow 1$ . При этом  $K \rightarrow \frac{G}{A} = K_\infty$  — коэффициент размножения реактора бесконечных размеров.

Величины  $G$  и  $A$  зависят от энергетического спектра нейтронов в реакторе, который, в свою очередь, зависит и от его размеров. Поэтому отношение  $\frac{G}{A}$  зависит от размеров реактора, хотя обычно в меньшей степени, чем  $R$ . Для достаточно больших реакторов при  $1-P \ll 1$  зависимость  $\frac{G}{A}$  от размеров становится слабой, и можно приближенно положить эту величину равной  $\frac{G}{A} \approx K_\infty$ .

Тогда коэффициент размножения может быть приближенно представлен в виде произведения двух сомножителей  $K = K_\infty \cdot P$ , первый из которых определяется только составом реактора, а второй зависит от его размеров.

#### 4. Интегральные формы газокинетического уравнения

Дифференциальное по пространственной и временной переменным газокинетическое уравнение (1) можно преобразовать в различные интегральные формы, используя метод функций Грина.

Рассмотрим сначала общий случай линейного уравнения

$$\hat{L} \varphi(x) = Q(x) \quad (14)$$

с некоторыми граничными условиями на  $\varphi(x)$ . Представим оператор  $\hat{L}$  в виде суммы операторов  $\hat{L} = \hat{L}_1 + \hat{L}_2$ , для одного из которых (скажем  $\hat{L}_1$ ) известно фундаментальное решение (функция Грина)  $G(x, x')$ , удовлетворяющее уравнению

$$\hat{L}_1 G(x, x') = \delta(x - x') \quad (15)$$

и тем же граничным условиям, что и  $\varphi(x)$ .

Запишем формально уравнение (14) в виде:

$$\hat{L}_1 \varphi(x) = Q(x) - \hat{L}_2 \varphi(x) = \tilde{Q}(x) \quad (16)$$

и будем считать  $\tilde{Q}(x)$  известной функцией.

Функция  $\tilde{Q}(x)$  может быть представлена в виде суперпозиции источников малых размеров ( $dx'$ ), расположенных вблизи "точек"  $x'$ :

$$\tilde{Q}(x) = \int dx' \tilde{Q}(x') \delta(x - x').$$

Тогда и решение уравнения (16) явится суперпозицией решений от "точечных" источников

$$\varphi(x) = \int dx' \tilde{Q}(x') G(x, x').$$

Подставляя сюда  $\tilde{Q}(x)$  из (16), получим искомое интегральное уравнение, эквивалентное уравнению (14):

$$\varphi(x) = \int dx' Q(x') G(x, x') - \int dx' G(x, x') \hat{L}_2 \varphi(x'). \quad (17)$$

Поскольку сложный оператор  $\hat{L}$  может быть разными способами разбит на слагаемые  $\hat{L}_1$  и  $\hat{L}_2$ , то можно получить разные интегральные формы исходного уравнения (14), удобные для решения той или иной задачи.

Введем элементарный источник нейтронов  $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_0) \delta(v - v_0) \delta(t - t_0)$ , расположенный в точке  $\vec{r}_0$  и испускающий в момент  $t_0$  1 нейтрон со скоростью  $v_0$  в направлении  $\vec{\Omega}_0$ . Распределение потока нестолкнувшихся нейтронов вдоль луча  $\vec{\Omega}$  ( $s = |\vec{r} - \vec{r}_0|$  - расстояние вдоль этого луча) опишется тогда функцией:

$$G(s, t - t_0, v, v_0) = \exp\left(-\int_0^s \Sigma(v, s') ds'\right) \delta\left(t - t_0 - \frac{s}{v}\right) \delta(v - v_0),$$

являющейся функцией Грина оператора  $\hat{L}_1 = \frac{1}{v} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} + \Sigma'$ .

Соответствующая интегральная форма уравнения (14) (для простоты записи в отсутствие делений):

$$\varphi(\vec{r}, \vec{v}, t) = \int_0^s ds Q(\vec{r} - s\vec{\Omega}, \vec{v}, t - \frac{s}{v}) \exp\left(-\int_0^s \Sigma(s') ds'\right) + \int_0^\infty ds \times \\ \times \exp\left(-\int_0^s \Sigma(s') ds'\right) \int d\vec{v}' \varphi(\vec{r} - s\vec{\Omega}, \vec{v}', t - \frac{s}{v}) \Sigma_s(\vec{v}' \rightarrow \vec{v}). \quad (18)$$

Особенно простую форму приобретает это уравнение для стационарной односкоростной задачи с изотропным рассеянием ( $\Sigma_s \rightarrow \frac{\Sigma_s}{4\pi}$ ) и изотропными источниками ( $Q \rightarrow \frac{Q(\vec{r})}{4\pi}$ ) в однородной среде:

$$\varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty ds \exp(-s\Sigma) [Q(\vec{r}') + \Sigma_s \varphi_0(\vec{r}')], \quad (19)$$

где  $\vec{r}' = \vec{r} - \vec{\Omega}s$ ;  $\varphi_0(\vec{r}) = \int d\vec{\Omega} \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega})$ .

Проинтегрировав полученное уравнение по  $\vec{\Omega}$  и учитывая, что  $|\vec{r} - \vec{r}'|^2 d\vec{\Omega} ds = d\vec{r}'$  — элемент объема около точки  $\vec{r}'$ , придем к интегральному уравнению для полного потока нейтронов

$$\varphi_0(\vec{r}) = \int_V d\vec{r}' \frac{\exp(-|\vec{r} - \vec{r}'|\Sigma)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^2} [Q(\vec{r}') + \Sigma_s \varphi_0(\vec{r}')]. \quad (20)$$

Для учета делений достаточно здесь заменить  $\Sigma_s \rightarrow \Sigma_s + \nu_f \Sigma_f$ . Уравнение (20) получено Р.Пайерлсом и носит его имя.

Ядро уравнения (20)  $\frac{\exp(-r\Sigma)}{4\pi r^2}$  описывает распределение потока нейтронов в однородной среде вокруг точечного изотропного источника единичной мощности.

Решение уравнения (20) методом итерации источника соответствует представлению  $\varphi_0(\vec{r})$  в виде суммы потоков нейтронов, испытавших разное число столкновений

$$\varphi_0(\vec{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_0^{(n)}(\vec{r}),$$

где

$$\varphi_0^{(0)}(\vec{r}) = \int_V d\vec{r}' \frac{\exp(-\Sigma |\vec{r} - \vec{r}'|)}{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot Q(\vec{r}')$$

— распределение нерассеянных нейтронов, а при  $n > 0$

$$\varphi_0^{(n)}(\vec{r}) = \int_V d\vec{r}' \frac{\exp(-\Sigma|\vec{r}-\vec{r}'|)}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|^2} (\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f) \varphi_0^{(n-1)}(\vec{r}') \quad (21)$$

— распределение  $n$ -кратно столкнувшихся нейтронов. На таком разложении основан метод последовательных столкновений. В ограниченной среде при достаточно большом  $n$  (определяемом отношением размеров среды  $a$  и длиной пробега нейтрона  $\lambda = \frac{1}{\Sigma}$ ) устанавливается не зависящее от источника  $Q$  собственное решение, так что  $\frac{\varphi_0^{(n)}}{\varphi_0^{(n-1)}} = \text{const} = k$ .

Подставив в (21)  $\varphi_0^{(n-1)}(\vec{r}) = \frac{1}{k} \varphi_0^{(n)}(\vec{r})$ , получим для собственной функции

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f}{k} \int_V d\vec{r}' \frac{\exp(-\Sigma|\vec{r}-\vec{r}'|)}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|^2} \varphi(\vec{r}'), \quad (22)$$

где  $k$  играет роль собственного числа.

Функция  $\varphi(\vec{r})$  изменяется существенно на расстояниях порядка линейных размеров среды  $a$ , а ядро уравнения (22) спадает на расстояниях  $|\vec{r}-\vec{r}'| \sim \frac{1}{\Sigma} = \lambda$ . Поэтому при  $a \gg \lambda$  (в пределе — бесконечная среда) можно положить под интегралом  $\varphi(\vec{r}') \cong \varphi(\vec{r})$ . Учитывая, что для однородной среды

$$\int d\vec{r}' \frac{\exp(-\Sigma|\vec{r}-\vec{r}'|)}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}'|^2} = \frac{1}{\Sigma},$$

получим в этом случае

$$k = k_\infty = \frac{\Sigma_s + \nu_f \Sigma_f}{\Sigma}. \quad (23)$$

Величина  $k_\infty$  аналогична  $k_\infty$  в представлении последовательных поколений ( $k_\infty$  — число нейтронов на одно столкновение, а  $k_\infty$  — на один поглощенный нейтрон):

$$k_\infty = \frac{\Sigma_s + \Sigma_a + \nu_f \Sigma_f - \Sigma_a}{\Sigma} = 1 + \frac{\Sigma_a}{\Sigma} (k_\infty - 1), \quad (24)$$

так что при  $k_\infty = 1$   $k_\infty = 1$ , при  $k_\infty < 1$   $k_\infty < 1$  и при  $k_\infty > 1$   $k_\infty > 1$ . Для конечной среды  $k = k_\infty \cdot q$ , где  $q$  —

вероятность того, что нейтрон после столкновения не вылетит из среды, а испытает в ней следующее столкновение.

Условие  $k = \frac{\nu_f \Sigma_f + \Sigma_s}{\Sigma} q = 1$  служит условием критичности реактора при его описании методом последовательных столкновений.

Другой пример интегрального уравнения получим, рассматривая цепную реакцию в представлении последовательных поколений:  $\hat{L} \Phi_n = \hat{G} \Phi_{n-1}$ .

Введем функцию источника  $G(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, \vec{r}_0)$ , удовлетворяющую уравнению

$$\hat{L} G = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0) \frac{\chi(E)}{4\pi}$$

и описывающую распределение потока нейтронов около точечного изотропного источника нейтронов спектра деления. Тогда

$$\Phi_n^0(\vec{r}, E) = \int_V d\vec{r}' \int dE' \Phi_{n-1}^0(\vec{r}', E') \nu_f \Sigma_f(E') G_0(\vec{r}, E; \vec{r}'),$$

где  $\Phi_n^0 = \int d\vec{\Omega} \Phi_n$ ,  $G_0 = \int d\vec{\Omega} G$ . Умножив это уравнение на  $\nu_f \Sigma_f(E)$ , интегрируя по  $E$  и обозначив

$$G_f(\vec{r}, \vec{r}') = \int dE \nu_f \Sigma_f(E) G(\vec{r}, E; \vec{r}')$$

— распределение плотности генерации нейтронов около точечного источника деления, получим для плотности генерации нейтронов в реакторе  $g(\vec{r}) = \int dE \nu_f \Sigma_f \Phi$  (в установившемся режиме,  $\frac{\Phi_{n+1}}{\Phi_n} = k$ ):

$$g(\vec{r}) = \frac{1}{k} \int_V d\vec{r}' g(\vec{r}') G_f(\vec{r}, \vec{r}'). \quad (25)$$

В частности, для бесконечной однородной среды  $g(\vec{r}') = g(\vec{r}) = const$  и  $k = k_\infty = \int d\vec{r}' G_f(|\vec{r} - \vec{r}'|)$ , а для реактора конечных размеров  $k = k_\infty \rho$ , где  $\rho$  — вероятность "невывлета" нейтрона из реактора.

В газокинетическое уравнение входит в общем случае 7 независимых переменных  $(\vec{r}, \vec{v}, t)$ , что делает его решение крайне громоздким. Для упрощения анализа и практических расчетов используют различные приближения, направленные главным образом на уменьшение числа независимых переменных.

## 5. $P_1$ -приближение

В реакторах достаточно больших размеров, вдали от границ или сильных поглотителей, а также от сосредоточенных источников нейтронов, распределение плотности потока  $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  близко к изотропному, т.е. слабо зависит от направлений скоростей нейтронов  $\vec{\Omega}$ . В этом случае можно рассчитывать на быструю сходимость разложения  $\varphi(\vec{\Omega})$  в ряд по сферическим функциям (или в одномерном случае — по полиномам Лежандра  $P_l(\cos\theta)$ , где  $\cos\theta = (\vec{\Omega}, \vec{J})$ ,  $\vec{J}$  — направление диффузии нейтронов).

Простейшее приближение такого рода ( $P_1$  или диффузионное приближение) учитывает лишь два первых члена этого разложения:

$$\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \approx \frac{1}{4\pi} [\varphi(\vec{r}, E, t) + 3\vec{\Omega} \cdot \vec{J}(\vec{r}, E, t)], \quad (26)$$

причем  $\varphi(\vec{r}, E, t) = \int d\vec{\Omega} \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  — интегральная по углам плотность потока нейтронов;  $\vec{J}(\vec{r}, E, t) = \int d\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$  — векторная функция тока нейтронов, характеризующая направление и интенсивность преимущественного движения нейтронов.

Интегрируя уравнение (1) по  $\vec{\Omega}$  и учитывая, что  $\int d\vec{\Omega} \Sigma_s(\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega}', E' \rightarrow E) = \Sigma_s(E' \rightarrow E)$  — дифференциальное по энергии сечение рассеяния, получим уравнение сохранения нейтронов:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \text{div} \vec{J} + \varphi \Sigma = \int dE' \varphi(\vec{r}, E', t) \Sigma_s + \chi(E) \int dE' \varphi_f \Sigma_f + Q(\vec{r}, E), \quad (27)$$

где  $Q(\vec{r}, E) = \int d\vec{\Omega} \cdot Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ . Ниже будем считать внешние источники изотропными:  $Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} Q(\vec{r}, E)$ .

Чтобы найти связь между  $\vec{J}$  и  $\varphi$ , умножим (27) на  $\vec{\Omega}$  и проинтегрируем по  $\vec{\Omega}$ , подставив разложение (26). При этом интегралы, содержащие нечетные степени  $\vec{\Omega}$ , обратятся в нуль. Обозначим  $\vec{\nabla} \varphi = \vec{n} |\vec{\nabla} \varphi|$ , где  $\vec{n}$  — направление градиента  $\varphi$ . Тогда  $\frac{1}{4\pi} \int d\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{\nabla} \varphi) = \frac{1}{4\pi} |\vec{\nabla} \varphi| \int d\vec{\Omega} \cdot \vec{\Omega} (\vec{\Omega} \cdot \vec{n})$ . Разложим вектор  $\vec{\Omega}$  на составляющие по  $\vec{n}$  и в плоскости, перпендикулярной  $\vec{n}$ :  $\vec{\Omega} = (\vec{n} \cdot \vec{\Omega}) \vec{n} + \vec{\omega}$ . Интеграл от  $\vec{\omega}$  вследствие нечетности обратится в нуль, а  $\int d\vec{\Omega} (\vec{n} \cdot \vec{\Omega})^2 = 2\pi \int_0^\pi d\theta \sin^2 \theta \cos^2 \theta = \frac{4\pi}{3}$ , так что искомое выражение равно  $1/3 \vec{\nabla} \varphi$ .

Далее,

$$\int d\vec{\omega} \cdot \vec{\omega} \int d\vec{\omega}' \varphi(\vec{\omega}') \Sigma_s(\vec{\omega} \vec{\omega}', E' \rightarrow E) = \\ = \int d\vec{\omega}' \varphi(\vec{\omega}') \cdot \int d\vec{\omega} \vec{\omega} \Sigma_s(\vec{\omega} \vec{\omega}', E' \rightarrow E).$$

Разложим вектор  $\vec{\omega}$  на составляющие по  $\vec{\omega}'$  и перпендикулярную  $\vec{\omega}'$ :  $\vec{\omega} = (\vec{\omega} \vec{\omega}') \vec{\omega}' + \vec{\omega}''$ . Интеграл от  $\vec{\omega}''$  в силу нечетности обратится в нуль. Так что, обозначив

$$\int d\vec{\omega} (\vec{\omega} \vec{\omega}') \Sigma_s(\vec{\omega} \vec{\omega}', E' \rightarrow E) = \Sigma_{s1}(E' \rightarrow E),$$

получим искомое выражение в виде:  $\vec{J}(\vec{r}, E, t) \Sigma_{s1}(E' \rightarrow E)$ .

Окончательно получим приближенное уравнение связи между  $\vec{J}$  и  $\varphi$ :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \frac{1}{3} \vec{\nabla} \varphi + \vec{J} \Sigma = \int dE' \vec{J} \Sigma_{s1}(E' \rightarrow E). \quad (28)$$

Полученные уравнения (26), (28) образуют полную систему уравнений  $P_1$ -приближения для функций  $\varphi(\vec{r}, E, t)$ ,  $\vec{J}(\vec{r}, E, t)$ .

Уравнение (28) может быть дополнительно упрощено следующим образом. В условиях применимости разложения (26) ток нейтронов  $\vec{J}$  мал по сравнению с потоком  $\varphi$ , что обычно выполняется лишь при медленном пространственном, временном и энергетическом распределении нейтронов. Поэтому членом

$\frac{1}{v} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$  в (28) можно пренебречь. Далее, если нейтроны диффундируют в среде, содержащей достаточно тяжелые ядра, то потеря энергии нейтрона при рассеянии невелика, т.е.  $\Sigma_s(E' \rightarrow E)$  и  $\Sigma_{s1}(E' \rightarrow E)$  отличны от нуля лишь при малых  $E' - E$ .

В этом случае можно в интеграле (28) приближенно заменить  $\vec{J}(\vec{r}, E', t) \approx \vec{J}(\vec{r}, E, t)$  и вынести эту величину из-под интеграла.

Если  $E$  и  $E'$  мало отличаются друг от друга и  $\Sigma_{s1}$  слабо изменяется с энергией рассеиваемых нейтронов  $E'$ , можно приближенно положить  $\Sigma_s(E' \rightarrow E) \approx \Sigma_s(E \rightarrow E')$ , и тогда

$$\int dE' \Sigma_{s1}(E' \rightarrow E) \approx \int dE' \Sigma_{s1}(E \rightarrow E').$$

Если ввести величину - средний косинус угла рассеяния нейтронов

$$\overline{\mu}(E) = \frac{\int dE' \int d\vec{\omega} (\vec{\omega} \vec{\omega}') \Sigma_s(\vec{\omega} \vec{\omega}', E \rightarrow E')}{\int dE' \int d\vec{\omega}' \Sigma_s(\vec{\omega} \vec{\omega}', E \rightarrow E')}$$

и обозначить  $\Sigma'(E) = \bar{\mu} \Sigma_s(E) = \Sigma_t(E)$  "транспортное сечение", то в результате уравнение (28) приобретает обычный вид "закона Фика"

$$\vec{J}(\vec{r}, E, t) \cong - \frac{1}{3\Sigma_{tr}(E)} \vec{\nabla} \psi(\vec{r}, E, t). \quad (29)$$

Величина  $D = \frac{1}{3\Sigma_{tr}}$  называется коэффициентом диффузии нейтронов. Подставляя (29) в (27), получим уравнение диффузионного приближения в виде

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi}{\partial t} - \text{div } D \text{ grad } \psi + \psi \Sigma = \int dE' \psi \Sigma_s + \chi(E) \int dE' \psi \Sigma_f. \quad (30)$$

Граничные условия. Полученные уравнения должны быть дополнены граничными условиями. С этой целью введем функции  $J^+(\vec{r}, E, t, \vec{n})$  и  $J^-(\vec{r}, E, t, \vec{n})$  — односторонние потоки нейтронов через площадку в  $1 \text{ см}^2$  с нормалью  $\vec{n}$ , расположенную вблизи точки  $\vec{r}$ ;  $J^+$  и  $J^-$  при этом равны суммарным числам нейтронов энергии  $E$ , пересекающих площадку за  $1 \text{ с}$  в направлениях  $(\vec{n} \vec{s}) > 0$  и  $(\vec{n} \vec{s}) < 0$  соответственно:

$$\left. \begin{aligned} J^+(\vec{r}, E, t, \vec{n}) &= \int_{(\vec{n} \vec{s}) > 0} d\vec{s} (\vec{n} \vec{s}) \psi(\vec{r}, E, \vec{s}, t), \\ J^-(\vec{r}, E, t, \vec{n}) &= \int_{(\vec{n} \vec{s}) < 0} d\vec{s} |\vec{n} \vec{s}| \psi(\vec{r}, E, \vec{s}, t). \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

Очевидно, что односторонние потоки связаны с током нейтронов соотношением

$$(\vec{n} \vec{J}) = J^+ - J^-, \quad (32)$$

причем величина тока нейтронов  $|\vec{J}|$  равна максимальному значению разности односторонних потоков при изменении ориентации  $\vec{n}$  площадки, а направление тока совпадает с  $\vec{n}$ , соответствующим максимуму  $J^+ - J^-$ .

Если принять в качестве площадки элемент границы между средами 1 и 2 (рис. 7), то из соображений сохранения нейтронов следует, что

$$\left. \begin{aligned} J_1^+(\vec{r}_s, E, t, \vec{n}) &= J_2^+(\vec{r}_s, E, t, \vec{n}); \\ J_1^-(\vec{r}_s, E, t, \vec{n}) &= J_2^-(\vec{r}_s, E, t, \vec{n}), \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

где  $\vec{n}$  - нормаль к граничной поверхности. Условия (33) могут служить граничными условиями диффузионной задачи, для чего необходимо выразить  $J^\pm$  через функции  $\varphi$  и  $\vec{J}$ .

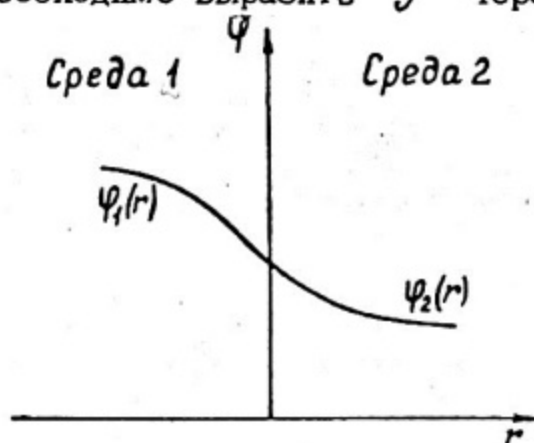


Рис. 7. Плотность потока нейтронов на границе двух сред

Подставив в (31) разложение (26), получим:

$$J^\pm(\vec{r}, E, t) = \frac{1}{4} \varphi(\vec{r}, E, t) \pm \frac{1}{2} (\vec{n} \vec{J}) \quad (34)$$

или же

$$J^\pm(\vec{r}, E, t) = \frac{1}{4} \varphi(\vec{r}, E, t) \mp \frac{D}{2} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}}, \quad (35)$$

где  $\frac{\partial \varphi}{\partial \vec{n}} = (\vec{n}, \text{grad} \varphi)$  - производная  $\varphi$  по направлению  $\vec{n}$ .

Граничные условия (33) теперь могут быть выражены требованием непрерывности потока нейтронов  $\varphi$  и нормальной компоненты тока  $(\vec{n} \vec{J})$  или иначе:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(\vec{r}_s) &= \varphi_2(\vec{r}_s); \\ D_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \vec{n}} \Big|_s &= D_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \vec{n}} \Big|_s. \end{aligned} \right\} \quad (36)$$

Особого обсуждения требуют граничные условия на границе среды с пустотой (или, что то же самое, с абсолютно поглощающим нейтроны "черным" телом). Дело в том, что в пустоте или в поглощающей среде диффузионное приближение (29) становится абсолютно неприменимым. Пользуясь односторонними потоками  $J^\pm$ , мы можем, однако, записать физически разумные условия и в этих случаях, минуя описание потока нейтронов в пустоте или поглотителе.

В этих случаях в качестве граничного условия естественно принять равенство нулю одностороннего потока нейтронов

$J^-$  (если  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к поверхности рассматриваемой среды), падающего из поглотителя или из пустоты. В случае пустоты такое условие строго справедливо лишь для выпуклой границы:  $J^-(\vec{r}_s, E, t) = 0$ , или же  $2(\vec{n} \vec{J})|_s = \varphi|_s$ , или

$$2D \frac{\partial \varphi}{\partial n} \Big|_s = -\varphi|_s. \quad (37)$$

В последнем случае граничное условие может быть также записано в виде:

$$\frac{\partial \ln \varphi}{\partial n} \Big|_s = -\frac{1}{\gamma(E)}, \quad (38)$$

где  $\gamma = 2D = \frac{2}{3} \lambda_{tr}$ . Этот вид граничного условия называется заданием на поверхности логарифмической производной потока  $1/\gamma$ .

Часто оказывается удобным приближенно преобразовать это граничное условие к другому виду.

Распределение потока нейтронов в среде вблизи границы можно приближенно представить линейной функцией координаты  $x$  - расстояния от границы (рис. 8).

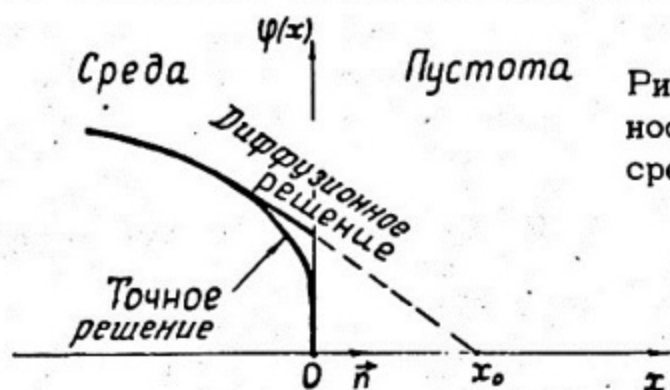


Рис. 8. Распределение плотности потока нейтронов в среде вблизи границы с вакуумом

Пользуясь условием (38), запишем  $\varphi(x) \approx \varphi(0) \left[1 - \frac{x}{\gamma}\right]$ .

Если теперь экстраполировать это распределение нейтронов за пределы среды - в пустоту (пунктирная прямая), то экстраполированный поток нейтронов обратится в нуль на расстоянии  $x_0 = \gamma$  от границы среды. Величина  $x_0$  называется экстраполяционной длиной. Пользуясь ею, можно поступить так: искусственно увеличить размеры среды, перенести ее границу на расстояние  $x_0$  от истинной границы (она называется экстра-

полированной границей  $S_{\text{ЭКСТР}}$ ), и поставить на ней граничное условие:

$$\varphi \Big|_{S_{\text{ЭКСТР}}} = 0. \quad (39)$$

Развитое выше диффузионное приближение справедливо тогда, когда ток нейтронов мал в сравнении с потоком:

$$3 \left| \vec{j} \right| \ll \varphi \text{ или } \lambda_{tr} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \ll \varphi, \quad (40)$$

т.е. когда поток нейтронов мало изменяется на расстояниях  $\sim \lambda_{tr}$ . Нарушение этого условия наступает в реакторах не очень больших размеров по сравнению с длиной свободного пробега нейтронов или вблизи сосредоточенных источников нейтронов, или в средах с сильным поглощением, или же, наконец, вблизи границ с пустотой или сильным поглотителем нейтронов. В последнем случае, воспользовавшись условием (40), нетрудно убедиться в том, что условие применимости диффузионного приближения выполняется плохо.

Поэтому найденные выше в рамках диффузионного приближения граничные условия требуют проверки.

Точное решение задачи о распределении излучения в полубесконечной среде (задача Милна) действительно приводит к отклонению распределения от диффузионного на расстояниях от границы, меньших  $\lambda_{tr}$ : спад потока нейтронов оказывается более быстрым (рис. 8), а на самой границе производная потока логарифмически стремится к  $-\infty$ . Однако на расстояниях от границы, больших  $\lambda_{tr}$ , распределение потока излучения становится подобным диффузионному. Если линейно экстраполировать асимптотическое распределение за границу среды, то оно также обращается в нуль, но на расстоянии  $x_0 = 0,71 \lambda_{tr}$  вместо  $x_0 = \frac{2}{3} \lambda_{tr}$ , полученном выше. Как видно, ошибка диффузионного приближения оказалась небольшой. Граничные условия типа (38) или (39) могут быть использованы для сред с плоскими (или близкими к плоским) границами.

Если же граница имеет радиус кривизны, сравнимый с  $\lambda_{tr}$ , граничные условия должны быть изменены. Рассмотрим предельный случай "черного" для нейтронов стержня диаметра  $d$ , расположенного в среде, причем  $d \ll \lambda_{tr}$ .

В этом случае стержень создаст "тень" в своей окрестности размерами  $\sim d$ , тогда как нейтроны падают на стержень с расстояний  $\sim \lambda_{tr} \gg d$ , т.е. из области, где поток

нейтронов можно считать невозмущенным. Если  $\varphi$  - невозмущенный поток нейтронов, то число нейтронов, падающих на  $1 \text{ см}^2$  поверхности стержня (и поглощаемых стержнем) есть  $\frac{\varphi}{4}$ . С другой стороны, в диффузионном приближении сток нейтронов к поверхности стержня равен  $-D \frac{\partial \varphi}{\partial r} \Big|_s = -\frac{\lambda_{tr}}{3} \frac{\partial \varphi}{\partial r}$ . Приравняв эти две величины, получим условие на границе  $\frac{\partial \varphi}{\partial r} = -\frac{3\varphi}{4\lambda_{tr}}$ ,

что совпадает с условием (38), но лишь при  $\gamma = \frac{4}{3} \lambda_{tr}$ . Отсюда видно, что величина  $\gamma$  зависит от кривизны поверхности и является функцией  $\frac{d}{\lambda_{tr}}$ :

$$\frac{\gamma}{\lambda_{tr}} = f\left(\frac{d}{\lambda_{tr}}\right).$$

Эта функция, вычисленная путем решения точной задачи, имеет следующий вид (рис. 9).

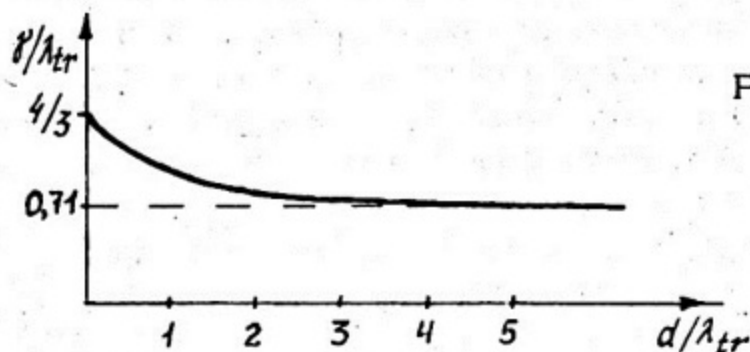


Рис. 9. Зависимость  $\gamma$  от  $d$

Пользуясь этими результатами, можно распространить применение диффузионного приближения с граничными условиями типа (38) (они называются эффективными граничными условиями) и на среды с произвольными границами.

## 6. Односкоростная модель

В реакторах, состоящих из достаточно тяжелых компонентов, упругое рассеяние приводит лишь к небольшим энергетическим потерям. Неупругое же рассеяние является пороговой реакцией и обычно переводит нейтроны из области  $\sim \text{МэВ}$  в область  $\sim$  сотен кэВ, оставляя их в энергетическом интервале спектра деления. В таком случае можно приближенно считать, что все нейтроны имеют одинаковую - некоторую среднюю - энергию и не изменяют ее при столкновениях. Подобная же ситуация имеет место для медленных нейтронов, распределяющихся в среде по спектру, близкому к равновесному спектру Максвелла, зависящему от температуры среды. В этой области

энергий нейтроны при рассеянии могут как передать энергию атому, так и получить ее от атома, совершающего тепловое движение, и в среднем энергия нейтрона изменяется мало. Нейтроны с энергией  $E \sim kT$ , где  $T$  — температура среды, находящиеся в примерном равновесии со средой, называются тепловыми нейтронами. Как и быстрые нейтроны в "тяжелых" средах, тепловые нейтроны приближенно могут быть описаны моделью, которую называют односкоростной (или одnogрупповой).

Эта модель описывается односкоростным газокинетическим уравнением для потока нейтронов  $\varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}, t)$ :

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{\Omega} \nabla \varphi + \varphi \Sigma = \int d\vec{\Omega}' \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) \Sigma_s(\vec{\Omega}, \vec{\Omega}') + \frac{\nu_f \Sigma_f}{4\pi} \int d\vec{\Omega}' \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}', t) + \frac{1}{4\pi} Q(\vec{r}, t), \quad (41)$$

где скорость  $v$  и сечения взаимодействия  $\Sigma$  являются усредненными по спектру нейтронов величинами.

В  $P_1$  приближении это уравнение приобретает простейший вид уравнения диффузии с поглощением и размножением:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - D \Delta \varphi + \varphi \Sigma_a = \nu_f \Sigma_f \varphi + Q. \quad (42)$$

В частности, стационарная условно критическая задача описывается в диффузионном приближении уравнением:

$$D \Delta \varphi + \left( \frac{\nu_f \Sigma_f}{k} - \Sigma_a \right) \varphi = 0.$$

Обозначив  $\frac{D}{\Sigma_a} = L^2$  — квадрат длины диффузии,  $\alpha^2 =$

$$\frac{\frac{\nu_f \Sigma_f}{k \Sigma_a} - 1}{L^2} = \frac{1}{L^2} \left( \frac{k_{\infty}}{k} - 1 \right), \text{ приведем это уравнение к обычному}$$

виду волнового уравнения:  $\Delta \varphi + \alpha^2 \varphi = 0.$

Это уравнение, дополненное граничными условиями  $\varphi|_{S_{\text{ЭКСТР}}} = 0,$

имеет спектр собственных чисел  $\alpha_n^2$  и собственных функций  $\varphi_n(\vec{r})$ . Из теории волнового уравнения известно, однако, что лишь собственная функция  $\varphi_0(\vec{r})$ , соответствующая минимальному собственному числу  $\alpha_0^2$ , знакопостоянна в объеме внутри  $S_{\text{ЭКСТР}}$  и, следовательно, только она описывает распределение нейтронного потока.

Таким образом, в односкоростном диффузионном приближении распределение потока нейтронов в реакторе описывается волновым уравнением, причем коэффициент размножения<sup>1</sup>

$$K = \frac{K_{\infty}}{1 + \alpha_0^2 L^2} \quad (43)$$

Очевидно, что величина  $\frac{1}{1 + \alpha_0^2 L^2}$  является вероятностью нейтрону не вылететь из реактора.

Подробное обсуждение этого результата проводится ниже. Что касается тепловых нейтронов, то уравнение для них не содержит интеграла делений (нейтроны при делении рождаются быстрыми), а источники тепловых нейтронов образуются в результате замедления нейтронов деления. Пусть  $Q(\vec{r})$  есть число нейтронов, замедляющихся в секунду в 1 см<sup>3</sup> в тепловую область энергий. Эта величина ниже будет называться плотностью замедления и обозначаться  $q(\vec{r})$ . Стационарное уравнение для потока тепловых нейтронов примет вид:  $-D\Delta\varphi + \varphi\Sigma_a = q(\vec{r})$ , или

$$\Delta\varphi - \frac{\varphi}{L^2} = -\frac{q(\vec{r})}{D} \quad (44)$$

Распределение потока нейтронов в бесконечной среде с точечным источником нейтронов  $\varphi(r)$ , где  $r$  — расстояние от источника, описывается уравнением:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \varphi}{\partial r} - \frac{\varphi(r)}{L^2} = -\frac{\delta(r)Q_0}{4\pi r^2 D},$$

где  $\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r}$  — оператор Лапласа в сферических координатах (радиальная часть), а  $\delta(r)$  —  $\delta$ -функция.

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию источника  $\lim_{r \rightarrow 0} 4\pi r^2 D \frac{\partial \varphi}{\partial r} = Q_0$ , есть  $\varphi(r) = \frac{Q_0}{2\pi r D} e^{-\frac{r}{L}}$ . Нетрудно найти, что средний квадрат удаления нейтрона от источника

$$\langle r^2 \rangle = \frac{\int_0^{\infty} dr \cdot r^2 \varphi(r) \cdot r^2}{\int_0^{\infty} dr \cdot r^2 \varphi(r)} = 6L^2,$$

так что  $L^2 = \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle$ .

Таким образом, длина диффузии  $L$  определяет среднее расстояние, на которое уходит нейтрон от источника в процессе диффузии:

$$L = \frac{1}{\sqrt{3 \Sigma_{tr} \Sigma_a}},$$

и тем больше, чем меньше плотность среды ( $L \sim \frac{1}{\rho}$ ) и чем меньше поглощение нейтронов ( $L \sim \frac{1}{\sqrt{\Sigma_a}} \rightarrow \infty$ ). Длина диффузии тепловых нейтронов для некоторых сред: 2,8 см для  $H_2O$ , 100 см для  $D_2O$ , 50 см для графита.

## 7. Замедление нейтронов. Возрастное приближение

При упругом рассеянии нейтрона ядром происходит передача ему части энергии нейтрона, тем большая, чем легче ядро. В отличие от неупругого рассеяния, являющегося пороговой реакцией, упругое рассеяние происходит при любых энергиях нейтронов. В результате многократных упругих столкновений в средах, содержащих достаточно легкие ядра, происходит постепенное замедление нейтронов от энергий спектра деления вплоть до энергий теплового движения атомов среды ( $\lesssim 0,1$  эВ), если, конечно, поглощение замедляющихся нейтронов невелико. Замедление нейтронов при упругих столкновениях играет чрезвычайно важную роль в физике реакторов, определяя энергетический спектр нейтронов в них.

Законы сохранения кинетической энергии и импульса, выполняющиеся в упругих столкновениях нейтрона с ядром атомным весом  $A$ , приводят к следующему соотношению между потерей энергии  $E' - E$  нейтрона (в лабораторной системе координат) и углом рассеяния  $\theta$  (в системе центра масс нейтрона и ядра):

$$\Delta E = E' - E = \frac{\alpha E'}{2} (1 - \cos \theta), \quad (45)$$

где  $\alpha = \frac{4A}{(A+1)^2}$ . Максимальная потеря энергии нейтрона при уп-

ругом рассеянии при  $\theta = \pi$  составляет  $\Delta E_{\text{МАКС}} = \alpha E'$  и тем больше, чем меньше  $A$ . При  $A \approx 1$  (легкий водород)  $\Delta E_{\text{МАКС}} = E'$ , т.е. нейтрон может передать ядру всю энергию. При  $A \gg 1$   $\alpha \approx \frac{4}{A}$  и  $\Delta E_{\text{МАКС}}$  падает с ростом  $A$ , становясь пренебрежимо малым для тяжелых ядер ( $A \gtrsim 100$ ). Поэтому в качестве замедли-

телей нейтронов используют вещества с небольшими  $A$  — от 1 (водород) до 12 (углерод), которые к тому же слабо поглощают нейтроны. Наиболее употребительными замедлителями нейтронов являются  $H_2O$ ,  $D_2O$ ,  $C$  (графит), а также  ${}^9Be$ ,  $BeO$  (окись бериллия).

Дифференциальное сечение рассеяния нейтрона с переходом  $E' \rightarrow E$  зависит от углового распределения рассеянных нейтронов в системе центра массы  $2\pi W(\theta) \sin\theta d\theta$ . Если  $W(E' \rightarrow E) dE$  — вероятность такого перехода, то

$$W(E' \rightarrow E) dE = 2\pi W(\theta) \sin\theta d\theta,$$

$$W(E' \rightarrow E) = 2\pi W(\theta) \sin\theta \frac{d\theta}{dE},$$

причем зависимость  $\theta(E)$  определяется соотношением (45), откуда

$$dE = -\frac{\alpha E'}{2} \sin\theta d\theta,$$

$$W(E' \rightarrow E) = \frac{4\pi}{\alpha E'} W[\theta(E)]. \quad (46)$$

При высоких энергиях нейтронов ( $E \sim \text{МэВ}$ ) угловое распределение упруго рассеянных нейтронов в системе центра масс неизотропно, нейтроны рассеиваются преимущественно вперед (дифракционное рассеяние). При этом более вероятны малые энергетические потери. С уменьшением энергии нейтрона, когда его длина волны превышает размеры ядра, рассеяние становится изотропным ( $S$ -рассеяние) и  $W(\theta) \rightarrow \frac{1}{4\pi}$ . В этом случае

$$W(E' \rightarrow E) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha E'} & \text{при } E' - E < \Delta E_{\text{МАКС}}, \\ 0 & \text{при } E' - E > \Delta E_{\text{МАКС}} \end{cases}$$

и интеграл рассеяния в уравнении (27)

$$\int dE' \varphi(E') \Sigma_S(E' \rightarrow E) = \int_E^{\frac{E}{1-\alpha}} \frac{dE'}{\alpha E'} \varphi(E') \Sigma'_S(E').$$

При описании замедления нейтронов за счет упругого рассеяния часто вместо обычной энергетической переменной  $E$  вводят логарифмическую энергию (летаргию)  $u = \ln \frac{E_0}{E}$ , где  $E_0$  — произвольная энергия, принимаемая обычно равной средней энергии спектра деления:  $E_0 = 2$  МэВ. Тогда в начале замедления  $u = 0$ , и с уменьшением энергии нейтрона  $u$  растет вплоть до  $u = 18,2$  при  $E = 0,025$  эВ (энергия тепловых нейтронов при комнатной температуре). Такая замена делает движение нейтронов вдоль энергетической шкалы при замедлении равномерным: потеря энергии нейтрона при рассеянии  $\Delta E \sim E$  и падает с замедлением, тогда как  $\Delta u = \left| \frac{\Delta E}{E} \right|$  не зависит от энергии нейтрона.

Если  $w(u' \rightarrow u)$  — вероятность перехода  $u' \rightarrow u$ , то

$$w(u' \rightarrow u) du = w(E' \rightarrow E) dE$$

и для  $S$ -рассеяния

$$w(u' \rightarrow u) = w(E' \rightarrow E) \frac{dE}{du} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha} e^{-(u-u')}, & u-u' < \epsilon; \\ 0 & , u-u' > \epsilon, \end{cases}$$

где максимальное изменение логарифмической энергии

$$\epsilon = (u-u')_{\text{макс}} = \ln(1-\alpha) = 2 \ln \frac{A+1}{A-1}.$$

При  $A \rightarrow 1$   $\epsilon \rightarrow \infty$ , при  $A \gg 1$   $\epsilon \approx \frac{4}{A}$ .

Описывая поток нейтронов в переменных  $u$   $\psi(\vec{r}, u, t)$ , получим для интеграла рассеяния

$$\begin{aligned} \int du' \psi(\vec{r}, u', t) \Sigma_s(u' \rightarrow u) &= \int du' \psi(\vec{r}, u', t) \Sigma_s(u') w(u' \rightarrow u) = \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_{u-\epsilon}^u du' \psi(\vec{r}, u', t) \Sigma_s(u') e^{-(u-u')}. \end{aligned}$$

Этот интеграл можно упростить, если в пределах интервала  $\epsilon$  функция плотности рассеяния  $\psi(u) = \psi(u) \Sigma_s(u)$  меняется мало:  $\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial u} \ll \psi$ . В этом случае можно под интегралом разложить  $\psi(u')$  в ряд по  $u-u' = s$ , оставив два первых члена

$$\psi(u') \approx \psi(u) - s \frac{\partial \psi}{\partial u}.$$

В общем случае, когда  $w$  зависит от  $u$  и  $u'$  в отдельности, можно записать:  $w(u' \rightarrow u) = w(u', u - u') = w(u', s)$  и разложить эту функцию в ряд по первому аргументу около

$$u' = u: \quad w(u', s) \approx w(u, s) - s w'_u(u, s).$$

Подставив эти разложения в интеграл и выполнив интегрирование по  $ds = -du'$  и учитывая, что  $\int_0^E ds w(u, s) = 1$ ,  $\int_0^E ds \lambda \times s w(u, s) = \xi(u)$  — средняя логарифмическая потеря энергии, получим:

$$\Sigma_s(u) \varphi(\vec{r}, u, t) - \frac{\partial}{\partial u} \xi(u) \Sigma_s(u) \varphi(\vec{r}, u, t).$$

В рассматриваемом приближении, которое называется возрастным приближением, уравнение (27) приобретает вид:

$$\begin{aligned} \frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \nabla \Delta \varphi + \varphi(\vec{r}, u, t) \Sigma_a(u) + \frac{\partial}{\partial u} \xi(u) \Sigma_s(u) \varphi(\vec{r}, u, t) = \\ = \chi(u) \int du' \varphi \nu_f \Sigma_f + Q(\vec{r}, u, t). \end{aligned} \quad (47)$$

Физический смысл выражения под знаком  $\frac{\partial}{\partial u}$  ясен — это поток нейтронов вдоль оси  $u$ , называемый плотностью замедления:

$$q(\vec{r}, u, t) = \xi \Sigma_s \varphi(\vec{r}, u, t). \quad (48)$$

Плотность замедления  $q(u)$  есть число нейтронов, пересекающих в результате замедления сечение  $u$  энергетической оси в  $1 \text{ см}^3$  среды за 1 с.

Запишем стационарное уравнение для функций  $q(\vec{r}, u)$ , обозначив для простоты правую часть уравнения (47)  $Q(\vec{r}, u)$ : получим:

$$-\frac{\nabla}{\xi \Sigma_s} \Delta q + q \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s} + \frac{\partial q}{\partial u} = Q(\vec{r}, u).$$

Умножим это уравнение на  $\frac{\xi \Sigma_s}{\nabla}$ , обозначим, как и раньше,  $\frac{\Sigma_a}{\nabla} = \frac{1}{L^2(u)}$  и введем новую энергетическую переменную

$$\tau(u) = \int_0^u du' \frac{\nabla(u')}{\xi(u') \Sigma_s(u')}, \quad \text{так что} \quad d\tau = \frac{\nabla}{\xi \Sigma_s} du.$$

Так как плотность источника нейтронов  $Q(\vec{r}, u) du = Q(\vec{r}, \tau) d\tau$   
или  $Q(\vec{r}, u) = Q(\vec{r}, \tau) \cdot \frac{\pi}{\xi \Sigma_s}$ , а плотность замедления по своему

физическому смыслу не изменяется при переходе от одной энергетической переменной к другой ( $q(\vec{r}, u) = q(\vec{r}, \tau)$ ), получим в результате

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{q(\vec{r}, \tau)}{L^2(\tau)} - D \nabla^2 q = Q(\vec{r}, \tau). \quad (49)$$

Величина  $\tau$ , являющаяся в этом уравнении аналогом времени, носит название возраста нейтронов (хотя размерность ее —  $\text{см}^2$ ), а само приближение называется возрастным (фермиевским). Простейший случай этого уравнения получается в отсутствие источников, поглощения и диффузии нейтронов, когда

$$\frac{\partial q}{\partial \tau} = 0, \quad q(u) = \text{const.}$$

Действительно, в принятых условиях поток нейтронов вдоль оси  $u$  должен быть постоянным (как поток жидкости вдоль трубы) и равным суммарной мощности источников нейтронов, действующих при более высоких по сравнению с рассматриваемой энергиях:  $q = \text{const} = Q_0$ . Тогда для плотности потока нейтронов получим:

$$\varphi(u) = \frac{q}{\xi \Sigma_s} = \frac{Q_0}{\xi \Sigma_s}$$

или в обычных энергетических переменных, учитывая, что

$$\varphi(u) du = \varphi(E) dE \quad \text{или} \quad \varphi(E) = \varphi(u) \left| \frac{du}{dE} \right| = \frac{\varphi(u)}{E},$$

$$\varphi(E) = \frac{Q_0}{\xi \Sigma_s E}. \quad (50)$$

Это — спектр Ферми  $\frac{1}{E}$  для замедляющихся нейтронов. Рост плотности потока нейтронов с уменьшением энергии связан здесь с накоплением нейтронов при малых энергиях из-за уменьшения энергетических потерь  $\Delta E \approx \xi E$ .

Величина  $\xi = \frac{1}{\alpha} \int_0^\epsilon ds \cdot s e^{-s} = \frac{1}{\alpha} [1 - (1 + \epsilon) e^{-\epsilon}]$  и для рассеяния на водороде ( $A=1$ )  $\xi = 1$ . Разлагая это выражение

по  $\frac{1}{A}$  при  $A \gg 1$ , получим  $\xi \approx \frac{2}{A}$ . В случае неизотропного в системе центра масс рассеяния, используя (45), нетрудно получить, что при  $A \gg 1$   $\xi(u) \approx \frac{2}{A} (1 - \overline{\cos \theta(u)})$ .

При высоких энергиях, если рассеяние становится преимущественно вперед и  $\cos \theta > 0$ , то  $\xi$  падает по сравнению с  $S$ -рассеянием при малых энергиях.

Для типичных замедлителей величина  $\xi$  при  $S$ -рассеянии составляет:  $\xi = 1$  для  $^1\text{H}$ ,  $\xi = 0,7$  для  $^2\text{H}$ ,  $\xi = 0,158$  для  $^{12}\text{C}$ ,  $\xi = 0,21$  для  $^9\text{Be}$ .

Поскольку сечение рассеяния является аддитивной величиной для смеси разных ядер  $\Sigma_S(E' \rightarrow E) = \sum_i \Sigma_{Si}(E' \rightarrow E)$ , то аддитивной является и "сечение замедления" нейтронов

$$(\xi \Sigma_S)_{\text{СМЕШ}} = \sum_i \xi_i \Sigma_{Si}, \quad \xi_{\text{СМЕШ}} = \frac{\sum_i \xi_i \Sigma_{Si}}{\sum_i \Sigma_{Si}}$$

Распределение плотности замедления нейтронов в бесконечной непоглощающей среде с точечным источником моноэнергетических нейтронов мощностью  $Q$  определяется уравнением

$$-\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial q}{\partial r} + \frac{\partial q}{\partial \tau} = \frac{\delta(r)}{4\pi r^2} \cdot \delta(\tau) \cdot Q_0 \quad \text{с решением:}$$

$$q(r, \tau) = Q_0 \frac{e^{-\frac{r^2}{4\tau}}}{(4\pi\tau)^{3/2}} \quad (51)$$

Отсюда нетрудно найти, что  $\tau$ , как и  $L^2$ , определяет средний квадрат удаления нейтрона от источника, в процессе замедления от начальной энергии ( $\tau = 0$ ) до энергии, соответствующей возрасту  $\tau$ :

$$\tau = \frac{1}{6} \langle r^2 \rangle. \quad (52)$$

Для типичных замедлителей возраст нейтронов, замедлившихся от энергий спектра деления до тепловой энергии составляет  $\tau_T = 30 \text{ см}^2$  для  $\text{H}_2\text{O}$ ,  $\tau_T = 120 \text{ см}^2$  для  $\text{D}_2\text{O}$ ,  $\tau_T = 360 \text{ см}^2$  для графита. Как и  $L^2$ ,  $\tau$  уменьшается с плотностью среды:  $\tau \sim \frac{1}{\rho^2}$ . С увеличением массы ядер замедлителя растет и  $\tau \sim \frac{1}{\xi} \sim A$ .

Следует заметить, что выражение (52) для  $\tau$  получено в возрастном приближении и обладает соответствующей погреш-

ностью. Более точное вычисление среднего квадрата удаления нейтрона от источника приводит к выражению

$$\tau(u) = \frac{\lambda^2(0)}{3} + \int_0^u du' \frac{D(u')}{\xi \Sigma_s(u')},$$

где добавочный член  $\frac{\lambda^2(0)}{3}$  описывает удаление от источника нейтронов до того, как они испытают первое столкновение с ядрами замедлителя. Эта добавка особенно существенна для замедлителей, содержащих легкий водород, так как сечение рассеяния нейтрона на  $^1\text{H}$  резко увеличивается с уменьшением энергии и  $\lambda(0)$  велико. Для воды эта поправка составляет более  $1/3$  в величине  $\tau_T$ .

Используя возрастное приближение для замедляющихся и диффузионное приближение для тепловых нейтронов, можно получить следующую систему уравнений для описания реактора (считая нейтроны деления моноэнергетическими,  $\chi(\tau) \approx \delta(\tau)$ )

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \Delta \varphi + \frac{\varphi(\vec{r}, \tau)}{L^2(\tau)} &= \frac{1}{K} \sigma(\tau) Q(\vec{r}) \cdot \mu; \\ \Delta \varphi(\vec{r}) - \frac{\varphi(\vec{r})}{L_T^2} &= - \frac{\varphi(\vec{r}, \tau_T)}{D_T} \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

причем плотность генерации быстрых нейтронов

$$Q(\vec{r}) = \varphi(\vec{r}) \Sigma_f^T \nu_f^T + \int_0^{\tau_T} d\tau \varphi(\vec{r}, \tau) \frac{\nu_f \Sigma_f(\tau)}{D(\tau)}. \quad (54)$$

Коэффициент  $\mu$  в (53) учитывает размножение нейтронов деления на  $^{238}\text{U}$  и выделен в связи с тем, что энергетический спектр быстрых нейтронов плохо описывается возрастным приближением. Способы вычисления величины  $\mu$  будут рассмотрены ниже.

Для реакторов, в которых основное количество делений вызывается тепловыми нейтронами (реакторы на тепловых нейтронах), система (53) может быть упрощена. Воспользуемся следующей упрощенной моделью (двухгрупповая модель).

Во-первых, пренебрежем делением, вызванным замедляющимися нейтронами, положив

$$Q(\vec{r}) = \varphi_T(\vec{r}) \Sigma_f^T \nu_f^T.$$

В тепловых реакторах часто используется уран с низким обогащением по  $^{235}\text{U}$   $x = \frac{\rho_5}{\rho_5 + \rho_8}$ , так что концентрация  $^{238}\text{U}$  в нем велика и поглощением замедляющихся нейтронов  $^{238}\text{U}$  пренебречь нельзя. Как будет видно ниже, это поглощение, имеющее ярко выраженный резонансный характер, плохо описывается возрастным приближением, и мы учтем его введением коэффициента  $\varphi$  (вероятность избежать резонансного поглощения в  $^{238}\text{U}$ ), способы вычисления которого будут изложены в последующих разделах. Кроме того, будем считать поглощение нейтронов сосредоточенным на границе между областью замедления и областью тепловых нейтронов.

Таким образом, поглощением замедляющихся нейтронов мы пренебрегаем. Если реактор имеет достаточно большие размеры, то и утечка нейтронов из него в процессе замедления невелика. В этих условиях плотность замедления  $q(\vec{r}, \tau)$  мало меняется с  $\tau$ . Интегрируя уравнение для  $q(\vec{r}, \tau)$  по  $\tau$  от  $0-\epsilon$  до  $\tau_T$  при  $L^2(\tau) \rightarrow \infty$ , получим

$$\int_{0-\epsilon}^{\tau_T} d\tau \frac{\partial q}{\partial \tau} = q(\vec{r}, \tau_T), \quad \int_{0-\epsilon}^{\tau_T} d\tau \Delta q(\vec{r}, \tau) \approx \tau_T \Delta q(\vec{r}, \tau_T),$$

так что система (53) переходит в двухгрупповую систему уравнений диффузионного типа:

$$\Delta q - \frac{q}{\tau_T} = -\frac{\nu_f \mu}{k \tau_T} \varphi(\vec{r}) \Sigma_f, \quad \Delta \varphi(\vec{r}) - \frac{\varphi(\vec{r})}{L_T^2} = -\frac{\varphi q(\vec{r}, \tau_T)}{D_T}.$$

Введем величину  $\theta = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a}$  — вероятность поглощения теплового нейтрона с делением (коэффициент использования тепловых нейтронов). В случае реактора бесконечных размеров  $\Delta q = 0$  и  $\Delta \varphi(\vec{r}) = 0$ , так что

$$k = k_\infty = \nu_f \mu \theta \varphi, \quad (55)$$

что является известной "формулой 4-х сомножителей" для коэффициента размножения бесконечного реактора  $k_\infty$ . В этих обозначениях, учитывая, что  $\Sigma_a = \frac{D_T}{L_T^2}$ , получим систему:

$$\left. \begin{aligned} \Delta q - \frac{q}{\tau_T} &= -\frac{k_\infty}{\varphi k} \frac{D_T}{\tau_T L_T^2} \varphi(\vec{r}); \\ \Delta \varphi(\vec{r}) - \frac{\varphi(\vec{r})}{L_T^2} &= -\frac{\varphi q(\vec{r}, \tau_T)}{D_T}, \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

которой в дальнейшем будем пользоваться для описания тепловых реакторов.

Как видно из условия  $(\epsilon \frac{\partial \psi}{\partial u} \ll \psi)$ , возрастное приближение справедливо, если поток нейтронов медленно меняется с энергией и если потеря энергии нейтронов при рассеянии мала. Во многих случаях эти условия нарушаются. В реакторах с высокой концентрацией топлива поглощение замедляющихся нейтронов велико, что приводит к сложной зависимости потока нейтронов от энергии. Кроме того, в области быстрых нейтронов становится существенным неупругое рассеяние нейтронов тяжелыми ядрами, описание которого в возрастном приближении приводит к погрешностям расчета. В реакторах с водяным замедлителем велики потери энергии нейтронов при рассеянии водородом, что также приводит к увеличению погрешности возрастного приближения.

В этих случаях прибегают к многогрупповому описанию реактора.

### 8. Многогрупповое приближение

Разобьем энергетический интервал  $0 < E < E_0$  ( $E_0$  - верхняя граница спектра деления) на  $\pi$  подынтервалов, пронумеровав их, начиная с верхнего подынтервала, индексом  $K = 1, 2, 3, \dots, \pi$ :  $\Delta E_K = (E_K, E_{K+1})$ .

Нейтроны с энергией в пределах  $K$ -го интервала назовем нейтронами  $K$ -й группы с суммарным потоком

$$\varphi_K(\vec{r}) = \int_{E_K}^{E_{K+1}} dE \varphi(\vec{r}, E).$$

Разобьем, кроме того, объем реактора на зоны  $\Delta V_e$ , в пределах которых энергетический спектр нейтронов изменяется не очень сильно.

Приближенная многогрупповая модель состоит в том, что в пределах каждой из таких зон непрерывно изменяющиеся с энергией нейтронные сечения заменяются кусочно-постоянными величинами:  $\Sigma'(E) \rightarrow \Sigma_K^e$ ,  $\nu_f \Sigma_f(E) \rightarrow \nu_f \Sigma_{fk}^e$ ,  $\Sigma_a(E) \rightarrow \Sigma_{ak}^e$ ,  $\Sigma_g(E' \rightarrow E) \rightarrow \Sigma_{sik}^e$ . Точно так же  $\Pi(E) \rightarrow \Pi_K^e$ ,  $\chi(E) \rightarrow \chi_K$ .

В такой модели поток нейтронов в пределах каждой из групп не зависит от энергии, также становится кусочно-постоянным  $\varphi(\vec{r})$ , а суммарный поток нейтронов в  $k$ -й группе равен  $\Phi_k(\vec{r}) = \varphi_k(\vec{r}) \Delta E_k$ .

Таким образом, многогрупповая модель описывается системой уравнений диффузионного типа

$$-D_k \Delta \varphi_k + \varphi_k \Sigma_{yvk}^e = \sum_{i=1}^{k-1} \varphi_i \Sigma_{sik}^e + \frac{1}{K} \chi_k Q(\vec{r}), \quad (57)$$

где  $\Sigma_{yvk}^e = \Sigma_k^e - \Sigma_{skk}^e$  - сечение "увода" нейтронов из  $k$ -й группы, равное полному сечению  $\Sigma_k$  за вычетом части сечения рассеяния, соответствующей энергетическим переходам, оставляющим нейтроны в пределах  $k$ -й группы. Плотность генерации нейтронов

$$Q(\vec{r}) = \sum_{k=1}^n \varphi_k(\vec{r}) \nu_f \Sigma_{fk}^e. \quad (58)$$

Для получения формул усреднения сечений проинтегрируем уравнение (57) по  $\Delta V_e$ , а исходные уравнения (30) проинтегрируем по  $\Delta V_e$  и  $\Delta E_k$ . Две найденные таким путем системы совпадают, если

$$\left. \begin{aligned} \varphi_k(\vec{r}) = \varphi_k(\vec{r}) &= \int_{\Delta E_k} dE \varphi(\vec{r}, E), \\ \Sigma_k^e &= \frac{\int_{\Delta V_e} d\vec{r} \int_{\Delta E_k} dE \varphi(\vec{r}, E) \Sigma(E)}{\int_{\Delta V_e} d\vec{r} \int_{\Delta E_k} dE \varphi(\vec{r}, E)}, \end{aligned} \right\} \quad (59)$$

$$\Sigma_{sik}^e = \frac{\int_{\Delta V_e} d\vec{r} \int_{\Delta E_i} dE' \varphi(\vec{r}, E') \int_{\Delta E_k} dE \Sigma_s(E' \rightarrow E)}{\int_{\Delta V_e} d\vec{r} \int_{\Delta E_i} dE \varphi(\vec{r}, E)},$$

$$\chi_k = \int_{\Delta E_k} dE \chi(E), \quad \Pi_k^e = \frac{\int_{S_e} ds \int_{\Delta E_k} dE \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \Pi(E)}{\int_{S_e} ds \int_{\Delta E_k} dE \frac{\partial \varphi}{\partial r}},$$

$\vec{n}$  — нормаль к поверхности  $S_e$   $e$ -й зоны, что и представляет собой формулы усреднения сечений по группам.

Чтобы воспользоваться этими формулами, нужно хотя бы приближенно знать  $\varphi(\vec{r}, E)$  в пределах каждой из зон и групп. С этой целью прибегают к априорной информации о распределении потока нейтронов или же к решению упрощенных вспомогательных задач (например, для нахождения приближенного спектра нейтронов в зоне достаточно больших размеров решают задачу о спектре нейтронов в среде того же состава, но при бесконечных размерах).

Если спектр в пределах группы можно считать близким к фермиевскому  $\sim \frac{1}{E}$ , то из (59) получаются простейшие формулы усреднения:

$$\Sigma_K \cong \frac{\int_{\Delta E_K} \frac{dE}{E} \Sigma(E)}{\int_{\Delta E_K} \frac{dE}{E}} = \frac{\int_{\Delta u_K} du \Sigma(u)}{\Delta u_K}, \quad \Sigma_{iK} = \frac{1}{\Delta u_i} \int_{\Delta u_i} du' \int_{\Delta u_K} du \Sigma_S(u' \rightarrow u)$$

и т.д.

Если ширины групп превышают максимальную потерю энергии при упругом рассеянии,  $\Delta u > \xi$ , то возможны лишь переходы из предыдущей группы в последующую, т.е. из  $\Sigma_{iK}$  отличны от нуля лишь величины  $\Sigma_{K-1, K}$ ,  $\Sigma_{K, K}$ . При мало меняющихся в пределах  $\Delta u_K$   $\Sigma_S(u) \approx \text{const}$  для упругого  $S$ -рассеяния получим в этом случае:

$$\Sigma_{K-1, K} = \frac{\Sigma_{SK-1}}{\alpha \Delta u_{K-1}} \int_{u_K - \xi}^{u_K} du' \int_{u_K}^{u'+\xi} du e^{-(u-u')} \xi \Sigma_{SK-1}, \quad (60)$$

соответственно  $\Sigma_{K, K} = \Sigma_{SK} \left(1 - \frac{\xi}{\Delta u_K}\right)$  и  $\Sigma_{yB, K} = \Sigma_{aK} + \frac{\xi \Sigma_{SK}}{\Delta u_K}$ .

## 9. Уравнение термализации нейтронов

Для вывода уравнения для спектра медленных нейтронов воспользуемся уравнением  $P_1$ -приближения (30) и следующими соображениями. Если диффузия и поглощение нейтронов невелики, энергетический спектр нейтронов близок к равновесному спектру Максвелла:

$$\varphi(E) \sim M(E) \sim E e^{-\frac{E}{T}},$$

где  $T$  — температура среды. Поэтому можно ожидать, что функция

$$\psi(E) = \frac{\varphi(E)}{M(E)}$$

слабо изменяется с энергией, и вместо разложения  $\varphi(E)$  под интегралом в (30) воспользоваться разложением  $\psi(E)$ . Учтем при этом весьма общее "соотношение детального баланса", которому подчиняется дифференциальное сечение рассеяния

$$M(E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) = M(E) \Sigma_s(E \rightarrow E'). \quad (61)$$

Подставив  $\varphi(E) = M(E) \psi(E)$  в интеграл (30) и используя (61), получим

$$M(E) \int dE' \psi(E') \Sigma_s(E \rightarrow E').$$

Считая среду состоящей из достаточно тяжелых атомов, так что  $\Sigma_s(E \rightarrow E')$  отлично от нуля при малых  $E' - E$ , разложим  $\psi(E)$  в ряд по  $E' - E$  около  $E' = E$  с учетом квадратичного члена. Получим

$$M(E) \left[ \psi(E) \Sigma_s(E) - \frac{\partial \psi}{\partial E} \Sigma_s'(E) \alpha(E) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial E^2} \Sigma_s(E) \beta(E) \right],$$

где  $\alpha(E) = \frac{1}{\Sigma_s(E)} \int dE' (E' - E) \Sigma_s(E \rightarrow E')$  — средняя передача

энергии нейтроном веществу;  $\beta = \frac{1}{\Sigma_s(E)} \int dE' (E' - E)^2 \Sigma_s(E \rightarrow E')$  —

средний квадрат передачи энергии. Величины  $\alpha$  и  $\beta$  зависят от особенностей связей атомов в молекулах или кристаллах вещества. Подстановка полученного разложения в уравнение (30) приводит к дифференциальному уравнению термализации, имеющему второй порядок по энергии.

Ниже рассматривается простейший случай термализации нейтронов в одноатомном газе. В этом случае нетрудно найти, что для  $A \gg 1$   $\alpha(E) \approx \frac{2}{A} (E - 2T)$ ,  $\beta(E) = \frac{4TE}{A} = \Delta^2$  ( $\Delta$  — так называемая доплеровская ширина).

В результате приходим к следующему дифференциальному уравнению термализации:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - D \Delta \varphi + \varphi \Sigma_a - \frac{\partial}{\partial E} \xi \Sigma_s' \left[ (E - T) \varphi + ET \frac{\partial \varphi}{\partial E} \right] = Q(\vec{r}, E, t). \quad (62)$$

Граничные условия по энергии могут быть найдены из следующих соображений.

Поведение потока нейтронов при высоких энергиях определяется условиями задачи, но во всех рассмотренных ниже случаях

$$\varphi(E) \rightarrow 0, \quad (63)$$

$$E \rightarrow \infty$$

Вблизи  $E = 0$  плотность нейтронов пропорциональна объему сферического слоя  $4\pi v^2 dv$  в пространстве скоростей, т.е.  $n(v)dv \sim v^2 dv$  или  $n(E)dE \sim \sqrt{E} dE$ . Поэтому поток нейтронов

$$\varphi(E) \sim E \rightarrow 0 \quad \text{при } E \rightarrow 0, \quad (64)$$

При  $E \gg T$  уравнение (62) переходит в уравнение возрастного приближения, в чем нетрудно убедиться, устремляя  $T \rightarrow 0$ . Также нетрудно найти, что в отсутствие источников, поглощения и диффузии ( $Q=0, \Sigma_a=0, \Delta\varphi=0$ ) решением стационарного уравнения (62) при  $\frac{\partial\varphi}{\partial t}=0$  является равновесный максвелловский спектр  $\varphi(E) = M(E) = E e^{-\frac{E}{T}}$ .

Таким образом, уравнение (62) является обобщением уравнения замедления, учитывающим особенности взаимодействия медленных нейтронов с веществом.

В переходной области от спектра Ферми к спектру Максвелла из (62) может быть получено модифицированное возрастное приближение. Считая в этой области приближенно  $\varphi(E) \sim \frac{1}{E}$ , получим  $\frac{\partial\varphi}{\partial E} \approx -\frac{\varphi(E)}{E}$ .

Тогда дифференциальный по энергии оператор в (62) может быть записан, как и в возрастном приближении:

где  $\xi^* = \xi \left(1 - \frac{2T}{E}\right)$ . Энергетический спектр в переходной области окажется отсюда

$$\varphi(E) \sim \frac{1}{\xi^* \Sigma_s E} \sim \frac{1}{\xi \Sigma_s (E - 2T)}$$

Этот результат имеет простое физическое объяснение. Вблизи тепловой области столкновения с ядрами приводят как к потере, так и к получению энергии нейтронами, поэтому в среднем потеря энергии снижается:  $\xi E \rightarrow \xi^* E$ .

Интегральное уравнение термализации. Рассмотрим простейшее решение однородного уравнения (62) ( $Q=0$ ) с разделенными переменными:

$$\varphi(\vec{r}, E, t) = R(\vec{r}) \phi(E) \exp(-\alpha t), \quad (65)$$

где  $R(\vec{r})$  - решение волнового уравнения  $\Delta R + \alpha^2 R = 0$  с соответствующими каждой отдельной задаче граничными условиями.

Подставляя (65) в (62), получим уравнение для энергетического спектра (при  $\xi \Sigma_s = \text{const}$ ):

$$\frac{\partial}{\partial E} \left[ (E-T) \phi + ET \frac{\partial \phi}{\partial E} \right] = \left[ \Sigma_a(E) + \alpha^2 \Pi(E) - \frac{\alpha}{\nu} \right] \frac{\phi(E)}{\xi \Sigma_s}. \quad (66)$$

Интегрируя это уравнение по  $E$  от 0 до  $\infty$ , определим полезное для дальнейшего интегральное соотношение:

$$\lim_{E \rightarrow \infty} E \phi(E) = \int_0^{\infty} dE \phi(E) \Sigma_a(E) + \alpha^2 \int_0^{\infty} dE \Pi(E) \phi(E) - \alpha \int_0^{\infty} dE \frac{\phi(E)}{\nu}. \quad (67)$$

Правая часть уравнения (66) содержит члены, ответственные за отклонение энергетического спектра  $\phi(E)$  от равновесного  $\phi(E) = M(E) = E \exp(-\frac{E}{T})$  (поглощение, диффузия, нестационарность).

Для приближенного определения неравновесного спектра полезным оказывается переход от дифференциального уравнения (66) к интегральному.

Обозначим правую часть (66)  $f(E)$  и будем считать эту функцию заданной. При  $f(E) = 0$  однородное уравнение (66) имеет общее решение (положим  $\frac{E}{T} = x$ ):

$$\phi_{\text{одн}}(x) = Ax \exp(-x) + B \left( x \ln x - x \int_0^x dy \ln y \exp(y) - 1 \right), \quad (68)$$

где  $A$  и  $B$  - произвольные постоянные. Первый член здесь есть спектр Максвелла, а второй при  $x \rightarrow \infty$  переходит в спектр Ферми  $1/x$ , но при  $x \rightarrow 0$  остается конечным, т.е. не удовлетворяет условию (64).

Методом "вариации постоянной" найдем частное решение неоднородного уравнения (66):

$$\phi_{\text{неодн}}(x) = A(x) x \exp(-x), \quad A'(x) = \frac{\exp(x)}{x^2} \int_0^x f(y) dy,$$

откуда

$$\Phi_{\text{неодн}}(x) = x \exp(-x) \int_0^x dy \frac{\exp(y)}{y^2} \int_0^y dz f(z). \quad (69)$$

Общее решение (66) дается суммой (68) и (69), причем, поскольку  $\Phi_{\text{неодн}}(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ , следует положить  $B = 0$ , чтобы удовлетворить условию (64). Результатом является интегральное уравнение

$$\begin{aligned} \phi(x) = & Ax \exp(-x) + \frac{x \exp(-x)}{\xi \Sigma_s} \int_0^x dy \frac{\exp(y)}{y^2} \int_0^y dz \phi(z) \times \\ & \times \left[ \Sigma_a(z) + \alpha^2 D(z) - \frac{\alpha}{v_T \sqrt{z}} \right]. \end{aligned} \quad (70)$$

Методом итерации легко теперь получить приближенное

решение задачи, если  $\frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s} \ll 1$ ,  $\frac{\alpha^2 D}{\xi \Sigma_s} \ll 1$ ,  $\frac{\alpha}{v_T \xi \Sigma_s} \ll 1$

и отклонения от равновесия невелики. Рассмотрим некоторые задачи.

Стационарный спектр нейтронов в бесконечной среде ( $\alpha = 0$ ,

$\alpha^2 = 0$ ). Обозначив  $f(x) = \frac{\Sigma_a(x)}{\Sigma_a(1)}$  и  $\lambda = \frac{\Sigma_a(1)}{\xi \Sigma_s}$ , получим

$$\phi(x) = Ax \exp(-x) + \lambda x \exp(-x) \int_0^x dy \frac{\exp(y)}{y^2} \int_0^y dz z \exp(-z) f(z).$$

В нулевом по  $\lambda \ll 1$  приближении  $\phi(x) = Ax \exp(-x)$ , а в первом приближении

$$\phi(x) = Ax \exp(-x) + \lambda Ax \exp(-x) \int_0^x dy \frac{\exp(y)}{y^2} \int_0^y dz z \exp(-z) f(z).$$

Нормировочный множитель  $A$  может быть определен из баланса нейтронов:

$$Q = \int_0^{\infty} dx \Sigma_a(x) \phi(x); \quad A \cong \frac{Q}{a \Sigma_a(1)} \left( 1 - \lambda \frac{b}{a} \right),$$

где

$$a = \int_0^{\infty} dx f(x) x \exp(-x); \quad b = \int_0^{\infty} dx f(x) x \exp(-x) \int_0^x dy \frac{\exp(y)}{y^2} \int_0^y dz f(z) z \exp(-z),$$

$Q$  - мощность источника, действующего при  $x \rightarrow \infty$ .

В случае  $\Sigma_a \sim \frac{1}{\nu}$ , который ниже и будем иметь в виду,

$$a = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \quad b = \int_0^{\infty} dx \sqrt{x} \exp(-x) \int_0^x dy \frac{\exp y}{y^2} \int_0^y dz \sqrt{z} \exp(-z)$$

и

$$\phi(x) \approx \frac{2Q}{\sqrt{\pi} \Sigma_a(1)} x \exp(-x) \left\{ 1 + \lambda \left[ \int_0^x dy \frac{\exp y}{y^2} \int_0^y dz \sqrt{z} \exp(-z) - \frac{b}{a} \right] \right\}. \quad (71)$$

Нетрудно убедиться в том, что несмотря на приближенность выражения (71), оно приводит к верному результату при больших  $x$ : к спектру Ферми  $\varphi_{\phi}(x) = \frac{Q}{\xi \Sigma_s x}$ . Часто в расчетах энергетический спектр медленных нейтронов приближенно представляют в виде спектра Максвелла

$$\phi(E) \approx E \exp\left(-\frac{E}{T_H}\right)$$

с "температурой нейтронного газа"  $T_H$ , отличной от температуры среды  $T$ . Температура нейтронного газа  $T_H$  не является строго определенной величиной для неравновесного спектра.

Если воспользоваться одним из возможных определений

$$T_H = 2 \frac{\int_0^{\infty} dE \phi(E) \Sigma_a(E)}{\int_0^{\infty} dE \frac{\phi(E) \Sigma_a(E)}{E}} = T \cdot 2 \frac{\int_0^{\infty} dx \frac{\phi(x)}{\sqrt{x}}}{\int_0^{\infty} dx \frac{\phi(x)}{x^{3/2}}},$$

то 
$$\frac{T_H - T}{T} = 2 \frac{\overline{\Sigma_a}}{\xi \Sigma_s}.$$

Среда конечных размеров ( $\alpha = 0$ ). В этом случае  $\alpha^2$  - минимальное собственное число волнового уравнения в рассматриваемой среде. Будем считать, что  $\Pi = const$  и обозначим

$$\lambda_1 = \frac{\alpha^2 \Pi}{\xi \Sigma_s}, \quad \text{считая } \lambda \ll 1 \text{ и } \lambda_1 \ll 1.$$

Заметим, что в этом случае при  $E \gg T$  уравнение (66) переходит в уравнение возрастной теории  $\frac{\partial}{\partial E} E\phi = \lambda_1 \phi$  с решением  $\phi(E) \sim \frac{1}{E^{1-\lambda_1}}$ , убывающим медленнее, чем фермиевский спектр  $\frac{1}{E}$ , так что  $E\phi(E) \rightarrow \infty$  и  $\int_0^\infty dE \phi(E)$  расходится.

В первом приближении по  $\lambda$  и  $\lambda_1$

$$\phi(x) \cong x \exp(-x) \left[ 1 + \lambda \int_0^x dy \frac{\exp y}{y^2} \int_0^y dz \sqrt{z} \exp(-z) + \lambda_1 \int_0^x dy \frac{\exp y - 1}{y^2} \right]. \quad (72)$$

Определенная как и выше температура нейтронного газа

$$\frac{T_H - T}{T} = 2 \frac{\bar{\Sigma}_a}{\xi \Sigma_s} + 2 \frac{\alpha^2 D}{\xi \Sigma_s}.$$

Спектр нейтронов в бесконечной среде вдали от источника ( $\alpha = 0$ ). В этом случае поток медленных нейтронов вдали от источника экспоненциально убывает и  $\alpha^2 < 0$  является собственным числом уравнения (66). Из (67) при  $E\phi \rightarrow 0$

$$\alpha^2 = - \frac{\int_0^\infty dE \Sigma'_a(E) \phi(E)}{\int_0^\infty dE D(E) \phi(E)} = - \frac{1}{L^2}, \quad (73)$$

где  $L$  — длина диффузии нейтронов. Формула (73) дает способ усреднения для вычисления длины диффузии.

При  $D = \text{const}$  и  $\Sigma'_a \sim \frac{1}{v}$

$$\lambda = \frac{\Sigma_a(1)}{\xi \Sigma_s} \ll 1, \quad \lambda_1 = \frac{D}{\xi \Sigma_s L^2} = \frac{\bar{\Sigma}'_a}{\xi \Sigma_s} \ll 1.$$

В нулевом приближении собственное число уравнения  $\lambda_1 \cong \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda$ .

Энергетический спектр в первом приближении

$$\phi(x) \cong x \exp(-x) \left\{ 1 + \frac{\sqrt{\pi}}{2} \lambda \int_0^x dy \frac{\exp y}{y^2} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y dz \sqrt{z} \exp(-z) - 1 + (1+y) \exp(-y) \right] \right\} \quad (74)$$

и при больших  $x$ , в отличие от предыдущих случаев, убывает примерно как  $\exp(-x)$ .

В первом приближении среднее сечение поглощения

$$\bar{\Sigma}_a^{(1)} = \Sigma_a^{(1)} \frac{\int_0^\infty dx \frac{\phi(x)}{\sqrt{x}}}{\int_0^\infty dx \phi(x)} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Sigma_a^{(1)} (1 - a\lambda),$$

$$a = \int_0^\infty dx \sqrt{x} \exp(-x) \left( \sqrt{\frac{\pi x}{2}} - 1 \right) \int_0^x dy \frac{\exp y}{y^2} \left[ \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y dz \sqrt{z} \exp(-z) - 1 + (1+y) \exp(-y) \right] \cong 0,24,$$

что соответствует увеличению температуры нейтронного газа

$$\frac{T_H - T}{T} \cong 2a\lambda = \frac{4}{\sqrt{\pi}} a \frac{\bar{\Sigma}_a}{\xi \Sigma_s} = 0,54 \frac{\bar{\Sigma}_a}{\xi \Sigma_s}.$$

Относительно слабое отклонение  $T_H$  от  $T$  в рассматриваемом случае связано со взаимной компенсацией поглощения и диффузии.

Затухание нейтронного импульса. Рассмотрим среду конечных размеров ( $\kappa^2 > 0$ ), в которую в момент времени  $t = 0$  введены быстрые нейтроны. В течение времени, достаточного для распространения нейтронов по среде и их термализации, поток нейтронов распределится по собственной функции  $R(\vec{r})$  и будет экспоненциально спадать со временем за счет поглощения и утечки.

Измеряя декремент затухания потока нейтронов  $\alpha$ , в таком эксперименте удастся определить сечение поглощения медленных нейтронов и диффузионные характеристики среды.

Энергетический спектр медленных нейтронов определяется уравнением (66) с собственным числом  $\alpha$ , причем из (67)

$$\text{при } \phi(E) \sim \exp\left(-\frac{E}{T}\right) \\ \alpha = \frac{\int_0^\infty dE \phi(E) [\Sigma_a(E) + \kappa^2 D(E)]}{\int_0^\infty dE \frac{\phi(E)}{\nu}}. \quad (75)$$

Если  $\Sigma_a \sim \frac{1}{\nu}$ , то в бесконечной среде ( $\kappa^2 = 0$ ) устанавливается равновесный максвелловский спектр, и  $\alpha = \nu \Sigma_a(\nu)$  не зависит от температуры среды. Для среды достаточно больших размеров при  $\frac{\kappa^2 D}{\Sigma_a} \ll 1$  спектр остается близким к равновесному и

$$\alpha \cong \nu \Sigma_a(\nu) + \kappa^2 \frac{\int_0^\infty dE \frac{\phi(E)}{\nu} \cdot \nu \bar{D}}{\int_0^\infty dE \frac{\phi(E)}{\nu}} = \nu \Sigma_a(\nu) + \kappa^2 \bar{\nu} \bar{D}_0. \quad (76)$$

В частности, если  $D = \text{const}$ ,  $\bar{\nu} \bar{D}_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{2\tau'}{m_H}} \cdot D$ .

По результатам измерения  $\alpha$  в зависимости от размеров среды можно построить график и из него определить  $\alpha(\kappa^2)$ ,  $\nu \Sigma_a(\nu)$  и  $\bar{\nu} \bar{D}$  (рис. 10).

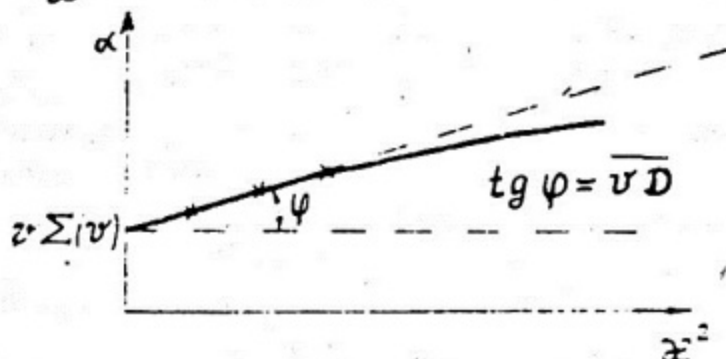


Рис. 10. Зависимость  $\alpha$  от  $\kappa^2$

Если бы  $D$  изменялся как  $\frac{1}{\nu}$ , то с уменьшением размеров среды спектр нейтронов оставался бы равновесным и зависимость  $\alpha(\kappa^2)$  была бы линейной. В действительности  $\nu D(\nu)$  обычно растет с энергией нейтронов. Подставив нулевое приближение для  $\alpha$  (76) в уравнение (66), получим в его правой части:

$$\kappa^2 \left[ D(E) - \frac{\bar{\nu} \bar{D}_0}{\nu} \right] \frac{\phi(E)}{\xi \Sigma_s}. \quad (77)$$

Данная функция, играющая роль "поглощения" в уравнении (66), отрицательна при малых  $\nu$  и положительна при больших, что приводит к смягчению спектра нейтронов тем больше, чем больше  $\kappa^2$  (картина, обратная рассмотренной в предыдущих разделах). Это явление называется "диффузионным охлаждением" нейтронов. За счет диффузионного охлаждения величина  $\nu D$  падает с ростом  $\kappa^2$ :  $\bar{\nu} \bar{D} \cong \bar{\nu} \bar{D}_0 - c \kappa^2$ , и в первом приближении

$$\alpha(\kappa^2) \cong \nu \Sigma_a(\nu) + \bar{\nu} \bar{D}_0 \kappa^2 - c \kappa^4. \quad (78)$$

$C$  носит название коэффициента диффузионного охлаждения\*).

\*). Кроме диффузионного охлаждения, в величину  $C$  некоторый вклад дают поправки к диффузионному приближению, пропорциональные  $\kappa^4$ .

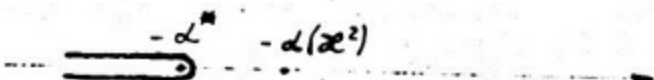
Функция (77) подобна правой части уравнения (66) в предыдущей задаче (при  $D = \text{const}$ ), но с обратным знаком. Пользуясь результатами предыдущего раздела, получим в нашем случае:

$$c = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \overline{vD_0} \cdot \frac{D}{\xi \Sigma_s} \cdot a. \quad (79)$$

Дальнейшее уменьшение размеров среды приводит к одному интересному явлению. В среде существует некоторое количество нейтронов с очень малыми скоростями, для которых время жизни в области малых энергий определяется конечным временем до столкновения  $\tau \sim \frac{1}{v \Sigma}$  (при малых энергиях не только сечение поглощения, но и сечение рассеяния нейтрона в лабораторной системе координат ведет себя как  $\frac{1}{v}$ ), тогда как время вылета этих нейтронов из среды  $\frac{1}{\alpha^2 D v} \gg \tau$ .

Поэтому спад плотности этих нейтронов определяется не экспонентой  $\exp(-\alpha(\alpha^2)t)$ , а функцией  $\exp(-\alpha^*t)$ , где  $\alpha^* = \frac{1}{\tau} = \lim_{v \rightarrow 0} v \Sigma$ . Поэтому, когда с уменьшением размеров среды  $\alpha(\alpha^2)$  становится больше  $\alpha^*$ , декремент затухания нейтронов перестает расти и становится равным  $\alpha^*$ . Математически это выражается в следующем. Если уравнение (62) с импульсным источником преобразовать по Лапласу, то функция  $\varphi(\alpha^2, E, s)$  (лапласовский образ функции  $\varphi(\alpha^2, E, t)$ ) для среды достаточно больших размеров имеет изолированный полюс в точке  $s = -\alpha(\alpha^2)$ , который движется по действительной оси комплексной плоскости влево с ростом  $\alpha^2$  (рис. 11).

Рис. 11. Положение полюсов на действительной оси комплексной плоскости  $s$



Кроме того, в плоскости  $s$  имеется "линия разреза", начинающаяся в точке  $s = -\alpha^* = \frac{1}{\tau}$  и приводящая к образованию в решении члена типа

$$\int_{\alpha^*}^{\infty} \varphi(s) \exp(-st) ds, \quad (80)$$

соответствующего непрерывному спектру  $\alpha$ . При некотором значении  $\alpha^2$  дискретный полюс  $s = -\alpha$  заходит в область непрерывного спектра, и тогда поведение  $\varphi(t)$  при больших  $t$  определяется не экспонентой  $\exp(-\alpha t)$ , а интегралом (80), спадающим примерно как  $\exp(-\alpha^* t)$ . При этом спад  $\varphi(t)$  перестает быть строго экспоненциальным. Это обстоятельство требует тщательного анализа условий проведения импульсных экспериментов\*).

Длина ретермализации нейтронов. Рассмотрим диффузию нейтронов в непоглощающей среде, правая часть которой ( $x > 0$ ) нагрета до температуры  $T_1$ , а левая — до  $T_2$ . Вдали от границы раздела сред нейтроны придут в тепловое равновесие со средой, а вблизи границы существует переходная область, размеры которой попытаемся определить.

Проинтегрировав уравнение (62) (при  $\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $\Sigma_a = 0$ ,  $D = \text{const}$ ,  $\xi \Sigma_s = \text{const}$ ,  $\varphi = \varphi(\vec{r}, E)$ ) по энергии, получим для интегрального потока нейтронов:

$$\left. \begin{aligned} \Phi(\vec{r}) &= \int_0^{\infty} \varphi(\vec{r}, E) dE; \\ \Delta \Phi(\vec{r}) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (81)$$

Умножив (62) на  $E$  и интегрируя, получим для "потока энергии":

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{E}(\vec{r}) &= \int_0^{\infty} \varphi(\vec{r}, E) \cdot E dE; \\ \Delta \mathcal{E} - \frac{1}{L_r^2} \mathcal{E}(\vec{r}) &= - \frac{2T}{L_r^2} \Phi(\vec{r}), \end{aligned} \right\} \quad (82)$$

\*). Аналогичная ситуация возникает и при решении односкоростной задачи о затухании нейтронного импульса в пластине больших размеров. В такой пластине имеются нейтроны, летящие вдоль нее, время "жизни" которых определяется временем до столкновения  $\tau = \lambda/v$  ( $\lambda$  — длина пробега) и не зависит от толщины пластин. Уменьшая толщину пластины, можно увеличить декремент затухания  $\alpha$  лишь до  $\alpha = \alpha^* = 1/\tau$ .

где  $L_r = \sqrt{\frac{D}{\xi \Sigma_s}}$  - длина ретермализации, определяющая расстояния, на которых происходит перестройка одного спектра нейтронов в другой.

В равновесии  $\xi = 2T\phi$  ( $2T$  - средняя энергия нейтронов  $\bar{E}$  с температурой  $T$  при усреднении по потоку нейтронов, усреднение по плотности  $n(E)$  приводит, как известно, к  $\bar{E} = \frac{3}{2} T$ ).

В нашей задаче  $\phi(x) = \text{const}$ ,  $\xi_1(x) = 2T_1\phi(1 - A_1 \exp(-\frac{x}{L_{r1}}))$ ,  
 $\xi_2(x) = 2T_2\phi(1 - A_2 \exp(-\frac{|x|}{L_{r2}}))$ . Граничные условия  
 $\xi_1(0) = \xi_2(0)$  и  $D_1 \frac{d\xi_1}{dx} \Big|_{x=0} = D_2 \frac{d\xi_2}{dx} \Big|_{x=0}$  приводят к

$$A_1 = \frac{T_1 - T_2}{T_1 \left(1 + \frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{L_2}{L_1}\right)}; \quad A_2 = -\frac{T_1 - T_2}{T_2 \left(1 + \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{L_1}{L_2}\right)}$$

## II. РЕАКТОР БЕСКОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР НЕЙТРОНОВ. КЛАССИФИКАЦИЯ РЕАКТОРОВ ПО СПЕКТРУ

Рассмотрим предельный случай реактора бесконечных размеров. Плотность потока нейтронов в таком реакторе пространственно постоянна и изотропна по углам. В стационарном случае  $\phi$  зависит только от одной переменной - от энергии  $E$ :  $\phi = \phi(E)$ .

Газокинетическое уравнение приобретает вид (условно-критическая задача):

$$\phi(E)\Sigma(E) = \int dE' \phi(E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) + \frac{\chi(E)}{K} \int dE' \phi(E') \nu_f \Sigma_f. \quad (83)$$

Интеграл деления здесь является постоянной величиной. Поскольку уравнение (83) однородно,  $\phi(E)$  определена с точностью до постоянной.

Положим  $\frac{1}{K} \int dE' \phi(E') \nu_f \Sigma_f = 1$ . Тогда  $\phi(E)$  может быть найдена из неоднородного уравнения

$$\phi(E)\Sigma(E) = \int dE' \phi(E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) + \chi(E), \quad (84)$$

а коэффициент размножения  $k$  (в рассматриваемом случае  $k = k_{\infty}$ )

$$k = k_{\infty} = \int dE' \varphi(E') \nu_f \Sigma_f. \quad (85)$$

Определение  $k_{\infty}$  требует, таким образом, знания энергетического спектра нейтронов  $\varphi(E)$ , определяемого интегральным уравнением (84).

### 1. Приближение постоянных сечений

Приближение постоянных сечений совпадает с однокоростным приближением. Если энергетический спектр нейтронов сосредоточен в достаточно узкой энергетической области, то принимая в ней  $\Sigma(E) \cong \text{const}$  и интегрируя (84) по энергии, получим (поскольку  $\int dE \Sigma_s(E' \rightarrow E) = \Sigma_s$  — полному сечению рассеяния):

$$\Sigma \int \varphi(E) dE = \Sigma_s \int dE' \varphi(E') + 1$$

при  $\Sigma_s(E) = \text{const}$ . При  $\Sigma - \Sigma_s = \Sigma_a$  найдем для полного потока нейтронов  $\varphi = \int dE \varphi(E)$  очевидный результат

$$\varphi = \frac{1}{\Sigma_a}, \quad k_{\infty} = \nu_f \cdot \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a}. \quad (86)$$

Величина  $\frac{\Sigma_f}{\Sigma_a}$  является вероятностью деления при поглощении нейтрона и называется коэффициентом использования нейтронов

$$\theta = \frac{\Sigma_f}{\Sigma_a}, \quad k_{\infty} = \nu_f \theta. \quad (87)$$

Часто используют другие величины для описания баланса нейтронов.

Если  $\nu = \nu_f \frac{\sigma_f}{\sigma_a}$  — число нейтронов на один поглощенный делящимся нуклидом нейтрон, а  $\Sigma_a^{(H)}$  — сечение поглощения нейтронов делящимся нуклидом, то

$$k_{\infty} = \nu \theta, \quad (88)$$

где  $\theta' = \frac{\sum_a^{(f)}}{\sum_a}$  - вероятность поглощения нейтронов делящимся нуклидом.

Наконец, если мы имеем дело, например, с ураном обогащения  $x$ , то можно ввести величину

$$\eta = \frac{x \nu_f^5 \sigma_f^5 + (1-x) \nu_f^\theta \sigma_f^\theta}{x \sigma_a^5 + (1-x) \sigma_a^\theta} \quad (89)$$

- число нейтронов на один нейтрон, поглощенный топливом ( $^{235}\text{U} + ^{238}\text{U}$ ), и тогда

$$K_\infty = \eta \theta'' \quad (90)$$

где  $\theta'' = \frac{\sum_a^{(\Gamma)}}{\sum_a}$  - вероятность поглощения нейтрона топливом.

В дальнейшем, в зависимости от задачи, будут использоваться разные определения величин  $\theta$  и разные выражения для  $K_\infty$ .

## 2. Многогрупповое приближение

Система многогрупповых уравнений (57) в отсутствие пространственной зависимости потока становится алгебраической

$$\left. \begin{aligned} \varphi_K \sum_{\nu\beta}^K &= \sum_{k=1}^{K-1} \varphi_k \sum_{s,k',k} \chi_k \\ K_\infty &= \sum_k \nu_f \sum_f^k \varphi_k \end{aligned} \right\} \quad (91)$$

В области замедления  $\sum_s (E' \rightarrow E)$  отлично от нуля лишь при  $E' > E$  и поэтому  $\sum_{s,k',k}$  является треугольной матрицей с  $\sum_{s,k',k} = 0$  при  $k < k'$ . Лишь в тепловой области возможны переходы  $E' \rightarrow E$  с увеличением энергии нейтронов. В тех случаях, когда тепловая область спектра может быть представлена одной группой, система уравнений (91) становится рекуррентной с простейшим решением;

$$\left. \begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{\chi_0}{\Sigma_{yb}^0}, \quad \varphi_1 = \frac{\chi_1 + \chi_0 \frac{\Sigma_s^{0 \rightarrow 1}}{\Sigma_{yb}^0}}{\Sigma_{yb}^1}, \\ \dots, \quad \varphi_k &= \frac{\chi_k + \sum_{k'=0}^{k-1} \varphi_{k'} \Sigma_{s, k', k}}{\Sigma_{yb}^k} \end{aligned} \right\} \quad (92)$$

При  $N = 1$  приходим к одногрупповому выражению (44), при  $N = 2$  — к простейшему (двухгрупповому) описанию спектра нейтронов<sup>\*</sup>

Решим в двухгрупповом приближении одну из важных задач о коэффициенте размножения бесконечной урановой среды с концентрацией  $^{235}\text{U}$  (обогащением  $x$ ).

Энергетический спектр нейтронов в этом случае близок к спектру деления, что позволяет найти в первом приближении средние сечения. В качестве границы между 1-й и 2-й группами удобно принять эффективный порог деления  $^{238}\text{U}$   $E_f \approx 1,4$  МэВ. Тогда

$$\chi_0 = 0,53, \quad \chi_1 = 0,47,$$

$$\sigma_{yb}^0 = x(\sigma_a^5 + \sigma_{in}^5)^0 + (1-x)(\sigma_a^8 + \sigma_{in}^8)^0,$$

$$\sigma^{0,1} = x\sigma_{in}^5 + (1-x)\sigma_{in}^8,$$

$$\sigma_{yb}^1 = x\sigma_a^{5(1)} + (1-x)\sigma_a^{8(1)},$$

так что

$$K_\infty = \frac{\chi_0}{\sigma_{yb}^0} \left[ x \nu_f^{5(0)} \sigma_f^{5(0)} + (1-x) \nu_f^{8(0)} \sigma_f^{8(0)} \right] + \frac{\chi_1 + \chi_0 \frac{\sigma^{0 \rightarrow 1}}{\sigma_{yb}^0}}{\sigma_{yb}^1} x \nu_f^{5(1)} \sigma_f^{5(1)},$$

$$K_\infty(x=0) = \chi_0 \frac{\nu_f^8 \sigma_f^8}{\sigma_a^8 + \sigma_{in}^8} = 0,26.$$

Зависимость  $K_\infty(x)$  приведена на рис. 12.

<sup>\*</sup> Полученная таким путем двухгрупповая система несколько отличается от (56) из-за сделанных там дополнительных приближений.

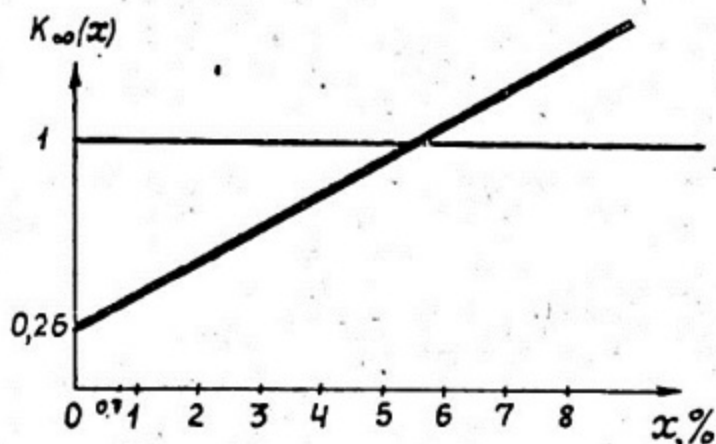


Рис. 12. Зависимость  $k_{\infty}$  от обогащения

Из него видно, что для естественного урана  $k_{\infty} \cong 0,3$ , т.е. даже бесконечная урановая среда является глубоко подкритической. Это является следствием большой величины сечения неупругого рассеяния  $^{238}\text{U}$  в надпороговой области, препятствующей делению  $^{238}\text{U}$ . В области же  $E < E_{\text{пор}}$  (2-я группа) из-за малой концентрации  $^{235}\text{U}$  основная масса нейтронов поглощается  $^{238}\text{U}$  без деления. Лишь при достаточно высоком обогащении ( $x \cong 5\%$ ) чисто урановый реактор бесконечных размеров становится критическим. При  $x \rightarrow 100$  (высокообогащенный уран)

$$k_{\infty} = \nu_f^{5(0)} \chi_0 \frac{\beta_f^{5(0)}}{\beta_a^{5(0)} + \beta_{in}^{5(0)}} + \nu_f^{5(1)} \left( \chi_1 + \chi_0 \frac{\beta_{in}^{5(0)}}{\beta_{in}^{5(0)} + \beta_a^{5(0)}} \right) \frac{\beta_f^{5(1)}}{\beta_a^{5(1)}} \cong 2,3$$

и слабо зависит от  $\beta_{in}$ . Другими словами, реактор с высокообогащенным ураном неплохо описывается уже одногрупповым способом, тогда как учет деления  $^{238}\text{U}$  требует выделения "надпороговой" группы.

Реакторы со спектром нейтронов, близким к спектру деления, называются реакторами на быстрых нейтронах. Неупругое рассеяние лишь переводит нейтроны из области  $E \gtrsim 1$  МэВ в область энергий  $E \sim$  сотен кэВ, оставляя их в области спектра деления. Поэтому добавление к ядерному топливу неделящихся тяжелых разбавителей ( $A \gg 1$ ), потеря энергии нейтронов при упругом рассеянии на которых мала, оставляет реактор быстрым. Быстрые реакторы, во всяком случае с высокообогащенным делящимся веществом (с низкой концентрацией  $^{238}\text{U}$ ), могут быть в первом приближении описаны одногрупповым способом. При этом (для  $^{235}\text{U}$ )

$$k_{\infty} = \nu \theta', \quad \theta' = \frac{\rho_5 \beta_a^b}{\rho_5 \beta_a^5 + \rho_{\text{разд}} \beta_a^{\text{разд}}},$$

но если разбавитель мало поглощает быстрые нейтроны, то  $\theta' \cong 1$ , а  $K_{\infty} \cong \nu$  и мало зависит от концентрации разбавителя.

Другое дело, если делящееся вещество (будем для определенности говорить об  $^{235}\text{U}$ ) смешивается с разбавителем с не очень большим атомным весом  $A$  (т.е. с замедлителем нейтронов). В этом случае энергетический спектр нейтронов за счет энергетических потерь при упругих столкновениях с ядрами замедлителя непрерывно смягчается по мере увеличения концентрации замедляющихся ядер  $\rho_3$ . Объединив быстрые нейтроны в одну группу ( $E > 0,1$  МэВ) можно найти, что число нейтронов, поглощенных  $^{235}\text{U}$  в этой области энергий, составляет (в этом случае  $\chi_0 \cong 1$ )

$$\varphi_0 \Sigma_a^5 = \frac{\rho_3 \sigma_a^5}{\rho_3 \sigma_a^6 + \rho_3 \sigma_{yB}^3}$$

и становится малым, если

$$\frac{\rho_3 \sigma_{yB}^3}{\rho_3 \sigma_a^6} \gg 1. \quad (93)$$

При этом мы переходим к реакторам на промежуточных нейтронах (или на "резонансных" нейтронах).

Поскольку  $\sigma_{yB}^3 \cong \frac{\xi \sigma_s}{A \Delta u} \cong \frac{2 \sigma_s}{A \Delta u}$ , то условием перехода к промежуточным реакторам является  $\frac{\rho_3}{\rho_5} \gg \frac{A}{2} \frac{\sigma_a^5}{\sigma_s}$ . Так, например, при разбавлении углеродом ( $A = 12$ ,  $\sigma_s \cong 4.6$ ) при  $\sigma_a^5 \cong 2.8$  в смеси  $^{235}\text{U}$  с  $\text{C}$  при  $\frac{\rho_3}{\rho_5} \gtrsim 10$  спектр нейтронов уже существенно мягче спектра деления.

Смесь  $^{235}\text{U}$  с легким водородом ( $\xi = 1$ ) имеет промежуточный спектр уже при  $\frac{\rho_H}{\rho_5} \sim 1$ .

В реакторах на промежуточных нейтронах их энергетический спектр определяется многократным рассеянием на ядрах замедлителя, описываемым в возрастном приближении.

### 3. Возрастное приближение, реакторы на промежуточных нейтронах

Подойдем к выводу возрастного приближения несколько иначе, чем ранее, рассмотрев более подробно плотность замед-

ления  $q(E) = q(u)$ . Замедление нейтронов можно рассматривать как их течение вдоль энергетической оси (в направлении уменьшения  $E$ ).

Функция  $q(E)$  — плотность замедления, равная числу нейтронов, пересекающих за секунду сечение  $E$  энергетической оси (поток нейтронов вдоль энергетической оси). Аналогия с потоком жидкости вдоль трубы оказывается здесь полезной, но неполной, так как нейтроны движутся вдоль энергетической оси скачками, равными потере энергии при каждом рассеянии (рис. 13).

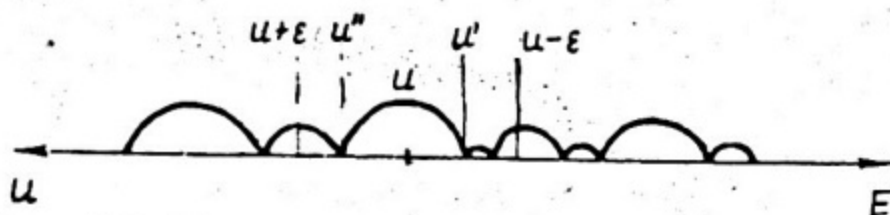


Рис. 13. Потери энергии нейтроном при рассеянии

Замедление при упругом рассеянии нейтронов удобно рассматривать в переменных  $u$ .

Найдем связь между  $q(u)$  и плотностью потока нейтронов  $\varphi(u)$ . Нейтроны могут перепрыгнуть через сечение  $u$  энергетической оси, лишь испытав перед этим рассеяние в интервале  $(u-\epsilon, u)$ . Число нейтронов, рассеянных в интервале  $du'$  около  $u'$  ( $u-\epsilon < u' < u$ ) (см. рис. 13) и перешедших при этом в интервал  $du''$  около  $u''$  ( $u'+\epsilon > u'' > u$ ) равно  $du'\varphi(u') \times \Sigma_s(u' \rightarrow u'')$ , а полное число "перепрыгнувших" через  $u$  нейтронов

$$q(u) = \int_{u-\epsilon}^u du' \varphi(u') \int_u^{u'+\epsilon} du'' \Sigma_s(u' \rightarrow u''), \quad (94)$$

что и является искомой связью между  $q(u)$  и  $\varphi(u)$ . Рассмотрим значения  $q$  в двух соседних точках на оси  $u$ :  $q(u)$  и  $q(u+du)$ . В стационарном случае  $q(u+du)$  уменьшается по сравнению с  $q(u)$  за счет поглощения нейтронов в интервале  $du$  и растет за счет нейтронов, испущенных в этом интервале внешним источником  $\chi(u)du$ :

$$q(u+du) = q(u) + \chi(u)du - \varphi(u)\Sigma_a(u)du,$$

или при  $q(u+du) \cong q(u) + du \frac{dq}{du},$

$$\frac{dq}{du} = -\varphi(u)\Sigma_a(u) + \chi(u). \quad (95)$$

Простейшим начальным условием для уравнения (95) является равенство нулю плотности замедления при энергии выше энергии источника, или  $q(u) \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow -\infty$ . При  $\Sigma_a = 0$  и  $\chi = 0$   $q = \text{const}$  - поток нейтронов вдоль энергетической оси в этом случае, естественно, постоянен.

Нетрудно проверить, что уравнения (94), (95) эквивалентны газокинетическому уравнению (1).

Перейдем к приближениям в соотношении (94). Пусть  $\varphi(u)$  изменяется медленно с  $u$ . Разложив  $\varphi(u')$  в ряд около  $u' = u$

$$\varphi(u') = \varphi(u) - (u - u') \frac{d\varphi}{du} + \dots \quad (96)$$

и считая

$$\varepsilon \frac{d\varphi}{du} \ll \varphi, \quad (97)$$

подставим в (94)  $\varphi(u') \cong \varphi(u)$ .

Обозначим  $\Sigma_s(u' \rightarrow u'') = \Sigma'_s(u', s'')$ , где  $s'' = u'' - u'$  - потеря энергии при рассеянии, и будем считать, что  $\Sigma'_s$  слабо зависит от энергии нейтрона  $u'$ :

$$\left. \begin{aligned} \Sigma'_s(u', s'') &\cong \Sigma'_s(u, s'') - (u - u') \frac{d\Sigma'_s}{du}, \\ \varepsilon \frac{d\Sigma'_s}{du} &\ll 1. \end{aligned} \right\} \quad (98)$$

Тогда из (94), обозначив  $s'' = u'' - u'$ ,  $s' = u - u'$  и интегрируя по частям, найдем

$$\begin{aligned} q(u) &\cong \varphi(u) \int_{u-\varepsilon}^u du' \int_u^{u'+\varepsilon} du'' \Sigma'_s(u, u'' - u') = \varphi(u) \int_0^\varepsilon ds' \int_{s'}^\varepsilon ds'' \Sigma'_s(u, s'') = \\ &= \varphi(u) \int_0^\varepsilon ds' \cdot s' \cdot \Sigma'_s(u, s') \end{aligned}$$

или

$$q(u) = \xi(u) \Sigma'_s(u) \varphi(u). \quad (99)$$

Подставляя (99) в (95), получим уравнения для потока нейтронов

$$\frac{d}{du} \xi \Sigma'_s \varphi(u) = -\Sigma_a(u) \varphi(u) + \chi(u) \quad (100)$$

и для плотности замедления

$$\frac{dq}{du} = -q(u) \frac{\Sigma_a(u)}{\xi \Sigma'_s(u)} + \chi(u). \quad (101)$$

В обычных энергетических переменных

$$-\frac{d}{dE} \xi \Sigma_s \varphi(E) = -\Sigma_a(E) \varphi(E) + \chi(E),$$

$$-\frac{d\varphi}{dE} = -\varphi(E) \frac{\Sigma_a(E)}{E \xi \Sigma_s(E)} + \chi(E). \quad (102)$$

Применим полученные таким образом уравнения возрастного приближения к задаче о реакторе. Сечение поглощения нейтронов  $\Sigma_a(E)$  обычно падает с энергией, и для простоты мы примем, что в области спектра деления  $\Sigma_a \cong 0$ .

Решение однородного уравнения (102) есть  $q(E) = C \exp\left(-\int_E^\infty \frac{dE'}{E'} \times \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_s}\right)$ . Методом вариации постоянной для неоднородного уравнения получим:

$$\left. \begin{aligned} -\frac{dc}{dE} &= \chi(E) \exp\left(\int_E^\infty \frac{dE'}{E'} \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_s}\right) \cong \chi(E), \\ q(E) &= \exp\left(-\int_E^\infty \frac{dE'}{E'} \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s}\right) \cdot \int_E^\infty dE' \chi(E'), \\ \varphi(E) &= \frac{1}{\xi \Sigma_s E} \exp\left(-\int_E^\infty \frac{dE'}{E'} \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s}\right). \end{aligned} \right\} \quad (103)$$

В отсутствие поглощения  $q = \int_E^\infty dE' \chi(E') \rightarrow 1$ , когда нейтроны замедляются ниже области спектра деления ( $E < 0,1$  МэВ).

При этом  $\varphi(E) = \frac{1}{\xi \Sigma_s E}$  (спектр Ферми). Фактор

$$q(E) = \exp\left(-\int_E^\infty \frac{dE'}{E'} \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s}\right) = q(u) = \exp\left(-\int_\infty^u du' \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s}\right)$$

описывает, таким образом, вероятность замедления нейтрона без поглощения до энергии  $E(u)$ . Для типичной зависимости  $\Sigma_a(E) \sim \frac{1}{v}$ , в частности при  $\xi \Sigma_s = \text{const}$ ,

$$\int_E^\infty \frac{dE'}{E'} \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s} = \frac{\Sigma_a(E) \sqrt{E'}}{\xi \Sigma_s} \int_E^\infty \frac{dE'}{(E')^{3/2}} = \frac{2 \Sigma_a(E)}{\xi \Sigma_s}, \quad q(E) = \exp\left(-\frac{2 \Sigma_a(E)}{\xi \Sigma_s}\right)$$

Рассмотрим бесконечный реактор на промежуточных нейтронах из  $^{235}\text{U}$  в смеси с замедлителем, причем пренебрежем

поглощением нейтронов замедлителем и замедлением нейтронов ураном ( $\xi_{U} \cong \frac{2}{235} \ll 1$ ). Тогда

$$K_{\infty} = \int_0^{\infty} dE' \nu(E') \exp\left(-\int_{E'}^{\infty} \frac{dE'' \Sigma_a}{E'' \xi \Sigma_s}\right) \cdot \frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_s E'}.$$

Зависимость подинтегрального выражения от  $E'$  определяется произведением функций, одна из которых ( $\exp\left(-\int_{E'}^{\infty} \frac{dE'' \Sigma_a}{E'' \xi \Sigma_s}\right)$ ) падает с замедлением, а другая ( $\frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s E'}$ ) растет так, что это произведение имеет максимум при некотором  $E' = E_M$ . Положение этого максимума определяется условием  $-\left(\frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_s E'}\right)' = \left(\frac{\Sigma_a(E')}{\xi \Sigma_s E'}\right)^2$ .

В частности, для  $\Sigma_a \sim \frac{1}{v}$   $-\left(\frac{\Sigma_a}{E'}\right)' = \frac{3}{2} \frac{\Sigma_a(E')}{E'^2}$ , откуда  $\Sigma_a(E_M) = \frac{3}{2} \xi \Sigma_s$  или  $E_M = E_T \cdot \frac{4}{9} \left(\frac{\sigma_{aT}}{\xi \sigma_s}\right)^2 \cdot \frac{1}{c^2}$ , где  $E_T$  - тепловая энергия,  $c = \frac{\rho_3}{\rho_5}$  -

отношение концентраций замедлителя и  $^{235}\text{U}$ . С разбавлением урана замедлителем  $E_M$  падает, энергетический спектр становится более мягким. Вынесем из-под интеграла в  $K_{\infty} \nu(E')$

при  $E' = E_M$ . Учитывая, что  $\int_0^{\infty} dE' \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s E'} \exp\left(-\int_{E'}^{\infty} \frac{dE'' \Sigma_a}{\xi \Sigma_s E''}\right) = 1$ ,

получим  $K_{\infty} \cong \nu(E_M) = \nu\left(\frac{1}{c} \cdot \frac{\sigma_{aT}}{\xi \sigma_s}\right)$ .

Величина  $\nu$  зависит от энергии нейтронов. Поэтому с разбавлением  $^{235}\text{U}$  замедлителем  $K_{\infty}$  сначала падает, а затем, пройдя через минимум, растет (рис. 14).

Такая же зависимость наблюдается и от величины  $\xi$  (т.е. от атомного веса замедлителя  $A$ ).

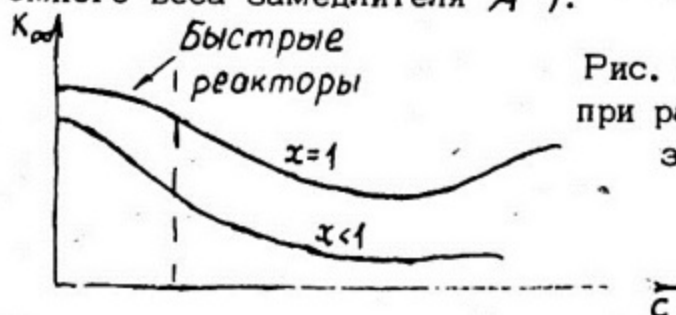


Рис. 14. Изменение  $K_{\infty}$  при разбавлении  $^{235}\text{U}$  замедлителем

Еще более сильное падение  $K_{\infty}$  с разбавлением наблюдается при использовании урана с обогащением  $x < 1$ :

$$k_{\infty} \approx \nu(E_M) \frac{x \sigma_a^5(E_M)}{x \sigma_a^5(E_M) + (1-x) \sigma_a^8(E_M)},$$

так как с уменьшением энергии возрастает относительное поглощение нейтронов  $^{238}\text{U} \frac{\sigma_a^8}{\sigma_a^5}$ .

Переход от быстрых реакторов к промежуточным приводит, таким образом, к ухудшению критических параметров, во всяком случае для  $^{235}\text{U}$  и  $^{239}\text{Pu}$ , для которых  $\nu(E)$  сильно падает в этой области энергий.

Кроме того, для промежуточного реактора требуется уран более высокого обогащения по  $^{235}\text{U}$ , чем для быстрого.

Проверим, насколько выполняется условие применимости возрастного приближения для расчета промежуточного реактора. При  $A \gg 1$ ,  $\xi \approx \frac{4}{A} \approx 2\xi$ ,

$$\left| \frac{\xi}{\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{du} \right| \approx 2\xi \left| \frac{d \ln \varphi}{du} \right| = \frac{2 \Sigma'_a}{\Sigma_s}.$$

В области максимума поглощения ( $E_M$ ) мы видели, что  $\Sigma'_a \approx \frac{3}{2} \xi \Sigma_s$ , так что

$$\left| \frac{\xi}{\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{du} \right| \approx 3\xi \approx \frac{6}{A}.$$

Скажем, для такого типичного замедлителя, как графит, этот параметр не так уж мал  $\sim 1/2$ .

Поэтому возрастное приближение приводит к некоторым погрешностям в расчетах промежуточных реакторов и нуждается в уточнении для проведения строгих расчетов.

#### 4. Приближение Грюлинга - Герцеля

С целью уточнения возрастного приближения оставим второй член в разложениях (96) и (98). Тогда

$$\varphi(u) \approx \xi \Sigma'_s \varphi(u) - \frac{\alpha(u)}{2} \cdot \frac{d}{du} \Sigma'_s(u) \varphi(u), \quad (104)$$

где

$$\alpha(u) = \frac{1}{\Sigma'_s(u)} \int_0^{\xi} ds \cdot s^2 \cdot \Sigma_s(u, s).$$

Второй член в этом выражении является поправочным, и мы можем подставить в него результат первого приближения (100), что приведет к поправленному выражению для  $q$

$$q(u) = (\Sigma'_s + \gamma \Sigma_a) \varphi(u) - \gamma \chi(u). \quad (105)$$

Из уравнения (95) получим тогда уравнения замедления в приближении Грюлингга - Герцеля

$$\frac{d}{du} (\Sigma'_s + \gamma \Sigma_a) \varphi(u) = -\varphi(u) \Sigma'_a(u) + \chi(u) + \frac{d}{du} \gamma \chi(u) \quad (106)$$

или

$$\frac{dq}{du} = -q(u) \frac{\Sigma_a}{\Sigma'_s + \gamma \Sigma_a} + \frac{\chi(u) \Sigma'_s}{\Sigma'_s + \gamma \Sigma_a}. \quad (107)$$

Поправки к возрастному приближению касаются в основном двух областей энергий: области спектра деления (более точный учет источника) и области большого поглощения.

Пренебрегая при высокой энергии поглощением, получим

$$\varphi(u) = \frac{\gamma}{\xi} \frac{\chi(u)}{\Sigma'_s} + \frac{1}{\xi \Sigma'_s} \int_u^{\infty} du' \chi(u').$$

Рассмотрим моноэнергетический источник нейтронов  $\chi(u) = \delta(u)$ . Тогда плотность столкновений

$$\Sigma'_s \varphi(u) = \frac{\gamma}{\xi} \delta(u) + \frac{1}{\xi}.$$

Нейтрон, испущенный источником, прежде чем начать замедление, испытывает столкновение точно при той энергии, при которой он испущен, что и описывается первым членом этого выражения и не учитывается возрастным приближением. Второй член описывает Фермиевский спектр, возникающий в результате многократных рассеяний нейтрона.

Считая, как и прежде,  $\chi(u) \Sigma'_a(u) = 0$ , получим из (107) при энергиях, где  $\chi(u) = 0$ ,

$$\left. \begin{aligned} \varphi(u) &= \exp\left(-\int_{-\infty}^u du' \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma'_s + \gamma \Sigma'_a}\right), \\ \varphi(u) &= \frac{\varphi(u)}{\xi \Sigma'_s + \gamma \Sigma'_a}, \end{aligned} \right\} \quad (108)$$

так что

$$\kappa_{\infty} = \int_0^{\infty} du' \nu(u') \frac{\Sigma_a^s(u')}{\xi \Sigma_s + \gamma \Sigma_a(u')} \exp\left(-\int_{-\infty}^u du' \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s + \gamma \Sigma_a}\right). \quad (109)$$

Найдем величину  $\gamma$ . При изотропном в системе центра масс рассеянии

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{1}{\alpha} \int_0^{\epsilon} ds s^2 \exp(-s) = \xi(2+\epsilon) - \epsilon, \\ \gamma &= \frac{a}{2\xi} = 1 + \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon}{2\xi}, \end{aligned} \right\} \quad (110)$$

так что при  $A=1$   $\gamma = \xi = 1$ , при  $A \gg 1$   $\gamma \cong \frac{4}{3A} \left(1 - \frac{1}{3A}\right) \cong \frac{2}{3} \xi$ .

Для смеси ядер  $a \Sigma_s = \sum_A a^A \Sigma_s^A$ ,  $\gamma = \frac{\sum_A a^A \Sigma_s^A}{2 \sum_A \xi^A \Sigma_s^A} = \frac{\sum_A \gamma^A \xi^A \Sigma_s^A}{\sum_A \xi^A \Sigma_s^A}$ .

### 5. Точные решения

В случае, когда замедлителем служит водород ( $A = 1$ ), приближение Грюлингга - Герцеля совпадает с точным решением газокинетического уравнения (83). Действительно, в этом случае  $\Sigma_s(u' \rightarrow u) = \Sigma_s(u') \exp(-(u-u'))$  и для плотности столкновений  $\Psi(u) =$

$= \Psi(u) \Sigma(u)$  получаем  $\Psi(u) = \chi(u) + \int_{-\infty}^u du' \Psi(u') h(u') \exp(-(u-u'))$ ,

где  $h(u) = \frac{\Sigma_s(u)}{\Sigma(u)}$ . Умножая на  $\exp u$  и дифференцируя, приходим к

$\Psi'(u) + [1-h(u)]\Psi(u) = \chi'(u) + \chi(u)$ , что совпадает с уравнением (106),

так как при  $A = 1$   $\xi = \gamma = 1$ . Точное аналитическое решение газокинетического уравнения может быть получено и для замедлителя с  $A > 1$ . В этом случае

$$\Sigma_s(u' \rightarrow u) = \Sigma_s^s(u') \exp\left(-\frac{u-u'}{1-\alpha}\right), \quad u-u' < \epsilon$$

и

$$\Psi(u) = \chi(u) + \frac{1}{\alpha} \int_{u-\epsilon}^u du' \Psi(u') h(u') \exp\left(-\frac{u-u'}{1-\alpha}\right).$$

Умножая на  $\exp u$  и дифференцируя по  $u$ , получим:

$$\Psi'(u) - \left[\frac{h(u)}{\alpha} - 1\right] \Psi(u) = \chi'(u) + \chi(u) - \frac{\exp(-\epsilon)}{\alpha} h(u-\epsilon) \Psi(u-\epsilon).$$

Приняв за  $u = 0$  верхний край спектра  $\chi(u)$ , так что  $\chi(u) = 0$

при  $u < 0$ , получим при  $0 \leq u \leq \epsilon$   $\psi'(u) - \left[\frac{h}{\alpha} - 1\right]\psi(u) = \chi'(u) + \chi(u)$ .

При  $\epsilon \leq u < 2\epsilon$   $\psi'(u) - \left[\frac{h}{\alpha} - 1\right]\psi(u) = \chi' - \chi - \frac{\exp(-\epsilon)}{\alpha} \cdot h(u-\epsilon)\psi(u-\epsilon)$ ,

причем справа стоит уже известная нам из предыдущего решения функция  $\psi(u-\epsilon)$  и т.д.

В частности, при  $h = 1$  и  $\chi(u) = \delta(u)$  получим решение, которое называется функцией Плачека (рис. 15),

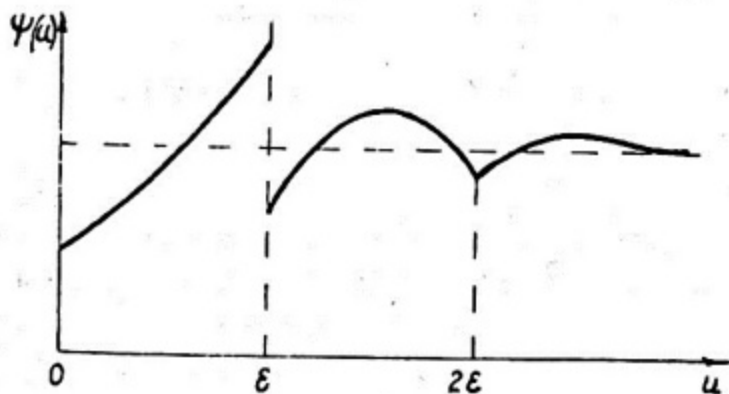


Рис. 15. Функция Плачека

Это решение содержит особенность при  $u = 0$  вида  $\delta(u)$  (первое столкновение), затем испытывает колебания (при  $u = \epsilon$   $\psi(u)$  разрывна, так как при  $u = \epsilon - 0$  есть нейтроны первого столкновения, а при  $u = \epsilon + 0$  их нет; при  $u = 2\epsilon$  разрывна 1-я производная  $\psi(u)$ , при  $u = 3\epsilon$  - вторая и т.д.). При  $u > (2 \div 3)\epsilon$  функция  $\psi(u)$  становится практически постоянной и равной  $1/\xi$ .

Таким образом, возрастное приближение описывает асимптотическую часть спектра нейтронов, а приближение Грюлингса - Герцеля учитывает усредненным образом особенности спектра вблизи энергии источника, причем

$$r = \xi \int_0^{\infty} du \left[ \psi(u) - \frac{1}{\xi} \right].$$

Найденные выражения для детального спектра нейтронов могут быть использованы, в частности, для вычисления констант многогруппового приближения, более точного, чем ранее (59).

Если размеры групп  $\Delta u_k > \epsilon$ , то возможны переходы лишь из группы  $k$  в группу  $k + 1$  ( $\sum_s^{k, k+1}$ ). Число таких переходов, с одной стороны, равно  $\varphi_k \sum_s^{k, k+1}$ , с другой -  $q(u_k)$ . Воспользовавшись формулой (105), получим:

$$\Sigma_s^{K, K+1} = \left[ \xi \Sigma_s(u_K) + \gamma \Sigma_a(u_K) \right] \frac{\varphi(u_K)}{\int_{\Delta u_K} \varphi(u) du} - \gamma \frac{\chi(u_K)}{\int_{\Delta u_K} \varphi(u) du}. \quad (111)$$

При  $\chi(u) = 0$ ,  $\Sigma_a \ll \Sigma_s$  и  $\varphi(u) = \text{const}$  это выражение переходит в прежнее.

$$\Sigma_{s, K, K'} \approx \frac{\xi \Sigma_{sK}}{\Delta u_K}.$$

## 6. Реакторы на тепловых нейтронах

Рассмотрим сначала смесь  $^{235}\text{U}$  с замедлителем (без  $^{238}\text{U}$ ).

С уменьшением концентрации  $^{235}\text{U}$  (с ростом  $C = \frac{\rho_3}{\rho_5}$ )

энергетический спектр нейтронов смягчается и нейтроны начинают попадать в тепловую область. Будем считать, что энергия тепловых нейтронов равна их средней энергии  $E_T$ . Тогда поток тепловых нейтронов определяется условием баланса

$$\Sigma_a^T \varphi_T = \varphi(E_T) \quad \text{и}$$

$$\varphi_T = \frac{\varphi(E_T)}{\Sigma_a^T}, \quad (112)$$

а коэффициент размножения бесконечной среды в возрастном приближении

$$K_\infty = \int_{E_T}^{\infty} \frac{dE}{E} \nu(E) \frac{\Sigma_a^s(E)}{\xi \Sigma_s} \exp\left(-\int_E^{\infty} \frac{dE'}{E'} \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s}\right) + \nu_T \frac{\Sigma_{a5}^T}{\Sigma_a^T} \exp\left(-\int_{E_T}^{\infty} \frac{dE}{E} \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s}\right).$$

Приняв  $\xi \Sigma_s = \text{const}$ , получим:  $\int_{E_T}^{\infty} \frac{dE}{E} \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s} \approx \frac{\rho_5}{\xi \sigma_5 \rho_3} \int_{E_T}^{\infty} \frac{dE}{E} \sigma_a(E)$ .

Величина  $\int_{E_T}^{\infty} \frac{dE}{E} \sigma_a(E) = \mathcal{J}_R$  носит название резонансного интеграла.

Если  $C \gg \frac{\mathcal{J}_R}{\xi \sigma_5}$ , то показатель экспоненты мал, и первый член в выражении для  $K_\infty$  мал по сравнению со вторым, поглощение нейтронов  $^{235}\text{U}$  при замедлении мало.

В этом случае мы приходим к реакторам на тепловых нейтронах и для них

$$K_\infty \approx \nu_T \frac{\Sigma_{a5}^T}{\Sigma_a^T} = \nu_T \theta.$$

Поскольку для тепловых реакторов  $\beta$  велико, то несмотря на малое сечение поглощения нейтронов замедлителем  $\beta_{a3} \ll \beta_{a5}$ , им пренебрегать уже нельзя,

$$\theta = \frac{\rho_5 \beta_{a5}}{\rho_5 \beta_{a5} + \rho_3 \beta_{a3}} = \frac{1}{1 + \beta \frac{\beta_{a3}}{\beta_{a5}}} < 1$$

и падает с ростом  $\beta$  (рис. 16).



Рис. 16. Зависимость  $K_\infty$  от  $\beta$  для реакторов разных спектров

Для  $^{235}\text{U}$   $\nu_R \cong 400$  б,  $\beta_{a5} \cong 600$  б, так что условие перехода от промежуточного реактора к тепловому

$$\beta \gg \frac{\nu_R}{\xi \beta_s} \quad (113)$$

означает для водяного замедлителя ( $\xi \beta_s^H = 20$  б)  $\beta_H = \frac{\rho_H}{\rho_5} \gg 20$ ,

а для графита ( $\xi \beta_s^C = 0,8$  б)  $\beta_C = \frac{\rho_C}{\rho_5} \gg 500$ .

Бесконечная среда становится критической ( $K_\infty = 1$ ) при

$$\beta_0 = \frac{\beta_{a3}}{\beta_{a5}} (\nu_T - 1) \quad (114)$$

или, при  $\nu_T^B \cong 2$ , для воды ( $\beta_{aT}^H \cong 0,33$  б) при  $\beta_0^H = 1800$ , а для графита ( $\beta_{aT}^C = 0,004$  б) при  $\beta_0^C = 1,5 \cdot 10^5$ .

Рассмотрим теперь реактор, в котором топливом служит уран некоторого обогащения  $x$ .

$^{238}\text{U}$  оказывает сильное влияние на размножающие свойства реактора, в особенности когда обогащение  $x$  невелико и количество  $^{238}\text{U}$  значительно превышает количество  $^{235}\text{U}$ . Даже при большом  $\beta = \frac{\rho_3}{\rho_5}$ , когда можно пренебречь поглощением замедляющихся нейтронов  $^{235}\text{U}$ , их поглощением  $^{238}\text{U}$  пренебречь нельзя. Кроме того, необходимо учесть деление  $^{238}\text{U}$  быстрыми нейтронами.

В расчетах реакторов на тепловых нейтронах с  $^{235}\text{U}$  и  $^{238}\text{U}$  часто используется определение поколения нейтронов, начинающегося с деления  $^{235}\text{U}$ . В этом случае условно критическое уравнение вместо (83) примет вид:

$$\varphi(E)\Sigma(E) = \int dE' \varphi(E') \Sigma_S(E' \rightarrow E) + \chi(E) \int dE' \varphi(E') \nu_{fB} \Sigma_{fB} + \frac{\chi(E)}{K_\infty} \int dE' \varphi(E') \nu_{f5} \Sigma_{f5}. \quad (115)$$

Положив  $\frac{1}{K_\infty} \int dE' \varphi(E') \nu_{f5} \Sigma_{f5} + \int dE' \varphi(E') \nu_{fB} \Sigma_{fB} = 1$  или

$$K_\infty = \frac{\int dE' \varphi(E') \nu_{f5} \Sigma_{f5}}{1 - \int dE' \varphi(E') \nu_{fB} \Sigma_{fB}}, \quad (116)$$

придем к прежнему уравнению (83) для  $\varphi(E)$  с тем же решением, полученным выше в возрастном приближении. Пренебрегая поглощением замедляющихся нейтронов  $^{235}\text{U}$ , получим из (116):

$$K_\infty = \frac{\nu_{f5}^T \Sigma_{f5}^T \varphi_T}{1 - \int dE' \varphi(E') \nu_{fB} \Sigma_{fB}} = \frac{\nu_5^T \frac{\Sigma_5^T}{\Sigma^T} \exp\left(-\int_{E_T}^{\infty} \frac{dE}{E} \frac{\Sigma_{aB}}{\xi \Sigma_S}\right)}{1 - \int dE' \varphi(E') \nu_{fB} \Sigma_{fB}}. \quad (117)$$

Экспонента в числителе имеет смысл вероятности избежать поглощения нейтронов  $^{238}\text{U}$  при замедлении, которую будем обозначать

$$\varphi = \exp\left(-\int_{E_T}^{\infty} \frac{dE}{E} \frac{\Sigma_{aB}}{\xi \Sigma_S}\right) \quad (118)$$

(не путать с плотностью потока нейтронов). Множитель

$$\mu = \frac{1}{1 - \int dE' \varphi(E') \nu_{fB} \Sigma_{fB}} \quad (119)$$

является коэффициентом размножения нейтронов за счет деления  $^{238}\text{U}$ . Таким образом, для  $K_\infty$  получаем так называемую формулу четырех сомножителей:

$$K_\infty = \nu_5 \theta \varphi \mu, \quad (120)$$

где

$$\theta = \frac{\Sigma_{a5}^T}{\Sigma_{a5}^T + \Sigma_{a8}^T + \Sigma_{a3}^T} = \frac{1}{1 + \frac{1-x}{x} \cdot \frac{\beta_{a8}}{\beta_{a5}} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\beta_{a3}}{\beta_{a5}}} \quad (121)$$

Полученное выражение имеет ясный физический смысл и является фундаментальным соотношением теории тепловых реакторов. Однако полученные выше формулы для  $\varphi$  и  $\mu$  приводят к большим погрешностям и даже качественно неверным результатам, так как использованное здесь возрастное приближение (как и уточнение Грюлингга - Герцеля) неприменимо ни для описания размножения на быстрых нейтронах (оно не учитывает неупругого рассеяния на  $^{238}\text{U}$ ), ни для описания резонансного поглощения  $^{238}\text{U}$ . В последнем случае из-за сильного изменения нейтронного потока в области резонансов условия применимости возрастного приближения резко нарушаются.

Очень важным обстоятельством, определяющим во многом особенности тепловых реакторов, является то, что сечение поглощения тепловых нейтронов  $^{238}\text{U}$   $\beta_{a8}^T$  оказывается много меньшим, чем в промежуточной области.

Поэтому если быстрые, а тем более промежуточные реакторы могут использовать только уран достаточно высокого обогащения, то тепловые реакторы могут достичь критичности даже при использовании природного урана ( $x = 0,72\%$ ).

Как будет видно из дальнейшего, возрастное приближение для  $\varphi$  резко занижает эту величину:

$$\varphi = \exp\left(-\frac{\rho_a \tau_R}{\beta_3 \xi \beta_s}\right) = \exp\left(-\frac{1-x}{xc} \cdot \frac{\tau_R}{\xi \beta_s}\right).$$

Поэтому здесь мы ограничимся лишь качественным обсуждением зависимости  $K_\infty$  от обогащения топлива  $x$  и его концентрации в замедлителе  $\frac{1}{xc}$ . Ясно, что с ростом  $x$  растет величина  $\theta$ ,  $\mu \approx 1$  и мало влияет на  $K_\infty$ , а  $\varphi$  при малом  $x$  слабо меняется с  $x$  (при заданной величине  $xc$ ). Поэтому  $K_\infty(x, c)$  растет с ростом обогащения топлива  $x$ .

Более сложна зависимость  $K_\infty(c)$ , так как увеличение  $c$  снижает  $\theta$ , но увеличивает  $\varphi$ . Вместо монотонного падения  $K_\infty(c)$  для смеси "замедлитель +  $^{235}\text{U}$ " (см. рис. 16) в смеси "замедлитель + уран обогащения  $x$ " картина будет другой (рис. 17).

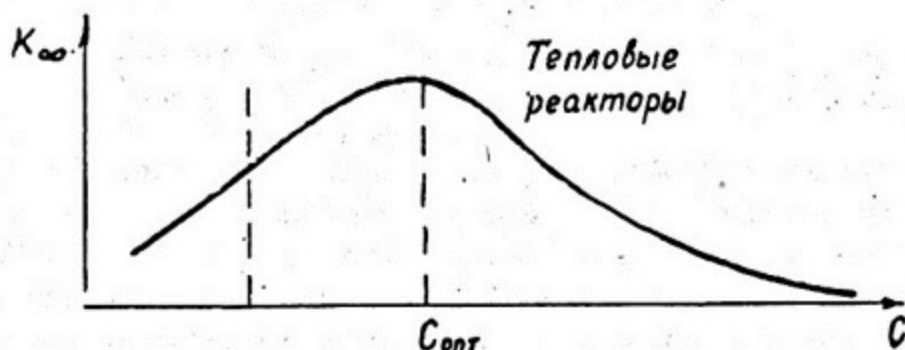


Рис. 17. Зависимость  $K_{\infty}$  от  $C$  для теплового реактора с обогащенным ураном

Существует оптимальное отношение концентраций замедлителя и  $^{235}\text{U}$ , при котором  $K_{\infty}$  достигает максимума. Величина  $K_{\infty}^{\text{макс}}$  зависит от обогащения  $x$ , а также от отношения  $\xi\beta_s/\beta_a$ , причем для естественного урана ( $x = 0,72\%$ ) оказывается, что  $K_{\infty}^{\text{макс}} < 1$  для большинства замедлителей. Лишь в гомогенной смеси природного урана с  $\text{D}_2\text{O}$  из-за малого поглощения тепловых нейтронов в  $\text{D}_2\text{O}$  ( $\beta_{\text{D}_2\text{O}} = 0,0003 \text{ б}$ ) и относительно высокого сечения замедления ( $\xi\beta_{\text{D}_2\text{O}} \approx 3 \text{ б}$ ) может быть достигнуто  $K_{\infty} \approx 1,0$ .

Таким образом, достоинством теплового реактора, в значительной мере определившим его лидирующее положение в атомной технике, является возможность использования природного (или же слабообогащенного) урана. Но и при этом для достижения критических условий обычно приходится обогащать уран и переходить от гомогенного к гетерогенному реактору.

## 7. Коэффициент размножения на быстрых нейтронах

Воспользуемся определением коэффициента размножения на быстрых нейтронах как отношения числа нейтронов, замедляющихся ниже порога деления  $^{238}\text{U}$   $E_{\text{пар}}$ , к числу нейтронов, рождающихся при делении медленными нейтронами. Это определение соответствует обычно используемому в расчетах тепловых реакторов понятию поколения, начинающегося с деления  $^{235}\text{U}$ .

В расчете на 1 нейтрон деления плотность потока быстрых нейтронов в бесконечной однородной среде определяется уравнением

$$\Sigma(E)\varphi(E) = \chi(E) + \int_E^{\infty} dE' \varphi(E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) + \int_E^{\infty} dE' \varphi(E') \Sigma_{in}(E' \rightarrow E). \quad (122)$$

В расчете же на 1 нейтрон деления  $^{235}\text{U}$  поток быстрых нейтронов в  $a = 1 + a \int_{E_{\text{пор}}}^{\infty} dE \varphi(E) \nu_{f8} \Sigma_{f8}$ , или же в  $a = \frac{1}{1 - \int_{E_{\text{пор}}}^{\infty} dE \varphi(E) \nu_{f8} \Sigma_{f8}}$  раз выше, так что число замедляющихся ниже  $E_{\text{пор}}$  нейтронов (на один нейтрон деления  $^{235}\text{U}$ )

$$\mu = 1 + a \int_{E_{\text{пор}}}^{\infty} dE \varphi(E) [\nu_{f8} \Sigma_{f8} - \Sigma_{f8}] = 1 + \frac{\int_{E_{\text{пор}}}^{\infty} dE \varphi(E) \Sigma_{f8} (\nu_{f8} - 1)}{1 - \int_{E_{\text{пор}}}^{\infty} dE \varphi(E) \nu_{f8} \Sigma_{f8}} \quad (123)$$

В этом выражении не учтена потеря нейтронов на радиационное поглощение  $^{238}\text{U}$ , которая обычно включается в расчет резонансного поглощения нейтронов (коэффициент  $\varphi$ ).

В многогрупповом приближении

$$\Sigma_{\text{ув}}^k \varphi_k = \chi_k + \sum_{l=1}^{k-1} \varphi_l \Sigma_{l \rightarrow k}^k; \quad \mu = 1 + \frac{\sum_{k=1}^N \varphi_k (\nu_{f8}^k - 1) \Sigma_{f8}^k}{1 - \sum_{k=1}^N \varphi_k \nu_{f8}^k \Sigma_{f8}^k},$$

где  $N$  — число групп над порогом  $E_{\text{пор}}$ . При простейшем одногрупповом описании надпороговых нейтронов ( $N = 1$ ) в качестве эффективного порога можно принять  $E_{\text{пор}} = 1,4$  МэВ, тогда доля надпороговых нейтронов в спектре деления  $\chi = 0,53$ .

Сечение увода для надпороговых нейтронов складывается из сечения неупругих процессов на  $^{238}\text{U}$   $\sigma_u = \sigma_{in} + \sigma_f + \sigma_c \approx 2,8$  б и сечения увода нейтронов за счет упругих столкновений с ядрами замедлителя  $\sigma_3$ . Если  $C = \rho_3 / \rho_8$ , то

$$\mu \approx 1 + \frac{\chi (\nu_{f8} - 1) \frac{0,18}{1 + C \frac{\sigma_3}{\sigma_8}}}{1 - \chi \nu_{f8} \frac{0,18}{1 + C \frac{\sigma_3}{\sigma_8}}}$$

В пределе  $C \rightarrow 0$   $\mu$  достигает максимальной величины ( $\mu \approx 1,23$ ) и резко падает с разбавлением  $C$ .

Размножение быстрых нейтронов  $^{238}\text{U}$  играет важную роль в физике тепловых реакторов, использующих легкую воду в качестве замедлителя. Легкий водород вообще обладает уникальными свойствами, резко выделяющими его из ряда замедлителей нейтронов.

Наряду с наибольшей потерей энергии нейтрона при рассеянии на протоне ( $\xi = 1$ ) сечение рассеяния нейтронов с энергиями  $E \approx 100$  кэВ здесь аномально велико ( $\sigma_s = 216$ ),

что связано с существованием уровня с положительной, но небольшой энергией ( $E_0 \cong 60$  кэВ) в системе  $\pi + p$ . В результате "сечение замедления" для водорода  $\xi \sigma_s$  оказывается много большим, чем для любого другого замедлителя. Поэтому количество воды в уран-водных системах относительно невелико, тем более, что поглощение тепловых нейтронов легким водородом ( $\sigma_a \cong 0,33$  б) на порядки величины превышает поглощение другими замедлителями.

При энергиях же  $E \gg 60$  кэВ (т.е. в области деления  $^{238}\text{U}$ ) сечение рассеяния нейтронов протоном резко снижается до "обычных" величин  $\sigma_s \sim 1 - 2$  б, определяемых геометрическими размерами протона.

В результате для быстрых нейтронов отношение  $\sigma_{sH}/\sigma_s$  невелико (примерно 0,5), так что при  $c = \frac{P_H}{P_B} \cong 3 \mu$  может достигь значений  $\mu \sim 1,08$  - весьма существенный вклад в нейтронный баланс. В реальных современных реакторах с легководным замедлителем величины  $\mu - 1$  оказываются, правда, примерно вдвое более низкими за счет замедления нейтронов конструкционными материалами, кислородом топлива ( $\text{UO}_2$ ) и т.д.

## 8. Коэффициент использования тепловых нейтронов.

### Энергетический спектр медленных нейтронов

Выше при вычислении коэффициента  $\theta$  тепловые нейтроны считались моноэнергетическими. На самом же деле они распределены по спектру  $\varphi(E)$ . Если принять в качестве верхней границы области тепловых нейтронов  $E = E_{gp}$ , то коэффициент использования тепловых нейтронов

$$\theta = \frac{\int_0^{E_{gp}} dE \varphi(E) \Sigma_{as}(E)}{\int_0^{E_{gp}} dE \varphi(E) \Sigma_a(E)},$$

где  $E_{gp}$  - граница между областью замедления (спектр Ферми) и энергетической областью медленных (тепловых) нейтронов.

Заметим, что если бы все сечения поглощения изменялись с энергией подобно друг другу (например, по закону  $\frac{1}{v}$ ), то спектральной зависимости  $\theta$  не было бы. В действительности сечения поглощения многих нуклидов, в том числе делящихся, в тепловой области отклоняются от  $\frac{1}{v}$ , и именно это обстоятельство обуславливает зависимость  $\theta$  от энергетического спектра медленных нейтронов и, в частности, от температуры среды  $T$ .

Заметим также, что при рассмотрении спектральной зависимости  $\theta$  (и  $\kappa_\infty = \nu \theta \mu \varphi$ ) удобнее пользоваться другим определением коэффициента использования тепловых нейтронов

$$\theta' = \frac{\int dE \varphi(E) \Sigma_f(E)}{\int dE \varphi(E) \Sigma_a(E)}$$

В этом случае  $\kappa_\infty = \nu \theta' \mu \varphi$  и, так как  $\nu_f$  не изменяется при малых энергиях, спектральная зависимость  $\kappa_\infty$  сводится к изменению  $\theta'$ . В случае смеси делящихся нуклидов

$$\kappa_\infty = \overline{\nu_f \theta' \mu \varphi}, \quad \text{где} \quad \overline{\nu_f \theta'} = \sum_i \nu_f^i \theta_i'$$

Простейшее описание спектра медленных нейтронов исходит из его приближенного представления максвелловским выражением

$$\varphi(E) = a E \exp\left(-\frac{E}{T_H}\right)$$

при энергии  $E < E_{гр}$ .  $T_H$  (будем выражать эту величину в энергетических единицах) — температура нейтронного газа, которая обычно вследствие поглощения больше температуры среды ( $T_H > T$ ).

Коэффициент  $a$  может быть определен из равенства числа замедляющихся и поглощенных нейтронов:

$$q(E_{гр}) = \int_0^{E_{гр}} \varphi(E) \Sigma_a(E) dE \quad \text{или} \quad a = \frac{q(E_{гр})}{\int_0^{E_{гр}} E \exp\left(-\frac{E}{T_H}\right) \Sigma_a(E) dE}$$

При типичной для тепловой области энергетической зависимости сечений поглощения  $\Sigma_a \sim \frac{1}{v}$  ( $\Sigma_a(E) = \Sigma_a(T_H) \cdot \sqrt{\frac{T_H}{E}}$ ):

$$a = \frac{2q(E_{гр})}{\Sigma_a(T_H) T_H^2 \left[1 - \varphi\left(\frac{E_{гр}}{T_H}\right)\right]}$$

где

$$\varphi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \sqrt{t} \exp(-t) dt \approx \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{x} \exp(-x) \left(1 + \frac{1}{2x} + \dots\right) \ll 1$$

при  $x = E_{гр}/T_H \gg 1$ . В общем случае

$$a = \frac{q(E_{гр})}{T_H^2 \Sigma_a \left[1 - \left(1 + \frac{E_{гр}}{T_H}\right) \exp\left(-\frac{E_{гр}}{T_H}\right)\right]}$$

где среднее сечение поглощения тепловых нейтронов

$$\bar{\Sigma}_a = \frac{\int_0^{E_{гр}} \Sigma_a(E) E \exp\left(-\frac{E}{T_H}\right) dE}{\int_0^{E_{гр}} E \exp\left(-\frac{E}{T_H}\right) dE} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Sigma_a(T_H) f(1-\varphi),$$

а  $f$  — так называемый фактор Весткотта, учитывающий отклонение энергетической зависимости сечений от  $\frac{1}{v}$ .

Граничная энергия  $E_{гр}$  между областями фермиевского и Максвелловского спектров определяется из уравнения

$$\varphi_{\Phi}(E_{гр}) = \varphi_{\text{М}}(E_{гр}) \quad \text{или} \quad \frac{\left(\frac{E_{гр}}{T_H}\right)^2 \exp\left(-\frac{E_{гр}}{T_H}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{E_{гр}}{T_H}\right) \left(1 + \frac{E_{гр}}{T_H}\right)} = \frac{\bar{\Sigma}_a}{\xi \Sigma'_s}$$

В табл. 2 дана зависимость  $E_{гр}$  от  $\frac{\bar{\Sigma}_a}{\xi \Sigma'_s}$ .

Таблица 2

$\frac{\bar{\Sigma}_a}{\xi \Sigma'_s}$	0,1	0,13	0,15	0,175	0,2	0,25	0,32
$\frac{E_{гр}}{T_H}$	5,8	5,5	5,2	5,0	4,8	4,5	4,0

Как отмечалось, энергетический спектр нейтронов (и их "температура"  $T_H$ ) зависят от связей атомов в молекулах и кристаллах. Превышение  $T_H$  над  $T$  тем больше, чем больше отношение "времени релаксации" нейтронного газа (времени, за которое нейтроны приходят в равновесие со средой)  $\tau_r$  и времени жизни нейтронов до поглощения  $\tau_c$ :

$$\frac{T_H - T}{T} \sim \frac{\tau_r}{\tau_c}.$$

Время жизни близкого к равновесию нейтрона  $\tau_c = \frac{1}{v \Sigma'_a}$ .

Время релаксации зависит от частоты рассеивающих столкновений  $v \Sigma_s$  и от энергетических потерь нейтрона при рассеянии. Чем тяжелее ядра среды, тем меньше обмен энергией при рассеянии нейтрона ядром, так что для простейшего случая одно-

атомного газа  $\tau_r \sim \frac{1}{v \cdot \xi \Sigma_s}$ , где  $\xi \cong 2/A$ . Из этих рассуждений следует ожидать приближенного соотношения:

$$\frac{T_H - T}{T} \cong \alpha \frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s},$$

где  $\alpha$  — коэффициент пропорциональности, зависит от связей атомов в веществе.

Это выражение и было получено выше (см. разд. 1, п. 9) при малых  $\frac{\Sigma_a}{\xi \Sigma_s}$ , причем там для одноатомного газа было найдено, что  $\alpha \cong 2$ .

Связь атомов в молекулах и кристаллах приводит к увеличению  $\alpha$ . Скажем, в предельном случае жестко связанных в молекуле атомов  $A_1$  и  $A_2$  потери энергии нейтрона становятся такими, как при рассеянии на частице массой  $A_1 + A_2$ . В действительности связь атомов в молекулах не является жесткой, и ситуация оказывается промежуточной между случаями свободных (одноатомный газ) и жестко связанных атомов.

В случае воды (и вообще водородосодержащих соединений) эффект снижения энергетических потерь нейтрона за счет связи водорода в молекулах примерно компенсируется увеличением сечения рассеяния нейтрона связанным протоном с уменьшением энергии медленного нейтрона. Квантовомеханическое рассмотрение процесса рассеяния показывает, что сечение рассеяния нейтрона протоном, связанным с более тяжелым атомом, возрастает по сравнению со свободным протоном в пределе в 4 раза (протон, жестко связанный атомом с  $A \gg 1$ ). В реальных случаях среднее сечение рассеяния теплового нейтрона связанным протоном оказывается  $\sim 30 - 40$  б по сравнению с  $\sigma_s = 21$  б для свободного протона. В результате произведение  $\xi \sigma_s$  оказывается слабо зависящим от связи протона в молекуле, и температура нейтронного газа не очень сильно отличается от величины, получаемой в модели одноатомного газа.

### III. РЕЗОНАНСНОЕ ПОГЛОЩЕНИЕ НЕЙТРОНОВ

Энергетическая зависимость сечений взаимодействия нейтронов с тяжелыми ядрами имеет четко выраженную резонансную структуру (рис. 18).

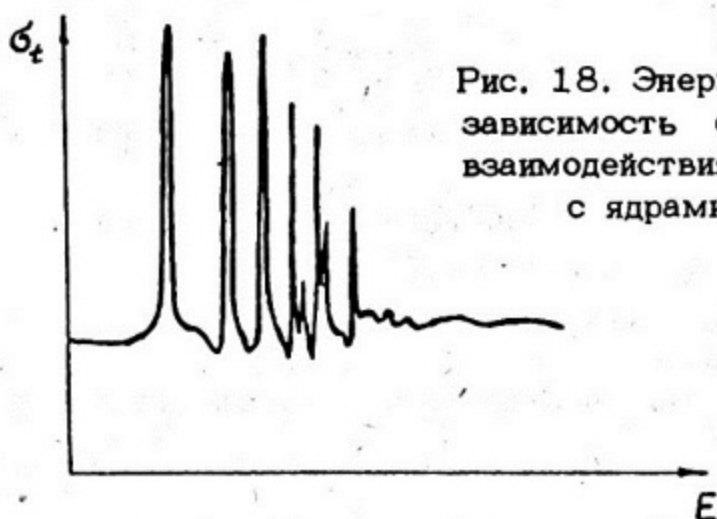


Рис. 18. Энергетическая зависимость сечения взаимодействия нейтронов с ядрами  $^{238}\text{U}$

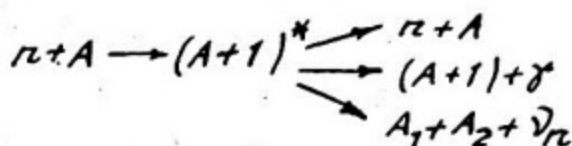
Резонансы в нейтронных сечениях наблюдаются и у ядер средних и малых атомных весов, но главную роль в физике реакторов играют резонансные сечения тяжелых ядер, особенно  $^{238}\text{U}$ . В последующем изложении будем иметь в виду главным образом  $^{238}\text{U}$ .

### 1. Резонансные параметры

При столкновении с ядром с массовым числом  $A$  нейтрон с некоторой вероятностью рассеивается на нем, как на "твердом шарике", не проникая в ядро и не возбуждая его внутренних степеней свободы. Такой процесс носит название "потенциального упругого рассеяния", и его сечение  $\sigma_p$  слабо зависит от энергии нейтрона (для  $^{238}\text{U}$   $\sigma_p = 11$  б). Однако с некоторой вероятностью сталкивающийся нейтрон проникает в ядро, образуя "составное ядро"  $A + 1$  в возбужденном состоянии. Энергия возбуждения составного ядра складывается из энергии связи нейтрона  $E_{св}$  и его кинетической энергии  $E$ :  $E_{возб} = E_{св} + E$ , причем возбуждение ядра оказывается довольно сильным, поскольку  $E_{св} \approx 7$  МэВ. Ядро ( $A + 1$ ) является квантовой системой с энергетическими уровнями  $\epsilon_i$ . Когда  $E_{возб}$  близка к одному из  $\epsilon_i$ , вероятность образования составного ядра резко возрастает, что приводит к пикам в нейтронном сечении. Положение резонанса на оси кинетической энергии  $E_i = \epsilon_i - E_{св}$ , а частота следования резонансов определяется плотностью уровней ядра  $A + 1$ .

Энергетические уровни составного ядра ( $A + 1$ ) не яв-

ляются стационарными, имеют конечное время жизни  $\tau$ , и ядро распадается по одному из возможных каналов, например:



В первом случае это упругое рассеяние, идущее через стадию составного ядра (резонансное рассеяние,  $\sigma_{sr}$ ), во втором — радиационное резонансное поглощение нейтрона ( $\sigma_c$ ), в третьем — деление ( $\sigma_f$ ). Для  $^{238}\text{U}$  при резонансных энергиях открыты лишь первые два канала.

Конечное время жизни (в соответствии с соотношением неопределенности  $\tau \sim \frac{\hbar}{\Gamma}$ ) приводит к неопределенности в положении уровня и к конечной ширине резонансной линии  $\Gamma$ . Ширина уровня  $\Gamma \sim \frac{\hbar}{\tau}$  пропорциональна, таким образом, вероятности распада составного ядра в единицу времени. Если ввести вероятность распада ядра по каналу  $x$  —  $W_x$  и "парциальные ширины"  $\Gamma_x = \Gamma W_x$ , то  $\Gamma = \sum_x \Gamma_x$ . В случае  $^{238}\text{U}$   $\Gamma =$

$= \Gamma_n + \Gamma_\gamma$ , для делящихся ядер  $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma + \Gamma_f$ . Ширины зависят от индивидуальных характеристик отдельных уровней и поэтому изменяются от уровня к уровню. Однако средняя по нескольким уровням вблизи энергии  $E$  ширина  $\bar{\Gamma}_n$  плавно изменяется с энергией и растет как  $\sqrt{E}$ . Поэтому величина  $\Gamma_n^0 = \bar{\Gamma}_n / \sqrt{E}$  ("приведенная нейтронная ширина") в среднем мало изменяется с энергией (для  $^{238}\text{U}$   $\bar{\Gamma}_n^0 \cong 0,0015$  эВ $^{1/2}$ ).

Радиационная ширина  $\Gamma_\gamma$  является суммой ширин, соответствующих  $\gamma$ -распаду ядра  $(A+1)$  в разные возбужденные состояния, и поэтому флюктуирует от уровня к уровню гораздо меньше, чем  $\Gamma_n$ . Для  $^{238}\text{U}$   $\bar{\Gamma}_\gamma \cong 0,025$  эВ.

Сечение в максимуме резонанса, в соответствии с квантово-механической теорией, равно  $\sigma_{r0} = \pi \lambda^2 \frac{g \Gamma_n}{\Gamma}$ , где  $\lambda$  — длина волны нейтрона, а  $g$  — "статистический фактор", близкий к 1 и возникающий при усреднении по спиновым состояниям нейтрона и ядер  $A$  и  $A+1$ . В единицах  $10^{-24}$  см $^2$ :

$$\sigma_{r0} = \frac{2,6 \cdot 10^6}{E(\text{эВ})} \cdot \frac{g \Gamma_n}{\Gamma}$$

В простейшем приближении энергетическая зависимость резонансного сечения вблизи резонансной энергии  $E_0$  описывается формулой Брейта - Вигнера:

$$\sigma_r(E) = \frac{\sigma_{r0}}{1 + \left(\frac{E - E_0}{\Gamma/2}\right)^2}, \quad \sigma_{sr} = \frac{\Gamma_r}{\Gamma} \sigma_r, \quad \sigma_{cr} = \frac{\Gamma_c}{\Gamma} \sigma_r.$$

Полное же сечение взаимодействия нейтронов

$$\sigma(E) = \sigma_p + \sum_i \frac{\sigma_{ri}}{1 + \left(\frac{E - E_i}{\Gamma_i/2}\right)^2}.$$

При малых энергиях  $E \ll E_i$ , если  $E_i \gg \Gamma_i$ , сечение реакции<sup>\*)</sup>:

$$\sigma_a(E) = \frac{\pi(\lambda^2 E)}{4\sqrt{E}} \sum_i \frac{g_i \Gamma_{ni}^0 \Gamma_c}{E_i^2} \sim \frac{1}{v}.$$

Отсюда видно, что сечение поглощения медленных нейтронов сильно зависит от положения нижних резонансов  $E_i$ . Скажем, у  $^{238}\text{U}$  первый резонанс расположен при довольно большой энергии  $E_0 = 6,7$  эВ, и сечение поглощения тепловых нейтронов невелико:  $\sigma_{a8}^T = 2,8$  б, у  $^{232}\text{Th}$   $E_0 = 21,9$  эВ и  $\sigma_{a2}^T = 7$  б.

У делящихся ядер плотность уровней значительно больше и резонансы лежат вблизи тепловой области. Например, у  $^{235}\text{U}$   $E_0 = 0,3$  эВ и  $\sigma_{a6}^T \cong 690$  б.

Положение резонансов определяется энергетическими уровнями составного ядра  $\sigma_i$  и энергией связи нейтрона в нем. Поэтому в некоторых случаях  $E_0$  оказываются очень малыми, лежащими в области тепловых энергий нейтронов. При этом сечения поглощения медленных нейтронов принимают аномально большие значения. В качестве примеров можно привести изотопы  $^{113}\text{Cd}$  ( $\sigma_a^T \cong 20000$  б,  $E_0 = 0,178$  эВ),  $^{149}\text{Sm}$  ( $E_0 = 0,0976$  эВ,  $\sigma_a^T = 60000$  б),  $^{157}\text{Gd}$  ( $E_0 = 0,030$  эВ,  $\sigma_a^T = 160000$  б),  $^{135}\text{Xe}$  ( $E_0 = 0,082$  эВ,  $\sigma_a^T = 3,5 \cdot 10^6$  б), играющие важную роль в физике и технике реакторов. Аномально высокие сечения поглощения нейтронов некоторыми изотопами являются одной из специфических особенностей медленных нейтронов, соответственно - реакторов на тепловых нейтронах.

<sup>\*)</sup> На нейтронные сечения при малых энергиях оказывают влияние и уровни составного ядра с  $\sigma_i < E_{cb}$ .

Частота следования резонансов определяется плотностью уровней составного ядра. Среднее расстояние между резонансами  $^{238}\text{U}$   $\bar{D} \approx 20$  эВ.

Как видно из формулы для  $\sigma_{r0}$ , резонансные сечения при малых энергиях нейтронов весьма велики и при  $E \sim 10$  эВ достигают десятков тысяч барн. С ростом энергии  $\sigma_{r0}$  падает и при  $E \sim$  сотен кэВ сравнивается с  $\sigma_p$ . В действительности подобное сглаживание резонансной структуры сечений происходит еще раньше (около 30 кэВ) за счет "доплеровского уширения" резонансов.

Рассмотрим резонансное поглощение нейтронов при замедлении сначала на примере единичного "изолированного" резонанса при энергии  $E_0$ .

Рассмотрим бесконечную однородную среду — смесь резонансного поглотителя с концентрацией  $\rho_n$  и замедлителя с концентрацией  $\rho_s$  и сечением рассеяния  $\sigma_s$ . Полное сечение потенциального рассеяния для среды  $\Sigma_s = \rho_n \sigma_r + \rho_s \sigma_s$ .

В возрастном приближении вероятность избежать поглощения  $\varphi = \exp\left(-\frac{\rho_n}{\xi \Sigma_s} \int \sigma_a(E) \frac{dE}{E}\right)$ , а вероятность поглощения

$$p = 1 - \varphi \approx \frac{\rho_n}{\xi \Sigma_s} J_R, \quad \text{если } p \ll 1, \quad \text{где}$$

$$J_R = \int \sigma_a(E) \frac{dE}{E} \approx \frac{\Gamma_r \sigma_{r0}}{\Gamma E_0} \int \frac{dE}{1 + \left(\frac{E - E_0}{\Gamma/2}\right)^2}$$

(здесь учтено, что резонанс достаточно "узок",  $\Gamma \ll E_0$ ).

Положив  $\frac{E - E_0}{\Gamma/2} = x$ , получим  $J_R = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sigma_{r0} \Gamma_r}{E_0}$ .

В табл. 3 приведены данные для трех наиболее сильных резонансов и средние резонансные параметры  $^{238}\text{U}$  для  $s$ -нейтронов\*.

\* При энергии нейтронов  $E \gtrsim 1$  кэВ начинают играть роль уровни, возбуждаемые нейтронами с ненулевым орбитальным моментом ( $p, D$  и др.). Эти резонансы, однако, относятся к "слабым" и сильно "размыты" за счет доплеровского уширения.

Таблица 3

$E_i, \text{эВ}$	$\Gamma_\gamma, \text{эВ}$	$\Gamma_n^0, \text{эВ}^{1/2}$	$\sigma_0, \text{б}$	$\mathcal{J}_R, \text{б}$
6,7	0,026	0,0006	21700	128
21	0,026	0,0019	32600	61,4
37	0,026	0,005	39500	43,9

Однако возрастное приближение в случае сильных резонансов несправедливо, т.к. поток нейтронов в районе резонанса быстро изменяется с энергией. Поэтому расчет резонансного поглощения требует специальной теории.

## 2. Приближение узких резонансов

Рассмотрим сначала качественную картину поглощения сильным резонансом ( $\Sigma_{r=0} \gg \Sigma_s$ ) (рис. 19).

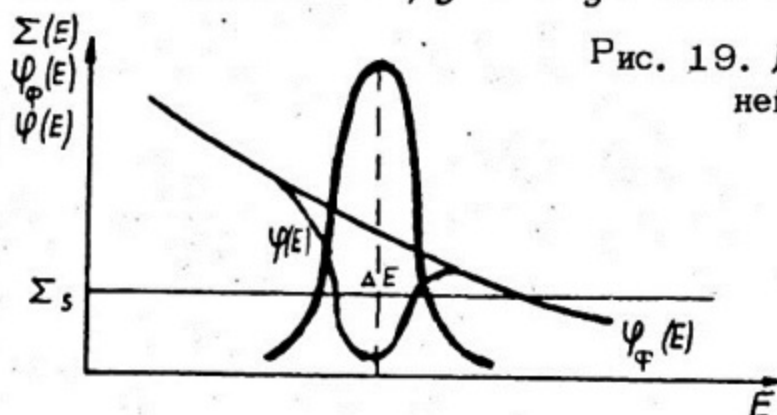


Рис. 19. Депрессия спектра нейтронов в области резонанса

Выделим вблизи  $E_0$  интервал  $\Delta E$ , в пределах которого нейтроны испытывают преимущественно резонансное взаимодействие.

Предположим, что резонанс узкий, т.е. что средняя потеря энергии нейтрона при рассеянии на любом из ядер среды значительно превышает эффективную ширину резонанса  $\Delta E_S = \xi E_0 \gg \Delta E$ .

В этом случае вероятность поглощения нейтрона приближенно равна произведению вероятности попасть в интервал  $\Delta E \left( \frac{\Delta E}{\xi E_0} \right)$  на вероятность поглощения в пределах  $\Delta E \left( \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma} \right)$ :

$$P \approx \frac{\Delta E}{\xi E_0} \frac{\Gamma_\gamma}{\Gamma}.$$

Любопытно отметить, что в это выражение входит ширина  $\Delta E$ , но не входит явно высота резонансного пика. Это понятно, так как при  $\Sigma_{r0} \gg \Sigma'_s$  вероятность резонансного взаимодействия в пределах  $\Delta E$  близка к 1 и мало зависит от  $\Sigma_{r0}$ . Величина  $\Delta E$  может быть найдена из условия

$$\Sigma'_r \left( E_0 \pm \frac{\Delta E}{2} \right) = \Sigma'_s,$$

что при подстановке формулы Брейта - Вигнера (при  $\Sigma_{r0} \gg \Sigma'_s$ ) приводит к

$$\Delta E = \Gamma \sqrt{\frac{\Sigma_{r0}}{\Sigma'_s}} \gg \Gamma.$$

Оценим величину  $\Delta E$  для слабого разбавления  $^{238}\text{U}$  замедлителем. Тогда

$$\frac{\Sigma_{r0}}{\Sigma'_s} \cong \frac{\sigma_{r0}}{\sigma_p}, \quad \Delta E = \Gamma \sqrt{\frac{\Sigma_{r0}}{\Sigma'_s}} \cong \Gamma \sqrt{\frac{\sigma_{r0}}{\sigma_p}}.$$

Для  $E_0 = 6,7$  эВ,  $\sigma_{r0} = 23000$  б и  $\Gamma = 0,03$  эВ  $\Delta E = 1,4$  эВ. При более высоких энергиях

$$\Delta E = \bar{\Gamma}_{r0} \sqrt{\frac{2,6 \cdot 10^6}{11} \left( 1 + \frac{\Gamma_r}{\Gamma_n} \right)} \sim 1 \text{ эВ}.$$

Эффективная ширина сильных резонансов мало меняется от резонанса к резонансу и составляет (при небольших разбавлениях урана) около 1 эВ. Таким образом,

$$\rho \cong \frac{\Gamma_r}{\xi E_0} \sqrt{\frac{\Sigma_{r0}}{\Sigma'_s}} = \rho_n \frac{\sigma_{r0} \Gamma_r}{\xi \Sigma'_s E_0} \sqrt{\frac{\Sigma'_s}{\Sigma_{r0}}} \sim \sqrt{\rho_n}.$$

Сравнение этой формулы с результатом возрастного приближения указывает, во-первых, на то, что за счет малого множи-

теля  $\sqrt{\frac{\Sigma'_s}{\Sigma_{r0}}}$   $\rho$  здесь оказывается значительно меньшим. Во-

вторых, зависимость  $\rho$  от  $\rho_n$  становится более слабой:  $\sqrt{\rho_n}$  вместо  $\rho_n$ .

Рассмотрим задачу исходя из газокинетического уравнения (в переменных  $u$ ):

$$\varphi(u) \Sigma(u) = \int_{u-\xi}^u du' \varphi(u') \Sigma'_{s3}(u') W_3(u' \rightarrow u) + \int_{u-\xi}^u du' \varphi(u') \Sigma'_{sn}(u') W_n(u' \rightarrow u).$$

В области  $u$  до резонанса решение этого уравнения нам известно — это фермиевский спектр  $\varphi_\phi = \frac{q}{\xi \Sigma_s}$ , где  $q$  — число замедляющихся нейтронов, а интегралы в правой части и  $\varphi \Sigma'$  являются постоянными величинами. Когда  $u$  входит в резонансную область, интегралы справа изменяются мало, так как интервалы интегрирования (по предположению) значительно превышают ширину резонанса. Следовательно, с точностью до величин порядка  $\frac{\Delta E}{E E_0} \ll 1$  плотность столкновений  $\varphi(u) \Sigma'(u)$  является величиной постоянной  $\varphi(u) \Sigma'(u) = const = \varphi_\phi \Sigma'_s$ , а энергетический спектр потока нейтронов

$$\varphi(u) = \varphi_\phi \frac{\Sigma_s}{\Sigma'(u)} = \frac{q}{\xi \Sigma'(u)} \quad (\varphi(E) = \frac{q}{\xi E \Sigma'(E)}).$$

Вблизи резонанса  $\Sigma'(E)$  резко возрастает, что приводит к падению потока нейтронов  $\varphi(E)$  (см. рис. 19).

Снижение потока нейтронов при резонансных энергиях приводит к уменьшению поглощения, тем большему, чем сильнее резонанс. В этом состоит эффект резонансного самоэкранирования (или "резонансной блокировки").

Приближение узкого резонанса называют также приближением постоянной плотности столкновений.

Вероятность поглощения нейтрона может быть теперь найдена как

$$P = \frac{1}{q} \int \varphi(E) \Sigma_a(E) dE = \int \frac{\Sigma_a(E)}{\xi \Sigma'(E)} \frac{dE}{E}.$$

Подставив сюда формулу Брейта — Вигнера, получим в прежних обозначениях

$$P = \frac{\Gamma_r}{\xi E_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Sigma'_{r0}}{(1+x^2) \Sigma_s + \Sigma'_{r0}} dx = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{r0} \Gamma_r P_n}{E_0 \xi \Sigma_s} \sqrt{\frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma'_{r0}}}$$

Это отличается от  $P$  в возрастном приближении множителей

$$K = \sqrt{\frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma'_{r0}}} < 1,$$

который является коэффициентом самоэкранирования резонанса.

Величина  $J_{\Delta\phi} = J_r \cdot K$  носит название эффективного резонансного интеграла. В этих обозначениях  $P = \frac{P_n J_{\Delta\phi}}{\xi \Sigma_s}$ .

Рассмотрим два крайних случая:

а) слабый резонанс,  $\Sigma_{r0} \ll \Sigma_s$ . В этом случае  $K \cong 1$ ,  $J_{эф} \cong J_R$  и результат совпадает с решением в возрастном приближении;

б) сильный резонанс,  $\Sigma_{r0} \gg \Sigma_s$ . При этом

$$K \cong \sqrt{\frac{\Sigma_s}{\Sigma_{r0}}} = \sqrt{\frac{\Sigma_s / \rho_n}{b_{r0}}} = \sqrt{\frac{b_0}{b_{r0}}}$$

Величина  $\frac{\Sigma_s}{\rho_n} = b_p + \frac{\rho_3}{\rho_n} b_s = b_0$  есть сечение рассеяния среды, проходящее на одно ядро поглотителя, и зависит от относительной концентрации поглотителя  $\rho_n / \rho_3$ .

С ростом концентрации поглотителя  $K$  и  $J_{эф}$  падают, а вероятность поглощения, хотя и растет, но лишь как  $\sqrt{\rho_n}$  вместо  $\sim \rho_n$  в возрастном приближении.

Эффект самоэкранирования (блокировки) резонансов оказывается весьма большим. Например, для первого резонанса  $^{238}\text{U}$  ( $E_0 = 6,7$  эВ)  $b_{r0} = 23000$  б, так что, скажем, при  $b_0 \cong 25$  б  $K \cong 1/30$ ,  $J_{эф}$  и  $\rho$  оказываются в 30 раз меньшими, чем в возрастном приближении.

### 3. Суммарный эффективный резонансный интеграл.

#### Полуэмпирическая формула для $J_{эф}$

Рассмотрим замедление в среде с поглотителем, имеющим резонансы при энергиях  $E_i$ . Вероятность поглощения нейтрона каждым из резонансов мало зависит от других резонансов, по-

этому примем  $\rho_i = \frac{\rho_n J_{эф}^i}{\xi \Sigma_s}$ . Тогда вероятность избежать поглощения при замедлении  $\varphi = \prod_i (1 - \rho_i)$  или  $\ln \varphi = \sum_i \ln (1 - \rho_i)$ .

Считая  $\rho_i \ll 1$ ,  $\ln (1 - \rho_i) \cong -\rho_i$ , так что  $\ln \varphi = -\sum_i \rho_i = -\frac{\rho_n}{\xi \Sigma_s} \sum_i J_{эф}^i$ .

В нашем приближении  $J_{эф}$  оказывается величиной аддитивной и можно ввести суммарный эффективный резонансный интеграл:  $J_{эф} = \sum_i J_{эф}^i$ , причем  $\varphi = \exp \left( -\frac{\rho_n J_{эф}}{\xi \Sigma_s} \right)$ .

Разобьем все множество резонансов на две группы: сильные и слабые резонансы. Конечно, граница между группами до-

статочно неопределенна и зависит от концентрации поглотителя (от  $\sigma_0$ ). Пренебрежем этой зависимостью, чтобы получить простейшую аппроксимацию для  $J_{эф}$ :

$$J_{эф} = \sum_i J_{эф}^i + \sum_j J_R^j,$$

где первая сумма берется по сильным резонансам, вторая — по слабым. Подставляя сюда выражения для  $J_{эф}$  и  $J_R$ , получим:

$$J_{эф} = \sqrt{\sigma_0} \sum_i \frac{\pi \Gamma_i^i \sqrt{\sigma_{г0}^i}}{2 E_i} + \sum_j \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{г0}^j \Gamma_j^j}{E_j}.$$

Каждая из сумм является ядерной константой для данного поглотителя, не зависящей от  $\rho_n$ . Сбозначим вторую сумму  $a$ , а первую  $b$ . Тогда  $J_{эф} = a + b \sqrt{\sigma_0}$ . Константы  $a$  и  $b$  могут быть вычислены по резонансным параметрам или найдены путем обработки результатов измерений зависимости  $J_{эф}(\sigma_0)$ . Полученная зависимость для  $^{238}\text{U}$  оказывается следующей (в барнах):  $J_{эф} = 2,95 + 2,1 \sqrt{\sigma_0}$ . При максимальной концентрации  $^{238}\text{U}$   $\sigma_0 = \sigma_p \approx 11$  б, так что минимальная величина  $J_{эф}$  составляет  $\approx 10$  б по сравнению с  $J_R = 280$  б. С разбавлением  $^{238}\text{U}$  замедлителем  $\sigma_0$  и  $J_{эф}$  растут, но при очень малых концентрациях  $^{238}\text{U}$  сильные резонансы становятся слабыми и полученная формула неприменима.

Для грубой оценки поведения  $J_{эф}$  при больших разбавлениях можно воспользоваться интерполяцией:

$$J_{эф} = 2,95 + 2,1 \sqrt{\frac{1}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_1}},$$

выбрав  $\sigma_1 = 17 \cdot 10^3$  б так, чтобы при  $\sigma_0 \rightarrow \infty$   $J_{эф} \rightarrow J_R = 280$  б.

#### 4. Средние сечения

Величина  $J_{эф}$  позволяет в простейших случаях найти вероятность  $\varphi$ . В более сложных задачах приходится прибегать к многогрупповому расчету, требующему знания "групповых" сечений, усредненных по резонансам.

Среднее сечение реакции "x"  $\sum_i \sigma_{xi}^k$  в группе  $\Delta E_k$  может быть найдено путем подсчета числа таких реакций:

$$N_x^K = \varphi_K \Sigma_x^K = \int_{\Delta E_K} dE \varphi(E) \Sigma_x(E),$$

где поток нейтронов  $K$ -й группы  $\varphi_K = \int_{\Delta E_K} dE \varphi(E)$ . Отсюда

$$\Sigma_x^K = \frac{\int_{\Delta E_K} dE \varphi(E) \Sigma_x(E)}{\int_{\Delta E_K} dE \varphi(E)}.$$

Для плавно изменяющихся сечений (в частности, сечения потенциального рассеяния), пренебрегая их энергетической зависимостью в пределах группы,  $\Sigma_p^K = \Sigma_p(E_K)$ .

В случае изолированных (неперекрывающихся) резонансов, предполагая, что между резонансами невозмущенный поток фермиевский  $\varphi_\phi(E) = \frac{A}{E}$ , а  $\varphi(E) = \varphi_\phi(E) \frac{\Sigma_s}{\Sigma'(E)} = \varphi_\phi \left[ 1 - \frac{\Sigma_2(E)}{\Sigma'(E)} \right]$ , получим:

$$\Sigma_x^K = \frac{\sum_i \int_{\Delta E_K} dE \varphi(E) \Sigma_{xi}(E)}{\int_{\Delta E_K} dE \varphi(E)} = \frac{\sum_i \int \frac{dE}{E} \cdot \frac{\Sigma_s \Sigma_{xi}(E)}{\Sigma(E)}}{\ln \frac{E_{K+1}}{E_K} - \sum_i \int \frac{dE}{E} \frac{\Sigma_{ri}(E)}{\Sigma(E)}},$$

где суммирование ведется по резонансам в пределах  $\Delta E_K$ .

Для достаточно узких групп ( $\Delta E_K \ll E_K$ )  $\ln \frac{E_{K+1}}{E_K} \cong \frac{\Delta E_K}{E_K}$ ,

$\frac{1}{E} \cong \frac{1}{E_K}$ , подставив брейт-вигнеровские выражения для резонансных сечений, получим для средних резонансных сечений вблизи энергии  $E$

$$\langle \Sigma_x \rangle_E = \frac{\frac{\pi}{2} \frac{\pi \lambda^2}{\Pi} \rho_n \left\langle \frac{g \Gamma_n \Gamma_x}{\Gamma \sqrt{1 + \frac{\pi \lambda^2}{b_{s0}} \frac{g \Gamma_n}{\Gamma}}} \right\rangle}{1 - \frac{\pi}{2} \frac{\pi \lambda^2}{\Pi b_{s0}} \left\langle \frac{g \Gamma_n}{\sqrt{1 + \frac{\pi \lambda^2}{b_{s0}} \frac{g \Gamma_n}{\Gamma}}} \right\rangle},$$

где усреднение ведется по распределению ширин  $\Gamma_n$ . Появление расстояния между резонансами  $\Pi$  связано с тем, что

число резонансов в интервале  $\Delta E_K \nu_r = \frac{\Delta E_K}{D}$ . В частности, при сильном разбавлении ( $\sigma_0 \gg \sigma_{r0}$ ) средние незаблокированные резонансные сечения

$$\overline{\sigma_x(E)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\pi \kappa^2}{D} \left\langle \frac{g \Gamma_n \Gamma_x}{\Gamma} \right\rangle.$$

Распределение по величинам нейтронных ширин  $\Gamma_n$  определяется формулой Портера - Томаса

$$W\left(\frac{\Gamma_n}{\Gamma}\right) \sim \sqrt{\frac{\Gamma_n}{\Gamma}} \exp\left(-\frac{\Gamma_n}{2\Gamma}\right).$$

При  $\Gamma = \Gamma_n + \Gamma_\gamma$  и  $g = 1$  получим:

$$\overline{\sigma_x(E)} = \frac{\pi}{2} \pi \kappa^2 \frac{\Gamma_\gamma}{D} \frac{\overline{\Gamma_n}}{\Gamma} \cdot f(E),$$

где  $f(E)$  изменяется от 1 при  $\frac{\Gamma_\gamma}{\overline{\Gamma_n}} \ll 1$  (высокие энергии) до  $\frac{1}{2}$  при  $\frac{\Gamma_\gamma}{\overline{\Gamma_n}} \gg 1$  (малые энергии). В результате  $\overline{\sigma_x}$

падает с энергией нейтрона несколько медленнее, чем  $\frac{1}{v}$ . В килоэлектронвольтовой области вклад в сечение поглощения, кроме уровней, образуемых  $s$ -нейтронами, делают нейтроны с орбитальными моментами  $\ell = 1, 2, \dots$ , что приводит к отклонению от закона  $1/v$ .

При небольших разбавлениях ( $\sigma_0$ ) средние сечения в области малых энергий дополнительно понижаются вследствие самоэкранирования.

### 5. Средний коэффициент диффузии

Резонансная блокировка сечений сказывается также на диффузионных характеристиках сред. В уравнениях  $P_1$ -приближения

$$\vec{\nabla} \vec{J} + \varphi \Sigma = \int dE' \varphi(\vec{r}, E') \Sigma_s(E' \rightarrow E) + Q(\vec{r}, E),$$

$$\frac{1}{3} \vec{\nabla} \varphi + \vec{J} \Sigma = \int dE' \vec{J}(\vec{r}, E') \mu(E' \rightarrow E) \Sigma_s(E') W(E' \rightarrow E)$$

интегральные члены являются плавными функциями энергии. При  $\vec{\nabla} \bar{J} \ll \varphi \Sigma$  поведение  $\varphi(E)$  по-прежнему определяется полным сечением  $\varphi(E) \sim \frac{1}{\Sigma(E)}$ :

$$\varphi(\vec{r}, E) \cong \frac{\langle \varphi(\vec{r}, E) \rangle}{\langle \frac{1}{\Sigma(E)} \rangle} \cdot \frac{1}{\Sigma(E)}$$

Заменяя во втором уравнении при небольших потерях энергии нейтронов интегральный член на  $\langle \bar{J} \bar{\mu} \Sigma_s \rangle$ , получим для энергетического спектра тока нейтронов:

$$\bar{J}(\vec{r}, E) \cong -\frac{1}{3 \Sigma^2(E)} \cdot \frac{\vec{\nabla} \langle \varphi \rangle}{\langle \frac{1}{\Sigma(E)} \rangle} + \frac{\langle \bar{J} \bar{\mu} \Sigma_s \rangle}{\Sigma(E)},$$

откуда

$$\langle \bar{J} \rangle = -\frac{1}{3} \frac{\langle \frac{1}{\Sigma^2} \rangle}{\langle \frac{1}{\Sigma} \rangle} \vec{\nabla} \langle \varphi \rangle + \langle \frac{1}{\Sigma} \rangle \langle \bar{J} \bar{\mu} \Sigma_s \rangle$$

и

$$\langle \bar{\mu} \Sigma_s \bar{J} \rangle = -\frac{\frac{1}{3} \langle \frac{\bar{\mu} \Sigma_s}{\Sigma^2} \rangle}{\langle \frac{1}{\Sigma} \rangle} \vec{\nabla} \langle \varphi \rangle + \langle \frac{\bar{\mu} \Sigma_s}{\Sigma} \rangle \langle \bar{\mu} \Sigma_s \bar{J} \rangle.$$

Из этой системы уравнений, исключая  $\langle \bar{\mu} \Sigma_s \bar{J} \rangle$ , получим усредненное по резонансам соотношение между током и потоком нейтронов:

$$\langle \bar{J} \rangle = -\frac{1}{3} \langle D \rangle \vec{\nabla} \langle \varphi \rangle,$$

где

$$\langle D \rangle = \frac{1}{3} \left( \frac{\langle \frac{1}{\Sigma^2} \rangle}{\langle \frac{1}{\Sigma} \rangle} + \frac{\langle \frac{\bar{\mu} \Sigma_s}{\Sigma^2} \rangle}{1 - \langle \frac{\bar{\mu} \Sigma_s}{\Sigma} \rangle} \right).$$

При усреднении по резонансам полезно представить величины  $\frac{1}{\Sigma}$  и  $\frac{1}{\Sigma^2}$  следующим образом:

$$\frac{1}{\Sigma} = \frac{1}{\Sigma_s} \frac{\Sigma - \Sigma_r}{\Sigma} = \frac{1}{\Sigma_s} \left( 1 - \frac{\Sigma_r}{\Sigma} \right);$$

$$\frac{1}{\Sigma^2} = \frac{1}{\Sigma_s^2} \cdot \frac{\Sigma^2 - 2\Sigma\Sigma_r + \Sigma_r^2}{\Sigma^2} = \frac{1}{\Sigma_s^2} \left( 1 - 2\frac{\Sigma_r}{\Sigma} + \frac{\Sigma_r^2}{\Sigma^2} \right).$$

В случае изотропного рассеяния ( $\bar{\mu} = 0$ )

$$\langle D \rangle = \frac{1}{3\Sigma_s} \cdot \frac{1 - 2\left\langle \frac{\Sigma_r}{\Sigma} \right\rangle + \left\langle \frac{\Sigma_r^2}{\Sigma^2} \right\rangle}{1 - \left\langle \frac{\Sigma_r}{\Sigma} \right\rangle},$$

или для брейт-вигнеровских резонансов

$$\langle D \rangle = \frac{1}{3\Sigma_s} \cdot \frac{1 - \frac{\pi}{D} \left\langle \frac{\sigma_{r0}\Gamma}{\sqrt{\sigma_0(\sigma_{r0} + \sigma_0)}} \right\rangle_{\Gamma_n} + \frac{\pi}{4D} \left\langle \frac{\sigma_{r0}^2\Gamma}{\sigma_0^{1/2}(\sigma_{r0} + \sigma_0)^{3/2}} \right\rangle_{\Gamma_n}}{1 - \frac{\pi}{2D} \left\langle \frac{\sigma_{r0}\Gamma}{\sqrt{\sigma_0(\sigma_{r0} + \sigma_0)}} \right\rangle_{\Gamma_n}}$$

где усреднение  $\left\langle \right\rangle_{\Gamma_n}$  ведется по распределению нейтронных ширин.

Эффект резонансной блокировки приводит к увеличению коэффициента диффузии  $D$  по сравнению с величиной  $\frac{1}{3\langle \Sigma_{tr} \rangle}$ .

Особенно значительным может стать рост  $D$  в тех случаях, когда существенны интерференционные минимумы в сечениях (рис. 20): поскольку  $\bar{J} \sim \frac{1}{\Sigma^2(E)}$ , в интерференционных минимумах имеет место резкое возрастание тока нейтронов.

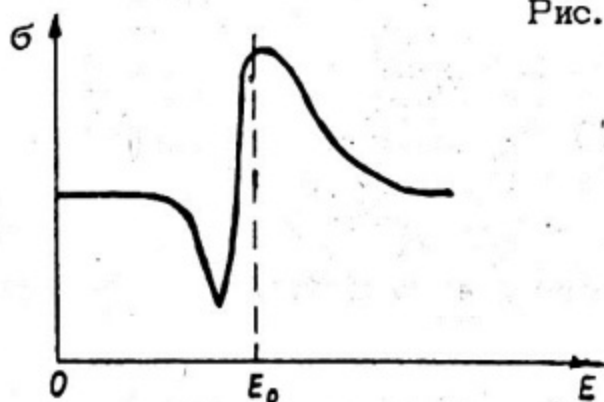


Рис. 20. Форма линии с учетом интерференции резонансного и потенциального рассеяния

## 6. Эффект Доплера. Температурная зависимость резонансного поглощения

Формула Брейта – Вигнера записана для системы координат, связанной с центром масс нейтрона и ядра-мишени (при  $A \gg 1$  центр масс практически совпадает с положением ядра).

Ядра среды совершают тепловое движение, и поэтому в каждом акте столкновений должна вводиться своя система отсчета, движущаяся вместе с ядром, тогда как энергия нейтрона  $E$  в наших расчетах берется в единой лабораторной системе.

При некоторой энергии нейтрона  $E$  энергия движения нейтрона относительно ядра испытывает разброс: она больше  $E$  при движении ядра навстречу нейтрону и меньше  $E$ , когда нейтрон "догоняет" ядро. Поэтому наблюдаемая в лабораторной системе форма резонансной линии оказывается отличной от естественной (брейт-вигнеровской): за счет усреднения по скоростям ядер происходит "размазывание" резонанса – уширение и понижение его, зависящие от температуры среды, носящие по аналогии с известным акустическим явлением название эффекта Доплера. Эффект Доплера в резонансном поглощении приводит к важным для физики реакторов следствиям.

Если  $W(v_x, v_y, v_z)$  – распределение ядер по компонентам скорости, а  $v$  – скорость нейтрона, летящего в направлении  $x$ , то вероятность столкновений нейтрона за 1 с, выраженная через наблюдаемое сечение  $\sigma_D(v)$ :

$$\rho \sigma_D(v) v = \rho \int d v_x d v_y d v_z v_{отн} W(v_x, v_y, v_z) \sigma(v_{отн}),$$

где  $v_{отн} = \sqrt{(v-v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2}$  – скорость относительного движения нейтрона,  $\sigma(v_{отн})$  – нейтронное сечение в системе координат ядра.

В качестве  $W$  примем максвелловское распределение

$$W(v_x, v_y, v_z) = \left( \frac{A}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left( -\frac{A(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2kT} \right),$$

положив массу нейтрона  $m = 1$  (строго говоря, спектр скоростей атомов в кристаллической решетке следует закону Максвелла, если температура  $T$  выше ее температуры Дебая  $T_D$ ). Примем в качестве  $\sigma(v_{отн})$  брейт-вигнеровское резонансное сечение

$$\sigma(v) = \frac{\sigma_{r0}}{1 + \left( \frac{(v - v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2 - E_0}{\Gamma/2} \right)^2}$$

Упростим полученное выражение, считая, что  $E_0 \gg kT$  и  $A \gg 1$ . Поскольку в среднем  $AV^2 \sim kT$ ,  $v \sim \sqrt{\frac{kT}{A}} \ll v$ , положим  $v_{отн} \cong v$ . Далее

$$\frac{(v - v_x)^2 + v_y^2 + v_z^2}{2} = E - v v_x + \frac{E_0}{A}, \text{ а } E - E_0 \sim \Gamma.$$

Учитывая, что  $\frac{kT}{A} \ll \Gamma$ , пренебрежем в этом выражении последним членом, после чего

$$\sigma_D(v) \cong \left( \frac{A}{2\pi kT} \right)^{1/2} \sigma_{r0} \int_{-\infty}^{\infty} dv_x \frac{\exp\left(-\frac{AV_x^2}{2kT}\right)}{1 + \left( \frac{E - v v_x - E_0}{\Gamma/2} \right)^2}$$

Обозначим  $\frac{E - E_0}{\Gamma/2} = x$ ,  $\frac{v v_x}{\Gamma/2} = y$ ,  $\frac{\Gamma}{\Delta} = \xi$ ,  $\Delta = 2\sqrt{\frac{kTE}{A}}$

(доплеровская ширина резонанса). Тогда для  $\sigma_D(x)$  получим:

$$\sigma_D(x) = \frac{\xi \sigma_{r0}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{\exp\left(-\frac{\xi^2 y^2}{4}\right)}{1 + (x - y)^2}$$

Проанализируем это выражение

$$1. \quad \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_D(x) dx = \Gamma \sigma_{r0} = \int_{-\infty}^{\infty} \sigma(x) dx,$$

площадь под резонансной линией не изменяется. Это значит, что не изменяется и величина  $J_R$ . Отсюда следует, что на поглощение нейтронов слабыми резонансами доплеровский эффект не влияет, и оно не зависит от температуры.

$$2. \quad \sigma_D(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left[ 1 - \Phi\left(\frac{\xi}{2}\right) \right] \exp\left(\frac{\xi^2}{4}\right) \xi \sigma_{r0},$$

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2) dt.$$

При  $\zeta \ll 1$   $\sigma_D(0) \approx \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta \sigma_{r0}$ , при  $\zeta \gg 1$   $\sigma_D(0) \rightarrow \sigma(0)$ :

с ростом температуры  $\zeta$  падает, а с ним и резонансное сечение в центре линии. Поскольку площадь под резонансной линией сохраняется, это означает уширение резонанса.

Для  $^{238}\text{U}$  при  $kT = \frac{1}{40}$  эВ  $\Delta \cong 0,02\sqrt{E}$  при  $\Gamma_y = 0,025$  эВ и  $\Gamma_n = 0,0015\sqrt{E}$ . Это значит, что величина  $\zeta$  падает от  $\zeta \sim 0,5$  для первых резонансов  $^{238}\text{U}$  до  $\zeta \sim 0,1 - 0,2$  при энергиях нейтронов  $E > 0,1$  кэВ. Сечение в максимумах высколежащих резонансов падает из-за эффекта Доплера в 5 - 10 раз.

3. При  $\zeta \gg 1$  вклад в интеграл  $\sigma_D(x)$  дают малые значения  $y \ll 1$ . Разлагая в ряд

$$\frac{1}{1+(x-y)^2} = \frac{1}{1+x^2} \left[ 1 + \frac{2xy-y^2}{1+x^2} + \frac{(2xy-y^2)^2}{(1+x^2)^2} + \dots \right],$$

получим

$$\sigma_D(x) = \frac{\sigma_{r0}}{1+x^2} \left[ 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{2}{\zeta} \right)^2 \frac{1-3x^2}{(1+x^2)^2} + \dots \right],$$

так что при  $\zeta \gg 1$  ( $\Gamma \gg \Delta$ ) Доплер-эффект мало изменяет форму резонансной линии.

4. Нетрудно видеть, что полученный выше ряд сходится не только при  $\zeta \gg 1$ , но и при малых  $\zeta$ , если только  $(x\zeta)^2 \gg 1$ . В этом случае

$$\sigma_D(x) = \frac{\sigma_{r0}}{1+x^2} \left[ 1 + \frac{6}{(x\zeta)^2} + \dots \right],$$

и мы видим, что на крыльях резонанса вдали от  $E_0$  форма линии остается естественной даже при  $\Delta \gg \Gamma$ .

Это обстоятельство имеет одно важное следствие. Как было показано ранее, вероятность поглощения нейтронов  $\rho \sim \Delta E =$

$= \Gamma \sqrt{\frac{\sigma_{r0}}{\sigma_0}}$  и не зависит явно от высоты резонанса. Если резонанс очень сильный, так что  $\frac{(x_{эф} \zeta)^2}{6} \gg 1$  (т.е.  $\frac{\sigma_{r0}}{\sigma_0} \gg 6 \left( \frac{\Delta}{\Gamma} \right)^2$ ),

то величина  $\Delta E$  определяется естественной формой линии, а следовательно,  $\Delta E$ ,  $J_{эф}$  и  $\rho$  не зависят от температуры среды.

Таким образом, не только для слабых, но и для очень сильных резонансов поглощение нейтронов не зависит от температуры среды.

Для нижних, наиболее сильных резонансов  ${}^{238}\text{U} \frac{\Delta}{F} \cong 2 - 5$  и при  $\sigma_{r0}/\sigma_0 \gg 25 - 150$ , что выполняется даже при значительном разбавлении, резонансное поглощение мало меняется с температурой среды.

5. При  $\zeta \ll 1$ , положив  $y = x - z$ , получим

$$\sigma_D(x) = \frac{\zeta \sigma_{r0}}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\zeta^2 x^2}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{\exp\left(\frac{\zeta^2 xz}{2} - \frac{\zeta^2 z^2}{4}\right)}{1+z^2}$$

При не очень больших  $x$  поведение подынтегрального выражения определяется множителем  $\frac{1}{1+z^2}$ , и основной вклад в интеграл дают  $z \sim 1$ , когда показатель экспоненты мал. Тогда

$$\sigma_D(x) \cong \frac{\sqrt{\pi}}{2} \zeta \sigma_{r0} \exp\left(-\frac{\zeta^2}{4} x^2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{\Gamma}{\Delta} \sigma_{r0} \exp\left(-\frac{(E-E_0)^2}{\Delta^2}\right)$$

Это — доплеровская форма линии, ширина которой  $\Delta$ . При  $\zeta \ll 1$  полученное выражение справедливо, пока  $x\zeta \leq 4$ .

Величина  $\Delta E$  для доплеровской линии определится из равенства:

$$\sigma_D\left(E_0 \pm \frac{\Delta E}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma}{\Delta} \sigma_{r0} \exp\left(-\frac{\Delta E^2}{4\Delta^2}\right) = \sigma_0$$

или

$$\Delta E = 2\Delta \sqrt{\rho n} \left( \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma}{\Delta} \frac{\sigma_{r0}}{\sigma_0} \right)$$

При  $\frac{\Gamma}{\Delta} \cdot \frac{\sigma_{r0}}{\sigma_0} \sim 3 - 100$   $\Delta E \cong (3 \div 4) \Delta$ , что находится в пределах применимости полученного выражения ( $\frac{\Delta E}{\Delta} \leq 4$ ).

Таким образом, для доплеровских линий  $\Delta E \sim \Delta \sim \sqrt{T E}$ , а  $\rho \sim J_{эф} \sim \sqrt{\frac{T}{E}}$ .

Область энергий, дающая наибольший вклад в температурную зависимость поглощения  ${}^{238}\text{U}$  при разбавлении  $\sigma_0 < 50$  б-

100 эВ - 5 кэВ. Учет температурной зависимости полного резонансного интеграла  $^{238}\text{U} \int_{\text{эф}}$  обычно производится следующим образом. Если  $\alpha$  - доля доплеровской области в резонансном поглощении (блокированном),  $(1 - \alpha)$  - доля очень сильных резонансов, то

$$\int_{\text{эф}} = a + b \sqrt{\sigma_0} \left( 1 - \alpha + \alpha \sqrt{\frac{T}{T_0}} \right),$$

где  $T_0$  - комнатная температура, при которой определены коэффициенты  $a$ ,  $b$ . Величина  $\alpha \cong 0,12$ , так что для  $^{238}\text{U}$

$$\int_{\text{эф}} = 2,95 + 2,1 \left( 1 + \alpha \frac{\sqrt{T} - \sqrt{T_0}}{\sqrt{T_0}} \right) \sqrt{\sigma_0}.$$

Температурная зависимость средних сечений поглощения нейтронов в области слабых резонансов ( $E \sim$  нескольких кэВ, эта область важна в особенности для реакторов на быстрых нейтронах) может быть получена следующим путем:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_a &\cong \left\langle \sigma_a \frac{\Sigma_s}{\Sigma_s + \Sigma_r} \right\rangle \cong \langle \sigma_a \rangle - \left\langle \frac{\sigma_a \Sigma_r}{\Sigma_s} \right\rangle = \\ &= \frac{\pi^2 \bar{\lambda}^2 \Gamma_r}{2\Delta} \left[ \left\langle \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \right\rangle_{\Gamma_n} - \left( \frac{\pi}{2} \right)^{3/2} \frac{\bar{\lambda}^2}{\sigma_0 \Delta} \left\langle \frac{\Gamma_n^2}{\Gamma} \right\rangle_{\Gamma_n} \right] = \\ &= \bar{\sigma}_a^\infty \left[ 1 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{\bar{\sigma}_a^\infty}{\sigma_0} \cdot \frac{\Delta}{\Gamma_n} \frac{\left\langle \frac{\Gamma_n^2}{\Gamma} \right\rangle_{\Gamma_n}}{\left\langle \frac{\Gamma_n}{\Gamma} \right\rangle_{\Gamma_n}} \right]. \end{aligned}$$

При  $E \sim 10$  кэВ и не очень большом разбавлении, характерном для быстрых реакторов ( $\sigma_0 \sim 30$  б), снижение сечения поглощения за счет блокировки резонансов составляет около 20% причем повышение температуры топлива от комнатной до  $T \sim 1500$  К уменьшает экранировку примерно вдвое. Это приводит к отрицательному температурному эффекту реактивности, играющему важную роль в физике реакторов.

## 7. Резонансы конечной ширины. Зависимость $\int_{\text{эф}}$ от $A$

Выше предполагалось, что резонансы узкие,  $\Delta E \ll \Delta E_{\text{max}} = \alpha E$ , где  $\Delta E_{\text{max}}$  - максимальная потеря энергии нейтрона при рассея-

нии ядром с атомным весом  $A$ ,  $\alpha = \frac{4A}{(A+1)^2}$ . В этом случае  $\gamma_{эф}$  определяется сечением рассеяния  $\sigma_0$  и не зависит от  $A$ .

Это условие выполняется, однако, далеко не всегда. Выше мы видели, что в широком интервале энергий нейтронов, вплоть до  $E \sim$  кэВ, для резонансов  $^{238}\text{U}$   $\Delta E \sim 1$  эВ при небольших разбавлениях.

С другой стороны, при  $A \gg 1$   $\Delta E_{max} \cong \frac{4}{A} E$  и для тяжелых ядер (например, для самого  $^{238}\text{U}$ )  $\Delta E_{max} \cong \frac{1}{60} E$ , так что резонансы можно считать узкими лишь при энергии  $E \gg 160$  эВ, а для наиболее сильных резонансов ( $E \sim 10$  эВ) имеет место обратное соотношение  $\Delta E \gg \alpha E$ . Даже для достаточно легких замедлителей (например, углерод,  $A = 12$ ) резонанс при  $E = 6,7$  эВ нельзя считать узким ( $\Delta E_{max} \cong 2$  эВ).

Рассмотрим сначала предельный случай широких резонансов,  $\Delta E_{max} \ll \Delta E$ , что справедливо для низколежащих резонансов при рассеянии нейтронов самим  $^{238}\text{U}$ . В этом случае можно положить  $\Delta E_{max} \cong 0$ , что соответствует  $A \rightarrow \infty$ . Такое приближение называют приближением бесконечной массы поглотителя. Рассеяние ядром бесконечной массы не влияет на энергетический спектр, а следовательно, и на поглощение нейтронов. Поэтому в приближении бесконечной массы в выражении для фактора самоэкранировки в  $\gamma_{эф}$  следует принять сечения рассеяния (потенциального и резонансного)  $^{238}\text{U}$  равными нулю:

$$\gamma_{эф} = \frac{\pi}{2} \frac{\sigma_{r0} \Gamma_r}{E_0} \sqrt{\frac{\sigma_0^*}{\sigma_{a0} + \sigma_0^*}},$$

где  $\sigma_0^* = \frac{\Sigma_s}{\rho_n}$  и не включает сечения потенциального рассеяния поглотителя.

Следует ожидать, что в общем случае фактор самоэкранирования определяется некоторыми эффективными сечениями рассеяния

$$\Sigma_s^* = k(A) \Sigma_s, \quad \Sigma_{sr}^* = k(A) \Sigma_{sr},$$

зависящими от массы рассеивающих ядер, причем для узких резонансов  $k(A) \cong 1$ , а для широких  $k(A) \cong 0$ . В результате  $\gamma_{эф}$  становится зависящим от атомных весов входящих в состав среды ядер:

$$\sigma_0^* = \frac{1}{\rho_n} \sum_i \rho_i k(A_i) \sigma_{si}, \quad \sigma_{sro}^* = k(A) \sigma_{ro} \frac{\Gamma_n}{\Gamma}$$

Найдем эту зависимость.

Рассмотрим среду, содержащую смесь замедляющих ядер двух масс:  $A_0$  с сечением рассеяния  $\Sigma_m$ , для которого резонанс узкий, и  $A$  с сечением  $\Sigma'_s$ , для которого ширина резонанса оказывается промежуточной,  $\alpha_A E_0 \sim \Delta E$ . Для простоты пренебрежем рассеянием нейтронов ядрами поглотителя. Уравнение для энергетического спектра нейтронов в окрестности резонанса  $E_0$  имеет вид:

$$\varphi(E) \Sigma'(E) = \int_E^{(1+\alpha)E} \frac{dE'}{\alpha_0 E'} \varphi(E') \Sigma'_m + \int_E^{(1+\alpha)E} \frac{dE'}{\alpha E'} \varphi(E') \Sigma'_s,$$

где  $\Sigma'(E) = \Sigma_m + \Sigma'_s + \Sigma'_r(E)$ . Для легкого ядра резонанс узкий и в первом интеграле можно заменить  $\varphi(E)$  на невозмущенный фермиевский спектр  $\varphi(E') \cong \varphi(E_0) \frac{E_0}{E'}$ , после чего

$$\varphi(E) [\Sigma_m + \Sigma'_r(E)] = \varphi(E) \Sigma'_m + \frac{\Sigma'_s}{\alpha} \int_E^{(1+\alpha)E} \frac{dE'}{E'} \varphi(E') - \Sigma'_s \varphi(E).$$

Предположим, что  $A \gg 1$  ( $\alpha \ll 1$ ) и что концентрация ядер с массой  $A$  невелика ( $\Sigma'_s \ll \Sigma_m$ ). Тогда оставшийся интеграл можно рассматривать в качестве малого возмущения и в нулевом приближении:

$$\varphi_0(E) = \varphi(E) \frac{\Sigma_m}{\Sigma'_r(E) + \Sigma_m}$$

Подставив полученное выражение в правую часть, определим в первом приближении (при  $E$  и  $E' \cong E_0$ ):

$$\varphi(E) [\Sigma_m + \Sigma'_r(E)] = \varphi(E_0) \Sigma_m + \Sigma'_s \varphi(E_0) \left[ \frac{1}{\alpha E_0} \int_E^{(1+\alpha)E} dE' \frac{\Sigma_m}{\Sigma'_m + \Sigma'_r(E')} - \frac{\Sigma'_s}{\Sigma'_m + \Sigma'_r(E)} \right].$$

Перейдем к переменной  $x = \frac{E - E_0}{\Gamma/2}$ :

$$\varphi(x) = \frac{\Gamma}{2} \varphi_{\varphi}(E_0) \frac{1+x^2}{\Sigma_{r0} + (1+x^2)\Sigma_m} \left[ \Sigma_m + \Sigma'_s \left( \frac{\Gamma}{2\alpha E_0} \int_x^{x+2\alpha E_0 \frac{1}{\Gamma}} dx' x \right. \right. \\ \left. \left. \times \frac{\Sigma_m(1+x'^2)}{\Sigma_{r0} + (1+x'^2)\Sigma_m} - \frac{(1+x'^2)\Sigma_m}{\Sigma_{r0} + (1+x'^2)\Sigma_m} \right) \right].$$

Число поглощенных нейтронов

$$N_a = \int \varphi(E) \Sigma_a(E) dE = \frac{\Gamma}{\Gamma} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) \frac{\Sigma_{r0}}{1+x^2} dx = \varphi_{\varphi}(E_0) \frac{\Sigma_{r0}\Gamma}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\Sigma_{r0} + (1+x^2)\Sigma_m} \times \\ \times \left[ \Sigma_m + \Sigma'_s \left( \frac{\Gamma}{2\alpha E_0} \int_x^{x+2\alpha E_0 \frac{1}{\Gamma}} dx' \frac{(1+x'^2)\Sigma_m}{\Sigma_{r0} + (1+x'^2)\Sigma_m} - \frac{(1+x'^2)\Sigma_m}{\Sigma_{r0} + (1+x'^2)\Sigma_m} \right) \right].$$

Для сильного резонанса  $\Sigma_{r0} \gg \Sigma_m$  основной вклад в интеграл дают большие  $x \sim \sqrt{\frac{\Sigma_{r0}}{\Sigma_m}}$ . Поэтому замена  $1+x^2 \rightarrow x^2$  не приведет к существенной ошибке.

Обозначив  $x \sqrt{\frac{\Sigma_m}{\Sigma_{r0}}} = y$ , найдем

$$N_a = \varphi_{\varphi}(E_0) \frac{\Sigma_{r0}\Gamma}{2} \frac{1}{\sqrt{\Sigma_{r0}\Sigma_m}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} \left[ \Sigma_m + \Sigma'_s \left( \frac{1}{2\lambda} \int_y^{y+2\lambda} dy' \frac{y'^2}{1+y'^2} - \frac{y^2}{1+y^2} \right) \right],$$

где  $\lambda = \frac{\alpha E_0}{\Gamma \sqrt{\frac{\Sigma_{r0}}{\Sigma_m}}} = \frac{\Delta E_{max}}{\Delta E}$  — величина, характеризующая ширину резонанса. После интегрирования и простых преобразований

$$N_a = \varphi_{\varphi}(E_0) \frac{\Gamma}{2} \sqrt{\Sigma_m \Sigma_{r0}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} \left\{ 1 + \frac{\Sigma'_s}{\Sigma_m} \left[ \frac{1}{1+y^2} - \frac{1}{2\lambda} (\arctg(y+2\lambda) - \arctg y) \right] \right\} = \varphi_{\varphi}(E_0) \frac{\pi\Gamma}{2} \sqrt{\Sigma_m \Sigma_{r0}} \left\{ 1 + \frac{\Sigma'_s}{2\Sigma_m} \left[ 1 - \frac{1}{\pi\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} \arctg(y+2\lambda) \right] \right\}.$$

Рассмотрим оставшийся интеграл. Если

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} \arctg(y+t),$$

то

$$f'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)(1+(y+t)^2)} = \frac{2\pi}{4+t^2},$$

$$f(t) = \int_0^t f'(t') dt' = \pi \operatorname{arctg} \frac{t}{2}.$$

Таким образом, положив  $\sqrt{\Sigma_m} \left(1 + \frac{k \Sigma_s'}{2 \Sigma_m}\right) \cong \sqrt{\Sigma_m + k \Sigma_s'}$ , находим

$$N_a \cong \varphi_\Phi(E_0) \frac{\pi \Gamma \lambda}{2} \sqrt{\Sigma_{r0}} \cdot \sqrt{\Sigma_m + k(\lambda) \Sigma_s'},$$

где

$$k(\lambda) = 1 - \frac{1}{\lambda} \operatorname{arctg} \lambda.$$

Хотя этот результат получен в предположении  $\frac{\Sigma_s'}{\Sigma_m} \ll 1$ ,

он имеет простой физический смысл и оказывается справедливым и при больших  $\Sigma_s' / \Sigma_m$ .

Как и предполагалось, самоэранирование резонанса определяется зависящим от  $A(\lambda)$  эффективным сечением рассеяния  $\Sigma_s^* = k(\lambda) \Sigma_s$ , причем для узких резонансов ( $\lambda \gg 1$ ,

$k(\lambda) \cong 1 - \frac{\pi}{2\lambda} \rightarrow 1$ )  $\Sigma_s^* \cong \Sigma_s$ , а для широких ( $\lambda \ll 1$ ,  $k(\lambda) \cong \frac{1}{3} \lambda^2 \rightarrow 0$ )  $\Sigma_s^* \cong 0$ . Такой же результат получается и для

резонансного рассеяния:  $\Sigma_{sr}^* = k(\lambda) \Sigma_{sr}$ .

Следует заметить, что при больших  $\lambda$   $k(\lambda)$  очень медленно стремится к 1, так что даже при  $\lambda = \frac{\Delta E_{max}}{\Delta E} \sim 10$   $k(\lambda) \cong \cong 0,85$  и резонанс нельзя считать строго "узким".

Для смеси замедлителей с массами  $A_i$ :

$$\Sigma_s^* = \sum_i \Sigma_{si}^* = \sum_i k(\lambda_i) \Sigma_{si}, \quad \sigma_0^* = \sum_i k(\lambda_i) \sigma_{0i},$$

где

$$\lambda_i = \frac{\Delta E_{max}^i}{\Delta E}, \quad \sigma_{0i} = \frac{\rho_i \sigma_{si}}{\rho_n}.$$

Практическое использование полученных формул требует выполнения итерационной процедуры: взяв  $k_i$  из простых оценок, находят  $\sigma_0^*$ , через которое определяют  $\Delta E = \Gamma \sqrt{\frac{\sigma_{r0}}{\sigma_0^*}}$

и уточненные значения  $\lambda_i = \frac{\Delta E_{max}^i}{\Delta E}$  и  $k(\lambda_i)$ .

Величины  $\lambda_i$  и  $k_i$  меняются от резонанса к резонансу. Однако, учитывая, что основной вклад в суммарный интеграл  $J_{эф}$  вносят наиболее сильные низколежащие резонансы  $^{238}U$ , можно характеризовать рассматриваемый эффект величиной  $\lambda$  для резонанса при  $E_0 = 6,7$  эВ:

$$\lambda_0^i \cong \frac{4E_0 \sqrt{\sigma_0^*}}{A_i \Gamma \sqrt{\sigma_{r0}}} \cong \frac{7 \sqrt{\sigma_0^*}}{A_i}$$

Усреднение по резонансам  $^{238}U$  приводит тогда к приближенной зависимости

$$\overline{k(\lambda_0^i)} \cong \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{\lambda_0^i} & \text{при } \lambda_0 < 1; \\ \frac{\lambda_0^i}{1 + \lambda_0^i} & \text{при } \lambda_0 > 1, \end{cases}$$

причем

$$\sigma_0^* = \sum_i \overline{k(\lambda_0^i)} \sigma_{0i}$$

Отсюда, в частности, можно найти, что рассеяние на тяжелых компонентах смеси, в том числе на самом уране, не оказывает существенного влияния на резонансное поглощение нейтронов в  $^{238}U$ . Действительно, даже при высокой концентрации урана при  $\sigma_0 \sim 20$  б  $\lambda_0^U \sim 0,13$ ,  $\bar{k}_U \cong 0,18$  и

$$\sigma_0^{*U} = \bar{k}_U \sigma_p \cong 2\sigma \ll \sigma_0$$

Окончательная формула для  $J_{эф}^{238}U$ , учитывающая зависимость от массы рассеивающих ядер, приобретает вид:

$$J_{эф} = 2,95 + 2,1 \sqrt{\sigma_0^*} \left( 1 + 0,12 \frac{\sqrt{T} - \sqrt{T_0}}{\sqrt{T_0}} \right)$$

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фейнберг С.М., Шихов С.Б., Троянский В.Б. Теория ядерных реакторов. - М.: Атомиздат, 1978.
2. Галанин А.Д. Теория ядерных реакторов на тепловых нейтронах. - М.: Атомиздат, 1959.
3. Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. - М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
4. Галанин А.Д. Теория гетерогенных реакторов. - М.: Атомиздат, 1971.
5. Белл Д., Глесстон С. Теория ядерных реакторов. - М.: Атомиздат, 1974.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
I. Цепная реакция деления и газокинетическое уравнение Больцмана.....	5
1. Некоторые сведения о реакции деления и делящихся нуклидах .....	11
2. Цепная реакция деления.....	14
3. Представление последовательных поколений. Коэффициент размножения .....	18
4. Интегральные формы газокинетического уравнения	21
5. $P_7$ -приближение.....	26
6. Односкоростная модель.....	32
7. Замедление нейтронов. Возрастное приближение....	35
8. Многогрупповое приближение.....	43
9. Уравнение термализации нейтронов.....	45
II. Реактор бесконечных размеров. Энергетический спектр нейтронов. Классификация реакторов по спектру.....	56
1. Приближение постоянных сечений.....	57
2. Многогрупповое приближение.....	58
3. Возрастное приближение, реакторы на промежуточных нейтронах.....	61
4. Приближение Грюлингга - Герцеля.....	66
5. Точные решения.....	68
6. Реакторы на тепловых нейтронах.....	70
7. Коэффициент размножения на быстрых нейтронах...	74
8. Коэффициент использования тепловых нейтронов. Энергетический спектр медленных нейтронов.....	76
III. Резонансное поглощение нейтронов.....	79
1. Резонансные параметры.....	80
2. Приближение узких резонансов.....	84
3. Суммарный эффективный резонансный интеграл. Полуэмпирическая формула для $J_{эф}$ .....	87
4. Средние сечения.....	88
5. Средний коэффициент диффузии.....	90
6. Эффект Доплера. Температурная зависимость резонансного поглощения.....	93
7. Резонансы конечной ширины. Зависимость $J_{эф}$ от $A$	97
Список рекомендуемой литературы.....	103