

536  
К 44



Н. П. Киселев

1985

Погрешности  
теплофизических  
измерений

МОСКВА 1982

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО  
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

536  
к-44

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ  
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

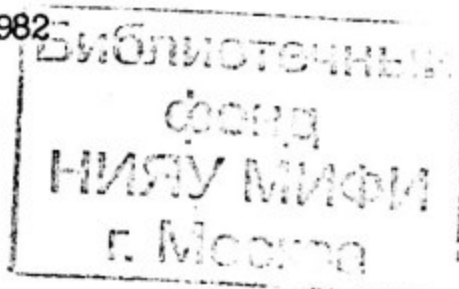
Н. П. КИСЕЛЕВ

ПОГРЕШНОСТИ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ИЗМЕРЕНИЙ

Утверждено  
редсоветом института  
в качестве учебного пособия



Москва - 1982



УДК 53.088(075):536.2

**К и с е л е в Н.П.** Погрешности теплофизических измерений. Учебное пособие. — М: Изд. МИФИ, 1982 г., 64 с.

В учебном пособии излагаются выводы, обосновывающие расчет оценок погрешностей экспериментальных данных. Приводятся рекомендации и необходимые справочные данные для оценок случайных, систематических и суммарных погрешностей результатов измерений. Пособие предназначено для студентов, изучающих курс "Тепловые измерения" и выполняющих лабораторные работы по программам практикумов теплофизических дисциплин. Оно может быть полезно также для широкого круга исследователей, в частности для студентов-дипломников и инженерно-технических работников, специализирующихся в области теплофизических измерений.

Рецензенты: Н.Н. Дельвин, И.Н. Алейников

© Московский инженерно-физический институт, 1982 г.

## П Р Е Д И С Л О В И Е

Вопросам оценки погрешностей измерений посвящено немало работ и специальных изданий. Однако студентам и экспериментаторам, ведущим исследования в ряде специальных областей, в частности в области теплофизических измерений трудно ими пользоваться. При проведении таких измерений редко выполняются многократные наблюдения; результаты характеризуются преимущественно систематической погрешностью.

Между тем, в большинстве монографических изданий /1-4/ излагаются в основном вопросы оценки случайных погрешностей, полезные в практическом отношении рекомендации по оценке и исключению систематических погрешностей можно найти только в последних изданиях /5/.

Учебные пособия /6-8/ удобны для использования студентами при выполнении конкретных лабораторных практикумов, для которых они предназначены. В них также практически не затрагиваются вопросы оценки систематических погрешностей.

Как указывал еще М.Ф.Маликов /1/, рекомендации, предполагающие выполнение сложных расчетов при оценке погрешностей практически бесполезны. Это обусловлено не самой сложностью расчетов (в настоящее время благодаря ЭВМ сложность вычислений не имеет принципиального значения), а тем, что исходные данные для оценивания погрешностей всегда неточны. В разных областях измерений сведения об этих исходных данных различны, и от экспериментатора нередко требуется не только знание разработанных рекомендаций, но и обоснованная интуиция, позволяющая выбрать наиболее простой и эффективный способ оценки погрешностей, приняв конкретные исходные гипотезы об их свойствах. Подобные действия могут быть выполнены только при четком представлении о происхождении расчетных рекомендаций, т.е. при достаточном представлении о способе и строгости их вывода. Дать это представление в условиях краткого пособия можно лишь с учетом его конкретного назначения, останавливаясь на наиболее важных моментах оценки погрешностей в конкретной области измерений.

Опыт преподавания курса "Тепловые измерения", а также работа со студентами старших курсов, выполняющих лабораторные практикумы и дипломные проекты, убеждают в необходимости создания такого пособия для студентов и экспериментаторов, специализирующихся в области теплофизических исследований. Этим целям и служит настоящее издание.

## I. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

### I. I. Теплофизические измерения

Термин – теплофизические величины используется для обозначения части физических величин, характеризующих свойства веществ и параметры физических процессов, тесно связанных с процессами передачи тепла. Имеются в виду, прежде всего параметры, определяющие состояние рабочих веществ (температура, давление, удельный объем), их тепловые свойства (теплоемкость, теплопроводность, энтальпия, тепловое расширение), параметры, определяющие интенсивность передачи тепла (коэффициент теплоотдачи, контактное термическое сопротивление, излучательная способность), а также некоторые свойства, связанные общей природой с тепловыми и обеспечивающие их более глубокое изучение и расчет (вязкость, скорость звука, электросопротивление и др.).

Характерной особенностью теплофизических величин, существенной для обработки экспериментальных данных, является их непрерывность – практически все из них принимают непрерывный ряд значений.

В метрологии, в зависимости от способа обработки экспериментальных данных, физические измерения принято подразделять на прямые, косвенные и совокупные. При прямых измерениях искомую величину определяют непосредственно по показаниям измерительного прибора (в частности по его шкале). При косвенных измерениях искомое значение измеряемой величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами аргументами. При совокупных или совместных измерениях искомые значения двух или более измеряемых величин находят путем решения системы уравнений, коэффициенты в которых и отдельные члены получены в результате независимых измерений.

Из теплофизических величин в результате прямых измерений обычно определяются параметры состояния. Контроль этих параметров с помощью теплотехнических приборов обеспечивает надежность работы тепловых машин и агрегатов, включая тепловые электростанции. Вследствие этого, подобные измерения часто называют теплотехническими. Собственно теплофизические измере-

ния производят в целях более углубленного познания изучаемых физических явлений, происходящих с участием процессов теплопередачи, т.е. в научных целях. Искомые величины в этих случаях рассчитываются, как правило, по результатам многих измеряемых значений, т.е. измерения являются косвенными и совокупными. Суммарная погрешность искомой величины определяется погрешностями измеряемых величин, т.е. определяется значительным количеством факторов. Учет особенностей теплофизических измерений позволяет с одной стороны рекомендовать для оценки этих погрешностей преимущественно определенную часть математического аппарата теории ошибок, а с другой стороны повысить надежность таких оценок.

## 1.2. Классификация погрешностей

Погрешность измерения называют отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины. Под истинным значением физической величины подразумевают такое его значение, которое "идеальным образом отражает в качественном и количественном отношении соответствующее свойство объекта" /5/. Существование истинного значения предполагается необходимым. По существу это означает, что погрешность измерений превышает нестабильность измеряемой величины (другими словами, превышает "пороговое несоответствие").

По форме выражения погрешностей измерений различают погрешности абсолютные и относительные. Если  $A$  - истинное значение измеряемой величины,  $\tilde{A}$  - ее оценка, полученная в результате измерений, то абсолютная погрешность

$$\zeta = \tilde{A} - A. \quad (1)$$

Относительная погрешность измерения, это погрешность, выраженная в долях истинного значения измеряемой величины

$$\varepsilon = (\tilde{A} - A)/A. \quad (2)$$

По причинам возникновения погрешности делят на методические ( $\zeta_M$ ), инструментальные ( $\zeta_H$ ) и личные ( $\zeta_L$ ), так что в общем виде

$$\sum = \sum_M + \sum_{II} + \sum_A. \quad (3)$$

Каждая из этих составляющих в свою очередь может вызываться рядом причин. Так методические погрешности могут возникнуть вследствие недостаточной разработанности теории исследуемых явлений, неточности используемых расчетных формул, неучета некоторых постоянных факторов, искажающих результаты измерений. В частности, погрешность вследствие порогового несоответствия модели исследуемого объекта самому объекту также является методической погрешностью.

Инструментальные погрешности измерения – погрешности из-за несовершенства средств измерений. Обычно различают основную погрешность средств измерений – погрешность в условиях, принятых за нормальные и дополнительные погрешности, т.е. погрешности, обусловленные отклонением влияющих величин от их нормальных значений.

Личные погрешности имеют место, когда для измерений применяются приборы, требующие использования органов чувств экспериментатора (зрения, слуха и др.). Совершенствование конструкций отсчетных и регистрирующих устройств приводит к тому, что личные погрешности становятся незначительными. При применении, например, цифровых приборов они вообще исчезают.

По статистическим свойствам погрешности делят на систематические и случайные. Погрешность измерения называется систематической, если она остается постоянной или изменяется по определенному закону при повторных измерениях одной и той же величины, т.е. когда погрешность любого измерения тесно связана с погрешностью предыдущего измерения. Если такой связи нет, погрешности называются случайными.

### 1.3. Основные задачи оценивания погрешностей

Основной задачей теплофизического эксперимента является получение экспериментальных данных – численных значений исследуемых параметров. Рекомендуются после обработки результатов измерений значения (табличные данные) нельзя с успехом использовать для технических целей и сравнивать с полученными ранее

результатами, если не оценена их погрешность.

Суммарная погрешность итоговых результатов содержит как систематическую, так и случайную составляющие и в принципе может быть оценена по-разному.

Для некоторых физических величин суммарная погрешность может быть охарактеризована предельным значением  $\Delta$ . В частности, это может иметь место для результатов прямых измерений, получаемых по показаниям серийных поверенных приборов. Введение общей предельной погрешности  $\Delta$  означает, что характеризуемые ей результаты измерений отличаются от истинных значений исследуемых параметров на величину, никогда не превышающую по модулю  $\Delta$ . В приведенном примере это обеспечивается своевременной поверкой приборов и отбраковкой экземпляров, не обеспечивающих требуемой точности. Для теплофизических исследований подобная процедура обычно не выполнима. Как правило, получение новых или более точных экспериментальных данных требует существенного совершенствования или создания сложного экспериментального оборудования. Поэтому теплофизические установки часто реализуются всего в одном или в нескольких экземплярах. Учитывая, что при этом погрешности теплофизических измерений порождаются многими факторами, целесообразно в соответствии с теорией ошибок характеризовать их не только численными значениями  $\zeta$ , но и доверительной вероятностью  $\alpha$ , под которой подразумевается вероятность того факта, что истинное значение отличается от результата измерений на величину меньшую  $\zeta$  по модулю. Значения  $\zeta$  и  $\alpha$  определенным образом взаимосвязаны — чем больше значение погрешности  $\zeta$ , тем больше ее доверительная вероятность  $\alpha$ , что является отражением фундаментального свойства ошибок — вероятность ошибки падает с ростом ее величины. В подобных условиях иногда также пользуются понятием предельной погрешности  $\Delta$ , принимая, что  $\zeta = \Delta$ , если  $\zeta$  соответствует значению доверительной вероятности, близкой к 1 (например, при  $\alpha = 0,95$  или  $\alpha = 0,99$ ).

При выполнении теплофизических исследований к задаче об оценке погрешностей с заданной доверительной вероятностью при-

ходится возвращаться неоднократно. В типичном случае, когда экспериментальные значения получаются в результате создания новой установки и методики измерений, возникают следующие задачи:

1. Оценить случайную, систематическую и суммарную погрешность измерений на стадии проектирования установки.

2. Предусмотреть методы исключения наиболее вероятных систематических ошибок.

3. Выполнить тарировочные эксперименты (после создания установки) с целью проверки правильности априорных оценок погрешностей, выявления неучтенных факторов, влияющих на точность измерений и оценки этого влияния.

4. Оценить случайную, систематическую и суммарную погрешность для исследуемого параметра после его измерения.

5. Выявить наиболее достоверные количественные взаимосвязи между результатами измерений различных параметров.

6. Сравнить полученные результаты измерений с известными ранее и рекомендовать наиболее достоверные значения исследованных параметров (табличные данные) с учетом всех экспериментальных результатов.

Корректное решение этих задач возможно только на основе использования результатов теории ошибок и при учете специфики конкретных измерений.

#### 1.4. Обозначения

В соответствии с рекомендациями /5/ для обозначений измеряемых величин будем использовать буквы латинского алфавита. Погрешности будем обозначать буквами греческого алфавита. Обозначения оценок величин будем отличать от обозначения истинных величин добавлением знака  $\sim$  к соответствующему символу, например,  $\hat{A}$  - оценка истинного значения  $A$ . Среднее арифметическое будем обозначать с помощью черты над соответствующим символом. Например,  $\bar{X}$  - среднее арифметическое полученных значений  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ).

Кроме того, будем применять математические символы:  $M$  - математическое ожидание,  $D$  - дисперсия. Из обозначений,

применяемых для конкретных понятий приведем следующие:  $P$  - вероятность наступления события,  $\alpha$  - доверительная вероятность,  $q = 1 - \alpha$  - уровень значимости,  $\sigma^2$  - дисперсия случайной величины,  $\sigma$  - среднее квадратическое отклонение.

Обозначения погрешностей, а также их границ приведены в табл. I.

Таблица I

Обозначения погрешностей измерений

Наименование погрешностей	Обозначение	
	Погрешность	Границы погрешности
Систематическая	$\vartheta$	$\theta$
Случайная	$\psi$	$\Psi$
Общая абсолютная	$\zeta$	$\Delta$
Общая относительная	$\varepsilon$	$\delta$

## 2. СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

### 2.1. Распределения случайных величин

Случайные погрешности представляют из себя частный случай случайных величин. Основным и определяющим <sup>свойством</sup> случайных величин является непредсказуемость каждого отдельного случайного явления. Но большая совокупность случайных явлений подчиняется определенным закономерностям. Эти закономерности статистические, вероятные. Они устанавливаются на основе методов математической статистики и теории вероятности.

Полностью свойства случайной величины описываются функцией распределения  $F(X)$ , которая определяет вероятность того, что случайная величина  $X$  будет меньше  $x$

$$F(x) = P\{X < x\}. \quad (4)$$

Функция распределения - неубывающая, определенная так, что  $F(-\infty) = 0$ , а  $F(+\infty) = 1$ .

Наряду с функцией распределения, называемой кумулятивной или интегральной, широко применяется дифференциальная, обычно называемая плотностью распределения  $f(x)$

$$f(x) = dF(x)/dx. \quad (5)$$

На рис. I приведены примеры различных стандартных аппроксимаций плотностей распределения, используемых в практике обработки экспериментальных данных.

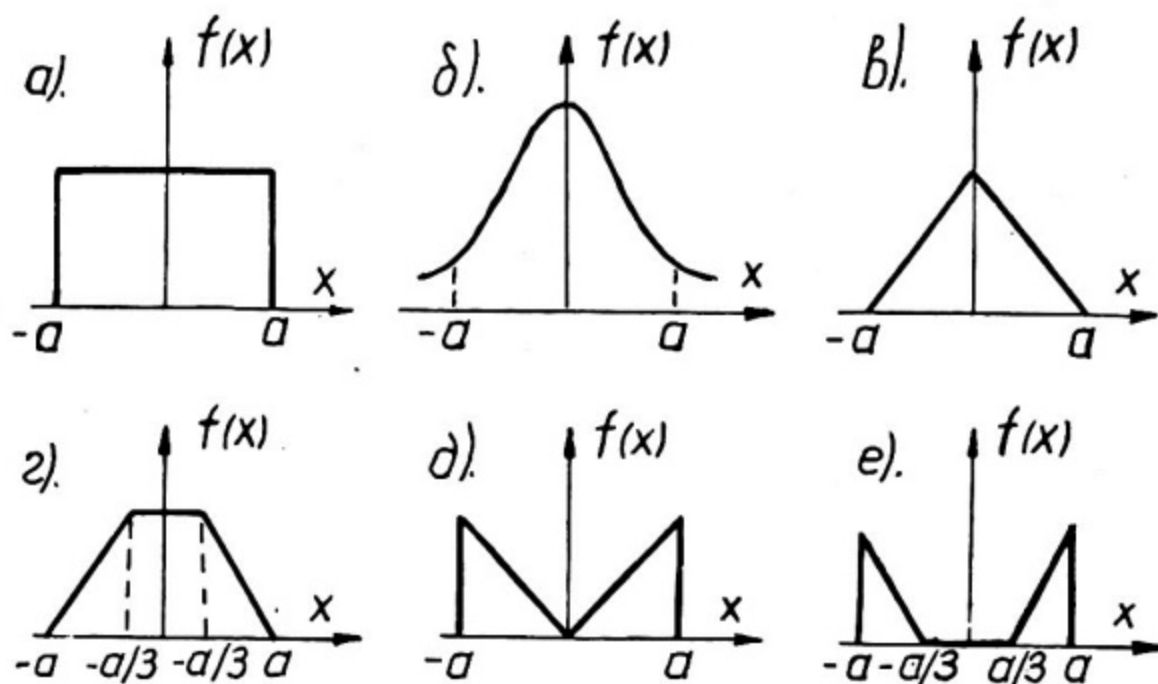


Рис. I. Стандартные аппроксимации плотностей функций распределения погрешностей:  
 а - равномерная; б - нормальная (усеченная); в - треугольная (Симпсона); г - трапецеидальная; д - антимодальная I; е - антимодальная II

Функции распределения являются полными характеристиками случайных величин, но они не всегда удобны для практики. Поэтому для описания случайных величин применяют их числовые характеристики. С этой целью используются моменты  $k$ -го порядка случайных величин: начальные  $m_k$  и центральные:  $\mu_k$ —

$$m_k = M[X^k] = \int_{-\infty}^{\infty} x^k \cdot f(x) dx;$$

$$\mu_k = M[(X - M[X])^k] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M[X])^k \cdot f(x) dx.$$

Из начальных моментов чаще всего используется первый ( $k = 1$ )

$$m_1 = M[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) \cdot dx, \quad (6)$$

который представляет из себя математическое ожидание измеримой величины, соответствующее истинному значению этой величины при отсутствии систематических ошибок.

Из центральных моментов особо важную роль играет второй ( $k=2$ ) - дисперсия случайной величины

$$\mu_2 = D[X] = \sigma^2 = M[(X - m_1)^2] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_1)^2 \cdot f(x) dx. \quad (7)$$

Положительный квадратный корень из дисперсии представляет из себя среднее квадратическое отклонение случайной величины

$$\sigma = \sqrt{D[X]}.$$

Равномерное распределение (рис. I, а) определяет равную вероятность обнаружить случайную величину в ограниченном интервале от  $b$  до  $a$ . Плотность распределения при этом

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < b \text{ и } x > a, \\ 1/(a-b) & \text{при } b \leq x \leq a. \end{cases} \quad (8)$$

Для центрированного равномерного распределения ( $b = -a$ ) математическое ожидание  $M[X] = 0$ , а дисперсия  $\sigma^2 = a^2/3$

Такой закономерности случайные величины обычно подчиняются, если из общей их совокупности отбрасываются элементы со значениями  $X < -\sigma$  и  $X > \sigma$ . Если такого направленного воздействия на совокупность случайных величин нет, то более "естественным" представляется распределение, в котором присутствуют элементы с любым численным значением  $X$ , но вероятность их появления тем меньше, чем больше отклонение этого значения от математического ожидания  $A$ . Подобным качеством в наибольшей

мере обладает так называемое нормальное распределение Гаусса (рис. I, б), плотность распределения которого описывается двумя параметрами – математическим ожиданием  $A$  и среднеквадратичным отклонением (стандартом)  $\sigma$  :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} \cdot e^{-\frac{(x-A)^2}{2\sigma^2}} \quad (9)$$

При расчетах широко используется нормированное нормальное распределение, которое получается при переходе к случайной величине  $Z = (X - A) / \sigma$  :

$$f(z) = (2\pi)^{-1/2} \cdot e^{-z^2/2} = N(0,1), \quad (10)$$

т.е. нормальное распределение, у которого математическое ожидание  $A = 0$ , а дисперсия  $\sigma^2 = 1$ . Ввиду особой роли нормального распределения в решении задач оценки погрешностей, о его происхождении и свойствах следует сказать отдельно.

## 2.2. Нормальное распределение

Известно несколько способов обоснования нормального распределения для случайных величин. При этом используются достаточно "очевидные" определяющие это распределение свойства. В частности применительно к случайным погрешностям можно принять:

1. Случайные погрешности могут принимать непрерывный ряд значений.

2. При большом числе измерений погрешности одинаковой величины, но разного знака встречаются одинаково часто (свойство компенсации).

3. Частота появления погрешностей уменьшается с увеличением величины погрешности, иначе говоря большие погрешности наблюдаются реже, чем малые.

Подобные "естественные" предположения в сочетании с некоторыми дополнительными позволяют оценить частоту появления погрешностей, т.е. установить явный вид наиболее "естественного" нормального распределения  $f(x)$ . Следуя, например, А.Н.Крылову /9/, можно записать для вероятности попадания случайной величины в интервал  $x \div x + dx$

$$dP = \varphi(x^2) dx, \quad \text{где } \varphi(x^2) \equiv f(x),$$

т.к.  $f(x)$  должна быть четной в силу свойства компенсации.

Тогда, например, вероятность попадания пули в полосу мишени

$$x \div x + dx \quad (\text{рис.2}) \quad dP_x = \varphi(x^2) dx.$$

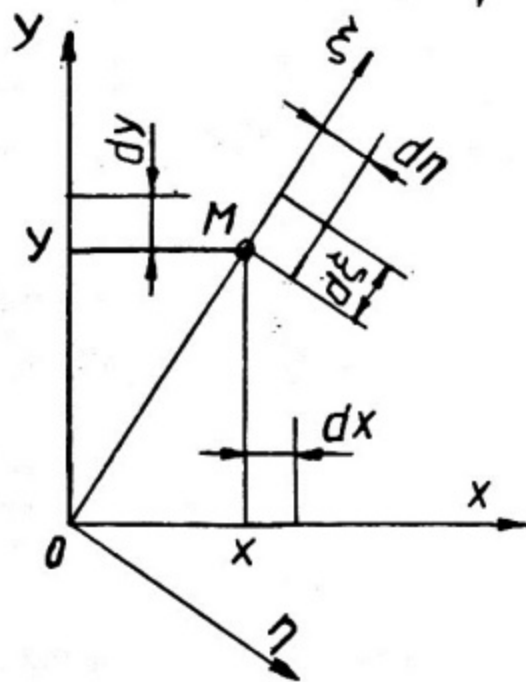


Рис.2. Системы координат  $X, Y$  и  $\xi, \eta$  на плоскости мишени

Пусть вероятность попадания пули в любую малую площадку мишени  $dx \cdot dy$  зависит только от расстояния этой площадки до центра мишени ( $X = 0, Y = 0$ ). Тогда вероятность попадания пули в любую узкую полосу зависит только от кратчайшего расстояния этой полосы до центра мишени. В частности, вероятность попадания пули в полосу  $y \div y + dy$

$$dP_y = \varphi(y^2) dy.$$

Вероятность попадания пули в прямоугольник  $x \div x + dx, y \div y + dy$  есть произведение вероятностей  $dP_{xy} = \varphi(x^2) \cdot \varphi(y^2) \cdot dx \cdot dy$

Введем новые оси координат  $\xi$  и  $\eta$ , так что координаты точки  $X, Y$  (точки  $M$ ) соответствуют координатам  $\xi = \sqrt{x^2 + y^2}, \eta = 0$ .

Очевидно, что вероятность попадания пули в равновеликий прямоугольник  $0 \div d\eta$ ;  $\xi \div \xi + d\xi$  (т.е. при  $d\eta \cdot d\xi = dx \cdot dy$ ) равна

$$dP_{\xi\eta} = dP_{xy} = \varphi(0) \cdot \varphi(\xi^2) \cdot d\eta \cdot d\xi =$$

$$= \varphi(0) \cdot \varphi(x^2 + y^2) \cdot dx \cdot dy = \varphi(x^2) \cdot \varphi(y^2) \cdot dx \cdot dy.$$

Откуда  $\varphi(x^2) \cdot \varphi(y^2) = \varphi(0) \cdot \varphi(x^2 + y^2)$

$$\frac{1}{\varphi(x^2)} \frac{d\varphi(x^2)}{dx^2} = \frac{1}{\varphi(x^2 + y^2)} \frac{d\varphi(x^2 + y^2)}{dx^2} = \frac{1}{\varphi(x^2 + y^2)} \frac{d\varphi(x^2 + y^2)}{d(x^2 + y^2)},$$

$$\text{т.е. } (d\varphi/dx^2)/\varphi(x^2) = b = \text{const}, \quad (\text{II})$$

независимо от величины аргумента  $x^2$ . Теперь из (II) следует  $\varphi(x^2) = C \exp(bx^2)$ . Учитывая, что  $\varphi(x^2) \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$  положим  $b = -1/(2\sigma^2)$  и из условия нормировки  $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x^2) dx = 1$  постоянная  $C = 1/(\sqrt{2\pi}\sigma)$ .

В итоге получаем центрированное нормальное распределение

$$f(x) = \varphi(x^2) = \exp[-x^2/(2\sigma^2)]/(\sqrt{2\pi}\sigma), \quad (\text{I2})$$

которое совпадает с выражением (9), если математическое ожидание случайной величины  $A = 0$ .

Можно показать (п.2.4), что при нормальном распределении погрешностей наиболее вероятной величиной серии результатов измерений является средне-арифметическое значение этих измерений. Это утверждение может быть взято за исходное при выводе распределения Гаусса. Именно так поступал сам Гаусс. Однако следует заметить, что при любом выводе распределения (I2) обнаруживаются дополнительные допущения, которые ставят под сомнение строгость вывода. Кроме того, исходные "естественные" предположения о свойствах случайных погрешностей не всегда выполняются в реальных измерениях. Существо проблемы образно отражает замечание А. Пуанкаре об основных положениях классической теории ошибок, что "экспериментаторы считают их строго доказанными математиками, а математики считают их оправданными экспериментом". Все сказанное заставляет считать нормаль-

ное распределение погрешностей гипотезой, которая может не подтверждаться в конкретных экспериментах и нуждается в проверке.

### 2.3. Свертка распределений. Предельные теоремы

Пусть  $X$  и  $Y$  две случайные величины с плотностями распределения  $f_1(X)$  и  $f_2(Y)$  соответственно, элементы которых не зависят друг от друга. Тогда  $Z = X + Y$  — тоже случайная величина с некоторой плотностью распределения  $f(Z)$ .

Подсчитаем число элементов величины  $Z$  в интервале  $\Delta Z$ . Очевидно, что в этот интервал попадут элементы, представляющие из себя сумму элементов величины  $X$ , лежащих в интервале  $X \div X + dx$  и элементов величины  $Y$ , лежащих в интервале  $Y \div Y + dy$ , причем  $Y = Z - X$ , а  $dy = \Delta Z - dx$ . Число значений первого слагаемого  $f_1(X)dx$ , второго слагаемого  $f_2(Z-X)(\Delta Z - dx)$ , а число различных сумм из этих слагаемых

$$f_1(x) \cdot f_2(z-x)(\Delta z - dx) \cdot dx.$$

Мы взяли в качестве первого слагаемого только элементы в интервале  $X \div X + dx$ . Ясно, что для того, чтобы получить полное число элементов величины  $Z$  в интервале  $\Delta Z$  (т.е.  $f(Z)\Delta Z$ ) надо проинтегрировать полученное выражение по всем значениям  $X$ , т.е.

$$f(z) \cdot \Delta z = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(z-x)(\Delta z - dx) dx, \quad (I3)$$

откуда, учитывая, что при интегрировании принимается  $dx \ll \Delta z$

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(x) \cdot f_2(z-x) \cdot dx. \quad (I4)$$

Интеграл в правой части (I4) называется сверткой функций  $f_1(X)$  и  $f_2(X)$ . Таким образом, плотность распределения вероятностей суммы двух независимых случайных величин равна свертке плотностей распределения этих величин.

Нетрудно показать, что свертка двух нормальных распределений с дисперсиями  $\sigma_x^2$  и  $\sigma_y^2$  есть также нормальное распре-

деление с дисперсией  $\sigma_x^2 + \sigma_y^2$ . Этот результат легко обобщается на свертку любого числа нормальных распределений.

Рассмотрим теперь последовательность независимых случайных величин, равномерно распределенных на интервале  $[-0,5; 0,5]$ . Каждая из этих величин  $X_k$  имеет плотность распределения

$$f_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } -0,5 \leq x \leq 0,5, \\ 0 & \text{при остальных } x. \end{cases}$$

Плотность распределения  $f_2(x)$  величины

$$Y_2 = X_1 + X_2$$

равна свертке плотностей распределения для  $X_1$  и  $X_2$

$$f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \cdot f_1(x-y) dy = \int_{-0,5}^{0,5} f_1(x-y) dy = \int_{x-0,5}^{x+0,5} f_1(z) dz.$$

Вычисление этого интеграла дает

$$f_2(x) = \begin{cases} 1+x & \text{при } -1 < x < 0, \\ 1-x & \text{при } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{для остальных } x. \end{cases}$$

Плотность  $f_3(x)$  для случайной величины

$$Y_3 = X_1 + X_2 + X_3$$

равна свертке  $f_2(x)$  и  $f_1(x)$

$$f_3(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(y) \cdot f_2(x-y) dy = \int_{-0,5}^{0,5} f_2(x-y) dy = \int_{x-0,5}^{x+0,5} f_2(u) du.$$

Графики функций  $f_k(x)$  ( $k=1,2,3$ ) представлены на рис. 3. Нетрудно видеть, что уже для величины  $Y_3$  плотность распределения  $f_3(x)$  напоминает график плотности нормального распределения.

Приведенный пример демонстрирует природу "естественности" нормального распределения - распределение случайной величины тем ближе к нормальному, чем больше случайных величин она в себя "впитала", т.е. чем больше случайных процессов и факторов оказали на нее влияние.

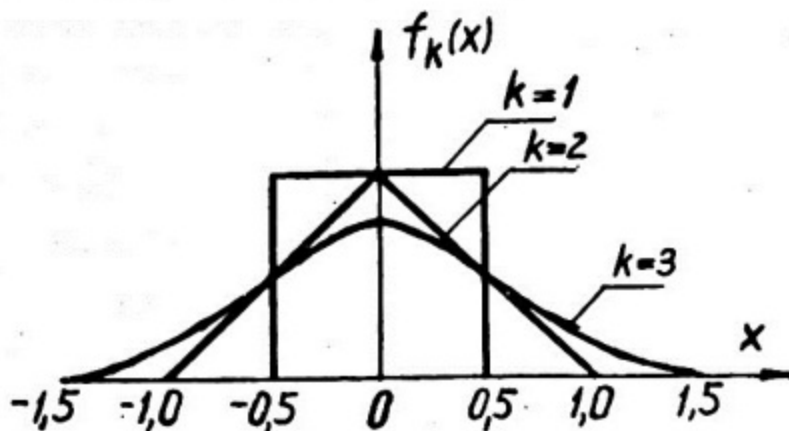


Рис. 3. Свертки функций плотностей равномерных распределений

Более строго этот факт следует из предельных теорем теории вероятности, которые разделяются на две группы. В теоремах первой группы устанавливаются предельные свойства средних арифметических случайных величин. Эти теоремы часто объединяют общим названием "закон больших чисел". Наиболее важная теорема этой группы — теорема Чебышева утверждает, что при достаточно большом числе слагаемых  $k$  вероятность отклонения среднего арифметического значения случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий на любую малую величину  $\epsilon$  при увеличении  $k$  может быть достаточно малой.

К предельным теоремам второй группы относятся теоремы, устанавливающие предельные свойства закона распределения сумм независимых слагаемых. Наиболее общая теорема этой группы — центральная предельная теорема Ляпунова, согласно которой сумма большого числа независимых случайных величин имеет распределение, близкое к нормальному, если все слагаемые равномерно малы по сравнению с суммой. Практическая ценность этой теоремы состоит в том, что ее вывод справедлив и для конечного числа слагаемых. Как показывает приведенный выше пример, уже несколь-

ко слагаемых приводят к распределению, мало отличающемуся от нормального, а если число слагаемых более пяти, то результат свертки практически всегда точно нормален.

В огромном числе случаев теорема Ляпунова обосновывает предположение о нормальном законе распределения самих измеряемых величин, а не только их средних. На результат отдельного измерения влияют очень многие причины, каждая из которых может быть привела бы к закону, отличному от нормального, но в результате свертки распределений, порождаемых разными причинами, суммарное распределение становится нормальным. Практически для всех теплофизических измерений это оказывается справедливым.

#### 2.4. Оценка параметров нормального распределения

Если нормальное распределение измеряемой величины достаточно вероятно, то его параметры можно оценить по ограниченному числу ( $n$ ) экспериментальных данных (по "экспериментальной выборке" объема  $n$ ).

К оценкам, полученным по статистическим данным предъявляются требования состоятельности, несмещенности и эффективности.

Оценка  $\tilde{A}$  называется состоятельной, если при увеличении числа наблюдений она стремится к истинному значению оцениваемой величины  $A$  (по вероятности сходится к  $A$ ):

$$\tilde{A}_{n \rightarrow \infty}(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow A.$$

Оценка  $\tilde{A}$  называется несмещенной, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой величины, т.е. при

$$M[\tilde{A}] = A.$$

В том случае, когда можно найти несколько несмещенных оценок, лучшей из них, естественно, считается та, которая имеет меньшую дисперсию. Чем меньше дисперсия оценки, тем более эффективной называют эту оценку.

Для оценки параметров нормального распределения (истинного значения  $A$  и дисперсии  $\sigma^2$ ) воспользуемся методом наи-

большого правдоподобия /5/.

Элементарная вероятность получить некоторый результат наблюдения  $X_i$  в интервале  $X_i \pm \Delta X_i/2$  равна  $f_i(x_i, A, \sigma) \Delta X_i$ . Все результаты наблюдений независимы. Поэтому вероятность встретить все экспериментально полученные наблюдения при  $\Delta X_1 = \Delta X_2 = \dots = \Delta X_n$  равна

$$P_n = \prod_{i=1}^n f_i(x_i, A, \sigma) \Delta x_i \cdot \Delta x_2 \cdot \dots \cdot \Delta x_n.$$

Идея метода наибольшего правдоподобия состоит в том, что за оценки параметров распределения берут такие значения, которые дают максимум вероятности  $P_n$ . Задача решается как обычно путем приравнивания нулю частных производных  $P_n$  по оцениваемым параметрам. Постоянные множители не влияют на решение, и поэтому рассматривают только произведение функций  $f_i$ , которое называют функцией правдоподобия

$$L(x_1, \dots, x_n, A, \sigma) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i, A, \sigma).$$

Для имеющейся группы наблюдений  $x_1, x_2, \dots, x_n$  значения функций плотности вероятностей будут

$$f_i(x_i, A, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x_i - A)^2}{2\sigma^2}}$$

и, следовательно,

$$L = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\right)^n \exp\left[-\frac{\sum (x_i - A)^2}{2\sigma^2}\right].$$

Для нахождения максимума  $L$  удобно использовать  $\ln L$ , и из условий

$$\frac{\partial \ln L}{\partial A} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - A) = 0;$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - A)^2 = 0$$

получим оценки для  $A$  и  $\sigma^2$

$$\tilde{A} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{X};$$

(I5)

$$\tilde{\sigma}_*^2 = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / n. \quad (I6)$$

Проверим являются ли полученные оценки состоятельными и несмещенными.

Математическое ожидание  $M(x_i) = A$ , так как все  $x_i$  относятся к одному и тому же распределению. Поэтому

$$M[\tilde{A}] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[x_i] = A.$$

Следовательно  $\tilde{A}$  является несмещенной оценкой  $A$ . Она является и состоятельной оценкой, так как при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{A} \rightarrow A$  по закону больших чисел.

Перейдем к исследованию  $\tilde{\sigma}_*^2$ . Преобразуем соотношение (I6)

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma}_*^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [(x_i - A) - (\bar{x} - A)]^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - A)^2 - \\ &- \frac{2}{n} (\bar{x} - A) \sum_{i=1}^n (x_i - A) + (\bar{x} - A)^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - A)^2 - (\bar{x} - A)^2, \end{aligned}$$

т.к. очевидно  $\frac{1}{n} \sum (x_i - A) = \bar{x} - A$

Для случайной величины  $\bar{x}$  дисперсия

$$D[\bar{x}] = M[(\bar{x} - A)^2] = D\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i\right] = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D[x_i] = \frac{1}{n} D[x_i]$$

или

$$D[\bar{x}] = \sigma^2 / n. \quad (I7)$$

Теперь математическое ожидание оценки  $\tilde{\sigma}_*^2$ :

$$M[\tilde{\sigma}_*^2] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n M[(x_i - A)^2] - M[(\bar{x} - A)^2] = \sigma^2 - D[\bar{x}] = \frac{n-1}{n} \sigma^2.$$

Следовательно, полученная оценка  $\tilde{\sigma}_*^2$  является смещенной, но при  $n \rightarrow \infty$ ,  $M[\tilde{\sigma}_*^2] \rightarrow \sigma^2$ , т.е. она является состоятельной.

Чтобы исправить оценку, сделать ее несмещенной нужно  $\tilde{\sigma}_*^2$

умножить на поправочный множитель  $n/(n-1)$ . Тогда получим

$$\tilde{\sigma}^2 \equiv \tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (18)$$

Эта оценка тоже состоятельная, но как нетрудно проверить, уже несмещенная. Некоторое отклонение от максимума правдоподобия в данном случае для нас менее существенно, чем смещенность оценки. Выше мы уже говорили, что  $D[\bar{x}] = \sigma^2/n$ . Заменив  $\sigma^2$  ее оценкой  $\tilde{\sigma}^2$ , можно получить оценку дисперсии среднего

$$\tilde{\sigma}(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}. \quad (19)$$

Часто  $\tilde{\sigma}(\bar{x})$  обозначают символом  $S_{\bar{x}}$ .

## 2.5. Доверительные интервалы

Получив оценку  $\tilde{A}$ , представляет интерес выяснить насколько она может изменяться при повторных измерениях, выполняемых в тех же условиях. Этот вопрос выясняется с помощью построения доверительного интервала для истинного значения измеряемой величины.

Доверительным интервалом называется интервал, который с заданной вероятностью, называемой доверительной, покрывает истинное значение измеряемой величины. Другими словами, доверительным интервалом называют такой интервал  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ , вероятность попадания в который случайной величины  $\tilde{A}$  равна  $\alpha$ , т.е.

$$P\{|A - \tilde{A}| \leq \varepsilon\} = \alpha.$$

Связь между  $\alpha$  и  $\varepsilon$  определяется законом распределения случайной величины  $\tilde{A}$ . Наиболее просто доверительный интервал устанавливается для нормального распределения, если его параметры  $A$  и  $\sigma_A^2$  известны. В этом случае

$$f(\tilde{A}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_A} \exp\left[-\frac{(\tilde{A} - A)^2}{2\sigma_A^2}\right],$$

следовательно,  $P\{|\tilde{A} - A| \leq \varepsilon\} = P\{A - \varepsilon \leq \tilde{A} \leq A + \varepsilon\} =$   

$$= \int_{A-\varepsilon}^{A+\varepsilon} f(\tilde{A}) d\tilde{A} = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma_{\tilde{A}}} \int_{A-\varepsilon}^{A+\varepsilon} \exp[-(\tilde{A}-A)^2 / (2\sigma_{\tilde{A}}^2)] d\tilde{A}.$$

Сделав замену переменной в последнем интеграле  $t = (\tilde{A} - A) / \sigma_{\tilde{A}}$ , получим

$$P\{|\tilde{A} - A| \leq \varepsilon\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-z}^z e^{-t^2/2} dt = 2\Phi(z),$$

где  $Z = \varepsilon / \sigma_{\tilde{A}}$  - доверительный интервал в значениях средне-квадратического отклонения (квантиль нормального распределения), а  $\Phi(z) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_0^z \exp(-t^2/2) dt$  - табулированная функция Лапласа (табл.2). Таким образом, окончательно находим следующую связь между доверительным интервалом  $Z = Z_{\alpha}$  и доверительной вероятностью  $\alpha$

$$\Phi(z_{\alpha} = \varepsilon / \sigma_{\tilde{A}}) = \alpha / 2. \quad (20)$$

Если задаться круглыми значениями аргумента функции Лапласа, т.е. положить

$$\varepsilon = \sigma_{\tilde{A}}; 2\sigma_{\tilde{A}}; 3\sigma_{\tilde{A}},$$

то в соответствии с табл.2 для доверительной вероятности соответственно получим

$$\alpha = 0,683; 0,954; 0,9973.$$

Обычно считают, что вероятность 0,997 практически равна 1 и погрешность оценки  $\tilde{A}$  не может выйти за интервал  $3\sigma_{\tilde{A}}$  (правило "трех сигм").

Значения нормированной функции Лапласа  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^z e^{-\frac{y^2}{2}} dy$

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0398	0793	1179	1554	1915	2258	2580	2881	3159
1,0	3413	3643	3849	4032	4192	4332	4452	4554	4641	4713
2,0	4773	4821	4861	4893	4918	4938	4953	4965	4974	4981
3,0	4987	4990	4993	4995	4997	4998	4998	4999	4999	5000

В редких случаях, когда распределение случайной величины существенно отличается от нормального, доверительные интервалы можно строить на основе неравенства Чебышева, которое констатирует: вероятность, что отклонение случайной величины  $X$  от его математического ожидания  $A$  превосходит  $\varepsilon$ , меньше  $\sigma_x^2/\varepsilon$ :

$$P\{|X-A| \geq \varepsilon\} \leq \sigma_x^2/\varepsilon, \quad (21)$$

где  $\varepsilon > 0$ , а  $\sigma_x^2$  дисперсия величины  $X$ . Нетрудно убедиться, что это неравенство справедливо при любой функции распределения случайной величины  $X$ .

По определению плотности вероятности  $f(x)$

$$P\{|X-A| \geq \varepsilon\} = \int_{|x-A| > \varepsilon} f(x) dx.$$

Тогда

$$P\{|X-A| \geq \varepsilon\} \leq \int_{|x-A| > \varepsilon} f(x) \frac{(x-A)^2}{\varepsilon^2} dx \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x-A)^2 f(x) dx = \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2},$$

где при написании первого неравенства учтено, что в рассматриваемой области интегрирования отношение  $(x-A)^2/\varepsilon^2 > 1$ , а второе неравенство является следствием того, что при увеличении области интегрирования неотрицательной функции значение интеграла может только увеличиться. Положим теперь, что  $\varepsilon = t \cdot \sigma_x$ , тогда

$$P\{|X-A| > t \cdot \sigma_x\} \leq 1/t^2. \quad (22)$$

Это означает, что событие  $|X-A| < t \cdot \sigma_x$  практически достоверно с уровнем значимости  $q = 1 - \alpha = 1/t^2$ .

Например, для  $t = 3$  получим  $P\{|X-A| > 3\sigma_x\} \leq 1/9$ .

Для большинства случайных величин эта оценка очень груба. Например, для нормальной величины (табл.2).

$$P\{|X-A| > 3\sigma_x\} \leq 1 - 0,9973 = 0,0027.$$

## 2.6. Распределение Стьюдента и " $\chi^2$ "

Параметры нормального распределения измеряемой величины обычно заранее неизвестны и оцениваются по выборке экспериментальных значений объема  $n$  (по формулам (15), (18)).

Усложнение вычисления доверительного интервала для оценки математического ожидания в данном случае состоит в том, что хотя  $\bar{A}$  является нормальной случайной величиной с математическим ожиданием  $A$  и дисперсией  $\sigma_x^2/n$ , величина этой дисперсии заранее неизвестна и, следовательно, вычисление доверительной вероятности, как функции доверительного интервала по формуле (20), невозможно. Правда, при большом объеме выборки можно считать, что  $\sigma_x = \sqrt{\tilde{\sigma}_x^2}$  и применить эту формулу, однако при малых выборках такая замена недопустима и может привести к существенным ошибкам.

Выход из этого затруднения нашел Стьюдент, обративший внимание на то, что отношение  $t = (\bar{X} - A) / S_{\bar{X}}$  имеет закон распределения, не зависящий от параметров  $A$  и  $\sigma_x$  закона нормального распределения случайной величины  $X$ . Действительно, заменив оценки  $\bar{A}$  и  $\tilde{\sigma}_x^2$  их выражениями из (15) и (18), получим

$$t = \frac{\bar{x} - A}{\sqrt{\tilde{\sigma}_x^2}} \sqrt{n} = \left[ \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n (x_i - A) \right] / \sqrt{\sum_{i=1}^n \frac{(x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

Если положить  $y_i = (x_i - A) / \sigma_x$ , то исследуемое выражение будет содержать только центрированные случайные величины  $y_i$ . Действительно,

$$t = \frac{(\sigma_x / \sqrt{n}) \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{[1/(n-1)] \cdot \sum_{i=1}^n [(x_i - A) - (\bar{x} - A)]^2}} = \frac{\sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot \sum_{i=1}^n y_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n [y_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i]^2}}$$

не зависит от  $A$  и  $\sigma_x$ , так как плотность распределения для  $y_i$  представляет из себя нормированное нормальное распределение  $N(0,1)$  (10). В результате распределение случайной величины  $t$  зависит только от объема выборки  $n$ . Явный вид плотности этого распределения, называемого распределением Стьюдента с  $n - 1$  степенями свободы

$$f_{n-1}(t) = \frac{\Gamma(n/2) [1 + t^2/(n-1)]^{-n/2}}{\sqrt{\pi(n-1)} \cdot \Gamma(\frac{n-1}{2})} \quad (23)$$

При  $n \geq 8$  распределение Стьюдента практически совпадает с нормальным. Для функции  $S_{n-1}(t) = \int_0^t f_{n-1}(x) dx$  составлены таблицы. Доверительный интервал  $[A - t_q S_{\bar{x}}; A + t_q S_{\bar{x}}]$  отвечает вероятности

$$P\{|\bar{x} - A| \leq t_q S_{\bar{x}}\} = \alpha = 2S_k(t_q), \quad (24)$$

где  $t_q$  -  $q$  - процентная точка распределения Стьюдента. Значения  $t_q$  определяют по числу степеней свободы  $k = n - 1$  и уровню значимости  $q = 1 - \alpha$  (табл. 3).

Таблица 3

Значения  $q$  - процентных точек распределения Стьюдента ( $t_q$ )

Число степеней свободы $k$	Уровень значимости $q = (1 - \alpha) 100\%$		
	10	5	1
1	6,31	12,71	63,66
2	2,92	4,30	9,92
3	2,35	3,18	5,84
4	2,13	2,78	4,60
5	2,02	2,57	4,03
6	1,94	2,45	3,71
7	1,90	2,36	3,50
8	1,86	2,31	3,36
10	1,81	2,23	3,17
12	1,78	2,18	3,06
16	1,75	2,12	2,92
20	1,72	2,09	2,84
30	1,70	2,04	2,75
$\infty$	1,64	1,96	2,58

Можно также показать, что выражение (18) для  $\tilde{\sigma}_x^2$  преобразуется к виду  $\sigma_x^2 \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 / (n-1)$ , где  $y_i$  - случайные величины с распределением  $N(0,1)$  (10). Распределение величины  $\chi^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$  зависит только от параметра  $n$  и называется "распределением  $\chi^2$ " с  $n$  степенями свободы.

В итоге случайная величина  $\tilde{\sigma}_x^2(n-1)/\sigma_x^2$  имеет распределение  $\chi^2$  с  $n-1$  степенями свободы. Доверительный интервал для дисперсии в этом случае:

$$P \left\{ \frac{n-1}{\chi_H^2} \tilde{\sigma}_x^2 < \sigma_x^2 < \frac{n-1}{\chi_B^2} \tilde{\sigma}_x^2 \right\} = \alpha. \quad (25)$$

Такие доверительные интервалы строят для среднего квадратического отклонения

$$P \left\{ \frac{\sqrt{n-1}}{\chi_H} \tilde{\sigma}_x < \sigma_x < \frac{\sqrt{n-1}}{\chi_B} \tilde{\sigma}_x \right\} = \alpha. \quad (26)$$

Для определения  $\chi_H$  и  $\chi_B$  используется таблица  $q$  - процентных точек для  $\chi^2$  распределения (табл. 4).  $\chi_H^2$  определяется по значению  $q_H = (1-\alpha)/2$ , а  $\chi_B^2$  по значению  $q_B = (1+\alpha)/2$  при числе степеней свободы  $k = n - 1$ .

Таблица 4

Значения  $q$  - процентных точек для  $\chi^2$  распределения

Число степеней свободы, $k$	Уровень значимости $q$ , %						
	99	95	90	50	10	5	1
	2	3	4	5	6	7	8
1	0,00016	0,00333	0,0158	0,455	2,706	3,841	6,635
2	0,0201	0,103	0,211	1,386	4,605	5,991	9,210
3	0,115	0,352	0,584	2,366	6,251	7,815	11,345
4	0,297	0,711	1,064	3,357	7,779	9,488	13,277
5	0,554	1,145	1,610	4,351	9,236	11,070	15,086
6	0,872	1,535	2,204	5,348	10,645	12,592	16,812
7	1,239	2,167	2,833	6,346	12,017	14,067	18,475
10	2,558	3,940	4,865	9,342	15,987	18,307	23,209

15	5,229	7,261	8,547	14,339	22,307	24,996	30,578
20	8,260	10,851	12,443	19,337	28,412	31,410	37,566
30	14,953	18,493	20,599	29,336	40,256	43,773	50,892

## 2.7. Косвенные измерения

Как уже отмечалось, при косвенных измерениях искомое значение исследуемой величины  $Z$  находят на основании известной зависимости (расчетной формулы) между этой величиной и непосредственно измеряемыми величинами  $X, Y, \dots, U$ , называемыми аргументами.

В простейшем случае

$$Z = X + Y, \quad (27)$$

т.е. исследуемая величина является суммой двух измеряемых величин  $X$  и  $Y$ . Если в процессе  $N$  измерений величины  $X$  получены значения  $X_1, X_2, \dots, X_N$ , а в процессе  $K$  измерений величины  $Y$  соответственно  $Y_1, Y_2, \dots, Y_K$ , то абсолютные ошибки этих измерений

$$\psi_{x1} = X_1 - X_0; \quad \psi_{x2} = X_2 - X_0, \dots, \quad \psi_{xN} = X_N - X_0;$$

$$\psi_{y1} = Y_1 - Y_0; \quad \psi_{y2} = Y_2 - Y_0, \dots, \quad \psi_{yK} = Y_K - Y_0,$$

где  $X_0$  и  $Y_0$  - истинные значения измеряемых величин  $X$  и  $Y$ . Если измерения обоих параметров  $X$  и  $Y$  независимы, то возможные значения случайных ошибок величины  $Z = X + Y$  можно записать в виде

$$\psi_{x1} + \psi_{y1}; \quad \psi_{x1} + \psi_{y2}; \quad \dots; \quad \psi_{x1} + \psi_{yK}$$

$$\psi_{x2} + \psi_{y1}; \quad \psi_{x2} + \psi_{y2}; \quad \dots; \quad \psi_{x2} + \psi_{yK}$$

$$\psi_{xN} + \psi_{y1}; \quad \psi_{xN} + \psi_{y2}; \quad \dots; \quad \psi_{xN} + \psi_{yK}.$$

Сумма квадратов всех  $NK$  значений случайной погрешности величины  $Z$

$$\begin{aligned} \sum_{ij} (\psi_{xi} + \psi_{yj})^2 &= \sum_{ij} (\psi_{xi}^2 + 2\psi_{xi}\psi_{yj} + \psi_{yj}^2) = \\ &= K \sum_i \psi_{xi}^2 + N \sum_j \psi_{yj}^2 + 2 \sum_i \psi_{xi} \sum_j \psi_{yj}. \end{aligned}$$

Но в силу равновероятности ошибок  $\psi_{xi}$  и  $\psi_{yj}$  любого знака  $\sum \psi_{xi} \rightarrow 0$  и  $\sum \psi_{yj} \rightarrow 0$ . Поэтому, учитывая, что оценка дисперсии случайных величин

$$\tilde{\sigma}_z^2 = \frac{1}{NK} \sum_{ij} (\psi_{xi} + \psi_{yj})^2; \tilde{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_i \psi_{xi}^2; \tilde{\sigma}_y^2 = \frac{1}{K} \sum_j \psi_{yj}^2, \quad (28)$$

получим  $\tilde{\sigma}_z^2 = \tilde{\sigma}_x^2 + \tilde{\sigma}_y^2$ , или при  $K \rightarrow \infty$  и  $N \rightarrow \infty$

$$\sigma_z^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2. \quad (29)$$

Последнее соотношение является отражением одной из основных теорем о дисперсии суммы независимых случайных величин

$$D[\sum_i x_i] = \sum_i D[x_i]. \quad (30)$$

В общем случае, когда  $Z = f(x, y, \dots, u)$  (31) ошибка исследуемой величины

$$\psi_z = z - z_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0) + \dots + f'_u(u - u_0) \quad (32)$$

Применяя к последнему выражению теорему о дисперсии суммы независимых случайных величин, получим

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{x_0}^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y_0}^2 \cdot \sigma_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)_{u_0}^2 \cdot \sigma_u^2. \quad (33)$$

Последнее соотношение соблюдается при любых законах распределения случайных величин  $X, Y, \dots, U$  в пределах справедливости приближения (32) (это приближение несправедливо, например, при  $f'_x = 0$  или при  $f'_x = \infty$ ).

Дисперсия относительной погрешности величины  $Z$  в соответствии с (31) и (33)

$$\sigma_{z\epsilon}^2 = \frac{\sigma_z^2}{z_0^2} = \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \ln x}\right)_{x_0}^2 \cdot \sigma_{x\epsilon}^2 + \dots + \left(\frac{\partial \ln f}{\partial \ln u}\right)_{u_0}^2 \cdot \sigma_{u\epsilon}^2, \quad (34)$$

где  $\sigma_{x\epsilon} = \sigma_x / x_0$  и т.д.  
 В частности, если  $f(x, y, \dots, u)$  - степенная функция своих аргументов, т.е.  $f = x^a \cdot y^b \cdot \dots \cdot u^h$ , то

$$\sigma_{z\epsilon} = a^2 \sigma_{x\epsilon}^2 + b^2 \sigma_{y\epsilon}^2 + \dots + h^2 \cdot \sigma_{u\epsilon}^2. \quad (35)$$

Поскольку величина  $\psi_z$  соотношения (32) является сверткой случайных величин  $f'_{x_0} \psi_x, f'_{y_0} \psi_y, \dots, f'_{u_0} \psi_u$ , в соответствии с предельными теоремами распределение  $\psi_z$  существенно ближе к нормальному, чем распределения исходных аргументов  $X, Y, \dots, U$ . Поэтому дисперсия  $\sigma_z^2$ , рассчитанная по соотношению (33) с большой вероятностью может использоваться для оценки доверительного интервала истинного значения  $Z_0$  в предположении о нормальности величины  $Z$ .

В некоторых случаях ошибки измерений различных аргументов оказываются взаимосвязанными. Корреляция между погрешностями измерений аргументов чаще всего возникает в тех случаях, когда измерения выполняются одновременно и изменения влияющих факторов (температуры воздуха, напряжения питания и т.п.) одновременно влияют на результаты измерений различных величин. При наличии корреляции между случайными величинами теорема о дисперсии суммы случайных величин (30) усложняется. При  $Z = X + Y$ ,

$$D[X+Y] = M[(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + 2(x-x_0)(y-y_0)] = \\ = D[X] + D[Y] + 2\rho_{xy} \sqrt{D[X] \cdot D[Y]},$$

где  $\rho_{xy} = \frac{M[(x-x_0)(y-y_0)]}{\sqrt{D[X] \cdot D[Y]}}$

-коэффициент корреляции.

В частности, в предельном случае, когда  $y - y_0 = C(x - x_0)$ , то  $\rho_{xy} = 1$  и  $\sigma_z^2 = D[X+Y] = (C+1)^2 D[X] = (C+1)^2 \sigma_x^2$  или  $\sigma_z = (C+1) \sigma_x = \sigma_x + \sigma_y$ , т.е. имеет место закон арифметического сложения среднего квадратического отклонения в отличие от закона сложения дисперсий

(29) для некоррелированных погрешностей.

В общем случае, когда  $Z = f(X, Y, \dots, W, U)$

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{x_0}^2 \cdot \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial Y}\right)_{y_0}^2 \cdot \sigma_y^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)_{u_0}^2 \cdot \sigma_u^2 +$$
$$+ 2 \rho_{xy} \frac{\partial f}{\partial X} \cdot \frac{\partial f}{\partial Y} \sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2} + \dots + 2 \rho_{wu} \frac{\partial f}{\partial W} \cdot \frac{\partial f}{\partial U} \sqrt{\sigma_w^2 \sigma_u^2}, \quad (36)$$

где коэффициенты корреляции  $\rho_{xy}, \dots, \rho_{wu}$  изменяются в пределах от  $-1$  до  $+1$  и  $\rho_{xy} = 0$ , если погрешности аргументов  $X$  и  $Y$  не коррелированы.

### 3. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ И СУММАРНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

#### 3.1. Обнаружение и исключение систематических погрешностей

Как уже отмечалось, основным и определяющим свойством систематических погрешностей является их взаимосвязь в серии измерений. При этом различают постоянные систематические погрешности и погрешности, изменяющиеся закономерно. Последние в свою очередь подразделяют на прогрессирующие (изменяющиеся монотонно), периодические и изменяющиеся со временем по определенному закону.

Наиболее трудно обнаружить постоянные систематические погрешности, которые наблюдаются наиболее часто. Существует ряд общих методов исключения систематических погрешностей. При этом следует иметь в виду, что вначале необходимо установить возможные причины их появления, а затем последовательно искать пути исключения их влияния.

Рассмотрим некоторые общие методы исключения систематических погрешностей.

##### I. Совершенствование расчетных формул

Одной из наиболее распространенных причин появления систематических методических погрешностей является использование расчетных формул, не учитывающих действия различных факторов,

влияющих однозначным образом на результаты измерений. Это влияние может быть оценено по разному, исходя из известных параметров искажающего фактора или в результате дополнительных измерений. Выбор способа такой оценки и ее целесообразность определяются соотношением между величиной систематической погрешности, обусловленной искажающим фактором и величиной результирующей систематической погрешности, обусловленной другими причинами при расчете величины исследуемого параметра по исходной и уточненной расчетным формулам. Переход к уточненной формуле оправдан только тогда, когда влияние искажающего фактора превышает дополнительную погрешность, связанную с его оценкой.

Поясним на примере. При измерении теплопроводности аксиальным методом (методом Лиса) на одном конце образца в виде стержня располагается нагреватель, тепло которого  $Q$  направляется вдоль стержня к другому его концу, на котором располагается холодильник. С помощью термопар, приваренных к внешней поверхности стержня измеряются температуры  $t_1$  и  $t_2$  в двух точках вблизи его концов  $X = X_1$  и  $X = X_2$ . По этим данным рассчитывается теплопроводность образца

$$\lambda = \frac{Q \cdot (x_2 - x_1)}{S \cdot (t_1 - t_2)}, \quad (37)$$

где  $S$  — сечение стержня.

Расчетная формула (37) не учитывает, что часть тепла при прохождении вдоль стержня теряется с его боковой поверхности. Из-за этого поле температуры по длине стержня искажается. Это искажение можно оценить, приварив еще одну термопару в середине образца ( $X = X_3$ ) и, пользуясь ее показаниями ( $t(X_3) = t_3$ ), учесть влияние боковых потерь тепла. Приближенная расчетная формула при этом имеет вид:

$$\lambda = \frac{Q \cdot (x_3 - x_1) / (x_2 - x_1) / (x_2 - x_3)}{S [(t_1 - t_3)(x_2^2 - x_1^2) - (t_1 - t_2)(x_3^2 - x_1^2)]}. \quad (38)$$

Сравнивая исходную (37) и уточненную (38) расчетные формулы, нетрудно убедиться, что при использовании уточненной формулы погрешность оценки теплопроводности вследствие неточности определения разностей температур в измеряемых точках и расстояний между ними возрастает в несколько раз. Если потери тепла с поверхности невелики, то значения теплопроводности, рассчитанные по обеим формулам, будут близки друг к другу, однако суммарная погрешность будет выше при использовании соотношения (38) и упрощенная формула (37) предпочтительнее.

Можно предложить однако другую расчетную формулу

$$\lambda = \frac{Q - (1/2)\alpha \Pi (x_2 + x_1)(t_1 - t_{cp})}{s(t_1 - t_2)} (x_2 - x_1), \quad (39)$$

где  $\Pi$  - периметр образца,  $x_1$  и  $x_2$  - координаты приваренных термопар, если за начало отсчета принять место контакта образца с нагревателем. В соотношении (39) боковые утечки тепла учитываются по разности температур между горячим концом образца  $t_1$  и окружающей средой  $t_{cp}$ , для определения которой осуществляются дополнительные измерения. Несмотря на то, что кроме этих дополнительных измерений необходимо еще знать коэффициент теплоотдачи  $\alpha$  (если образец окружен теплоизоляцией толщиной  $\delta_{из}$  с теплопроводностью  $\lambda_{из}$ , то  $\alpha = \lambda_{из}/\delta_{из}$ ), формулу (39) целесообразно использовать даже когда влияние боковых потерь сравнимо с другими систематическими погрешностями определения  $\lambda$ . Сравнивая соотношения (37) и (39), нетрудно заключить, что обоснованными критериями целесообразности использования уточненной формулы (39) является малость погрешности  $\delta_Q$  определения мощности тепла  $Q$ , направляемого в образец по сравнению с  $P = (t_1 - t_{cp})(1/2)\alpha \cdot \Pi \cdot (x_1 + x_2)$  и малость  $\delta_P$  по сравнению с погрешностью оценки  $Q$ .

## 2. Метод замещения и тарировка установок

Этот метод дает наиболее полное решение задачи. Он представляет из себя разновидность метода сравнения, когда сравнение осуществляется путем замены измеряемой величины известной величиной и так, чтобы при этом в состоянии и использовании всех средств измерения не происходило никаких изменений. Класси-

ческим примером использования этого метода является уравновешивание на весах взвешиваемого предмета любой тарой, а затем замена этого предмета (на той же чашке весов) точными гирями разновеса. При этом удается устранить погрешность, связанную с разной длиной плеч коромысла — несмотря на возможное их различие масса уравновешенных гирь разновеса точно равна массе взвешиваемого предмета.

Аналогично можно поставить измерение сопротивления резистора, располагая чувствительным, но не точным мостом, но точным магазином сопротивлений. Погрешность в подобных случаях сводится к погрешности параметров эталона (погрешности гирь разновеса в первом примере и магазина сопротивлений во втором).

Более общим случаем использования метода замещения можно считать проведение тарировочных экспериментов, при которых систематические ошибки обнаруживаются и исключаются только частично, поскольку заменить измеряемую величину равной и точно известной удается не всегда.

Так, при изучении температурной зависимости электросопротивления  $\rho(t)$  стержневых образцов бывает удобно воспользоваться известным значением этого параметра при комнатной температуре. В общем случае

$$\rho(t) = \frac{\Delta U \cdot s}{I \cdot \Delta X}, \quad (40)$$

где  $\Delta U$  — разность потенциалов на длине  $\Delta X$  при сечении стержня  $s$  и силе тока  $I$ , протекающего по нему. При комнатной температуре (тарировочный эксперимент)

$$\rho_k = \frac{\Delta U_k s}{I_k \cdot \Delta X} \quad (41)$$

и из (40) и (41)

$$\rho(t) = \rho_k \cdot \frac{\Delta U \cdot I_k}{\Delta U_k \cdot I} \quad (42)$$

При использовании последнего соотношения исключаются систематические ошибки, связанные с неопределенностью сечения образца и расстояния  $\Delta X$  между потенциометрическими выводами. Инструментальная погрешность, связанная с погрешностью измерения

разности потенциалов  $\Delta U$  и тока  $I$  исключается при этом только частично, поскольку в общем случае  $\rho(t) \neq \rho_k$ ,  $\Delta U \neq \Delta U_k$ ,  $I \neq I_k$ .

Наиболее распространенным случаем тарировки установок при проведении теплофизических измерений является замена исследуемого образца другим образцом (эталонным с близкими по значению параметрами). При этом расчетная формула для измеряемого параметра

$$A = F(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (43)$$

где  $x_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) — непосредственно измеряемые величины, меняющиеся при изменении исследуемого параметра (в частности при изменении температуры образца). При тарировке установки исследуемый параметр известен и равен  $A_э$ , при этом его оценка  $\tilde{A}_э = F(x_{1э}, \dots, x_{nэ})$ , где  $x_{1э}, \dots, x_{nэ}$  — наблюдаемые при тарировке значения непосредственно измеряемых величин. Суммарная систематическая погрешность определения величины  $\tilde{A}$

$$\sigma_A = \sum_{i=1}^n \frac{dF}{dx_i} \sigma_{x_i} \quad (44)$$

и соответственно оценки  $\tilde{A}_э$

$$\sigma_{\tilde{A}_э} = \sum_{i=1}^n \left( \frac{dF}{dx_i} \right)_{x_{iэ}} \cdot \sigma_{x_{iэ}} = F(x_{1э}, \dots, x_{nэ}) - A_э + \sigma_{A_э}, \quad (45)$$

где  $\sigma_{A_э}$  — погрешность известного значения параметра эталона  $A_э$ .

Как правило,  $\sigma_{x_i}$  и  $\sigma_{x_{iэ}}$  взаимосвязаны, в частности достаточно вероятно, что  $\sigma_{x_i} = \sigma_{x_{iэ}}$ , тогда

$$\sigma_A = \sigma_{A_э} + \sum_{i=1}^n \left( \frac{dF}{dx} \Big|_{x_i} - \frac{dF}{dx} \Big|_{x_{iэ}} \right) \sigma_{x_i}.$$

Откуда измеряемый параметр

$$A = F(x_1, \dots, x_n) - F(x_{1э}, \dots, x_{nэ}) + A_э \quad (46)$$

с погрешностью

$$\sigma_A = \sigma_{A_{\text{эо}}} + \sum_i \left[ \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_i} - \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_{i\text{э}}} \right] \sigma_{x_i}, \quad (47)$$

которая меньше погрешности прямого измерения  $\sigma_A = \sum_i \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_i} \sigma_{x_i}$ ,  
если  $\sigma_{A_{\text{эо}}}$  мало, а  $(\partial F / \partial x)_{x_i} \approx (\partial F / \partial x)_{x_{i\text{э}}}$ .

### 3. Метод противопоставления

При использовании этого метода измерение выполняется два раза так, чтобы причина постоянной погрешности оказывала разные, но известные по закономерности воздействия на результаты наблюдений. В качестве примера часто указывают на метод взвешивания Гаусса, когда взвешиваемый груз  $X$  уравнивается гирями  $P_1$ , если он находится на левой чашке весов и гирями  $P_2$ , если он перемещается на правую чашку. Среднее квадратичное из этих двух значений  $X = \sqrt{P_1 \cdot P_2}$  не содержит систематической погрешности, обусловленной неравноплечностью коромысла весов.

Частным случаем метода противопоставления можно считать метод компенсации по знаку, когда два измерения выполняются так, чтобы постоянная систематическая погрешность в результате каждого из них входила с разными знаками. Так при измерении

э.д.с.  $X$  с помощью потенциометра постоянного тока, имеющего паразитную термо-э.д.с. выполняют два измерения. В результате первого получают значение  $E_1$ , затем переключают полярность измеряемой э.д.с. и направление рабочего тока в потенциометре и получают значение  $E_2$ . Если систематическая погрешность, обусловленная паразитной э.д.с.  $\sigma$ , то  $E_1 = X + \sigma$ ,  $E_2 = X - \sigma$  и  $X = (E_1 + E_2) / 2$ .

Аналогично можно исключить систематическую погрешность, связанную с неидентичностью показаний термопар в приводившемся выше аксиальном методе измерения теплопроводности (методе Лиса), если перед вторым измерением "перевернуть" образец, т.е. поменять местами нагреватель и холодильник. При этом в обоих измерениях регистрируются примерно одинаковые тепловые мощности  $Q_1$  и  $Q_2$  и соответственно перепады температур

на рабочем участке образца  $F_{11} - \tilde{F}_{21}$  и  $F_{22} - \tilde{F}_{12}$ . Поскольку, однако, при изменении направления потока тепла "горячая" и более "холодная" термопары меняются местами, то истинные значения перепадов температур

$$t_{11} - t_{21} = (\tilde{F}_{11} - \tilde{F}_{21}) - (\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2),$$

$$t_{22} - t_{12} = (\tilde{F}_{22} - \tilde{F}_{12}) + (\mathcal{D}_1 - \mathcal{D}_2),$$

где  $\mathcal{D}_1$  систематическая погрешность показаний ближайшей к нагревателю термопары при первом измерении,  $\mathcal{D}_2$  - систематическая погрешность второй термопары. С учетом последних соотношений, исходя из расчетной формулы (37), получим

$$\lambda = \frac{Q_1 + Q_2}{S(\tilde{F}_{11} - \tilde{F}_{21} + \tilde{F}_{22} - \tilde{F}_{12})}. \quad (48)$$

Полученная расчетная формула (48) позволяет получить оценку теплопроводности образца  $\tilde{\lambda}$ , свободную от систематической погрешности, обусловленной неидентичностью показаний термопар.

Перечисленные методы не исчерпывают всех возможностей устранения систематических погрешностей. Так для устранения из результата измерений систематической погрешности средства измерений можно пользоваться не одним, а одновременно несколькими приборами (при условии, что погрешности приборов не коррелированы). Принимая за результат измерений определенную комбинацию показаний всех приборов, можно получить, что их систематические погрешности, разные у разных приборов будут как-то компенсировать друг друга и погрешность получаемого результата будет меньше, чем при применении отдельного прибора. При этом систематические погрешности приборов можно рассматривать как реализацию случайной величины.

Перевод систематических погрешностей в случайные с соответствующей обработкой результатов измерений может быть осуществлен и в более общих условиях. Так в упоминавшемся методе Лиса для измерения теплопроводности в целях снижения утечек тепла с боковой поверхности исследуемый образец можно окружить экра-

ном с несколькими компенсационными нагревателями и создать на нем тот же профиль температуры, что и на образце. Поскольку осуществить идеальную компенсацию (равенство температур между экраном и образцом по всей их длине) практически оказывается невозможно, разность температур между экраном и образцом при разных наблюдениях может иметь разный знак и ошибка, связанная с утечками тепла с боковой поверхности в значительной степени становится случайной.

### 3.2. Суммирование систематических погрешностей

Вне зависимости от того, к какой категории относится измерение (является ли оно прямым, косвенным, совместным или совокупным), систематическая погрешность результата оценивается, как правило, по ее составляющим. Для части этих составляющих заранее известны определенные параметры, для части же их они вычисляются по вспомогательным данным.

Составляющие, из которых складывается систематическая погрешность результата измерения, называются элементарными систематическими погрешностями. Если для части составляющих погрешности измерения находят их оценки и эти погрешности устраняются путем введения поправок или уточненных формул, то в качестве элементарных погрешностей выступают погрешности определения поправок. Таким образом, для оценивания систематической погрешности необходимо уметь суммировать их элементарные составляющие.

В конкретном измерении каждая элементарная составляющая погрешности получает конкретную реализацию. Поскольку речь идет о систематической погрешности, то реализация систематической погрешности результата  $\vartheta$  представляет собой алгебраическую сумму реализаций ее составляющих  $\vartheta_i$  ( $i=1, 2, \dots, n$ )

$$\vartheta = \sum_{i=1}^n \vartheta_i. \quad (10)$$

При повторном измерении той же величины, тем же методом, но в другой лаборатории, с использованием других средств измерений (хотя и того же типа) составляющие систематической погрешности примут другие значения.

Если иметь в виду множество возможных измерений данной величины, то элементарные систематические погрешности нужно рассматривать как реализации случайных величин и суммировать методами, разработанными в теории вероятностей и математической статистике. О необходимости статистического суммирования элементарных систематических погрешностей говорит и интуиция, основанная на опыте. Пусть, например, систематическая погрешность результата измерения складывается из пяти одинаковых составляющих

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_4 = \theta_5 = 1\%.$$

Очевидно, что оценку систематической погрешности результата, равную арифметической сумме составляющих, т.е.  $\theta = 5\%$ , мы не примем, основываясь просто на здравом смысле, который говорит, что случай, когда все составляющие одновременно примут свои крайние значения, слишком маловероятен.

Математические методы суммирования случайных величин предполагают известными функции их распределения. Однако для элементарных систематических погрешностей функции распределения, как правило, неизвестны. Тем не менее задача оценивания систематической погрешности результата измерения должна быть решена. Поэтому, если функции распределений элементарных систематических погрешностей неизвестны, то суммирование нужно выполнить, задавшись формой этих распределений. Естественно, сами распределения нужно связать с известными оценками их параметров.

На первый взгляд может показаться, что полученная таким образом оценка погрешности не заслуживает доверия. В действительности, однако, это не так. При выборе формы распределения каждой из элементарных погрешностей используется информация о ее природе, что дает очень много. Кроме того, в соответствии с принципом оценивая <sup>или</sup> погрешностей сверху, из возможных форм распределений данной погрешности всякий раз выбирают наилучшую форму распределения. Если эти соображения учитываются, то полученная оценка погрешности достаточно надежно характеризует неопределенность результата измерения. По существу элементарные систематические погрешности могут иметь самую различную

форму распределений. Когда сведения о природе той или иной погрешности не позволяют установить форму распределения, можно руководствоваться следующим практическим правилом: если известна оценка границ какой-то погрешности, ее распределение следует считать равномерным; если известна оценка среднего квадратического отклонения погрешности, распределение следует считать нормальным. Приведенная рекомендация выработана на основе здравого смысла и интуиции /5/. Статистическое суммирование элементарных погрешностей производится путем построения композиции (свертки) их распределений.

Для большинства теплофизических измерений систематическая погрешность определяется в результате суммирования значительного количества слагаемых. В этом случае результирующее распределение обычно всегда можно считать нормальным. Для того, чтобы найти это распределение, достаточно вычислить его дисперсию. Последняя находится как сумма дисперсий составляющих (30):  $\sigma_{\vartheta}^2 = \sum \sigma_{\vartheta_i}^2$  и нужно лишь по имеющимся данным о составляющих вычислить оценки их дисперсий  $\sigma_{\vartheta_i}^2$ .

Наибольшие трудности составляет решение задачи при суммировании сравнительно небольшого числа слагаемых, когда форма результирующего распределения заранее неизвестна.

Наибольшее практическое значение может иметь композиция равномерных распределений. Изучая свертку двух, трех и более равномерных распределений (см. п. 2.3), можно установить связь между границей (доверительным интервалом) суммарной погрешности  $\theta$  и доверительной вероятностью  $\alpha$ , в зависимости от граничных значений  $\theta_i$  и числа слагаемых  $n$  с равномерным распределением. Удобно выразить эту связь в виде

$$\theta = z_{\alpha} k_{\alpha n} \left( \sum_{i=1}^n \theta_i^2 / 3 \right)^{1/2}, \quad (50)$$

где  $\sum_{i=1}^n \theta_i^2 / 3 = \tilde{\sigma}_{\vartheta}^2$  - дисперсия результирующего распределения,  $z_{\alpha}$  - квантиль нормального распределения.

Как показывают расчеты /5/, коэффициент  $k_{\alpha n}$  слабо зависит от числа слагаемых, если  $\alpha \leq 0,99$ . Малое влияние числа слагаемых косвенно означает, что предполагавшееся при вычисленных равенство всех  $\theta_i$  не является обязательным. Так,

если уменьшить одно из слагаемых, то в пределе вместо  $n$  получим  $n-1$  слагаемых. Значение же  $k_{\alpha n}$  практически не изменится. Исходя из этого, в монографии /5/ для расчета результирующей погрешности при ограниченном числе составляющих рекомендуется использовать упрощенное соотношение

$$\theta = k_{\alpha} \sqrt{\sum_{i=1}^n \theta_i^2}, \quad (51)$$

где в зависимости от  $\alpha$  для  $k_{\alpha}$  приняты усредненные значения:

$\alpha$	0,9	0,95	0,98	0,99
$k_{\alpha}$	0,95	1,1	1,3	1,4

Погрешность от применения усредненных значений  $k_{\alpha}$  не превышает 10%. В редких случаях может оказаться  $k_{\alpha} \sqrt{\sum_{i=1}^n \theta_i^2} > \sum_{i=1}^n \theta_i$ , что противоречит естественному условию  $\theta < \sum_{i=1}^n \theta_i$ .

В этих случаях рекомендуется для оценки границы систематической погрешности использовать арифметическую сумму границ составляющих

$$\theta = \sum_{i=1}^n \theta_i. \quad (52)$$

При суммировании погрешностей по соотношению (51) полезно иметь в виду, что можно считать малыми и не учитывать те из них, которые более чем втрое меньше максимального из слагаемых  $\theta_i$ .

### 3.3. Результирующая (суммарная) погрешность измеряемой величины

В соответствии с ГОСТ 8.011-72 точность измерений должна выражаться одним из следующих способов:

- интервалом, в котором с установленной вероятностью находится суммарная погрешность измерения;
- интервалом, в котором с установленной вероятностью находится систематическая составляющая погрешности измерений, стандартной аппроксимацией функции распределения случайной составляющей погрешности измерений (рис.1) и среднеквадратичным отклонением случайной составляющей погрешности измерений;
- стандартной аппроксимацией функции распределения систе-

матической и случайной погрешности измерений и их средне-квадратическими отклонениями;

– функциями распределения систематической и случайной составляющих погрешностей измерений.

Как видно из приведенной выдержки ГОСТ допускает раздельную оценку систематической и случайной погрешностей измерений. Поскольку случайная погрешность средних значений теплофизических измерений практически всегда характеризуется нормальным распределением, можно ограничиться вычислением средне-квадратического отклонения для случайной составляющей (по формуле (18)) и оценки интервала  $\theta$  (по формулам (51), (52)), в котором с установленной вероятностью находится систематическая составляющая погрешности. Однако, полученные в результате измерений экспериментальные данные, вместе с рекомендацией к использованию в технических и других расчетах желательно характеризовать суммарной погрешностью, как это рекомендуется ГОСТом в первую очередь.

Если учесть, что в соответствии со сказанным выше, систематические погрешности представляют из себя реализацию случайных величин, объединение систематических и случайных погрешностей связано с построением композиции их распределений.

Среднеквадратическое отклонение общей погрешности результата при этом найти нетрудно

$$S_{\Sigma} = \sqrt{S_{\bar{x}}^2 + S_{\vartheta}^2}, \quad (53)$$

где среднее квадратическое отклонение систематической  $S_{\vartheta}$  и случайной  $S_{\bar{x}}$  погрешностей определяются в соответствии с соотношениями (51) и (18).

Имея  $S_{\Sigma}$ , границу погрешности результата, можно было бы вычислить по формуле

$$\Delta = t_{\Sigma} \cdot S_{\Sigma}, \quad (54)$$

если бы был известен коэффициент  $t_{\Sigma}$ ; к сожалению он в общем случае неизвестен. Поскольку исходные данные, т.е. данные о составляющих общей погрешности известны неточно, то можно удовлетвориться приближенной оценкой коэффициента  $t_{\Sigma}$ .

Для такой приближенной оценки рекомендуется формула /5/

$$t_{\Sigma} = \frac{\theta + t_q S_{\bar{x}}}{S_{\bar{x}} + S_{\vartheta}}. \quad (55)$$

Эта формула подобрана на основе следующих соображений. Коэффициент  $t_q$ , определяющий соотношение между доверительной границей и средним квадратическим отклонением случайной величины известен (таблица 3). Имея оценки для  $\theta$  и  $S_{\vartheta}$  можно считать, что известен аналогичный коэффициент для систематической погрешности

$$t_{\vartheta} = \theta / S_{\vartheta}.$$

Искомый коэффициент  $t_{\Sigma}$  естественно считать какой-то функцией  $t_q$  и  $t_{\vartheta}$ , отвечающей одной и той же доверительной вероятности. В качестве такой функции взято среднее взвешенное из  $t_q$  и  $t_{\vartheta}$  с весами  $S_{\vartheta} / (S_{\bar{x}} + S_{\vartheta})$  и  $S_{\bar{x}} / (S_{\bar{x}} + S_{\vartheta})$  соответственно, что и приводит к формуле (55). Эта формула, естественно, приближенная. Для того, чтобы ей пользоваться, необходимо оценить ее точность. Крайними являются случаи, когда систематическая погрешность имеет нормальное или равномерное распределение. Распределение случайной погрешности среднего арифметического можно считать асимптотически нормальным. Если оба слагаемых имеют нормальное распределение, то  $t_q = t_{\vartheta} = Z_{\alpha}$  и как следует из формулы (55)  $t_{\Sigma} = t_q$ . Поскольку композиция нормальных распределений дает нормальное распределение, то полученное значение  $t_{\Sigma}$  является точным. Для другого крайнего случая, когда систематическая погрешность имеет равномерное распределение, специальные расчеты показывают, что погрешность использования формулы (55) составляет 12% при  $\theta / S_{\bar{x}} = 1,5$  и  $\alpha = 0,99$ . При других соотношениях  $\theta$  и  $S_{\bar{x}}$  эта погрешность быстро снижается. Она также снижается при понижении доверительной вероятности и по мере того, как распределение систематической погрешности приближается к нормальному.

### 3.4. Нахождение интерполирующих зависимостей

При совместных измерениях двух или нескольких величин

очень часто бывает необходимо решить задачу о их функциональной зависимости. Такая зависимость отражает реальные, существующие в природе связи, которые как правило и являются основным предметом исследований. Примерами могут служить задачи установления зависимостей теплофизических свойств веществ от температуры и давления, установление зависимостей между этими свойствами, установление градуировочных графиков для датчиков температуры и давления и др.

Во всех этих случаях вид функциональной зависимости, как правило, устанавливается предварительно, на основании теоретических исследований или первичной обработки экспериментальных данных. Неизвестными при этом остаются постоянные параметры, называемые эмпирическими, их оценки необходимо получить по экспериментальным значениям исследуемых величин. Для этих целей обычно используется метод наименьших квадратов, подробно изложенный в целом ряде источников [4, 5, 6, 10].

Рассмотрим основные принципы использования метода наименьших квадратов на примере двух величин  $Y$  и  $X$ , связанных соотношением

$$Y = \varphi(X, a_1, \dots, a_m), \quad (56)$$

где постоянные  $a_l$  ( $l = 1, 2, \dots, m$ ) подлежат определению из опыта. Предположим, что для нахождения этих постоянных произведено  $n$  измерений значений функции  $Y_i$  при  $n$  значениях  $X_i$  аргумента  $X$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Если бы величины  $X_i$  и  $Y_i$  были свободны от погрешностей, то каждая пара этих чисел удовлетворяла бы соотношению (56), т.е. выполнялись бы следующие равенства

$$Y_i = \varphi(X_i, a_1, \dots, a_m) \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (57)$$

В действительности из-за погрешностей измерений уравнения (57) выполняются не строго, поэтому их называют "условными уравнениями". Обозначим разности между левой и правой частями условных уравнений через  $\vartheta$ , их называют "невязками":

$$\vartheta_i = Y_i - \varphi(X_i, a_1, \dots, a_m). \quad (58)$$

Если  $n < m$ , то число условных уравнений меньше общего числа неизвестных параметров  $a_l$  и оценки этих параметров оценены быть не могут. Если  $m = n$ , то число условных уравнений равно числу неизвестных параметров и задача нахождения их оценок сводится к задаче решения системы уравнений.

Если  $n > m$ , то число условных уравнений превышает число неизвестных параметров и возникает задача использования этих уравнений для получения наилучших оценок параметров  $a_l$ . В методе наименьших квадратов искомые постоянные определяются так, чтобы сумма квадратов невязок обращалась в минимум, т.е. чтобы выполнялось условие

$$S = \sum_{i=1}^n v_i^2 = \min. \quad (59)$$

Сумма  $S$  является функцией неизвестных параметров  $a_l$ , поэтому из условия (59) следует обращение в нуль всех производных от  $S$  по  $a_l$ , т.е.

$$\partial S / \partial a_l = 0. \quad (l=1, 2, \dots, m). \quad (60)$$

Система уравнений (60), называемая "системой нормальных уравнений", содержит их  $m$ , т.е. столько же, сколько неизвестных параметров  $a_l$ . В общем случае метод наименьших квадратов не обеспечивает получения наиболее эффективных оценок, однако его применение оправдывается как простотой вычислительной схемы, так и тем, что в ряде практически важных случаев этот метод дает действительно наилучшие оценки.

Рассмотрим один из таких случаев. Предположим, во-первых, что измерение значений аргумента  $X_i$  производится точно (без погрешностей), во-вторых будем считать, что при измерении значений функции  $Y_i$  отсутствуют систематические погрешности, а случайные подчиняются нормальному закону с дисперсией  $\sigma_{y_i}^2$ . Далее примем, что величины  $Y$  и  $X$  связаны линейной зависимостью

$$y = a + bx \quad (61)$$

с двумя параметрами " $a$ " и " $b$ ". Тогда условие минимума (59)

принимает вид  $\sum_{i=1}^n [y_i - (a + bx_i)]^2 = \min$ , а система нормальных уравнений (60)

$$\frac{d}{da} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 = -\sum_{i=1}^n 2(y_i - a - bx_i) = 0;$$

$$\frac{d}{db} \sum_{i=1}^n (y_i - a - bx_i)^2 = -\sum_{i=1}^n 2x_i(y_i - a - bx_i) = 0.$$

После преобразования этой системы получим

$$\left. \begin{aligned} an + b \sum x_i &= \sum y_i, \\ a \sum x_i + b \sum x_i^2 &= \sum x_i y_i, \end{aligned} \right\} \quad (62)$$

откуда

$$a = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum (x_i y_i)}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum (A_{11} + A_{21} x_i) y_i}{D}; \quad (63)$$

$$b = \frac{n \sum (x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum (A_{12} + A_{22} \cdot x_i) y_i}{D}, \quad (64)$$

где  $D$  - детерминант системы (62)

$A_{11} = \sum x_i^2$ ,  $A_{12} = A_{21} = -\sum x_i$  и  $A_{22} = n$  - алгебраические дополнения его элементов.

При определении дисперсий  $\sigma_a^2$  и  $\sigma_b^2$  параметров  $a$  и  $b$  следует иметь в виду, что в соответствии с формулами (63) и (64) они выражаются через суммы случайных величин. Поэтому

$$\sigma_a^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(A_{11} + A_{21} x_i)^2}{D^2} \sigma_{y_i}^2; \quad (65)$$

$$\sigma_b^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(A_{12} + A_{22} x_i)^2}{D^2} \sigma_{y_i}^2. \quad (66)$$

Если измерения равноточные, то дисперсия распределений всех  $y_i$  одна и та же.

$$\sigma_{y_i}^2 = \sigma_y^2 = \text{const} \quad (67)$$

и может быть вычислена по сумме квадратов отклонений результатов измерений от экспериментального среднего:

$$\tilde{\sigma}_y^2 = \sum_{i=1}^n \frac{[y_i - \varphi(x_i)]^2}{n-2} = \sum_{i=1}^n \frac{(y_i - a - bx_i)^2}{n-2}. \quad (68)$$

При написании последнего соотношения учтен общий принцип, сформулированный Фишером, согласно которому сумма квадратов всех отклонений должна быть отнесена не к числу всех используемых измеренных значений  $y_i$ , а к числу  $k$  их по-настоящему независимых значений, называемом числом степеней свободы.

Если на величины  $y_i$  наложено  $p$  связей, то число степеней свободы равно  $k = n - p$ . В нашем случае на величины  $y_i$  наложено две связи (62). Поэтому  $k = n - 2$ .

Нетрудно видеть, что этому принципу соответствует и полученное ранее выражение (18) для оценки дисперсии случайной величины по экспериментальной выборке мощности  $n$ , когда математическое ожидание неизвестно (т.е. при наличии связи (15)).

Учитывая сказанное, для равноточных измерений из (65) и (66) получим

$$\sigma_a = \sigma_y \sqrt{A_{11}/D} = \sigma_y \sqrt{\sum x_i^2 / D}; \quad (69)$$

$$\sigma_b = \sigma_y \sqrt{A_{22}/D} = \sigma_y \sqrt{n / D}. \quad (70)$$

При практических расчетах бывает удобно разместить начало координат аргумента  $X$  в середине исследуемого отрезка  $X_n - X_1$ . Тогда, если  $x_{i+1} - x_i = \text{const} = \Delta x$  ( $i=1, \dots, n-1$ ), то  $\sum x_i = 0$ ,  $D = n \sum x_i^2$ . Так как при  $X=0$ ,  $\bar{y} = \varphi(x) = a$ , то среднеквадратичная погрешность усредненных интерполяцией значений  $\bar{y}$  в середине интервала  $(X_1, X_n)$

$$\sigma_{\bar{y}}^c = \sigma_a = \sigma_y / \sqrt{n}. \quad (71)$$

Сместив начало координат аргумента  $X$  в одно из крайних его значений ( $X_1=0$ ) можно аналогичным образом (из (69)) получить для среднеквадратичного отклонения усредненного значения  $\bar{y}$  вблизи конца исследуемого интервала аргумента

$$\sigma_{\bar{y}}^k = \sigma_a = \sqrt{(2/n)(2n+1)/(n+1)} \sigma_y \approx 2 \sigma_y / \sqrt{n}, \quad (72)$$

где последнее равенство практически выполняется при  $n \geq 10$

Рассмотрим теперь случай, когда аргументы  $X_i$  измеряются с погрешностью, характеризуемой дисперсией  $\sigma_{x_i}$ . Если истинное соотношение между измеряемыми величинами  $y = a + bx$ , то как видно из рис.4, отклонение экспериментальных значений от этой зависимости по координате  $\bar{y}$  составляет

$$\psi_{y_i}^* = \psi_{y_i} - b \psi_{x_i}, \quad (73)$$

где  $\psi_{y_i}$  и  $\psi_{x_i}$  - абсолютные ошибки измерений величин  $y_i$  и  $x_i$ .

Дисперсия случайной величины  $\psi_{y_i}^*$  в соответствии с (73)

$$(\sigma_{y_i}^*)^2 = \sigma_y^2 + b^2 \cdot \sigma_x^2. \quad (74)$$

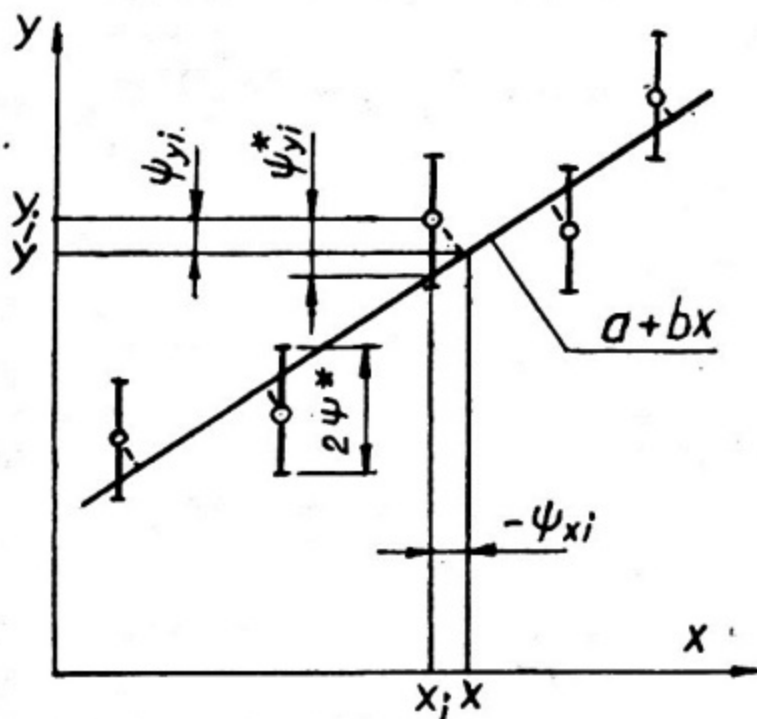


Рис.4. Интерполяция экспериментальных данных

Это значение дисперсии будет определять разброс экспериментальных данных по координате  $Y$  относительно зависимости  $y = a + bx$  или ее оценки. В этих условиях в выражениях (69) и (70) для оценки дисперсии  $\sigma_a^2$  и  $\sigma_b^2$  следует значение  $\sigma_y^2$  заменить на  $(\sigma_y^*)^2$ . Однако соотношение (68), которое используется для расчета  $\tilde{\sigma}_y^2$ , характеризует дисперсию отклонений экспериментальных данных от усредняющей кривой, т.е. может быть использовано для оценки  $(\sigma_y^*)^2$ . В результате можно сделать вывод, что расчетные соотношения (68), (69), (70), полученные в предположении, что аргументы  $X_j$  измеряются точно, остаются справедливыми и в том случае, когда их значениям присущи погрешности, при этом разброс экспериментальных значений относительно усредняющей зависимости увеличивается.

Линейная зависимость (6I) представляет из себя простейший частный случай общей зависимости (56). Однако в практическом отношении этот случай очень важен, поскольку при обработке экспериментальных данных линейная интерполяция используется очень часто. Это определяется, в частности, тем, что общая зависимость (56) часто может быть сведена к линейной путем замены переменных. Пусть, например, экспериментальные данные по вязкости жидкости  $\mu$  от температуры  $T$  описываются зависимостью

$$\mu = a_\mu \cdot \exp(-b_\mu / T).$$

Тогда, прологарифмировав это соотношение и перейдя к новым переменным  $y = \ln \mu$  и  $x = 1/T$ , получим линейную зависимость (6I), в которой  $a = \ln a_\mu$ , а  $b = -b_\mu$ .

Принятые ограничения при демонстрации метода наименьших квадратов не являются принципиальными. Он может быть с успехом использован и при общей нелинейной зависимости (56) в условиях, когда функция  $Y$  зависит от нескольких аргументов, когда измерения  $Y_i$  не равнозначны и др.

Краткое изложение процедуры использования метода наименьших квадратов в этих условиях и полезные в практическом отношении рекомендации по ее реализации приведены, в частности, в пособии /6/. Следует заметить, что интерполяция нелинейных

зависимостей с несколькими параметрами может быть осуществлена в результате достаточно сложных расчетов. Поэтому бывает полезно выявлять интерполирующую зависимость (56) "на глазок", проводя гладкую кривую между экспериментальными точками, нанесенными на координатную сетку, вместе с доверительными интервалами (рис.4).

Сравнение полученных таким образом зависимостей с зависимостями, рассчитанными методом наименьших квадратов, показывает, что отличие, как правило, не превышает погрешности расчетных кривых. Интуиция подсказывает, что "на глазок" можно получить зависимость, даже более точно отражающую реально существующую в природе связь. Это следует, во-первых, из того, что при интерполяции "на глазок" экспериментатор, не нарушая общих положений теории погрешностей интуитивно учитывает установленные ранее сведения об исследуемых им связях. Во вторых, при выполнении такой интерполяции, в отличие от метода наименьших квадратов, исследуемой зависимости заранее "не навязывается"какая-либо "наиболее подходящая" формула (линейная зависимость, параболическая, экспоненциальная или др.), которой реальная связь может не соответствовать. Наконец, в третьих, при известном навыке легко провести усредняющую кривую так, чтобы большинство точек находились от нее на наименьшем расстоянии (пунктирные отрезки на рис.4). Этот принцип, очевидно, с большей вероятностью выявляет реальную зависимость, чем принцип минимума отклонений экспериментальных точек от усредняющей кривой по координате функции (по  $y$ ), положенный в основу метода наименьших квадратов.

#### 4. ПРИМЕР. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ И ЭЛЕКТРОСОПРОТИВЛЕНИЯ МЕТАЛЛОВ МЕТОДОМ КОЛЬРАУША

##### 4.1. Сущность метода

По методу Кольрауша теплопроводность  $\lambda$  и электро-сопротивление  $\rho$  измеряются на образцах (рис.5) в виде круглых стержней диаметром  $d$ , по которым пропускается электрический ток  $I$ . Концы стержней зажимаются в охлаждаемых

токоподводах 2, так что их температура близка к комнатной  $T_k$ .

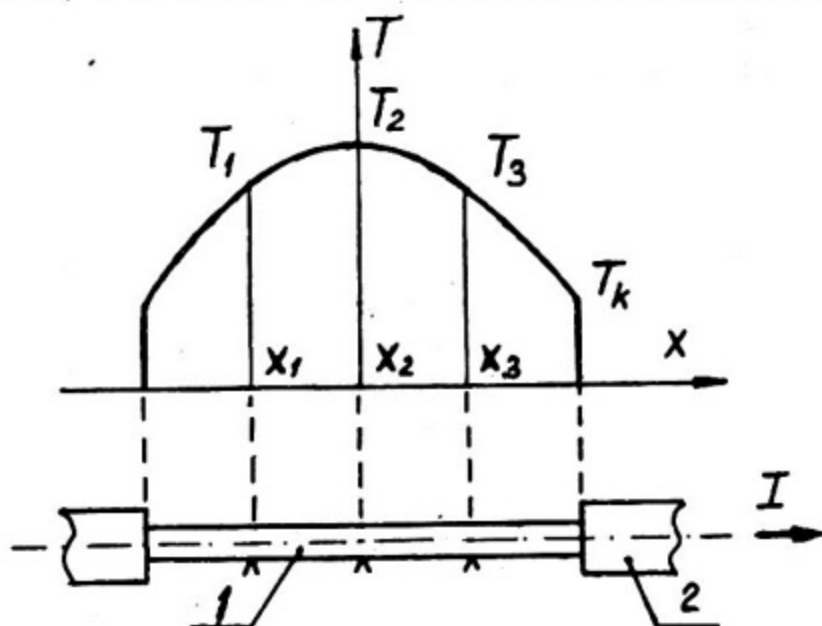


Рис. 5. Схема рабочего участка установки метода Кольрауша

В середине стержня  $X = X_2$  и на равных расстояниях от нее (в точках  $X = X_1$  и  $X = X_3$ ) приварены термопары, электроды которых одновременно используются как потенциометрические выходы. Если разность потенциалов между точками  $X_1$  и  $X_3$  равна  $U$ , то электросопротивление

$$\rho = \frac{U \cdot S}{2I \cdot l}, \quad (75)$$

где  $l = X_2 - X_1 = X_3 - X_2$ ,  $S = \pi d^2/4$  - сечение образца.

При допущении, что потери тепла с боковой поверхности образца (за счет теплового излучения в вакууме) малы, поле температуры по его длине  $T(X)$  описывается уравнением теплопроводности:

$$\lambda S \frac{\partial T}{\partial x^2} + \frac{I^2 \rho}{S} = 0,$$

откуда  $T = -I^2 \rho x^2 / (2\lambda S^2) + C_1 x + C_2$ .

Учитывая, что в середине стержня  $X = X_2$  температура максимальна ( $dT/dx = 0$ ),  $C_1 = 0$  и перепад температуры на отрезках  $l$

$$\Delta T = T(x_2) - T(x_1) = T(x_2) - T(x_3) = I^2 \rho l^2 / (2 \lambda S^2) = I U l / (4 \lambda S),$$

откуда теплопроводность

$$\lambda = \frac{I \cdot U \cdot l}{4 \cdot \Delta T \cdot S}. \quad (76)$$

#### 4.2. Анализ источников систематических погрешностей

Первым шагом при оценке погрешностей должно быть изучение их источников и выявление наиболее существенных из них. Особенно важно исследовать источники систематических погрешностей, поскольку в отличие от случайных, их нельзя оценить по результатам измерений исследуемых величин.

Ожидаемые инструментальные систематические погрешности измерений величин, входящих в расчетные формулы (75) и (76) невелики. Действительно, для измерения электрических величин  $I$  и  $U$  могут быть использованы приборы высокого класса точности так, чтобы границы их инструментальных погрешностей были  $\theta_{IE}^M < 0,5\%$ ,  $\theta_{UE}^M < 0,5\%$ .

Для измерения линейных размеров  $l$  и  $d$  можно также использовать высокоточные инструменты — микрометры или оптические длиномеры с погрешностью  $\theta_l^M$  менее 0,01 мм. Если  $d = 8$  мм,  $l = 15$  мм, то инструментальные погрешности измерений длины  $l$ , диаметра  $d$  и сечения  $S$  соответственно будут  $\theta_{dE}^M < 0,12\%$ ,  $\theta_{lE}^M < 0,06\%$ ,  $\theta_{SE}^M < 0,24\%$ . С помощью градуированных термопар в интервале температур  $T = (300-800)$  К можно измерить температуры  $T_1 = T(x_1)$ ,  $T_2 = T(x_2)$ ,  $T_3 = T(x_3)$  с предельной погрешностью порядка  $\theta_T^M = 0,5$  К. Отсюда при ожидаемом перепаде  $\Delta T = 50$  К инструментальная погрешность его определения  $\theta_{\Delta TE}^M = \theta_T^M \cdot \sqrt{2} / \Delta T = 1,4\%$ .

Ожидаемые методические погрешности могут быть значительнее.

Сечения стержней не являются идеально круглыми. Вследствие этого "порогового" эффекта, их диаметр может изменяться относительно среднего значения в пределах 0,1 мм. Тогда мето-

дическая погрешность определения диаметра  $\theta_{d\epsilon}^M = (0,1/8) \cdot 100\% = 1,25\%$ , а сечения  $\theta_S^M = 2,5\%$ .

Реальное расстояние между точками приварки двух термопар может быть определено с предельной погрешностью порядка диаметра привариваемых проводов. Если этот диаметр 0,2 мм, то методическая погрешность определения  $l$  составит  $\theta_{l\epsilon}^M = (0,2/15) \cdot 100\% = 1,33\%$ .

Линейные размеры изменяются при нагревании, вследствие температурных расширений. Если коэффициент линейного расширения  $\alpha_l = 10^{-5} \text{ 1/K}$ , то при температуре  $T = 800\text{K}$  погрешности вследствие этого эффекта составят  $\theta_{l\epsilon}^\alpha = \theta_{d\epsilon}^\alpha = \alpha_l(T - T_K) = 0,5\%$ ,  $\theta_{S\epsilon}^\alpha = 1,0\%$ .

При выводе расчетной формулы (76) не учитывались потери тепла с боковой поверхности. Оценим их.

Если средняя температура рабочей длины образца  $(2l) - T = 800\text{K}$ , то потери тепла за счет теплового излучения с единицы поверхности  $Q_{\text{изл}} = 5,67 \cdot 10^{-8} \epsilon_T (T^4 - T_K^4) = 0,68 \text{ Вт/см}^2$  при интегральной степени черноты  $\epsilon_T = 0,3$ . Потери тепла со всей поверхности рабочего участка образца  $P = Q_{\text{изл}} \cdot 2\pi dl = 5,0 \text{ Вт}$ . В то же время мощность, выделяемая электрическим током на том же участке (без учета потерь) из (76)  $N = IU = 4\lambda \Delta T_s / l = 34 \text{ Вт}$  при  $\lambda = 50 \text{ Вт/(мК)}$ . Отношение величины потерь ко всей мощности  $\theta_{NE}^M = (P/N) \cdot 100\% = 15\%$ , т.е. пренебречь такими потерями нельзя.

Еще одним существенным источником методических погрешностей измерения теплопроводности может оказаться неидентичность условий охлаждения концов образца, вследствие чего температура в его середине не будет максимальной. Если положение максимума температуры сместится на  $l/2$  по оси  $X$ , то разность  $\Delta T = T_3 - T_2$  будет близка к нулю, что приведет к недопустимо большой ее методической погрешности. Таким образом выявляется необходимость обязательного учета эффекта смещения максимума температуры в расчетной формуле для  $\lambda$ . Целесообразно также учесть в новой расчетной формуле, что реальные расстояния  $X_3 - X_2$  и  $X_2 - X_1$  не равны друг другу.

### 4.3. Введение поправок

Анализ источников систематических погрешностей выявил необходимость учета влияния, прежде всего, тепловых потерь с поверхности образца и асимметрии поля его температуры. Для учета этих эффектов при постановке задачи теплопроводности следует отказаться от условия  $(dT/dx)_{x=x_2} = 0$  и в уравнение теплопроводности ввести член, учитывающий тепловое излучение  $Q_{изл}(T)$ :

$$\lambda s \frac{d^2 T}{dx^2} + \frac{I^2 \rho}{s} - Q_{изл} \pi d = 0.$$

Учитывая, что температура  $T(x)$  на рабочем участке образца изменяется в пределах (10-50)К, примем

$$Q_{изл}(T) = Q_{изл}(T_0) + \alpha_Q (T - T_0). \quad (77)$$

Если опорная температура  $T_0$  выбрана так, что в пределах рабочего участка  $(T - T_0) < 40\text{К}$ , то погрешность такого приближения (при  $Q_{изл}(T) \sim T^4$ ,  $T_0 = 800\text{К}$ ) будет составлять

$$\theta_{ре}^M = \frac{(T - T_0)^2}{2 Q_{изл}(T_0)} \left( \frac{d^2 Q_{изл}}{dT^2} \right)_{T_0} = 6 \frac{(T - T_0)^2}{T_0^2} = 1,5\%.$$

В первом приближении  $Q_{изл}(T) = Q_{изл}(T_0) = Q_0$ , тогда

$$T = -q_V x^2 / (2\lambda) + C_1 x + C_2, \quad \text{где } q_V = I^2 \rho / s^2 - Q_0 \pi d / s.$$

Теперь измеряемые перепады температур

$$\Delta T_1 = T(x_2) - T(x_1) = -q_V (x_2^2 - x_1^2) / (2\lambda) + C_1 (x_2 - x_1);$$

$$\Delta T_2 = T(x_2) - T(x_3) = +q_V (x_3^2 - x_2^2) / (2\lambda) - C_1 (x_3 - x_2).$$

Из этих двух уравнений, приняв, что  $l_1 = x_2 - x_1$ ,  $l_2 = x_3 - x_2$ , получим

$$\Delta T_1 / l_1 + \Delta T_2 / l_2 = q_V (l_1 + l_2) / (2\lambda).$$

Отсюда, раскрыв выражение для  $Q_V$  и учитывая, что  $U = I \rho (l_1 + l_2) / S$  получим новую расчетную формулу для  $\lambda$  :

$$\lambda(T_\lambda) = \frac{UI - P}{2S(\Delta T_1/l_1 + \Delta T_2/l_2)[1 + \alpha_\lambda(T_\lambda - T_K)]} \quad (78)$$

где  $P = Q_0 \pi d (l_1 + l_2)$ ,  $T_\lambda = (2T_2 + T_1 + T_3)/4$ , сомножитель  $[1 + \alpha_\lambda(T_\lambda - T_K)]$  представляет из себя поправку на изменение размеров образца, вследствие теплового расширения.

Можно показать, что формула (78) справедлива и при линейной зависимости теплового излучения от температуры (77), если  $\alpha_Q L^2 / (\lambda d) < 0,03$ , а  $T_0$  выбрано из условия

$$T_2 - T_0 = (T_2 - T_1/2 - T_3/2)/6.$$

Формула для расчета электросопротивления с учетом поправки на тепловое расширение представляется в виде

$$\rho(T_\rho) = \frac{Us \cdot [1 + \alpha_\lambda(T_\lambda - T_K)]}{I \cdot (l_1 + l_2)}, \quad (79)$$

где дополнительно учтено, что по результатам измерений рассчитывается среднее на длине рабочего участка значение электросопротивления, и относить ее надо к средней по его длине температуре  $T_\rho$ , которая отличается от  $T_\lambda$ . При параболическом распределении температуры это отличие  $T_\rho - T_\lambda = (\Delta T_1 + \Delta T_2)/12$ , так, что  $T_\rho = (4T_2 + T_1 + T_3)/6$ .

#### 4.4. Итоговая систематическая погрешность

В расчетные формулы (78) и (79) формально внесены поправки, учитывающие влияние наиболее существенных систематических погрешностей. Поэтому при расчете суммарной погрешности можно ограничиться учетом погрешностей определения величин, непосредственно входящих в эти формулы. Для удобства расчетов представим их в виде сомножителей

$$\lambda = \frac{N}{2Sgh} ; \quad \rho = \frac{Us}{I \cdot L} h,$$

где  $N = IU - P$ ,  $g = \Delta T/l_1 + \Delta T_2/l_2$ ,  $L = l_1 + l_2$ ,  $h = 1 + \alpha_\lambda(T_\lambda - T_K)$ . Тогда, в соответствии с (35) дисперсии относительных погрешностей теплопроводности  $\lambda$  и электросопротивления  $\rho$  :

$$\sigma_{\lambda E}^2 = \sigma_{NE}^2 + \sigma_{SE}^2 + \sigma_{gE}^2 + \sigma_{hE}^2 + \sigma_{\lambda T}^2; \quad (80)$$

$$\sigma_{\rho E}^2 = \sigma_{UE}^2 + \sigma_{IE}^2 + \sigma_{SE}^2 + \sigma_{LE}^2 + \sigma_{hE}^2 + \sigma_{\rho T}^2, \quad (81)$$

где  $\sigma_{\lambda T}$  и  $\sigma_{\rho T}$  - дисперсии погрешностей, обусловленные неопределенностью температур  $T_{\lambda}$  и  $T_{\rho}$ .

При нагревании образца переменным электрическим током его значение удобно измерять амперметром Д 57 класса точности 0,1 через трансформатор УТТ - 5 класса - 0,2.

Для выбранных размеров рабочего участка ( $d = 8$  мм,  $l_1 = l_2 = 15$  мм) в соответствии с оценочными формулами (75), (76) при ожидаемых значениях  $T_{\lambda} = 800$  К,  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 50$  К,  $\lambda = 50$  Вт/(мК),  $\rho = 50 \cdot 10^{-8}$  Ом·м, ток  $I = 330$  А и разность потенциалов  $U = 0,1$  В. Если 100 делений шкалы Д 57 соответствует 500 А, то границы инструментальных погрешностей амперметра  $\theta_{IA}^u = 0,15\%$  и трансформатора  $\theta_{IT}^u = 0,2\%$ . Откуда средне-квадратическое отклонение систематической погрешности измерения тока при допущении о равномерном распределении инструментальных погрешностей  $\sigma_{IE} = \sqrt{(\theta_{IT}^2 + \theta_{IA}^2)/3} = 0,15\%$ .

Для измерения падения напряжения на длине  $L$  можно использовать потенциометр переменного тока Р-56, тогда  $U = \sqrt{U_x^2 + U_y^2}$  где  $U_x$  и  $U_y$  - две взаимноперпендикулярные по фазе составляющие переменного напряжения  $U$ . Границы их погрешностей в соответствии с инструкцией к прибору  $\theta_U^{x,y} = (10^{-3} U_{x,y} + 0,5 \Delta')$ , где  $\Delta' = 10^{-4}$  В - цена наименьшего деления реохорда. При  $U_x \approx U_y = 0,076$  В,  $\theta_U^x \approx \theta_U^y = 1,2 \cdot 10^{-4}$  В. Соответственно средне-квадратическая погрешность определения

$$U: \sigma_U = \sqrt{(\theta_U^x)^2/6 + (\theta_U^y)^2/6} = 10^{-4} \text{ В, или в процентах } \sigma_{UE} = 0,1\%.$$

Как уже отмечалось, погрешности определения расстояний между потенциометрическими выводами  $L$ ,  $l_1$  и  $l_2$  определяются диаметром привариваемых проводов  $d_n$ . Если  $d_n = 0,2$  мм, то  $\theta_{l1}^M = \theta_{l2}^M = 1,32\%$ ,  $\theta_L^M = 0,66\%$ . Соответственно средне-квадратические отклонения  $\sigma_{LE} = \sigma_{LE}^M = 0,66/\sqrt{3} = 0,4\%$ ,  $\sigma_{lE} = \theta_{lE}^M/\sqrt{3} = 0,8\%$ .

В целях снижения методической погрешности измерения диа-

метра образца целесообразно осуществить его многократное измерение на разных расстояниях от середины во взаимно-перпендикулярных направлениях. Если таких измерений  $n = 10$ , то средне-квадратическая погрешность среднего значения (при предельной погрешности единичного измерения  $\theta_d^M = 0,1 \text{ мм}$ )  $\sigma_d = \sqrt{(\theta_d^M)^2 / [3(n-1)]} = 0,02 \text{ мм}$ , или в процентах  $\sigma_{d\epsilon} = 0,25\%$  и соответственно для сечения  $S = \pi d^2 / 4$ ;  $\sigma_{S\epsilon} = 0,5\%$ .

Погрешность температурных измерений определяется погрешностями градуировки и воспроизводимости показаний термопар (погрешность измерения термоэдс потенциометрами постоянного тока можно при этом пренебречь). Воспроизводимость хромель-алюмелевых термопар при температуре 800 К характеризуется средне-квадратическим отклонением  $\sigma_B = 0,25 \text{ К}$ . Их градуировка осуществляется по показаниям платинородий - платиновой термопары с погрешностью  $\sigma_r = 0,12 \text{ К}$ . Учитывая, что воспроизводимость термопар влияет на точность измерений дважды (при градуировке и непосредственно при измерениях) итоговая средне-квадратическая погрешность измерения температуры  $\sigma_T = \sqrt{\sigma_r^2 + 2\sigma_B^2} = 0,36 \text{ К}$ . Погрешность определения средней по длине рабочего участка температуры  $T_q = (4T_2 + T_1 + T_3) / 6$  равна  $\sigma_{Tq} = 0,67\sigma_T = 0,25 \text{ К}$ . Соответственно относительная средне-квадратическая погрешность электросопротивления  $\rho$ , обусловленная неопределенностью температуры отнесения  $T_q$  (при  $\rho \sim T$ ) будет  $\sigma_{\rho T} = |d \ln \rho / dT| \sigma_{Tq} = 0,03\%$ .

Если средне-квадратическая погрешность используемых значений  $\alpha_l$  составляет  $\sigma_{\alpha\epsilon} = 5\%$ , то практически с такой же точностью можно оценить отличие величины  $h$  от 1. Учитывая, что по приведенным оценкам это отличие порядка 0,5%, средне-квадратическая погрешность  $h$  будет  $\sigma_{h\epsilon} = 5 \cdot 0,005 = 0,025\%$ , т.е. ей, как и  $\sigma_{\rho T}$  в (81) можно пренебречь. Тогда

$$\sigma_{\rho\epsilon} = \sqrt{0,15^2 + 0,1^2 + 0,5^2 + 0,4^2} = 0,7\%$$

Это значение практически не изменится, если пренебречь погрешностями измерения тока и напряжения ( $\sigma_{I\epsilon}$  и  $\sigma_{U\epsilon}$  более чем втрое меньше  $\sigma_{S\epsilon}$ ), т.е.  $\sigma_{\rho\epsilon}$  практически определяется

только  $\sigma_{LE}$  и  $\sigma_{SE}$ . Погрешность измерения длины  $L$  определяется границей  $\theta_L^M = 0,2$  мм. Величина сечения  $S$  рассчитывается по результатам многократного измерения диаметра. В этих условиях целесообразно принять для погрешностей измерения  $L$  и  $S$  соответственно равномерное и нормальное распределение, а для предельной погрешности электросопротивления (с вероятностью  $\alpha = 0,95$ )

$$\theta_{pE} = t_{\Sigma} \sigma_{pE}^{\vartheta} = 1,8 \cdot 0,7 = 1,3 \%,$$

где в соответствии с (55)  $t_{\Sigma} = (\theta_L + z_{\alpha} \sigma_{SE}) / (\sigma_{LE} + \sigma_{SE}) = 1,8$  при  $\theta_L = \theta_L^M = 0,66 \%$ ,  $z_{\alpha} = 1,96$ .

Оценим теперь основные составляющие погрешности теплопроводности.

Погрешность определения разностей температур  $\Delta T_1$  и  $\Delta T_2$  (при  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 50$  К) будет  $\sigma_{\Delta T} = \sigma_T \sqrt{2} = 0,5$  К или в процентах  $\sigma_{\Delta TE} = 1\%$ . Средне-квадратическая погрешность суммы величин  $\Delta T_1 / l_1$  и  $\Delta T_2 / l_2$  в соответствии с (33) составит

$$\sigma_{gE} = \sqrt{(\sigma_{\Delta TE}^2 + \sigma_{LE}^2) / 2} = 0,9 \%. \quad P = 5,67 \cdot 10^{-8} \varepsilon_T T_0^4 \pi d L$$

Погрешность поправки при  $T_0 = T_2 - (T_2 - T_3 / 2 - T_1 / 2) / 6 = 800$  К по (35)

$\sigma_{pE} = \sqrt{\sigma_{EE}^2 + 4\sigma_{T_0E}^2 + \sigma_{gE}^2 + \sigma_{LE}^2 + (\sigma_{pE}^M)^2} = 5,1 \%$ , где учтено, что расчетная формула (78) учитывает влияние утечек тепла с методической погрешностью  $\sigma_{pE}^M = \theta_{pE}^M / \sqrt{3} = 0,9\%$ , для погрешности излучательной способности  $\varepsilon_T$  принято  $\sigma_{EE} = 5\%$ . В абсолютных единицах при  $P = 5$  Вт,  $\sigma_P = 0,255$  Вт. Погрешность определения выделяемой мощности  $IU$  в процентах  $(\sigma_{IU})_E = \sqrt{\sigma_{IE}^2 + \sigma_{UE}^2} = 0,18\%$ , а в абсолютных единицах при  $IU = 38$  Вт,  $\sigma_{IU} = 0,068$  Вт. Теперь погрешность измерения  $N = IU - P$ ,  $\sigma_N = \sqrt{\sigma_{IU}^2 + \sigma_P^2} = 0,26$  Вт или в процентах  $\sigma_{NE} = 0,8\%$ .

Подставив полученные оценки  $\sigma_{NE}$ ,  $\sigma_{SE}$ ,  $\sigma_{gE}$  в (80) и пренебрегая  $\sigma_{hE}$  и  $\sigma_{\lambda T}$  для суммарной средне-квадратической систематической погрешности измерения теплопроводности получим

$$\sigma_{\lambda E}^{\vartheta} = \sqrt{0,8^2 + 0,5^2 + 0,9^2} = 1,3 \%.$$

Как видно из приведенного расчета, наибольший вклад в  $\sigma_{\lambda \epsilon}$  вносят  $\sigma_{p \epsilon}$  и  $\sigma_{d \epsilon}$ , при оценке которых учитывалось несколько независимо действующих факторов. Поэтому для погрешности измеренных значений теплопроводности целесообразно принять нормальное распределение. Тогда с вероятностью  $\alpha = 95\%$  предельная систематическая погрешность теплопроводности

$$\theta_{\lambda} = Z_{\alpha} \cdot \sigma_{\lambda \epsilon} = 1,96 \cdot 1,3 = 2,6 \%$$

#### 4.5. Случайная и суммарная погрешность

Бытует представление, что случайные погрешности можно оценить только по экспериментальным данным. Однако нередко бывает возможно и целесообразно оценить их до эксперимента. Это обеспечивает полезное прогнозирование характера измерений на стадии проектирования установок, а после обработки экспериментальных данных проконтролировать наши представления о степени влияния внешних воздействий на результаты измерений.

Случайные погрешности в обсуждаемом примере измерения тепло- и электропроводности методом Кольрауша определяются колебаниями величин непосредственно регистрируемых в серии измерений – тока, напряжения и температуры.

Колебания тока  $I$  и напряжения  $U$  являются следствием колебаний напряжения сети. Величина последних  $\psi_c$  может быть установлена в зависимости от времени суток, наличия стабилизаторов и условий размещения установки. Обычно нетрудно добиться, чтобы было  $\psi_c < 0,5\%$ . Тогда средне-квадратическое отклонение колебаний тока и напряжения  $\sigma_{I \epsilon}^{\psi} = \sigma_{U \epsilon}^{\psi} = \psi_c / \sqrt{3} = 0,3\%$ , а наблюдаемой мощности  $N = IU - P$  при  $N = 33$  Вт и  $P = 5$  Вт,

$$\sigma_{N \epsilon}^{\psi} = \sqrt{(\sigma_{U \epsilon}^{\psi})^2 + (\sigma_{I \epsilon}^{\psi})^2} (IU/N) = 0,45\%$$

Колебания температуры образца возникают вследствие колебаний мощности  $\psi_{TN}$  и условий охлаждения торцов образца, преимущественно вследствие колебаний температуры  $\psi_{TT}$  и расхода  $\psi_{TG}$  охлаждающей воды. Разность между температурой образца вблизи его середины  $T_0 = 800$  К и температурой охлаждающей воды  $T_{ох} = T_K = 300$  К пропорциональна мощности  $N$ ,

поэтому  $\sigma_{TN}^{\psi} = \sigma_{NE}^{\psi} \cdot (T - T_K) = 2,2$  К. Температура охлаждающей воды может колебаться в пределах (1-2) К, так что следует принять  $\sigma_{TT} = 1$  К. Разность между температурой воды и температурой охлаждаемой поверхности торцов образца обычно не превышает (10-20) К (она, как правило, рассчитывается при проектировании системы охлаждения). При колебании расхода в пределах 20% эта разность колеблется приблизительно в тех же пределах, откуда оценка этих колебаний  $\sigma_{TG}^{\psi} = 2$  К. В итоге средне-квадратическое отклонение колебаний температуры  $\sigma_T^{\psi} = \sqrt{\sigma_{TT}^2 + \sigma_{TG}^2 + \sigma_{TN}^2} = 3,3$  К. Отсюда случайная погрешность определения разностей температур  $\Delta T_1 = T_2 - T_1$  и  $\Delta T_2 = T_2 - T_3$  будет равна  $\sigma_{\Delta T}^{\psi} = \sigma_T^{\psi} \sqrt{2} = 4,7$  К или в процентах  $\sigma_{\Delta T\epsilon}^{\psi} = 9,4\%$  при  $\Delta T_1 = \Delta T_2 = 50$  К. Такая же погрешность будет характеризовать величины  $\Delta T_1 / l_1$  и  $\Delta T_2 / l_2$ , а их сумму значение  $\sigma_{\rho\epsilon}^{\psi} = \sigma_{\Delta T\epsilon}^{\psi} / \sqrt{2} = 6,7\%$

Случайные погрешности температур отнесения  $T_{\lambda}$  и  $T_{\rho}$  при  $\sigma_T^{\psi} = 3,3$  К составят  $\sigma_{T_{\lambda}}^{\psi} = 0,6 \sigma_T^{\psi} = 2$  К и  $\sigma_{T_{\rho}}^{\psi} = 0,67 \sigma_T^{\psi} = 2,2$  К. Соответственно случайные погрешности величин  $\rho$  и  $\lambda$  за счет погрешностей температур отнесения при  $\rho \sim T$  и  $\lambda \sim T^{0,5}$  будут:

$$\sigma_{\rho T}^{\psi} = (d \ln \rho / dT) \sigma_{T_{\rho}}^{\psi} = 0,28\%; \quad \sigma_{\lambda T}^{\psi} = (d \ln \lambda / dT) \sigma_{T_{\lambda}}^{\psi} = 0,13\%.$$

В итоге средне-квадратическая погрешность электросопротивления  $\sigma_{\rho\epsilon}^{\psi} = \sqrt{(\sigma_{U\epsilon}^{\psi})^2 + (\sigma_{I\epsilon}^{\psi})^2 + (\sigma_{\rho T}^{\psi})^2} = 0,52\%$  а теплопроводности  $\sigma_{\lambda\epsilon}^{\psi} = \sqrt{(\sigma_{NE}^{\psi})^2 + (\sigma_{\rho\epsilon}^{\psi})^2 + (\sigma_{\lambda T}^{\psi})^2} = 6,8\%$ .

Как видно из приведенных расчетов, случайные погрешности превышают систематические, их основной источник - колебания температуры образца. Практически эти погрешности нетрудно уменьшить. Учитывая, что процесс измерения каждой пары значений  $\rho$  и  $\lambda$  (т.е. величин  $I, U, T_1, T_2, T_3$ ) длится несколько минут, можно выбрать для их измерений такие промежутки времени, в течение которых колебания сети, расхода и температуры воды не будут превышать соответственно 0,2%, 5% и 0,5 К. Тогда аналогичным расчетом получим  $\sigma_T^{\psi} = 1,0$  К и  $\sigma_{\rho\epsilon}^{\psi} = 0,22\%$ ,  $\sigma_{\lambda\epsilon}^{\psi} = 2,1\%$ . Границами случайных погрешностей, определяющими разброс экспериментальных значений  $\rho$  и  $\lambda$  (при доверительной вероятности  $\alpha = 0,95$ ) соответ-

ственно будут  $\Psi_{\rho} = Z_{\alpha} \sigma_{\rho\epsilon}^{\Psi} = 0,4\%$ ,  $\Psi_{\lambda} = Z_{\alpha} \sigma_{\lambda\epsilon}^{\Psi} = 4,0\%$

при интерполяции экспериментальных точек зависимостями, близкими к линейным, погрешность интерполированных значений  $\bar{\rho}$  и  $\bar{\lambda}$  на край исследуемого интервала температуры (при  $T = 800$  К) в соответствии с (72)

$$\sigma_{\bar{\rho}\epsilon}^{\Psi} = 2 \sigma_{\rho\epsilon}^{\Psi} / \sqrt{n} = 0,1\%; \quad \sigma_{\bar{\lambda}\epsilon}^{\Psi} = 2 \sigma_{\lambda\epsilon}^{\Psi} / \sqrt{n} = 1,1\%$$

при числе экспериментальных точек  $n = 15$ .

Средне-квадратичные отклонения суммарных погрешностей  $\rho$  и  $\lambda$ :

$$\sigma_{\bar{\rho}} = \sqrt{(\sigma_{\bar{\rho}\epsilon}^{\Psi})^2 + (\sigma_{\rho\epsilon}^{\Phi})^2} = 0,7\%; \quad \sigma_{\bar{\lambda}} = \sqrt{(\sigma_{\bar{\lambda}\epsilon}^{\Psi})^2 + (\sigma_{\lambda\epsilon}^{\Phi})^2} = 1,7\%$$

Распределения суммарных погрешностей следует считать нормальными. Тогда с вероятностью  $\alpha = 0,95$  их границы

$$\delta_{\bar{\rho}} = Z_{\alpha} \sigma_{\bar{\rho}} = 1,4\%; \quad \delta_{\bar{\lambda}} = Z_{\alpha} \sigma_{\bar{\lambda}} = 3,3\%.$$

В приведенном примере ожидаемые погрешности определены априорно (до эксперимента). Оценка погрешностей полученных экспериментальных данных производится во многом аналогично. При этом точность оценок будет выше, поскольку будут использоваться непосредственно измеренные (а не предполагаемые) значения необходимых для расчетов величин.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Маликов М.Ф. Основы метрологии. М.: Комитет по делам мер и измерительных приборов при СМ СССР, 1949.
2. Тиходеев П.М. Очерки об исходных метрологических измерениях. М.: Машгиз, 1954.
3. Бурдун Г.Д., Марков Б.Н. Основы метрологии. М.: Изд-во стандартов, 1975.
4. Свешников А.А. Основы теории ошибок. Л.: ЛГУ, 1972.
5. Рабинович С.Г. Погрешности измерений. Л.: Энергия, 1978.
6. Климов А.Н. Погрешности измеряемых величин. М.: МИФИ, 1980.
7. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. М.: Наука, 1974.
8. Деденко Л.Г., Керженцев В.В. Математическая обработка и оформление результатов эксперимента. М.: МГУ, 1977.
9. Крылов А.Н. Лекции о приближенных вычислениях. М.-Л.: Машгиз, 1954.
10. Чеботарев А.С. Способ наименьших квадратов с основами теории вероятностей. М.: Геодиздат, 1958.

## О Г Л А В Л Е Н И Е

ПРЕДИСЛОВИЕ. . . . .	3
1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОБОЗНАЧЕНИЯ. . . . .	5
1.1. Теплофизические измерения. . . . .	5
1.2. Классификация погрешностей . . . . .	6
1.3. Основные задачи оценивания погрешностей. . . . .	7
1.4. Обозначения. . . . .	9
2. СЛУЧАЙНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ . . . . .	10
2.1. Распределение случайных величин. . . . .	10
2.2. Нормальное распределение . . . . .	13
2.3. Свертка распределений. Предельные теоремы. . . . .	16
2.4. Оценка параметров нормального распределения. . . . .	19
2.5. Доверительные интервалы. . . . .	22
2.6. Распределение Стьюдента и $\chi^2$ . . . . .	25
2.7. Косвенные измерения. . . . .	28
3. СИСТЕМАТИЧЕСКИЕ И СУММАРНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ . . . . .	31
3.1. Обнаружение и исключение систематических погрешностей . . . . .	31
3.2. Суммирование систематических погрешностей. . . . .	38
3.3. Результирующая (суммарная) погрешность измеряемой величины . . . . .	41
3.4. Нахождение интерполирующих зависимостей. . . . .	43
4. ПРИМЕР. ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТЕЙ ИЗМЕРЕНИЙ ТЕПЛО- И ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ МЕТАЛЛОВ МЕТОДОМ КОЛЬРАУША. . . . .	50
4.1. Сущность метода. . . . .	50
4.2. Источники систематических погрешностей . . . . .	52
4.3. Введение поправок. . . . .	54
4.4. Итоговая систематическая погрешность . . . . .	55
4.5. Случайная и суммарная погрешность. . . . .	59
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ . . . . .	62

Ответственный за выпуск      Н.П. Киселев

---

Л - 99268 . Подписано в печать 17/II - 1989г.

Формат 60 x 84 I / 16. Объем 4 п.л.

Уч.- изд. л. 3,7 Тираж 250 экз.

Цена 25 коп. Изд. № 106 - I. Заказ 925

---

Типография М И Ф И, Каширское ш., д.31.