

Е21.039

X-94

ИФП

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

93

В. В. Хромов



**ФАКУЛЬТЕТ
ТЕХНИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ**

**ФУНКЦИИ ЦЕННОСТИ НЕЙТРОНОВ.
ЛАГРАНЖИАНЫ НЕЙТРОННЫХ ПОЛЕЙ.
ФОРМУЛЫ ВОЗМУЩЕНИЙ**

Москва 1989

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ СССР
ПО НАРОДНОМУ ОБРАЗОВАНИЮ

621.039

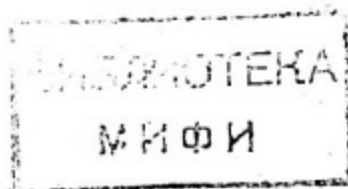
X-94

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В.В. Хромов

ФУНКЦИИ ЦЕННОСТИ НЕЙТРОНОВ.
ЛАГРАНЖИАНЫ НЕЙТРОННЫХ ПОЛЕЙ.
ФОРМУЛЫ ВОЗМУЩЕНИЙ

Утверждено
редсоветом института
в качестве учебного пособия



Москва 1989

Хромов В. В. Функции ценности нейтронов. Лагранжианы нейтронных полей, Формулы возмущений. М.: МИФИ. - 92 с.

В пособии представлен один из основных разделов курса по теории и методам расчета ядерных реакторов. Дана обобщенная формулировка функций ценности (сопряженных функций), рассматриваются вариационный формализм построения формул расчета возмущений функционалов в различных приближениях, возможности практического использования функций ценности при вариационной оценке функционалов нейтронного поля.

Предназначено для студентов старших курсов и аспирантов, специализирующихся по теоретической и экспериментальной физике реакторов, а также для слушателей ФПКСП.



Московский
инженерно-физический
институт, 1989 г.

Редактор Н.М. Соболева
Техн. редактор Н.М. Воронцова
Корректор Н.П. Молодчинова

Тем. план 1989 г., поз. 10

Л.- 21084 Подписано в печать 31.01.90
Формат 60x84 1/16 Объем 5,75 п.л. Уч.-изд.л. 5,5
Тираж 150 экз. Изд. № 083-1 Заказ 2169
Цена 35 коп.

Московский инженерно-физический институт. Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское шоссе, 31

1. УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЫ НЕЙТРОННЫХ ПОЛЕЙ

1.1. Функции распределения нейтронов

В дальнейшем будет рассматриваться выпуклое тело объемом V , граничащее с вакуумом. Через S будет обозначаться граница тела (рис. 1.1). Предполагается, что она достаточно гладкая и имеет изломы в отдельных точках или на линиях. По сравнению с площадью поверхности S точки и линии ее излома составляют множества с нулевой мерой.

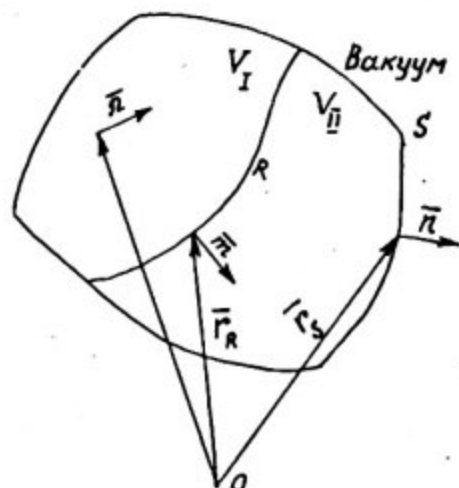


Рис. 1.1. Выпуклое тело, граничащее с вакуумом

Пространственное, энергетическое и угловое распределение нейтронов (нейтронное поле) в объеме V характеризуется функцией $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$, определяющей в момент времени t число нейтронов в точке \vec{r} , имеющих энергию E и направление полета $\vec{\Omega}$ ($|\vec{\Omega}|=1$), отнесенное к единице объема, единичному энергетическому интервалу и единичному интервалу телесного угла. В соответствии с этим определением функцию $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ называют сокращенно плотностью нейтронов в момент времени t в фазовой точке $\vec{r}, E, \vec{\Omega}$.

Область определения V_{φ} (фазовый объем) функции $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ как функции переменных $\vec{r}, E, \vec{\Omega}$ можно представить в форме

$$V_{\varphi} = V \times V_E \times V_{\Omega} \quad ,$$

где V — объем тела, V_E — характерный для ядерных реакторов диапазон энергий нейтронов ($E = 0 \div 15$ МэВ), а $V_\Omega = 4\pi$ — сфера единичного радиуса. Число нейтронов в элементе фазового объема $d\bar{r}dE d\Omega$ определяется выражением

$$N(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t) d\bar{r} dE d\Omega .$$

Для описания нейтронного поля в дальнейшем будет в основном использоваться функция $\varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t)$ распределения плотности потока нейтронов, связанная с плотностью нейтронов $N(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t)$ соотношением

$$\varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t) = v N(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t) .$$

Здесь v — скорость нейтрона, имеющего кинетическую энергию E ($v = |\bar{v}|$, $\bar{v} = v \cdot \bar{\Omega}$). По физическому смыслу $\varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t)$ определяет число нейтронов с энергией E и направлением полета $\bar{\Omega}$, пересекающих в единицу времени единичную площадку, ориентированную в точке \bar{r} нормально вектору $\bar{\Omega}$; отнесенное к единичному энергетическому интервалу и единичному интервалу телесного угла.

Направление преимущественного полета нейтронов энергии E в точке \bar{r} указывает вектор плотности тока, определяемый равенством

$$\bar{i}(\bar{r}, E, t) = \int_{4\pi} d\Omega \bar{\Omega} \varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t) .$$

Нейтронное поле в объеме V может инициироваться действием внешних (независимых от поля) источников нейтронов, распределенных в этом объеме. В состав среды тела могут входить ядра, способные делиться под действием нейтронов. В процессе деления ядер генерируются вторичные нейтроны (нейтроны деления).

Тело, в котором имеется распределение нейтронов, будем в дальнейшем называть системой с нейтронным полем.

Если в системе возможно осуществление стационарного процесса деления ядер без действия внешних источников, то такая система является критическим ядерным реактором.

1.2. Уравнение нестационарного нейтронного поля

Нестационарное уравнение нейтронного поля будет использовано в дальнейшем как исходное для формулировки уравнений стационарных нейтронных полей в типичных задачах физики реакторов. Это дает основание записать его в несколько упрощенном виде, не учитывающем запаздывающие нейтроны деления:

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \psi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t)}{\partial t} = -\bar{\Omega} \nabla \psi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t) - \Sigma(\bar{r}, E) \psi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t) +$$

$$+ \int dE' \int d\Omega' \Sigma_S(\bar{r}, E') W_S(\bar{r}; E', \bar{\Omega}' \rightarrow E, \bar{\Omega}) \psi(\bar{r}, E', \bar{\Omega}', t) +$$

$$+ \frac{\chi(\bar{r}, E)}{4\pi} \int dE' \int d\Omega' \nu_f(\bar{r}, E') \Sigma_f(\bar{r}, E') \psi(\bar{r}, E', \bar{\Omega}', t),$$

$$\psi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}, t_H) = vq(\bar{r}, E, \bar{\Omega}). \quad (1.2)$$

Здесь Σ , Σ_S и Σ_f - полное макроскопическое сечение, сечение рассеяния и сечение деления; $W_S(\bar{r}; E', \bar{\Omega}' \rightarrow E, \bar{\Omega})$ - плотность вероятности для нейтрона поменять при рассеянии энергию E' и направление полета $\bar{\Omega}'$ на энергию E и направление движения $\bar{\Omega}$ ($\int dE \int d\Omega W_S(\bar{r}; E', \bar{\Omega}' \rightarrow E, \bar{\Omega}) = 1$); $\nu_f(\bar{r}, E)$ - число вторичных нейтронов, возникающих в результате одного акта деления. Предполагается, что спектр нейтронов деления $\chi(\bar{r}, E)$ ($\int dE \chi(E) = 1$) не зависит от энергии нейтрона, вызвавшего деление ядра, а угловое распределение нейтронов деления - изотропно.

Уравнение (1.1) является балансным соотношением и устанавливает равенство между скоростью изменения плотности нейтронов в фазовой точке $\bar{r}, E, \bar{\Omega}$ в момент времени t (левая часть уравнения (1.1)) и скоростями процессов утечки нейтронов из единичного объема в результате пространственного перемещения (первый член правой части), поглощения и рассеяния нейтронов ядрами среды (второй и третий члены правой части), а также процессов генерации нейтронов в результате деления ядер (последний член правой части). Здесь и в дальнейшем, если это не будет оговариваться особо, отсутствие пределов интегрирования означает, что интегралы берутся по всей области изменения соответствующих аргументов.

Нейтронное поле в системе иницируется действием в некоторый начальный момент времени $t = t_H$ внешнего (не зависящего от поля) источника, мощность которого описывается функцией $q(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ (см. начальное условие (1.2)).

Система не облучается нейтронами со стороны вакуума, поэтому на выпуклой поверхности S имеет место краевое условие

$$\psi(\bar{r}_S, E, \bar{\Omega}, t) = 0, \quad (\bar{\Omega} \cdot \bar{n}) < 0, \quad (1.3)$$

где \bar{n} - внешняя нормаль поверхности S в точке \bar{r}_S .

Пространственная зависимость макроскопических сечений может в общем случае представляться кусочно непрерывными функциями. Чтобы учесть появление такой зависимости, рассматриваемая система разделена на две зоны V_I и V_{II} и на внутренней поверхности раздела зон допускается разрывность макроскопических характеристик среды.

Если на поверхности R отсутствуют локализованные источники и поглотители нейтронов, то выполняется условие непрерывности

$$\varphi_I(\bar{r}_R, E, \bar{\Omega}, t) = \varphi_{II}(\bar{r}_R, E, \bar{\Omega}, t), \quad (\bar{\Omega} \cdot \bar{m}) \neq 0, \quad (1.4)$$

где \bar{m} — нормаль к поверхности R в точке \bar{r}_R , а индексы I и II относят плотность потока к зонам V_I и V_{II} соответственно.

1.3. Уравнение сменяющихся поколений нейтронов

При анализе условий критичности системы обычно используется отличающаяся от (1.1) форма эволюционного уравнения нейтронного поля, описывающая последовательную смену поколений нейтронов.

Уравнение сменяющихся поколений получим, используя сокращенную запись нестационарного уравнения (1.1):

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi(x, t)}{\partial t} = -L \varphi(x, t) + Q \varphi(x, t);$$

$$\varphi(x, t_H) = v q(x).$$

Здесь x обозначает совокупность фазовых переменных $\bar{r}, E, \bar{\Omega}$, а операторы L и Q определяются тождествами

$$L \equiv \bar{\Omega} \nabla + \Sigma(\bar{r}, E) - \int dE' \int d\Omega' \Sigma_S(\bar{r}, E') W_S(\bar{r}; E', \bar{\Omega}' \rightarrow E, \bar{\Omega}), \quad (1.5)$$

$$Q \equiv \frac{\chi(\bar{r}, E)}{4\pi} \int dE' \int d\Omega' \nu_f(\bar{r}, E') \Sigma_f(\bar{r}, E'). \quad (1.6)$$

Допустим, что при $t = t_H$ в системе импульсно действует внешний источник $q(x)$. Нейтроны этого источника будем называть нейтронами нулевого поколения. Поведение во времени плотности потока $\varphi^{(0)}(x, t)$ нейтронов нулевого поколения описывается уравнением

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi^{(0)}(x, t)}{\partial t} = -L \varphi^{(0)}(x, t) \quad (1.7)$$

с начальным условием

$$\varphi^{(0)}(x, t_H) = vq(x). \quad (1.8)$$

В результате деления ядер нейтронами нулевого поколения образуются нейтроны первого поколения, которые, в свою очередь, деля ядра, генерируют нейтроны второго поколения и т.д.

Плотность потока любого, следующего за нулевым, поколения нейтронов подчиняется уравнению

$$\frac{1}{v} \frac{\partial \varphi^{(i)}(x, t)}{\partial t} = -L \varphi^{(i)}(x, t) + Q \varphi^{(i-1)}(x, t), \quad i=1, 2, \dots \quad (1.9)$$

с начальным условием $\varphi^{(i)}(x, t_H) = 0$, так как в момент времени $t = t_H$ в системе присутствуют только нейтроны нулевого поколения. Легко также представить, что при $t \rightarrow \infty$ $\varphi^{(i)}(x, t) \rightarrow 0$ в результате процессов поглощения и утечки нейтронов из системы.

В дальнейшем будем рассматривать интегральную по времени плотность потока

$$\varphi^{(i)}(x) = \int_{t_H}^{\infty} dt \varphi^{(i)}(x, t), \quad i=0, 1, \dots \quad (1.10)$$

для каждого поколения нейтронов. Интегрируя по t уравнения (1.7) и (1.9) в интервале $t_H \div \infty$ и используя условия при $t = t_H$ и $t \rightarrow \infty$, получим:

$$L \varphi^{(0)}(x) = q(x), \quad L \varphi^{(i)}(x) = Q \varphi^{(i-1)}(x), \quad i=1, 2, \dots \quad (1.11)$$

Уравнения (1.11) будем называть уравнениями сменяющихся поколений нейтронов.

Дополнительные условия для функций $\varphi^{(i)}(x)$ получаем интегрированием по времени равенств (1.3) и (1.4), записанных относительно каждого поколения нейтронов.

1.4. Уравнения нейтронного поля в абстрактной операторной форме

В практике расчетных исследований ядерных реакторов широко используются различные приближенные математические модели нейтронного поля: групповое газокинетическое уравнение, групповое диффузионное приближение, диффузионно-возрастное при-

ближение и т.д. [1]. К приближенным моделям можно также отнести, например, уравнения P_N - и S_N -методов.

Во всех этих и других приближениях уравнения нейтронного поля должны обладать общими фундаментальными свойствами, отражающими физическую сущность поля. Поэтому анализ общих свойств решения уравнений нейтронного поля может быть сделан на основе единой абстрактной операторной записи уравнений сменяющихся поколений и дополнительных условий в форме

$$L\varphi^{(0)} = q, L\varphi^{(i)} = Q\varphi^{(i-1)}, \varphi^{(i)} \in D(U), \quad (1.12)$$

где оператор L во всех моделях характеризует процессы пространственного переноса, поглощения и рассеяния нейтронов, а оператор Q — процесс генерации нейтронов деления.

Запись $\varphi \in D(U)$ означает, что решение уравнений поля является элементом (функцией) с областью определения U (область изменения аргумента функции φ), принадлежащим некоторому множеству D элементов, подчиняющихся конкретным дополнительным условиям. Дополнительные условия включают в себя краевое условие и условия непрерывности, определяемые дифференциальным оператором, входящим в оператор L .

В общем случае, когда φ — функция $\varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ с областью определения $U = V_{\varphi} = V \times V_E \times V_{\Omega}$, $D(V_{\varphi})$ — множество функций, удовлетворяющих в рассматриваемой системе дополнительным условиям

$$\varphi(\bar{r}_S, E, \bar{\Omega}) = 0, \quad (\bar{\Omega} \cdot \bar{n}) < 0; \quad (1.13)$$

$$\varphi_I(\bar{r}_R, E, \bar{\Omega}) = \varphi_{II}(\bar{r}_R, E, \bar{\Omega}), \quad (\bar{\Omega} \cdot \bar{m}) \neq 0. \quad (1.14)$$

В алгоритмах расчета ядерных реакторов часто используется групповая модель нейтронного поля в диффузионном приближении. Существенно упрощая расчет, эта модель позволяет во многих случаях с достаточной на практике точностью оценивать особенности нейтронно-физических процессов, протекающих в ядерном реакторе.

В G -групповом диффузионном приближении плотность потока нейтронов имеет дискретную энергетическую зависимость и в каждой энергетической группе g описывается интегральной по угловой переменной функцией $\varphi_g(r)$ с областью определения $U = V \times G$, где G — множество целых чисел, пробегающих значения от единицы до G ($g = 1, 2, \dots, G$).

При анализе групповых диффузионных уравнений удобно использовать представление всей совокупности групповых потоков в форме функции-столбца (вектор-функции):

$$\bar{\varphi}(\bar{r}) = \text{col} \{ \varphi_1(\bar{r}), \varphi_2(\bar{r}), \dots, \varphi_6(\bar{r}) \}. \quad (1.15)$$

Операторы уравнения нейтронного поля в групповом диффузионном приближении, действующие на функции-столбцы, имеют матричный вид

$$L \equiv -\nabla \hat{D} \nabla + \hat{\Sigma}(\bar{r}), \quad (1.16)$$

$$Q \equiv \hat{Q}(\bar{r}). \quad (1.17)$$

Здесь $\hat{D} = \hat{D}(\bar{r})$ — матричный коэффициент диффузии, а компоненты $(\hat{\Sigma})_{g,g'}$ и $(\hat{Q})_{g,g'}$ матриц $\hat{\Sigma}$ и \hat{Q} определяются равенствами

$$\left. \begin{aligned} (\hat{\Sigma})_{g,g'} &= \sum_g \delta_{g,g'} - \sum_{g' \rightarrow g} (1 - \delta_{g,g'}); \\ (\hat{Q})_{g,g'} &= \chi_g \nu_{f,g} \Sigma_{f,g'}; \\ \delta_{g,g'} &= \begin{cases} 1, & \text{при } g = g'; \\ 0, & \text{при } g \neq g', \end{cases} \\ g, g' &= 1, 2, \dots, 6, \end{aligned} \right\} \quad (1.18)$$

где Σ_g — сечение увода нейтронов из группы g за счет процессов поглощения и рассеяния; $\sum_{g' \rightarrow g}$ — сечение перевода нейтронов из группы g' в группу g при рассеянии; $\Sigma_{f,g}$ — сечение деления; $\nu_{f,g}$ — число вторичных нейтронов на один акт деления ядра нейтроном группы g ; χ_g — групповой спектр нейтронов деления ($\sum_g \chi_g = 1$).

Под множеством $D(V)$ в диффузионно-групповом приближении будем в дальнейшем понимать множество вектор-функций (1.15) с областью определения $U=V$, подчиняющихся в рассматриваемой системе следующим дополнительным условиям:

$$\bar{\varphi}(\bar{r}_S) = 0, \quad (1.19)$$

$$\bar{\varphi}_I(\bar{r}_R) = \bar{\varphi}_{II}(\bar{r}_R), \quad (1.20)$$

$$\hat{D}_I \nabla_{\vec{m}} \bar{\varphi}_I(\bar{r}_R) = \hat{D}_{II} \nabla_{\vec{m}} \bar{\varphi}_{II}(\bar{r}_R), \quad (1.21)$$

где S рассматривается как экстраполированная граница, а $\nabla_{\vec{m}} \bar{\varphi}(\bar{r}_R)$ — проекция вектора $\nabla \bar{\varphi}$ на направление нормали \vec{m} в точке \bar{r}_R .

Множества $D(U)$ характеризуют области определения дифференциальных операторов уравнений нейтронного поля и являются

подмножествами более общих нормированных функциональных пространств, на которых определены другие операторы этих уравнений.

В качестве такого функционального пространства удобно выбрать гильбертово пространство $L^2(U)$ действительных квадратично суммируемых (по Лебегу) в U функций. В гильбертовом пространстве любым двум его элементам f и h ставится в соответствие вполне определенное число $\langle f, h \rangle$, называемое скалярным произведением элементов. С помощью скалярного произведения определяется норма $\|f\|$ элемента f : $\|f\| = \sqrt{\langle f, f \rangle} < \infty$.

При анализе газокинетической модели нейтронного поля в качестве гильбертова функционального пространства $L^2(U)$ будем рассматривать пространство со скалярным произведением

$$\langle f, h \rangle = \int d\bar{r} \int dE \int d\bar{\Omega} f(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) h(\bar{r}, E, \bar{\Omega}). \quad (1.22)$$

В групповом диффузионном приближении $L^2(U)$ — пространство вектор-функций со скалярным произведением

$$\langle f, h \rangle = \int d\bar{r} (\bar{f}(\bar{r}) \cdot \bar{h}(\bar{r})), \quad (1.23)$$

где

$$(\bar{f}(\bar{r}) \cdot \bar{h}(\bar{r})) = \sum_{g=1}^G f_g(\bar{r}) \cdot h_g(\bar{r}).$$

1.5. Сопряженные операторы уравнений нейтронного поля

Оператор T^+ называют сопряженным оператору T , если выполняется равенство

$$\langle \psi^+, T\psi \rangle = \langle \psi, T^+\psi^+ \rangle, \quad (1.24)$$

где ψ и ψ^+ — элементы некоторых множеств из $L^2(U)$.

Рассмотрим сначала операторы L^+ и Q^+ , сопряженные операторам L и Q газокинетического уравнения нейтронного поля (см. (1.5), (1.6)).

Будем считать, что функция $\psi^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$, определенная в V_φ , принадлежит множеству $D^+(V_\varphi)$, если она удовлетворяет краевому условию

$$\psi^+(\bar{r}_S, E, \bar{\Omega}) = 0, \quad \bar{\Omega} \cdot \bar{n} > 0 \quad (1.25)$$

и условию непрерывности

$$\psi_1^+(\bar{r}_R, E, \bar{\Omega}) = \psi_2^+(\bar{r}_R, E, \bar{\Omega}), \quad \bar{\Omega} \cdot \bar{m} \neq 0. \quad (1.26)$$

Покажем, что оператор $-\bar{\Omega}\nabla$ с областью определения $D^+(V_\varphi)$ сопряжен оператору $\bar{\Omega}\nabla$, определенному на множестве $D(V_\varphi)$:

$$\begin{aligned} \int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) (\bar{\Omega}\nabla) \varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) &= \\ = \int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) (-\bar{\Omega}\nabla) \varphi^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega}), \end{aligned} \quad (1.27)$$

где $\varphi \in D(V_\varphi)$, $\varphi^+ \in D^+(V_\varphi)$.

В условиях непрерывности φ и φ^+ в V_φ левую часть выражения (1.27) можно представить в виде

$$\int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi^+(\bar{\Omega}\nabla) \varphi = - \int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi(\bar{\Omega}\nabla) \varphi^+ + \int d\bar{r} \int dE \int d\Omega (\bar{\Omega}\nabla) \varphi \varphi^+ \quad (1.28)$$

По теореме Гаусса-Остроградского

$$\int_V d\bar{r} \int dE \int d\Omega (\bar{\Omega}\nabla) \varphi \varphi^+ = \oint_S dS \int dE \int d\Omega (\bar{\Omega} \cdot \bar{n}) \varphi \varphi^+, \quad (1.29)$$

но поверхностный интеграл равен нулю, так как φ и φ^+ удовлетворяют однородным краевым условиям (1.13) и (1.25). Отсюда и из (1.29) следует справедливость равенства (1.27). Для второй составляющей $\Sigma(\bar{r}, E)$ оператора L из (1.5) имеем:

$$\int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi^+ \Sigma \varphi = \int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi \Sigma \varphi^+,$$

т.е. оператор умножения на функцию из $L^2(U)$ — самосопряженный:

$$\Sigma^+(\bar{r}, E) = \Sigma(\bar{r}, E).$$

Третья составляющая оператора L из (1.5) — интегральный оператор рассеяния нейтронов. Для него имеем:

$$\begin{aligned} \int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) \int dE' \int d\Omega' \Sigma_S(\bar{r}, E') W_S(\bar{r}; E', \bar{\Omega}' \rightarrow E, \bar{\Omega}) \times \\ \times \varphi(\bar{r}, E', \bar{\Omega}') = \int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) \Sigma_S(\bar{r}, E) \int dE' \int d\Omega' \times \\ \times W_S(\bar{r}; E, \bar{\Omega} \rightarrow E', \bar{\Omega}') \varphi^+(\bar{r}, E', \bar{\Omega}'). \end{aligned}$$

Правая часть равенства устанавливается путем замены в его левой части порядка интегрирования по энергетической и угловой переменным с последующим переобозначением $E \leftrightarrow E'$, $\bar{\Omega} \leftrightarrow \bar{\Omega}'$ этих переменных. Из последнего равенства следует:

$$\begin{aligned} \left(\int dE' \int d\Omega' \Sigma_S(\bar{r}, E') W_S(\bar{r}; E', \bar{\Omega}' \rightarrow E, \bar{\Omega}) \right)^+ = \\ = \Sigma_S(\bar{r}, E) \int dE' \int d\Omega' W_S(\bar{r}; E, \bar{\Omega} \rightarrow E', \bar{\Omega}'). \end{aligned}$$

Таким образом, оператор

$$L^+ \equiv -\bar{\Omega} \nabla + \Sigma - \Sigma_S \int dE' \int d\Omega' W_S(\bar{r}; E, \bar{\Omega} \rightarrow E', \bar{\Omega}'), \quad (1.30)$$

определенный на множестве функций $D^+(V_\varphi)$, сопряжен оператору L с областью определения $D(V_\varphi)$.

Аналогичным образом показывается, что оператор

$$Q^+ \equiv \frac{\chi_f(\bar{r}, E) \Sigma_f(\bar{r}, E)}{4\pi} \int dE' \int d\Omega' \chi(\bar{r}, E') \quad (1.31)$$

сопряжен оператору Q в $L^2(V_\varphi)$.

Перейдем теперь к определению сопряженных операторов в групповом диффузионном приближении. Прежде всего отметим известное равенство

$$(\bar{f} \cdot \hat{A} \bar{h}) = (\bar{h} \cdot \hat{A}^T \bar{f}), \quad (1.32)$$

где \hat{A}^T — транспонированная матрица \hat{A} .

Будем считать, что вектор-функция $\bar{\psi}^+(\bar{r})$, определенная в V , принадлежит множеству $D^+(V)$, если она удовлетворяет следующим дополнительным условиям:

$$\bar{\psi}^+(\bar{r}_S) = 0; \quad (1.33)$$

$$\bar{\psi}_I^+(\bar{r}_R) = \bar{\psi}_II^+(\bar{r}_R); \quad (1.34)$$

$$\hat{D}_I^T \nabla_m \bar{\psi}_I^+(\bar{r}_R) = \hat{D}_II^T \nabla_m \bar{\psi}_II^+(\bar{r}_R). \quad (1.35)$$

Покажем, что дифференциальный оператор $\nabla \hat{D}^T \nabla$ с областью определения $D^+(V)$ сопряжен оператору $\nabla \hat{D} \nabla$, определенному на множестве $D(V)$, т.е. справедливо равенство

$$\int_V d\bar{r} (\bar{\psi}^+ \cdot \nabla \hat{D} \nabla \bar{\psi}) = \int_V d\bar{r} (\bar{\psi} \cdot \nabla \hat{D}^T \nabla \bar{\psi}^+). \quad (1.36)$$

Действительно, известная формула Грина

$$\begin{aligned} \int_V d\bar{r} [(\bar{\psi}^+ \cdot \nabla \hat{D} \nabla \bar{\psi}) - (\bar{\psi} \cdot \nabla \hat{D}^T \nabla \bar{\psi}^+)] = \\ = \oint_S dS [(\bar{\psi}^+ \cdot \hat{D} \nabla_n \bar{\psi}) - (\bar{\psi} \cdot \hat{D}^T \nabla_n \bar{\psi}^+)], \end{aligned} \quad (1.37)$$

когда $\bar{\psi}$ и $\bar{\psi}^+$ удовлетворяют однородным условиям (1.19) и (1.33), приводит к равенству (1.36).

Из (1.32) следует, что матричные операторы $\hat{\Sigma}^T(\bar{r})$ и $\hat{Q}^T(\bar{r})$ сопряжены операторам $\hat{\Sigma}(\bar{r})$ и $\hat{Q}(\bar{r})$.

Таким образом, оператор L^+ :

$$L^+ \equiv -\nabla \hat{D}^T(\bar{r}) \nabla + \hat{\Sigma}^T(\bar{r}) \quad (1.38)$$

с областью определения $D^+(V)$ сопряжен оператору L группового диффузионного приближения (см. (1.16)), определенному в

$$D(V), \text{ а} \quad Q^+ \equiv \hat{Q}^T(\bar{r}). \quad (1.39)$$

1.6. Основные свойства операторов уравнений нейтронного поля

Независимо от рассматриваемого приближения в операторном уравнении нейтронного поля в среде, содержащей ядра делящихся элементов, всегда будут присутствовать оператор переноса нейтронов L и оператор Q источника нейтронов деления. Так как операторы L и Q для любой приближенной модели должны отражать одинаковую физическую сущность, то следует ожидать, что они обладают общими для всех моделей фундаментальными свойствами. Наиболее полно математический анализ операторов нейтронного поля для газокинетической модели представлен в монографии С.Б. Шихова [2].

1.6.1. Фундаментальные свойства операторов

Прежде всего отметим, что рассматриваемые нами операторы принадлежат к классу линейных*. Одним из фундаментальных свойств операторов является существование ограниченного** об-

* Оператор T линейный, если $T(\alpha f + \beta h) = \alpha T f + \beta T h$, где f и h - функции из области определения оператора T , а α и β - константы.

** Оператор T ограничен, если $\|T f\| \leq C \|f\|$. Наименьшая из постоянных C , удовлетворяющих этому неравенству, называется нормой ограниченного оператора T и обозначается символом $\|T\|$.

ратного оператора L^{-1} , порождающего равенство $L^{-1}L = I$, где I — тождественный оператор ($I\psi = \psi$). Математический анализ показывает, что оператор L^{-1} существует, если уравнение $L\psi = 0$ имеет только тривиальное (нулевое) решение. Это условие для правильно сформулированной модели всегда должно выполняться, ибо отражает очевидный факт отсутствия нейтронного поля в системе без внутренних и внешних источников нейтронов.

На основе ограниченности оператора L^{-1} показывается ограниченность сопряженного оператора $(L^+)^{-1} = (L^{-1})^+$. Другим фундаментальным свойством операторов уравнений нейтронного поля является существование действительного положительного простого собственного значения k_0 оператора $L^{-1}Q$, которому отвечает всюду положительная в U собственная функция ψ_0 (нулевая гармоника), подчиняющаяся уравнению

$$k_0 \psi_0 = L^{-1}Q \psi_0, \quad \psi_0 \in D(U) \subset L^2(U). \quad (1.40)$$

Этот теоретический результат обосновывает возможность существования при $k_0 = 1$ системы без внешних источников с неизменным во времени (стационарным) нейтронным полем. Такая система называется критическим реактором.

Оператор $L^{-1}Q$ принадлежит к классу так называемых вполне непрерывных положительных операторов. Спектр собственных чисел такого оператора дискретный, и помимо ведущего собственного числа k_0 могут существовать другие собственные числа конечной кратности, удовлетворяющие неравенству

$$k_0 < |k_1| \leq |k_2| \leq \dots$$

Числа k_n ($n = 1, 2, \dots$), если они существуют, располагаются симметрично относительно действительной оси. Установлено совпадение спектров собственных значений операторов $L^{-1}Q$ и $(L^+)^{-1}Q^+$.

Ведущему собственному числу k_0 отвечает всюду положительная в U собственная функция ψ_0^+ (нулевая сопряженная гармоника) оператора $(L^+)^{-1}Q^+$, подчиняющаяся уравнению

$$k_0 \psi_0^+ = (L^+)^{-1}Q^+ \psi_0^+, \quad \psi_0^+ \in D^+(U). \quad (1.41)$$

Уравнения для собственных функций операторов $L^{-1}Q$ и $(L^+)^{-1}Q^+$, отвечающих различным собственным числам (включая k_0), можно представить в виде

$$L\psi_m = \frac{1}{k_m} Q\psi_m, \quad \psi_m \in D(U), \quad (1.42)$$

$$L^+ \psi_m^+ = \frac{1}{k_m} Q^+ \psi_m^+, \quad \psi_m^+ \in D^+(U). \quad (1.43)$$

При $k_m \neq k_n$ собственные функции ψ_m и ψ_n^+ биортогональны:

$$\langle \psi_n^+, Q \psi_m \rangle = \langle \psi_m, Q^+ \psi_n^+ \rangle = 0, \quad m \neq n. \quad (1.44)$$

Соотношение биортогональности (1.44) легко устанавливается путем скалярного умножения уравнения (1.42) на ψ_n^+ , а уравнения (1.43) на ψ_m , и последующего вычитания получаемых таким образом равенств. В результате получается соотношение

$$\langle \psi_n^+, Q \psi_m \rangle \left(\frac{1}{k_m} - \frac{1}{k_n} \right) = 0, \quad (1.45)$$

из которого следует (1.44) при $m \neq n$.

Уравнения (1.42) и (1.43) определяют функции ψ_m и ψ_n^+ с точностью до произвольных постоянных множителей. Для нормировки этих функций при любых $m = n$ согласно (1.45) можно выбрать любое ограниченное число N_m , приняв

$$\langle \psi_m^+, Q \psi_m \rangle = \langle \psi_m, Q^+ \psi_m^+ \rangle = N_m. \quad (1.46)$$

В приложениях часто используется $N_m = 1$. Отметим, что оператор $(L^+)^{-1}Q^+$ не сопряжен оператору $L^{-1}Q$, так как сопряженным последнему является оператор $(L^{-1}Q)^+ = Q^+(L^+)^{-1}$.

Спектры собственных чисел операторов $L^{-1}Q$, QL^{-1} и $(L^+)^{-1}Q^+$, $Q^+(L^+)^{-1}$ совпадают. Установим связь между собственными функциями этих операторов, отвечающих одному и тому же собственному числу k_n .

Рассмотрим уравнение

$$k_n \psi_n^+ = (L^{-1})^+ Q^+ \psi_n^+, \quad \psi_n^+ \in D^+(U) \quad (1.47)$$

для собственной функции ψ_n^+ оператора $(L^+)^{-1}Q^+$. Подействуем на это уравнение оператором Q^+ и используем обозначение

$$\zeta_n^+ = Q^+ \psi_n^+. \quad (1.48)$$

Тогда

$$k_n \zeta_n^+ = Q^+(L^+)^{-1} \zeta_n^+, \quad (1.49)$$

т.е. ζ_n^+ — собственная функция оператора $Q^+(L^+)^{-1}$, сопряженного оператору $L^{-1}Q$. Равенство (1.44) устанавливает соотношение биортогональности для функций ζ_n^+ и ψ_m :

$$\langle \zeta_n^+, \psi_m \rangle = 0, \quad m \neq n. \quad (1.50)$$

Уравнение

$$k_m \zeta_m = QL^{-1} \zeta_m \quad (1.51)$$

для собственной функции

$$\xi_m = Q \psi_m \quad (1.52)$$

оператора QL^{-1} получаем в результате действия оператором Q на уравнение

$$k_m \psi_m = L^{-1}Q \psi_m \quad (1.53)$$

Из равенства (1.44) следует:

$$\langle \psi_n^+, \xi_m \rangle = 0, \quad m \neq n \quad (1.54)$$

1.6.2. Множества $d(U)$ и $d^+(U)$

Произвольную функцию $\varphi \in D(U)$ представим суммой

$$\varphi = C \psi_0 + f, \quad C = \text{const}, \quad (1.55)$$

где f принадлежит множеству $d(U)$ функций, удовлетворяющих условию ортогональности

$$\langle \psi_0^+, Qf \rangle = \langle f, Q^+ \psi_0^+ \rangle = 0, \quad (f \in d(U)) \quad (1.56)$$

Множество $d(U)$ будем называть множеством, не содержащим нулевой гармоники ψ_0 .

Пусть на функцию (1.55) действует оператор $L^{-1}Q$:

$$L^{-1}Q\varphi = CL^{-1}Q\psi_0 + L^{-1}Qf \quad (1.57)$$

Учитывая, что оператор задается не только его конкретным видом, но и областью определения, представим равенство (1.57) в виде

$$L^{-1}Q\varphi = C(L^{-1}Q)_0 \psi_0 + (L^{-1}Q)_1 f, \quad (1.58)$$

приняв за область определения оператора $(L^{-1}Q)_0$ функцию ψ_0 , а в качестве области определения оператора $(L^{-1}Q)_1$ - множество $d(U)$.

Спектр собственных чисел оператора $(L^{-1}Q)_0$ содержит единственное число k_0 , а спектр оператора $(L^{-1}Q)_1$ состоит из спектра оператора $L^{-1}Q$, из которого удалено ведущее собственное число k_0 , поэтому норма этого оператора меньше k_0 : $\|(L^{-1}Q)_1\| < k_0$.

Равенство (1.58) отражает процедуру, называемую спектральным разложением операторов.

Аналогичным образом определим множество $d^+(U)$ функций, не содержащих нулевой сопряженной гармоники ψ_0^+ . Функция $f^+ \in d^+(U) \subset D^+(U)$, если

$$\langle \psi_0, Q^+ f^+ \rangle = \langle f^+, Q \psi_0 \rangle = 0. \quad (1.59)$$

Произвольную функцию $\varphi^+ \in D^+(U)$ можно представить суммой

$$\varphi^+ = c^+ \psi_0^+ + f^+ \quad (c^+ = \text{const}), \quad (1.60)$$

а действие на нее оператора $(L^+)^{-1} Q^+$ — выражением

$$(L^+)^{-1} Q^+ \varphi^+ = c^+ ((L^+)^{-1} Q^+)_0 \psi_0^+ + ((L^+)^{-1} Q^+)_1 f^+, \quad (1.61)$$

где область определения оператора $((L^+)^{-1} Q^+)_1$ — множество $d^+(U)$, а его норма $\|((L^+)^{-1} Q^+)_1\| < k_0$.

1.6.3. Альтернатива Фредгольма

Изучение уравнений и функционалов нейтронных полей приведет нас в дальнейшем к особым неоднородным уравнениям

$$L\varphi - \frac{1}{k_0} Q\varphi = q, \quad \varphi \in D(U); \quad (1.62)$$

$$L^+ \varphi^+ - \frac{1}{k_0} Q^+ \varphi^+ = q^+, \quad \varphi^+ \in D^+(U). \quad (1.63)$$

Поскольку k_0 является собственным числом операторов $L^{-1}Q$ и $(L^+)^{-1}Q^+$, то однородные уравнения, соответствующие уравнениям (1.62) и (1.63) без правых частей, будут иметь нетривиальные решения. Встает вопрос о разрешимости уравнений типа (1.62) и (1.63).

Если от уравнений (1.62) и (1.63) можно перейти к уравнениям с вполне непрерывными операторами $L^{-1}Q$ и $(L^+)^{-1}Q^+$

$$\varphi - \frac{1}{k_0} L^{-1} Q \varphi = L^{-1} q, \quad (1.64)$$

$$\varphi^+ - \frac{1}{k_0} (L^+)^{-1} Q^+ \varphi^+ = (L^+)^{-1} q^+, \quad (1.65)$$

то на вопрос о разрешимости этих уравнений отвечает теорема Фредгольма (ее часто называют альтернативой Фредгольма), согласно которой уравнения (1.64) и (1.65) разрешимы только при таких правых частях этих уравнений, которые удовлетворяют условиям ортогональности

$$\langle \xi_0^+, L^{-1}q \rangle = 0, \quad \langle \xi_0, (L^{-1})^+ q^+ \rangle = 0, \quad (1.66)$$

где ξ_0^+ и ξ_0 - собственные функции операторов $(L^{-1}Q)^+$ и QL^{-1} соответственно, отвечающие ведущему собственному числу k_0 . Используя связи (1.48) и (1.52) функций ξ_0^+ , ψ_0^+ , ξ_0 , ψ_0 , можно из (1.66) получить следующий результат: уравнения (1.62) и (1.63) разрешимы, если их правые части удовлетворяют условиям ортогональности

$$\langle \psi_0^+, q \rangle = 0; \quad \langle \psi_0, q^+ \rangle = 0. \quad (1.67)$$

Общие решения уравнений (1.62), (1.63) на множествах $D(U)$ и $D^+(U)$ не обладают свойством единственности и могут быть представлены в форме (1.55) и (1.60) соответственно.

Таким образом, приходим к результату: уравнения

$$Lf - \frac{1}{k_0} Qf = q, \quad f \in d(U), \quad (1.68)$$

$$L^+ f^+ - \frac{1}{k_0} Q^+ f^+ = q^+, \quad f^+ \in d^+(U) \quad (1.69)$$

однозначно разрешимы, если правые части этих уравнений удовлетворяют условиям ортогональности (1.67).

1.7. Решения уравнений сменяющихся поколений нейтронов

Проведенный анализ операторов уравнений нейтронного поля позволяет сравнительно детально изучить свойства их решений. В этом параграфе основное внимание будет уделено общей структуре решений уравнений (1.12) сменяющихся поколений нейтронов и их асимптотическому поведению при $i \rightarrow \infty$.

Представим $\varphi(i)$ в форме функции с разделенными переменными:

$$\varphi(i) = c^{(i)} \psi \quad (1.70)$$

и подставим (1.70) во второе уравнение системы (1.12). После выполнения обычной формальной процедуры разделения переменных приходим к уравнениям

$$L\psi = \frac{1}{k} Q\psi, \quad \psi \in D(U); \quad (1.71)$$

$$c^{(i)} = k c^{(i-1)}, \quad (1.72)$$

где k - константа разделения.

Уравнение (1.71) можно рассматривать как задачу на собственные значения и собственные функции оператора $L^{-1}Q$.

Используя (1.72) в качестве рекуррентного соотношения для коэффициентов $c^{(i)}$, выразим их через $c^{(0)}$:

$$c^{(i)} = k^i c^{(0)}$$

Функцию

$$\varphi^{(i)} = c^{(0)} k^i \psi \quad (1.73)$$

будем называть элементарным решением уравнений сменяющихся поколений нейтронов. Элементарное решение φ_0 , соответствующее ведущему собственному числу k_0 , пропорционально нулевой гармонике ψ_0 : $\varphi_0^{(i)} = c k_0^i \psi_0$. Общее решение уравнений сменяющихся поколений нейтронов представим суммой

$$\varphi^{(i)} = c k_0^i \psi_0 + f^{(i)}, \quad (1.74)$$

где $f^{(i)} \in d(U)$ и представляет совокупность элементарных решений с $k \neq k_0$.

Константу c в равенстве (1.74) найдем, подставив решение в форме (1.74) в первое уравнение системы (1.12) для плотности потока нейтронов нулевого поколения и умножив его скалярно на сопряженную нулевую гармонику ψ_0^+ . Учитывая уравнение (1.42) для гармоники ψ_0 , а также тот факт, что $f^{(0)} \in d(U)$ и, поэтому,

$$\langle \psi_0^+, L f^{(0)} \rangle = \langle f^{(0)}, L^+ \psi_0^+ \rangle = \frac{1}{k_0} \langle f^{(0)}, Q^+ \psi_0^+ \rangle = 0,$$

находим:

$$c = \frac{k_0 \langle \psi_0^+, q \rangle}{\langle \psi_0^+, Q \psi_0 \rangle} \quad (1.75)$$

Получим теперь выражение для $f^{(i)}$ в равенстве (1.74). Для этого подставим (1.74) во второе уравнение системы (1.12) и учтем уравнение для нулевой гармоники ψ_0 . В результате приходим к уравнению $L f^{(i)} = Q f^{(i-1)}$, $f^{(i)} \in d(U)$ или

$$f^{(i)} = (L^{-1}Q)_1 f^{(i-1)}, \quad f^{(i)} \in d(U). \quad (1.76)$$

Обозначим через M_1 оператор $(L^{-1}Q)_1$ с областью определения $d(U)$, тогда

$$f^{(i)} = M_1^i f^{(0)} \quad \text{или} \quad f^{(i)} = M_1^i f^{(0)}. \quad (1.77)$$

В то же время из первого уравнения системы (1.12) следует:

$$f^{(0)} = L^{-1}q - C\psi_0.$$

Таким образом, общее решение уравнений сменяющихся поколений при фиксированном i может быть представлено в следующей форме:

$$\varphi^{(i)} = k_0^i \left[\frac{k_0 \langle \psi_0^+, q \rangle}{\langle \psi_0^+, Q\psi_0 \rangle} \psi_0 + \left(\frac{M_1}{k_0} \right)^i f^{(0)} \right]. \quad (1.78)$$

Отсюда можно сделать вывод об асимптотическом поведении решения $\varphi^{(i)}$ при $i \rightarrow \infty$.

Прежде всего напомним, что норма оператора M_1 с областью определения d меньше k_0 , поэтому норма оператора M_1/k_0 меньше единицы и имеет место предельный переход (по норме в $L^2(U)$):

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \left(\frac{M_1}{k_0} \right)^i = 0. \quad (1.79)$$

Для асимптотического решения уравнения сменяющихся поколений нейтронов получаем следующий результат:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{(i)}}{k_0^{(i+1)}} = \frac{\langle \psi_0^+, q \rangle}{\langle \psi_0^+, Q\psi_0 \rangle} \psi_0. \quad (1.80)$$

Соотношение (1.78) позволяет выделить основные особенности асимптотического решения:

1) при $\langle \psi_0^+, q \rangle \neq 0$ после смены большого числа поколений нейтронов в системе устанавливается распределение плотности потока, пропорциональное нулевой гармонике ψ_0 ;

2) при $\langle \psi_0^+, q \rangle \neq 0$ и $k_0 = 1$ амплитуда асимптотического распределения будет оставаться неизменной от поколения к поколению. В этом случае система является критическим реактором;

3) при $\langle \psi_0^+, q \rangle \neq 0$ и $k_0 > 1$ амплитуда асимптотического распределения будет возрастать от поколения к поколению. В этом случае система является надкритическим реактором;

4) при $\langle \psi_0^+, q \rangle \neq 0$ и $k_0 < 1$ амплитуда асимптотического распределения нейтронов будет уменьшаться от поколения к поколению и в конечном счете нейтроны исчезнут из системы. В этом случае система является подкритическим реактором;

5) при $\langle \psi_0^+, q \rangle = 0$ асимптотическое распределение нейтронов в системе отсутствует.

Полученные результаты имеют важное практическое значение. Систему (1.12) можно интерпретировать как вычислительную процедуру последовательного решения уравнений сменяющихся по-

колений. Эта процедура обычно называется методом итерации источников.

Реализуя (как правило, с помощью ЭВМ) метод итераций источников, определяют для рассматриваемой системы ведущее собственное число k_0 и распределение ψ_0 нулевой гармоники нейтронного поля. Действительно, из равенства (1.78) следует:

$$k_0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\psi^{(i)}}{\psi^{(i-1)}} \quad (1.81)$$

Если подействовать на обе части равенства (1.78) оператором Q , а затем проинтегрировать результат по всему объему U , то для расчета k_0 можно получить формулу

$$k_0 = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\langle a, Q \psi^{(i)} \rangle}{\langle a, Q \psi^{(i-1)} \rangle}, \quad (1.82)$$

где функция-константа a принимается равной единице.

В соответствии с (1.82) k_0 определяет отношение скорости генерации нейтронов некоторого поколения к скорости генерации нейтронов предшествующего ему поколения, поэтому ведущее собственное число k_0 имеет смысл эффективного коэффициента размножения нейтронов в системе ($k_{эф}$). На практике заданная точность расчета асимптотического распределения нейтронов и параметра k_0 достигается за конечное число итерационных шагов. Однако число итераций, которое необходимо сделать, чтобы достигнуть заданную точность, зависит от физических особенностей системы и ее размеров. Скорость сходимости итерационного процесса к асимптотическому решению (по норме в $L^2(U)$) зависит от того, насколько норма $\|M_1\|/k_0$ меньше единицы. Если оценить норму $\|M_1\|$ через собственное число $|k_1|$, то можно заметить, что скорость сходимости метода итераций источников определяется отношением $|k_1|/k_0$. Чем ближе $|k_1|$ к k_0 , тем медленнее сходится процесс итераций. Случай близости $|k_1|$ к k_0 обычно наблюдается в физически больших системах, когда средний путь, проходимый нейтроном за время его жизни в системе, гораздо меньше ее размеров.

1.8. Стационарные уравнения нейтронного поля

На основе анализа решения уравнений сменяющихся поколений нейтронов можно сформулировать ряд стационарных уравнений, описывающих типичные задачи расчета систем с нейтронными по-

лями, решение которых возможно без использования представления о сменяющихся поколениях нейтронов.

1.8.1. Уравнения нейтронного поля в подкритической системе

В подкритической системе $k_0 < 1$ и плотность потока нейтронов, инициированная действием внешнего импульсного источника, будет уменьшаться от поколения к поколению, пока нейтроны не исчезнут совсем.

Поэтому суммарная по всем поколениям плотность потока нейтронов может быть определена сходящимся рядом

$$\varphi = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi^{(i)} \quad (\varphi^{(i)} \rightarrow 0, \text{ при } i \rightarrow \infty). \quad (1.83)$$

Суммируя по i уравнения (1.12) и используя определение (1.82), приходим к стационарному уравнению

$$L\varphi - Q\varphi = q. \quad (1.84)$$

Это уравнение можно также рассматривать как уравнение стационарного нейтронного поля в подкритической системе, обусловленного действием стационарного внешнего объемного источника q . В этом проявляется своеобразный принцип эквивалентности стационарной и нестационарной задач.

Условие $k_0 < 1$ обеспечивает существование единственного решения уравнения (1.84). Частным случаем уравнения (1.84) является стационарное уравнение переноса нейтронов

$$L\varphi = q, \quad \varphi \in D(U) \quad (1.85)$$

в неразмножающих средах.

Решение уравнения (1.84) можно записать в квадратурах, используя функцию Грина (или функцию влияния объемного точечного источника). Пусть \mathcal{X} обозначает совокупность фазовых переменных в газокинетической модели нейтронного поля. Если в качестве источника в уравнении (1.84) принять мононаправленный моноэнергетический точечный источник, описав его δ -функцией $\delta(x-x_0)$, то функция Грина $G(x, x_0)$ будет характеризовать плотность потока нейтронов в фазовой точке x , обусловленной действием точечного источника в фазовой точке x_0 , и подчиняться уравнению

$$LG(x, x_0) - QG(x, x_0) = \delta(x-x_0), \quad G(x, x_0) \in D(V_\varphi) \subset L^2(V_\varphi). \quad (1.86)$$

Решение уравнения (1.84) представляется интегралом

$$\varphi(x) = \int_{V_{\varphi}} dx G(x, x_0) q(x_0). \quad (1.87)$$

1.8.2. Уравнения критического и условно-критического реакторов

В критическом реакторе $k_0 = 1$ и асимптотическое распределение плотности потока нейтронов $\varphi(x) = C\psi_0(x)$ подчиняется стационарному уравнению критического реактора

$$L\varphi = Q\varphi, \quad \varphi \in D(U). \quad (1.88)$$

Ранее было показано, что как в критической, так и в некритической системах после смены большого числа поколений нейтронов устанавливается асимптотическое распределение плотности потока $\varphi = C\psi_0$. Поэтому уравнение

$$L\varphi = \frac{1}{k_0} Q\varphi, \quad \varphi \in D(U). \quad (1.89)$$

можно принять в качестве уравнения нейтронного поля такого гипотетического критического реактора, в котором число вторичных нейтронов, возникающих при одном акте деления ядер, уменьшено в k_0 раз. Этот гипотетический реактор принято называть условно-критическим. При $k_0 = 1$ мы автоматически получаем уравнение критического реактора.

Амплитуда C распределения асимптотической плотности потока не может быть произвольной. Она должна ограничиваться допустимым энерговыделением W , определяемым возможностями системы отвода энергии из реактора. Поэтому "начальное" распределение источников q должно быть подобрано таким образом, чтобы при произвольной нормировке нулевой гармоники ψ_0 выполнялось равенство

$$W = \langle w, C\psi_0 \rangle, \quad (1.90)$$

где функция w — энерговыделение в единичном фазовом объеме в окрестности фазовой точки x , отнесенное к единичной плотности потока нейтронов в этой точке.

Уравнение (1.90) будем называть условием нормировки нейтронного поля. Оно позволяет забыть предысторию возникновения поля и однозначно описать установившееся поле φ , удовлетворяющее условию нормировки (1.90) путем совместного решения системы стационарных уравнений (1.89) и (1.90). Уравнения (1.89)

и (1.90) будем называть уравнениями условно-критического (критического) реактора с нормированным нейтронным полем.

По определению, условно-критический реактор — это система, которая приводится в критическое состояние путем деления оператора Q на k_0 , поэтому смена последовательных поколений нейтронов в такой системе всегда должна завершаться установлением асимптотического стационарного распределения $C\psi_0$. Рассмотрим более подробно уравнения сменяющихся поколений в условно-критическом реакторе:

$$L\varphi^{(0)} = q, \quad L\varphi^{(i)} = \frac{1}{k_0} Q\varphi^{(i-1)}, \quad \varphi^{(i)} \in D(U). \quad (1.91)$$

Поскольку k_0 — ведущее собственное число оператора $L^{-1}Q$, то ведущее собственное число оператора $\frac{1}{k_0}L^{-1}Q$ равно единице, а все остальные числа меньше единицы.

Представим $\varphi^{(i)}$ суммой

$$\varphi^{(i)} = C\psi_0 + f^{(i)}, \quad f^{(i)} \in d(U). \quad (1.92)$$

Коэффициент C в (1.92) определится формулой (1.75), а для $f^{(i)}$ получим уравнения

$$\left. \begin{aligned} Lf^{(0)} &= q - \frac{\langle \psi_0^+, q \rangle}{\langle \psi_0^+, Q\psi_0 \rangle} Q\psi_0; \\ Lf^{(i)} &= \frac{1}{k_0} Qf^{(i-1)}. \end{aligned} \right\} \quad (1.93)$$

Общее решение уравнения (1.91) будет иметь следующий вид:

$$\varphi^{(i)} = \frac{k_0 \langle \psi_0^+, q \rangle}{\langle \psi_0^+, Q\psi_0 \rangle} \psi_0 + \left(\frac{M_1}{k_0} \right)^i f^{(0)}. \quad (1.94)$$

При $i \rightarrow \infty$ второй член в правой части равенства (1.94) исчезнет и асимптотическое решение будет описываться первым членом, т.е. нулевой гармоникой ψ_0 с неменяющейся от поколения к поколению амплитудой. Если источник $q \sim Q\psi_0$, то переходного процесса установления нулевой гармоники не будет, ибо в этом случае все $f^{(i)} = 0$, $i = 0, 1, \dots$ Альтернативная ситуация возникает, когда источник имеет такое распределение, что $\langle q, \psi_0^+ \rangle = 0$. В этом случае $\varphi^{(i)} = f^{(i)}$ и после смены большого числа поколений нейтронное поле исчезнет. Нужно, однако, отметить, что такая ситуация является скорее гипотетической, чем реальной, так как $\langle q, \psi_0^+ \rangle$ может обращаться в ноль при неотрицательной ψ_0^+ , если источник q — знакопеременная в U функция.

В заключение рассмотрим суммарную по поколениям плотность потока нейтронов ансамбля, не содержащего распределений по нулевой гармонике ψ_0 :

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} f^{(i)}. \quad (1.95)$$

Существование предельного перехода $\lim_{i \rightarrow \infty} f^{(i)} = 0$ позволяет ожидать сходимости ряда (1.95).

Уравнение для функции f получим, суммируя по всем i уравнения (1.93):

$$Lf - \frac{1}{k_0} Qf = q - \frac{\langle \psi_0^+, q \rangle}{\langle \psi_0^+, Q\psi_0 \rangle} Q\psi_0, \quad f \in d(U). \quad (1.96)$$

Правая часть этого уравнения ортогональна сопряженной нулевой гармонике ψ_0^+ , поэтому согласно альтернативе Фредгольма уравнение (1.96) имеет единственное решение в $d(U)$ при произвольном q . Если в качестве q рассмотреть точечный источник в фазовой точке x_0 ($q = \delta(x - x_0)$), то уравнение для функции $f = g(x, x_0)$, соответствующей этому источнику, запишется в форме

$$Lg(x, x_0) - \frac{1}{k_0} Qg(x, x_0) = \delta(x, x_0) - \frac{\psi_0^+(x_0)}{\langle \psi_0^+, Q\psi_0 \rangle} Q\psi_0(x), \quad (1.97)$$

$$g(x, x_0) \in d(U).$$

Пусть источник $q(x)$ удовлетворяет условию ортогональности $\langle q, \psi_0^+ \rangle = 0$. Тогда уравнение (1.97) примет вид

$$Lf - \frac{1}{k_0} Qf = q, \quad \langle q, \psi_0^+ \rangle = 0, \quad f \in d(U). \quad (1.98)$$

Единственное решение этого уравнения может быть представлено в квадратурах:

$$f(x) = \int_{V_\varphi} dx_0 g(x, x_0) q(x_0). \quad (1.99)$$

Функцию $g(x, x_0)$ иногда называют обобщенной функцией Грина.

1.9. Функционалы стационарного нейтронного поля

Различные системы удобно сравнивать между собой с помощью интегральных характеристик (функционалов), которые обычно несут в себе информацию как о системе, так и о нейтронном поле в ней.

По определению, функционал $F[\varphi]$ ставит в соответствие распределению (функции) φ некоторое определенное число. Рас-

смотрим структуру и физический смысл различных функционалов нейтронного поля.

1. Линейный функционал $F_a[\varphi]$. Функционал $F_a[\varphi]$ линеен, если при $\varphi = \alpha f + \beta h$ выполняется равенство $F_a[\varphi] = \alpha F_a[f] + \beta F_a[h]$, где $f, h \in L^2(U)$, а α и β — константы. Линейный функционал в $L^2(U)$ представляется скалярным произведением

$$F_a[\varphi] = \langle a, \varphi \rangle ; \quad a, \varphi \in L^2(U). \quad (1.100)$$

Физический смысл функционала F_a зависит от выбора функции a . С помощью линейного функционала (1.100) выражено, например, условие нормировки нейтронного поля (1.90).

Неравенство Коши–Буняковского определяет соотношение $|F_a| \leq \|a\| \|\varphi\|$ между нормами функций a , φ и модулем функционала.

2. Билинейный функционал. Функционал F_a линеен относительно элементов a и φ , поэтому его называют также билинейным. К классу билинейных функционалов относится функционал

$$F[f, h] = \langle f, Th \rangle, \quad f, h \in L^2(U), \quad (1.101)$$

где T — линейный оператор, такой, что $\|Th\| < \infty$. Если $T=L$ — неограниченный оператор переноса нейтронов, то $\|Lh\| < \infty$ при $h \in D(U) \subset L^2(U)$.

3. Дробно-линейные функционалы. Функционал, для которого выполняется равенство $F[C\varphi] = F[\varphi]$, где C — постоянная, называется однородным. К классу однородных относится дробно-линейный функционал

$$F_{a,b}[\varphi] = \frac{F_a[\varphi]}{F_b[\varphi]} \quad (1.102)$$

Примером использования линейных и дробно-линейных функционалов может служить представление с их помощью такой важной характеристики системы с нейтронным полем, как коэффициент воспроизводства (КВ) ядерного топлива. Если нейтронное поле в системе, содержащей ядра ^{235}U и ^{238}U , описывается газокинетическим уравнением, то

$$KB = \frac{\int dr \int dE \int d\Omega \Sigma_c^{(8)} \varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega})}{\int dr \int dE \int d\Omega \Sigma_a^{(5)} \varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega})}$$

— дробно-линейный функционал, в котором функциями a и b являются, соответственно, распределения макроскопических сечений

радиационного захвата нейтронов ядрами ^{238}U и поглощения нейтронов ядрами ^{235}U .

4. Дробно-билинейные функционалы. К классу однородных относятся также дробно-билинейные функционалы вида

$$F[f, h] = \frac{\langle f, Th \rangle}{\langle f, Ph \rangle},$$

где T и P — линейные операторы. Если в качестве T и P взять соответственно операторы L и Q уравнений нейтронного поля, а в качестве функций f и h — нулевые гармоники ψ_0^+ и ψ_0 , то из уравнений (1.42) и (1.43) при $\pi, \pi=0$ следует:

$$F[\psi_0^+, \psi_0] = \frac{\langle \psi_0^+, L\psi_0 \rangle}{\langle \psi_0^+, Q\psi_0 \rangle} = \frac{\langle \psi_0, L^+\psi_0^+ \rangle}{\langle \psi_0, Q^+\psi_0^+ \rangle} = \frac{1}{k_0}. \quad (1.103)$$

Таким образом, с помощью дробно-билинейного функционала можно выразить собственное число $k_0 = k_{эф}$.

1.10. Вариации и производные функционалов

1.10.1. Вариация функции, вариации и производные функционалов

Пусть φ — некоторая функция из $L^2(U)$ с областью определения U . Наряду с φ определим сколь угодно близкую к ней по норме в $L^2(U)$ функцию $\tilde{\varphi}$:

$$\tilde{\varphi} = \varphi + \delta\varphi \quad (1.104)$$

и назовем $\delta\varphi$ вариацией функции $\tilde{\varphi}$ в окрестности φ . По определению, вариацию $\delta\varphi$ можно представить в виде

$$\delta\varphi = \varepsilon h, \quad (1.105)$$

где $h \in L^2(U)$, а действительное положительное число ε может принимать сколь угодно малые значения. Тогда

$$\|\delta\varphi\| = \varepsilon \|h\| = O(\varepsilon). \quad (1.106)$$

В равенстве (1.106) символом $O(\varepsilon)$ обозначена величина, имеющая порядок малости ε . В дальнейшем ее будем называть величиной порядка ε .

Имея в виду соотношения (1.105) и (1.106), будем использовать также запись

$$\delta\varphi = O(\varepsilon). \quad (1.107)$$

Отметим, что функции φ и $\tilde{\varphi}$, а следовательно, и $\delta\varphi$, могут принадлежать, вообще говоря, различным множествам в $L^2(U)$.

Используя неравенство треугольника, получаем оценку нормы функции $\tilde{\varphi}$:

$$\|\tilde{\varphi}\| = \|\varphi + \delta\varphi\| \leq \|\varphi\| + \|\delta\varphi\| = \|\varphi\| + O(\varepsilon). \quad (1.108)$$

Вариация $\delta\varphi$ обуславливает изменение $\Delta F = F[\tilde{\varphi}] - F[\varphi]$ некоторого функционала, определенного в $L^2(U)$, и возникает вопрос об оценке этого изменения.

Пусть $F[\tilde{\varphi}]$ в общем случае — нелинейный функционал, где $\tilde{\varphi}$ определена в (1.104), (1.105). Считая $F[\tilde{\varphi}]$ достаточное число раз дифференцируемой функцией параметра ε , представим его разложением в степенной ряд по ε в окрестности $\varepsilon = 0$:

$$F[\tilde{\varphi}] = F[\varphi] + \left. \frac{\partial F}{\partial \varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon + \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=0} \varepsilon^2 + \dots \quad (1.109)$$

Тогда полное изменение ΔF функционала F , обусловленного вариацией $\delta\varphi$, можно записать в виде

$$\Delta F = F[\tilde{\varphi}] - F[\varphi] = \delta F[\varphi] + \frac{1}{2} \delta^{(2)} F[\varphi] + \dots \quad (1.110)$$

Линейную относительно ε часть $\delta F[\varphi]$ полного изменения ΔF называют первой вариацией (первым дифференциалом) функционала F в точке φ , квадратичную часть $\delta^{(2)} F[\varphi]$ — второй вариацией и т.д.

В дальнейшем, на ряде примеров, будет показано, что первая вариация нелинейного функционала имеет вид скалярного произведения:

$$\delta F[\varphi] = \langle f, \delta\varphi \rangle, \quad (1.111)$$

т.е. представляет собой линейный функционал вариации $\delta\varphi$.

Функцию $f = f(x)$ в (1.111) называют функциональной производной функционала F в точке φ . Введем для нее следующее обозначение:

$$f(x) = \frac{\partial F[\varphi]}{\partial \varphi[x]}. \quad (1.112)$$

В дальнейшем будет также показано, что формально выражение для функциональной производной может быть получено на основе следующего определения:

$$\frac{\partial F[\varphi]}{\partial \varphi(x)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{F[\varphi(x') + \varepsilon \delta(x-x')] - F[\varphi(x')]}{\varepsilon}, \quad (1.113)$$

характеризующего производную $\frac{\partial F[\varphi]}{\partial \varphi(x)}$ как относительное изменение функционала, обусловленное бесконечно малым изменением значения функции φ в точке x .

1.10.2. Первые вариации и производные функционалов

Рассмотрим конкретные выражения для первых вариаций и производных различных функционалов.

1. Линейные функционалы. Для линейного функционала имеем: $\delta F_a[\varphi] = \frac{\partial F_a}{\partial \varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} \varepsilon = \langle a, h \rangle \varepsilon$, или, окончательно:

$$\delta F_a[\varphi] = \langle a, \delta\varphi \rangle. \quad (1.114)$$

Первая вариация $\delta F_a[\varphi]$ имеет порядок ε , так как

$$|\delta F_a| \leq \|a\| \cdot \|\delta\varphi\| = O(\varepsilon). \quad (1.115)$$

Сравнивая (1.114) с (1.111) и (1.112), запишем формулу для первой производной линейного функционала F_a в точке φ :

$$\frac{\partial F_a[\varphi]}{\partial \varphi(x)} = a(x). \quad (1.116)$$

Выражение (1.116) можно также получить, используя определение (1.113):

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_a}{\partial \varphi(x)} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\langle a(x'), \varphi(x') \rangle + \varepsilon \langle a(x'), \delta(x-x') \rangle - \langle a(x') \varphi(x') \rangle}{\varepsilon} = \\ &= \int dx' a(x') \delta(x-x'). \end{aligned}$$

Отсюда, в условиях непрерывности $a(x')$ в точке x , следует выражение (1.116).

2. Билинейные функционалы. Рассмотрим теперь первую вариацию и первую производную билинейного функционала $F[\tilde{f}, \tilde{h}] = \langle \tilde{f}, \tilde{h} \rangle$, где \tilde{f} и \tilde{h} — произвольные функции из $L^2(U)$, независимо варьируемые в окрестности фиксированных f и h . Пусть $\tilde{f} = f + \varepsilon_1 f_1$; $\tilde{h} = h + \varepsilon_2 h_1$, тогда $\delta F[f, h] = \langle \delta f, h \rangle + \langle f, \delta h \rangle$, где $\delta f = \varepsilon_1 f_1$, $\delta h = \varepsilon_2 h_1$ — вариации функций f и h . Проведем формализм оценки порядка вариации билинейного функционала при фиксированных порядках ε_1 и ε_2 вариаций функций δf и δh . Из известных неравенств имеем: $|\delta F|^2 \leq \|f\|^2 \|f_1\|^2 \varepsilon_1^2 + \|h\|^2 \|h_1\|^2 \varepsilon_2^2 \leq C^2 (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2)$, где C^2 — максимальная из величин $\|f\|^2 \|f_1\|^2$; $\|h\|^2 \|h_1\|^2$. Отсюда следует:

$$|\delta F| = O(\varepsilon), \quad \varepsilon = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2}. \quad (1.117)$$

Запишем выражения для производных билинейного функционала $\langle \tilde{f}, \tilde{h} \rangle$ по функциям \tilde{f} и \tilde{h} в "точке" f, h :

$$\frac{\partial F[f, h]}{\partial f(x)} = h(x), \quad \frac{\partial F[f, h]}{\partial h(x)} = f(x). \quad (1.118)$$

И, наконец, рассмотрим билинейный функционал более общего вида (см. (1.101)): $F[f, h] = \langle f, Th \rangle$, $f, h \in L^2(U)$. Пусть T — линейный ограниченный оператор, определенный во всем пространстве $L^2(U)$. Тогда

$$\delta F[f, h] = \langle \delta f, Th \rangle + \langle f, T\delta h \rangle = \langle \delta f, Th \rangle + \langle \delta h, T^+ f \rangle, \quad (1.119)$$

а первые производные функционала $F = \langle f, Th \rangle$ по функциям f и h имеют вид

$$\frac{\partial F}{\partial f(x)} = Th(x), \quad \frac{\partial F}{\partial h(x)} = T^+ f(x). \quad (1.120)$$

Пусть теперь $T = L$ — неограниченный оператор уравнения нейтронного поля. В этом случае будем считать, что функция f и вариация δf принадлежит множеству $D^+(U)$, а функция h и вариации δh — множеству $D(U)$. Тогда для оператора L справедливы равенства (1.119) и (1.120).

3. Дробно-линейный функционал. Первая вариация и первая производная дробно-линейного функционала (1.102) могут быть получены с использованием правил, аналогичных правилам нахождения первых дифференциалов и производных сложных функций:

$$\delta F_{a,b}[\varphi] = F_{a,b}[\varphi] \left[\frac{\delta F_a[\varphi]}{F_a[\varphi]} - \frac{\delta F_b[\varphi]}{F_b[\varphi]} \right], \quad (1.121)$$

$$\frac{\partial F_{a,b}[\varphi]}{\partial \varphi(x)} = F_{a,b}[\varphi] \left[\frac{\frac{\partial F_a}{\partial \varphi}}{F_a[\varphi]} - \frac{\frac{\partial F_b}{\partial \varphi}}{F_b[\varphi]} \right]. \quad (1.122)$$

В результате приходим к выражениям

$$\delta F_{a,b}[\varphi] = F_{a,b}[\varphi] \left\langle \left(\frac{a}{F_a[\varphi]} - \frac{b}{F_b[\varphi]} \right), \delta \varphi \right\rangle, \quad (1.123)$$

$$\frac{\partial F_{a,b}}{\partial \varphi(x)} = F_{a,b}[\varphi] \left[\frac{a(x)}{F_a[\varphi]} - \frac{b(x)}{F_b[\varphi]} \right]. \quad (1.124)$$

Отметим одно очень важное обстоятельство, связанное с производной дробно-линейного функционала. Из (1.124) следует, что она ортогональна φ :

$$\left\langle \frac{\partial F_{a,b}}{\partial \varphi}, \varphi \right\rangle = 0. \quad (1.125)$$

Конкретный вид вариаций и производной дробно-линейного функционала в рамках используемой модели нейтронного поля легко получить на основе приведенных общих формул. В качестве примера приведем выражение для производной дробно-линейного функционала для векторно-матричной модели нейтронного поля в групповом диффузионном приближении. В соответствии с (1.23) линейный функционал $F_a[\bar{\varphi}] = \int d\bar{r} (\bar{a}(\bar{r}) \cdot \bar{\varphi}(\bar{r}))$. Введем обозначение

$$\frac{\partial F[\bar{\varphi}]}{\partial \bar{\varphi}} \equiv \text{col} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \varphi_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial \varphi_6} \right\}, \quad (1.126)$$

тогда

$$\frac{\partial F_{a,b}[\bar{\varphi}]}{\partial \bar{\varphi}(\bar{r})} = F_{a,b}[\varphi] \left[\frac{\bar{a}(\bar{r})}{F_a[\bar{\varphi}]} - \frac{\bar{b}(\bar{r})}{F_b[\varphi]} \right]. \quad (1.127)$$

4. Дробно-билинейный функционал. Основные особенности варьирования дробно-билинейного функционала продемонстрируем на функционале $\mathcal{L}_X[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^+]$, определив его следующим образом:

$$\mathcal{L}_X = \frac{\langle \tilde{\varphi}^+, L\tilde{\varphi} \rangle}{\langle \tilde{\varphi}^+, Q\tilde{\varphi} \rangle}, \quad \tilde{\varphi} \in D(U), \quad \tilde{\varphi}^+ \in D^+(U).$$

Первую вариацию этого функционала по $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}^+$ в окрестности фиксированных φ и φ^+ представим в виде суммы

$$\delta \mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+] = \delta_{\varphi^+} \mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+] + \delta_{\varphi} \mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+], \quad (1.128)$$

где $\delta_{\varphi^+} \mathcal{L}_X$ — первая вариация, обусловленная вариацией $\tilde{\varphi}^+$, а $\delta_{\varphi} \mathcal{L}_X$ — первая вариация функционала \mathcal{L}_X по $\tilde{\varphi}$ в окрестности функций φ^+ и φ .

Вариацию $\delta_{\varphi^+} \mathcal{L}_X$ получим, применяя правило варьирования дроби:

$$\delta_{\varphi^+} \mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+] = \frac{1}{\langle \varphi^+, Q\varphi \rangle} \langle \delta \varphi^+, (L - \mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+] Q) \varphi \rangle. \quad (1.129)$$

Аналогичным образом находим (используя сопряженные операторы L^+ и Q^+):

$$\delta_{\varphi} \mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+] = \frac{1}{\langle \varphi^+, Q\varphi \rangle} \langle \delta \varphi, (L^+ - \mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+] Q^+) \varphi^+ \rangle. \quad (1.130)$$

Теперь можно записать производные $\frac{\partial \mathcal{L}_X}{\partial \varphi^+}$ и $\frac{\partial \mathcal{L}_X}{\partial \varphi}$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+]}{\partial \varphi^+} = \frac{1}{\langle \varphi^+, Q\varphi \rangle} (L\varphi - \mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+] Q\varphi), \quad (1.131)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}[\varphi, \varphi^+]}{\partial \varphi} = \frac{1}{\langle \varphi^+, Q\varphi \rangle} (L^+ \varphi^+ - \mathcal{L}[\varphi, \varphi^+] Q^+ \varphi^+). \quad (1.132)$$

Так же, как и в случае дробно-линейного функционала, убеждаемся, что

$$\left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi^+}, \varphi^+ \right\rangle = 0, \quad \left\langle \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi}, \varphi \right\rangle = 0. \quad (1.133)$$

1.10.3. Вторые вариации функционалов

Вторая вариация линейного функционала равна нулю и его полное изменение определяется первой вариацией (1.114). Вторую вариацию дробно-линейного функционала проще всего найти, взяв вариацию первой вариации (1.123). В результате получим:

$$\delta^{(2)} F_{a,b}[\varphi] = \int_U dx \int_U dx' F_{a,b}[\varphi] \left[2 \frac{b(x)b(x')}{F_b^2} - \frac{a(x)b(x') + b(x)a(x')}{F_a \cdot F_b} \right] \delta\varphi(x) \delta\varphi(x'). \quad (1.134)$$

Представляя (1.134) в форме

$$\delta^{(2)} F_{a,b} = \int dx \int dx' \frac{\partial^2 F_{a,b}[\varphi]}{\partial \varphi(x) \partial \varphi(x')} \delta\varphi(x) \delta\varphi(x') \quad (1.135)$$

и сравнивая (1.134) с (1.135), находим явный вид второй производной дробно-линейного функционала $F_{a,b}$.

Для второй вариации функционала $F_{a,b}$ имеет место оценка

$$|\delta^{(2)} F| = O(\varepsilon^2), \quad (1.136)$$

если $\delta\varphi = O(\varepsilon)$. Вторая вариация дробно-билинейного функционала $\mathcal{L}[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^+]$ представима в форме

$$\delta^{(2)} \mathcal{L}[\varphi, \varphi^+] = \delta_{\varphi^+}^{(2)} \mathcal{L} + 2 \delta_{\varphi^+ \varphi}^{(2)} \mathcal{L} + \delta_{\varphi}^{(2)} \mathcal{L}, \quad (1.137)$$

где $\delta_{\varphi^+}^{(2)} \mathcal{L}$ и $\delta_{\varphi}^{(2)} \mathcal{L}$ - вторые вариации функционала \mathcal{L} по функциям $\tilde{\varphi}^+$ и $\tilde{\varphi}$ соответственно, а $\delta_{\varphi^+ \varphi}^{(2)} \mathcal{L}$ - смешанная вторая вариация.

Запишем явный вид второй вариации функционала \mathcal{L} :

$$\delta^{(2)} \mathcal{L}[\varphi, \varphi^+] = \frac{2}{\langle \varphi^+, Q\varphi \rangle} \left\{ \langle \delta\varphi^+, (L - \mathcal{L}[\varphi, \varphi^+] Q) \delta\varphi \rangle - \left[\langle \delta\varphi^+, Q\varphi \rangle - \langle \delta\varphi, Q^+ \varphi^+ \rangle \right] \delta \mathcal{L} \right\}. \quad (1.138)$$

Особый интерес для нас будет в дальнейшем представлять случай, когда функции φ и φ^+ , в окрестности которых находится вариация функционала \mathcal{L}_X , пропорциональны нулевым гармоникам ψ_0 и ψ_0^+ : $\varphi = C\psi_0$, $\varphi^+ = C^+\psi_0^+$. Тогда, в соответствии с (1.103), (1.129) и (1.130), $\mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+] = \frac{1}{k_0}$, $\delta\mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+] = 0$ и вторая вариация $\mathcal{L}_X^{(2)}[\varphi, \varphi^+]$ будет иметь следующий вид:

$$\delta^{(2)}\mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+] = \frac{2}{\langle \varphi^+, Q\varphi \rangle} \langle \delta\varphi^+, (L - \frac{1}{k_0} Q) \delta\varphi \rangle. \quad (1.139)$$

Отсюда, при $\delta\varphi = O(\varepsilon)$ и $\delta\varphi^+ = O(\varepsilon^+)$, вытекает следующая оценка второй вариации функционала \mathcal{L}_X :

$$|\delta^{(2)}\mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+]| = O(\varepsilon \cdot \varepsilon^+). \quad (1.140)$$

2. ФУНКЦИИ ЦЕННОСТИ НЕЙТРОНОВ

2.1. Общее определение функции ценности

Рассмотрим систему со стационарным нейтронным полем $\varphi(x)$, инициированным действием распределенного внешнего источника $q(x)$ и некоторый, вообще говоря, нелинейный функционал $F[\varphi]$. Значение функционала F можно с физических позиций понимать как показание специального детектора, измеряющего некоторую характеристику системы с нейтронным полем без воздействия самого детектора на состояние системы и нейтронное поле.

Пусть при некотором фиксированном значении фазовой переменной \mathcal{X} происходит изменение $\Delta q(x)$ мощности источника. Это изменение будем интерпретировать как появление Δq дополнительных нейтронов в фазовой точке \mathcal{X} . Очевидно, что изменение мощности источника приведет к изменению ΔF показания детектора (значения функционала F), а величина ΔF будет зависеть от того, при каком значении \mathcal{X} (в общем случае \bar{r} , E , $\bar{\Omega}$) произошло изменение мощности источника.

Проиллюстрируем это простым примером детектора, измеряющего, например, скорость поглощения нейтронов в системе. Можно ожидать, что изменение показания детектора в случае появления дополнительных нейтронов вблизи поверхности системы с направлением полета к ее поверхности будет более слабым по сравнению со случаем, когда такое же дополнительное число нейтронов появляется вблизи центра системы, так как в первом случае

велика вероятность утечки дополнительных нейтронов из системы.

Чувствительность показания детектора (значения функционала F) к появлению дополнительных нейтронов в фазовой точке x удобно описывать функцией $\varphi_F^+(x)$, определяя ее в следующей дифференциальной форме:

$$\varphi_F^+(x) = \frac{dF[\varphi]}{dq(x)} \quad (2.1)$$

По физическому смыслу функция $\varphi_F^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ характеризует относительное изменение функционала F (показания детектора), обусловленное бесконечно малым изменением мощности источника, испускающего нейтроны в точке \bar{r} с энергией E и направлением полета $\bar{\Omega}$.

В соответствии с исторически сложившейся традицией функцию $\varphi_F^+(x)$ будем называть функцией ценности нейтронов в фазовой точке x по отношению к функционалу F . Данное определение ценности нейтронов является наиболее общим и применимо как к линейным, так и к нелинейным задачам переноса нейтронов.

В случае когда рассматриваются линейные уравнения и функционалы, влияние источников на функционалы носит адитивный характер, поэтому $\varphi_F^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ можно характеризовать как значение функционала F , обусловленное действием в точке \bar{r} источника единичной мощности, испускающего нейтроны с энергией E в направлении $\bar{\Omega}$.

Понятие ценности нейтронов введено Е. Вигнером, объяснившим смысл решения сопряженного однородного уравнения реактора. Л.Н. Усачев впервые, исходя из физических представлений, вывел уравнения для асимптотической ценности нейтронов и ценности сменяющихся поколений нейтронов. Функции ценности нейтронов в линейных и нелинейных реакторных задачах изучались Г.И. Марчуком, В.В. Орловым, Дж. Льюнсом, Г. Помранингом и другими советскими и зарубежными учеными [3].

Развиваемый в этом пособии подход, основанный на дифференциальном определении функции ценности нейтронов, позволяет обобщить многие физические и математические результаты, касающиеся формулировки и анализа линейных и нелинейных уравнений для функций ценности нейтронов, хотя и будет здесь применяться к стационарным уравнениям с линейными операторами.

2.2. Уравнение для функции ценности нейтронов в подкритической системе

Общую схему вывода уравнений для функции ценности нейтронов на основе ее определения и физического смысла проиллюстрируем для случая нейтронного поля в подкритической системе, описываемого уравнением (1.84) в газокинетической форме.

В рассматриваемой задаче функция $q(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ — постоянная во времени скорость генерации нейтронов в единичном фазовом объеме около фазовой точки $\bar{r}, E, \bar{\Omega}$ внешним источником. Этот источник порождает в системе стационарное нейтронное поле $\psi(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$.

Пусть $F[\psi]$ — интересующий нас функционал. Функция ценности нейтронов

$$\psi_F^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) = \frac{dF[\psi]}{dq(\bar{r}, E, \bar{\Omega})} \quad (2.2)$$

по отношению к функционалу F будет также стационарной.

Вариация (первая) $\delta_q F$ функционала F , обусловленная вариацией $\delta q(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ функции источника, выражается через функцию ценности посредством равенства

$$\begin{aligned} \delta_q F &= \int dr' \int dE' \int d\Omega' \frac{dF[\psi]}{dq(\bar{r}', E', \bar{\Omega}')} \delta q(\bar{r}', E', \bar{\Omega}') = \\ &= \int d\bar{r}' \int dE' \int d\Omega' \psi_F^+(\bar{r}', E', \bar{\Omega}') \delta q(\bar{r}', E', \bar{\Omega}'). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Действуя согласно определению функции ценности, разместим в единичном фазовом объеме около точки $\bar{r}, E, \bar{\Omega}$ дополнительный источник нейтронов Δq , т.е. источник, испускающий в точке \bar{r} нейтроны с энергией E и направлением полета $\bar{\Omega}$. Такой точечный, моноэнергетический и мононаправленный источник представим в виде обобщенной функции

$$\delta q(\bar{r}', E', \bar{\Omega}') = \Delta q \delta(\bar{r} - \bar{r}') \delta(E - E') \delta(\bar{\Omega} - \bar{\Omega}'). \quad (2.4)$$

Рассмотрим полную первую вариацию $\delta_q F$ функционала F , обусловленную вариацией (2.4) функции распределения источников. Из равенств (2.3) и (2.4) следует:

$$\delta_q F = \psi_F^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) \Delta q. \quad (2.5)$$

Если считать, что функция $\psi_F^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ определяет ценность одного нейтрона, т.е. величину изменения функционала F , отнесенную к одному дополнительному нейтрону в фазовой точке $\bar{r}, E, \bar{\Omega}$, то в соответствии с равенством (2.5) $\delta_q F$ можно рассматривать как суммарную ценность Δq нейтронов.

Рассмотрим теперь две основные составляющие полной первой вариации $\delta_q F$ (суммарной ценности), учитывая непосредственное влияние нейтронов дополнительного источника через изменение плотности потока в окрестности фазовой точки $\bar{r}, E, \bar{\Omega}$ и опосредствованное влияние на функционал F через нейтроны, которые происходят от дополнительного источника, но появляются вне этой окрестности в результате процессов утечки, рассеяния и деления ядер. В качестве окрестности фазовой точки $\bar{r}, E, \bar{\Omega}$ выберем единичный энергетический интервал, единичный интервал телесного угла и цилиндрический объем $\Delta V = \Delta \xi \cdot \Delta S$ со сколь угодно малыми высотой $\Delta \xi$ и основанием ΔS (рис. 2.1).

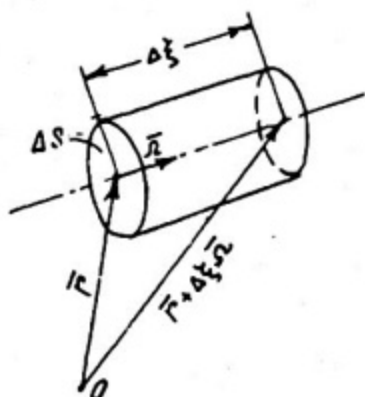


Рис. 2.1. Элементарный
объем $\Delta V = \Delta \xi \Delta S$
в окрестности точки \bar{r}

Изменение плотности потока нейтронов в объеме ΔV на их пути $\Delta \xi$ вдоль вектора $\bar{\Omega}$ можно представить в виде разности $\Delta S \psi(\bar{r} + \Delta \xi \bar{\Omega}, E, \bar{\Omega}) - \Delta S \psi(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$, которая будет равна числу дополнительных нейтронов $\Delta S \cdot \Delta \xi \cdot \Delta q$, генерируемых в объеме ΔV . Поэтому вариация потока $\delta \psi(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ нейтронов, имеющих энергию E и направление полета $\bar{\Omega}$, на отрезке $\Delta \xi$ определится равенством $\delta \psi = \Delta \xi \cdot \Delta q$. Используя общее выражение

$$\delta_\varphi F[\varphi] = \int d\bar{r}' \int dE' \int d\bar{\Omega}' \frac{\partial F[\varphi]}{\partial \psi(\bar{r}', E', \bar{\Omega}')} \delta \psi(\bar{r}', E', \bar{\Omega}')$$

и учитывая, что изменение плотности потока рассматривается лишь в окрестности фиксированных значений $\bar{r}, E, \bar{\Omega}$ ($\delta \psi(\bar{r}', E', \bar{\Omega}') = \Delta \xi \Delta q \delta(\bar{r} - \bar{r}') \delta(E - E') \delta(\bar{\Omega} - \bar{\Omega}')$), приходим к окончательному результату

$$\delta_\varphi F[\varphi] = \frac{\partial F[\varphi]}{\partial \psi(\bar{r}, E, \bar{\Omega})} \Delta \xi \cdot \Delta q \quad (2.6)$$

для составляющей полной первой вариации функционала F , обусловленной непосредственным влиянием дополнительных нейтронов на плотность потока.

Перейдем к рассмотрению опосредствованного влияния нейтронов дополнительного источника на функционал F , анализируя процессы, происходящие с нейтронами источника на их пути вдоль вектора $\bar{\Omega}$.

1. Процесс утечки нейтронов. Если $\lambda(\bar{r}, E)$ — полная длина свободного пробега нейтронов энергии E в окрестности точки \bar{r} , то отношение $\Delta\xi/\lambda = \Delta\xi \Sigma(\bar{r}, E)$ определяет вероятность для нейтрона испытать столкновение с ядрами среды на пути $\Delta\xi$, а $(1 - \Delta\xi \Sigma(\bar{r}, E))$ — вероятность избежать столкновения, т.е. выйти из объема ΔV , сохраняя энергию E и направление полета $\bar{\Omega}$.

Число нейтронов дополнительного источника, покидающих объем ΔV без взаимодействия с ядрами среды, равно $\Delta q (1 - \Delta\xi \Sigma(\bar{r}, E))$, можно характеризовать как мощность моноэнергетического, мононаправленного источника Δq_l , испускающего нейтроны энергии E с направлением полета $\bar{\Omega}$ в точке $\bar{r} + \Delta\xi \bar{\Omega}$, записав ее в форме обобщенной функции

$$\Delta q_l(\bar{r}', E', \bar{\Omega}') = \Delta q (1 - \Delta\xi \Sigma(\bar{r}, E)) \delta((\bar{r} + \Delta\xi \bar{\Omega}) - \bar{r}') \delta(E - E') \delta(\bar{\Omega} - \bar{\Omega}').$$

Тогда изменение $\delta_l F$ функционала F за счет действия этого источника в соответствии с (2.3) определится выражением

$$\delta_l F = \Delta q (1 - \Delta\xi \Sigma(\bar{r}, E)) \psi_F^+(\bar{r} + \Delta\xi \bar{\Omega}, E, \bar{\Omega}). \quad (2.7)$$

2. Процесс рассеяния нейтронов. Вероятность для нейтрона энергии E рассеяться на пути $\Delta\xi$ в окрестности точки \bar{r} равна $\Delta\xi \Sigma_s(\bar{r}, E)$, поэтому число рассеянных нейтронов дополнительного источника равно $\Delta q \Delta\xi \Sigma_s(\bar{r}, E)$. В результате рассеяния нейтрон изменяет свою энергию и направление полета и с вероятностью $W_s(\bar{r}; E, \bar{\Omega} \rightarrow E', \bar{\Omega}')$ оказывается в единичном энергетическом интервале и единичном интервале телесного угла около некоторых значений E' и $\bar{\Omega}'$ энергии и направления полета. Так как интервал $\Delta\xi$ считается бесконечно малым, то все рассеяния можно отнести к его началу (или концу) и рассматривать функцию

$$\Delta q_s(\bar{r}', E', \bar{\Omega}') = \Delta q \Delta\xi \Sigma_s(\bar{r}, E) W_s(\bar{r}, E, \bar{\Omega} \rightarrow E', \bar{\Omega}') \delta(\bar{r} - \bar{r}')$$

как мощность источника, порожденного рассеивающимися нейтронами дополнительного источника.

Вклад $\delta_s F$ в полную вариацию δF за счет рассеянных нейтронов получаем подстановкой $\Delta q_s(\bar{r}', E', \bar{\Omega}')$ в (2.3):

$$\delta_s F = \Delta q \Delta\xi \Sigma_s(\bar{r}, E) \int dE' \int d\bar{\Omega}' W_s(\bar{r}; E, \bar{\Omega} \rightarrow E', \bar{\Omega}') \psi_F^+(\bar{r}, E', \bar{\Omega}'). \quad (2.8)$$

3. Процесс деления ядер. Нейтроны дополнительного источника с вероятностью $\Delta \xi \cdot \Sigma_f$ вызовут деление ядер на своем пути $\Delta \xi$ и в результате образуют $\Delta q \cdot \Delta \xi \Sigma_f(\bar{r}, E) \nu_f(\bar{r}, E)$ вторичных нейтронов. С вероятностью $\chi(E')/4\pi$ эти нейтроны будут иметь энергию E' и направление движения $\bar{\Omega}'$ (деление изотропно). Поэтому функцию

$$\delta q_f(\bar{r}', E', \bar{\Omega}') = \Delta q \Delta \xi \Sigma_f(\bar{r}', E) \nu_f(\bar{r}', E) \frac{\chi(E')}{4\pi} \delta(\bar{r} - \bar{r}')$$

будем рассматривать как мощность источника, порожденного в результате деления ядер нейтронами дополнительного источника. Изменение $\delta_f F$ функционала F за счет этого источника в соответствии с (2.3) можно представить выражением

$$\delta_f F = \Delta q \Delta \xi \frac{\nu_f(\bar{r}, E) \Sigma_f(\bar{r}, E)}{4\pi} \int dE' \int d\Omega' \chi(E') \psi_F^+(\bar{r}, E', \bar{\Omega}'). \quad (2.9)$$

Из проведенных рассуждений следует, что полную первую вариацию $\delta_q F$ функционала F , обусловленную внесением дополнительного источника мощностью Δq в единичную окрестность фазовой точки $\bar{r}, E, \bar{\Omega}$, можно представить балансным соотношением

$$\delta_q F = \delta_\varphi F + \delta_l F + \delta_S F + \delta_f F, \quad (2.10)$$

где $\delta_\varphi F$ - изменение функционала F за счет непосредственного влияния привнесенных нейтронов на плотность потока, а $\delta_l F$, $\delta_S F$ и $\delta_f F$ - изменения функционала F за счет опосредованного влияния нейтронов дополнительного источника через нейтроны, образовавшиеся в результате процессов утечки, поглощения и деления ядер. Соотношение (2.10) называют законом сохранения ценности.

После подстановки выражений (2.5), (2.6), (2.7), (2.8) и (2.9) в балансное соотношение (2.10) разделим полученное равенство на $\Delta q \Delta \xi$, перейдем к пределу при $\Delta \xi \rightarrow 0$ и учтем, что $\partial \psi_F^+ / \partial \xi = \bar{\Omega} \nabla \psi_F^+$. В результате получим уравнение для функции ценности нейтронов стационарного нейтронного поля в подкритической системе по отношению к функционалу F :

$$\begin{aligned} & -\bar{\Omega} \nabla \psi_F^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) + \Sigma(\bar{r}, E) \psi^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) - \Sigma_S(\bar{r}, E) \int dE' \int d\Omega' \times \\ & \times W_S(\bar{r}, E, \bar{\Omega} \rightarrow E', \bar{\Omega}') \psi^+(\bar{r}, E', \bar{\Omega}') - \frac{\nu_f(\bar{r}, E) \Sigma_f(\bar{r}, E)}{4\pi} \times \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\times \int dE' \int d\bar{\Omega}' \chi(\bar{r}, E') \psi^+(\bar{r}, E', \bar{\Omega}') = \frac{\partial F[\psi]}{\partial \psi(\bar{r}, E, \bar{\Omega})}$$

Если функционал F характеризует процессы, происходящие с нейтронами внутри выпуклого объема, представленного на рис. 1.1, то ценность нейтронов, вылетающих из системы, равна нулю, так как они не вносят вклада в значение функционала F . Отсюда получаем краевое условие на выпуклой границе системы с вакуумом:

$$\psi_F^+(\bar{r}_S, E, \bar{\Omega}) = 0, \quad \bar{\Omega} \cdot \bar{n} > 0. \quad (2.12)$$

Допустим, что граница R раздела двух зон системы не содержит локализованных источников и стоков нейтронов, тогда ценность нейтронов, размещенных на разных сторонах поверхности S , будет одинаковой, т.е. имеет место условие

$$\psi_{F,I}^+(\bar{r}_R, E, \bar{\Omega}) = \psi_{F,II}^+(\bar{r}_R, E, \bar{\Omega}), \quad \bar{\Omega} \cdot \bar{m} \neq 0. \quad (2.13)$$

Операторы уравнения (2.11) в условиях выполнения равенств (2.12) и (2.13) оказываются сопряженными операторами уравнения нейтронного поля в подкритической системе.

Поэтому уравнение (2.11) и условия (2.12) и (2.13) можно представить в следующей абстрактной операторной форме:

$$L^+ \psi_F^+ - Q^+ \psi_F^+ = \frac{\partial F[\psi]}{\partial \psi}, \quad \psi_F^+ \in D^+(U), \quad (2.14)$$

справедливой для любых приближенных моделей нейтронного поля.

Если система не содержит ядра делящихся элементов, то в уравнении (2.14) будет отсутствовать член с оператором Q^+ :

$$L^+ \psi_F^+ = \frac{\partial F[\psi]}{\partial \psi}, \quad \psi_F^+ \in D^+(U). \quad (2.15)$$

Отметим, что в задачах расчета защиты от излучений рассматриваются функционалы выходящего с поверхности системы потока нейтронов. В этом случае $\psi_F^+ \notin D^+(U)$.

В дальнейшем будет показано, что в подкритической системе уравнение (2.14) при произвольной правой части имеет единственное решение. Если в качестве функционала F принять линейный функционал $F[\psi] = \int dx \delta(x-x_0) \psi(x) = \psi(x_0)$, где x_0 - некоторая фиксированная фазовая точка, то уравнение (2.14) будет определять ценность нейтронов $G^+(x, x_0)$ в точке x по отношению к плотности потока нейтронов в точке x_0 . Функция $G^+(x, x_0)$ подчиняется уравнению

$$L^+ G^+(x, x_0) - Q^+ G^+(x, x_0) = \delta(x-x_0), \quad G^+ \in D^+(U). \quad (2.16)$$

В линейных задачах $G^+(x, x_0)$ можно рассматривать как функцию, описывающую плотность потока нейтронов в точке x_0 и обусловленную действием точечного источника в точке x , поэтому в соответствии с определением функции Грина $G(x, x_0)$ (см. п. 1.8.1) имеет место равенство

$$G^+(x, x_0) = G(x_0, x), \quad (2.17)$$

которое можно получить также формально, учитывая сопряженность операторов L и L^+ . Функцию $G^+(x, x_0)$ называют функцией Грина сопряженной задачи, а равенство (2.17) — соотношением взаимности для функций Грина прямой и сопряженной задач.

2.3. Ценность сменяющихся поколений нейтронов в условно-критическом реакторе

Рассмотрим нейтронное поле условно-критического реактора, описываемое уравнениями (1.12) сменяющихся поколений нейтронов и некоторый функционал $F[\varphi^{(I)}]$, определенный на плотности потока нейтронов некоторого поколения I . Обозначим через $q^{(j)}$ распределение источника нейтронов поколения $I-j$, где j принимает значения $0, 1, \dots, I$.

На рис. 2.2 показаны принятая ранее нумерация поколений нейтронов (верхняя шкала) и вводимая нумерация источников различных поколений нейтронов (нижняя шкала).

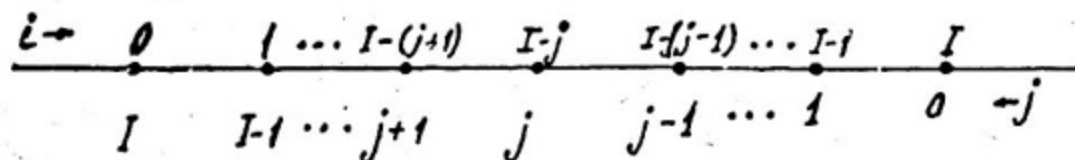


Рис. 2.2. Нумерация поколений нейтронов i и источников различных поколений j .

На рис. 2.2 показаны принятая ранее нумерация поколений нейтронов (верхняя шкала) и вводимая нумерация источников различных поколений нейтронов (нижняя шкала).

Функцию ценности нейтронов $\varphi_F^{+(j, I)}$ поколения $I-j$ по отношению к функционалу $F[\varphi^{(I)}]$ определим равенством

$$\varphi_F^{+(j, I)}(x) = \frac{dF[\varphi^{(I)}]}{dq^{(j)}(x)} \quad (2.18)$$

Газокинетическое уравнение для функции $\varphi_F^{+(j,I)}$ построим в соответствии со схемой, изложенной в п. 2.2.

Пусть в фазовой точке $\bar{r}, E, \bar{\Omega}$ произошло изменение $\Delta q^{(j)}$ источника нейтронов поколения $I-j$. Так же как и прежде, проследим за судьбой нейтронов дополнительного источника $\Delta q^{(j)}$ на их пути $\Delta \xi$ вдоль вектора $\bar{\Omega}$.

Суммарная ценность всех $\Delta q^{(j)}$ нейтрона, или полная первая вариация $\delta_q F$ функционала $F[\varphi^{(I)}]$, определится выражением

$$\delta_q F = \Delta q^{(j)} \varphi_F^{+(j,I)}(\bar{r}, E, \bar{\Omega}). \quad (2.19)$$

Очевидно, что нейтроны поколения $I+1$ не оказывают влияния на функционал F , поэтому будем рассматривать только нейтроны поколения I и всех предшествующих ему поколений.

Допустим сначала, что $j=0$, т.е. обратим внимание на ценность нейтронов того же поколения, на котором определен функционал F . В этом случае полная первая вариация $\delta_q F = \Delta q^{(0)}$ $\times \varphi_F^{+(0,I)}(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ будет иметь составляющие:

$$\delta_\varphi F = \Delta q^{(0)} \Delta \xi \frac{\partial F[\varphi^{(I)}]}{\partial \varphi^{(I)}(\bar{r}, E, \bar{\Omega})},$$

$$\delta_l F = \Delta q^{(0)} (1 - \Delta \xi \Sigma) \varphi_F^{+(0,I)}(\bar{r} + \Delta \xi \bar{\Omega}, E, \bar{\Omega}),$$

$$\delta_s F = \Delta q^{(0)} \Delta \xi \Sigma_s \int dE' \int d\Omega' W_s(\bar{r}; E, \bar{\Omega} \rightarrow E', \bar{\Omega}') \varphi_F^{+(0,I)}(\bar{r}, E', \bar{\Omega}'),$$

$$\delta_f F = 0.$$

Последнее равенство говорит о том, что в результате деления ядер нейтронами поколения I образуются нейтроны поколения $I+1$, а они не оказывают влияния на функционал F .

Составляя баланс $\delta_q F = \delta_\varphi F + \delta_l F + \delta_s F$, получаем уравнение

$$-\bar{\Omega} \nabla \varphi_F^{+(0,I)}(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) + \Sigma(\bar{r}, E) \varphi_F^{+(0,I)}(\bar{r}, E, \bar{\Omega}) - \Sigma_s(\bar{r}, E') \int dE' \int d\Omega' W_s(\bar{r}; E, \bar{\Omega} \rightarrow E', \bar{\Omega}') \varphi_F^{+(0,I)}(\bar{r}, E', \bar{\Omega}') = \frac{\partial F[\varphi^{(I)}]}{\partial \varphi^{(I)}(\bar{r}, E, \bar{\Omega})}. \quad (2.20)$$

В случае, когда $j > 0$, полная первая вариация (2.19) будет иметь составляющие:

$$\delta_\varphi F = 0,$$

$$\delta_l F = \Delta q^{(j)} (1 - \Delta \xi \Sigma) \varphi_F^{+(j, I)}(\bar{r} + \Delta \xi \bar{\Omega}, E, \bar{\Omega}),$$

$$\delta_S F = \Delta q^{(j)} \Delta \xi \Sigma_g(\bar{r}, E) \int dE' \int d\Omega' W_S(\bar{r}; E, \bar{\Omega} \rightarrow E', \bar{\Omega}') \varphi^{+(j, I)}(\bar{r}, E', \bar{\Omega}'),$$

$$\delta_f F = \Delta q^{(j)} \Delta \xi \frac{\nu_f(\bar{r}, E) \Sigma_f(\bar{r}, E)}{4\pi k_0} \int dE' \int d\bar{\Omega}' \chi(\bar{r}, E') \varphi_F^{+(j-1, I)}(\bar{r}, E', \bar{\Omega}').$$

Первое равенство обусловлено отсутствием непосредственного влияния на функционал F нейтронов, поколений с номером, меньшим I . В последнем равенстве учтено, что деление ядер нейтронами поколения $I-j$ приводит к появлению нейтронов следующего поколения, которое в соответствии с принятой нумерацией (см. рис. 2.2) имеет номер $I-(j-1)$. Число нейтронов деления, относящихся к этому поколению, уменьшено в k_0 раз, так как рассматривается нейтронное поле в условно-критическом реакторе.

Итак, при $j > 0$, для полной первой вариации (2.19) имеем: $\delta_q F = \delta_l F + \delta_S F + \delta_f F$, что приводит к уравнениям

$$-\bar{\Omega} \nabla \varphi_F^{+(j, I)} + \Sigma \varphi_F^{+(j, I)} - \Sigma_g \int dE' \int d\Omega' W_S(\bar{r}; E, \bar{\Omega} \rightarrow E', \bar{\Omega}') \times$$

$$\times \varphi^{+(j, I)}(\bar{r}, E', \bar{\Omega}') = \frac{1}{k_0} \frac{\nu_f(\bar{r}, E) \Sigma_f(\bar{r}, E)}{4\pi} \int dE' \int d\Omega' \times \quad (2.21)$$

$$\times \chi(\bar{r}, E') \varphi^{+(j-1, I)}(\bar{r}, E', \bar{\Omega}'), \quad j = 1, 2, \dots, I.$$

Функция $\varphi_F^{+(j, I)}(r, E, \bar{\Omega})$ удовлетворяет условиям (2.12), (2.13) при любых $j \geq 0$ для системы, представленной на рис. 1.1.

Операторная запись уравнений для функций ценностей сменяющихся поколений нейтронов

$$L^+ \varphi_F^{+(0, I)} = \frac{\partial F[\varphi^{(I)}]}{\partial \varphi^{(I)}}, \quad (2.22)$$

$$L^+ \varphi_F^{+(j, I)} = \frac{1}{k_0} Q^+ \varphi_F^{+(j-1, I)}, \quad j = 1, 2, \dots, I, \quad (2.23)$$

где $\varphi_F^{+(j, I)} \in D^+(U)$ при всех $j = 0, 1, 2, \dots, I$ может быть использована для формулировки соответствующих уравнений в различных приближенных моделях нейтронного поля.

2.4. Асимптотическая и суммарная ценности сменяющихся поколений нейтронов

В дальнейшем нас будут интересовать функционалы, определенные на асимптотической плотности потока нейтронов в условно-критическом реакторе. Это означает, что параметры I и j могут принимать сколь угодно большие значения. Осуществляя в уравнениях (2.22) и (2.23) предельный переход при $I \rightarrow \infty$, получим:

$$L^+ \varphi_F^{+(0)} = \frac{\partial F[\varphi]}{\partial \varphi} \quad , \quad (2.24)$$

$$L^+ \varphi_F^{+(j)} = \frac{1}{k_0} Q^+ \varphi_F^{+(j-1)} \quad , \quad \varphi_F^{+(j)} \in D^+(U) \quad . \quad (2.25)$$

Здесь введены обозначения $\varphi^{+(j)} = \varphi^{+(j, \infty)}$, $\varphi = \varphi^{(\infty)}$. Так же, как и в случае уравнений сменяющихся поколений нейтронов, попытаемся представить решение системы (2.24), (2.25) в виде функции с разделенными переменными:

$$\varphi_F^{+(j)} = c^{+(j)} \psi^+ \quad . \quad (2.26)$$

Введя константу разделения k^+ , из уравнения (2.25) найдем:

$$L^+ \psi^+ = \frac{1}{k_0} Q^+ \psi^+ \quad , \quad \psi^+ \in D^+(U) \quad , \quad (2.27)$$

$$c^{+(j)} = \frac{k^+}{k_0} c^{+(j-1)} \quad \text{или} \quad c^{+(j)} = c^{+(0)} \left(\frac{k^+}{k_0} \right)^j \quad . \quad (2.28)$$

Уравнение (2.27) с помощью ограниченного обратного оператора $(L^{-1})^+$ можно записать как задачу на определение собственных функций и отвечающих им собственных функций вполне непрерывного положительного оператора $(L^{-1})^+ Q^+$. В п. 1.6.1 было отмечено, что спектры собственных значений операторов $L^{-1}Q$ и $(L^+)^{-1}Q^+$ совпадают ($k = k^+$).

Функция

$$\varphi_{F,k}^{+(j)} = c^{+(0)} \left(\frac{k}{k_0} \right)^j \psi^+ \quad (2.29)$$

представляет элементарное решение системы (2.24), (2.25). Такое решение, соответствующее ведущему собственному числу k_0 , оказывается не зависящим от j и определяется равенством

$$\varphi_{F, k_0}^{+(j)} = C^+ \psi_0^+ , \quad (2.30)$$

где ψ_0^+ - нулевая сопряженная гармоника, удовлетворяющая уравнению (1.43) при $\pi=0$.

Выделим из общего решения системы (2.24), (2.25) элементарное решение (2.30):

$$\varphi_F^{+(j)} = C^+ \psi_0^+ + f^{+(j)} , \quad (2.31)$$

считая, что $f^{+(j)}$ принадлежит множеству функций $d^+(U)$, из которого исключена ψ_0^+ . Функции этого множества удовлетворяют условию ортогональности

$$\langle f^{+(j)}, Q \psi_0 \rangle = 0 . \quad (2.32)$$

Константу C^+ определим, подставив (2.31) в уравнение (2.24) и умножив затем его скалярно на нулевую гармонику ψ_0 . В результате получим:

$$C^+ = \frac{k_0 \langle \psi_0, \frac{\partial F[\varphi]}{\partial \varphi} \rangle}{\langle \psi_0^+, Q \psi_0 \rangle} . \quad (2.33)$$

После подстановки (2.31) в уравнения (2.24) и (2.25) приходим к уравнениям для функций $f^{+(i)}$:

$$L^+ f^{+(0)} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{\langle \psi_0, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \rangle}{\langle \psi_0^+, Q \psi_0 \rangle} Q^+ \psi_0^+ , \quad (2.34)$$

$$L^+ f^{+(j)} = \frac{1}{k_0} f^{+(j-1)} , \quad j = 1, 2, \dots . \quad (2.35)$$

Обозначим через M_1^+ оператор $(L^+)^{-1} Q^+$ с областью определения $d^+(U)$ и выразим $f^{+(j)}$ из уравнений (2.35) в виде

$$f^{+(j)} = \left(\frac{M_1^+}{k_0} \right)^j f^{+(0)} . \quad (2.36)$$

Норма оператора M_1^+ , определенного на $d^+(U)$, меньше k_0 , поэтому норма оператора M_1^+/k_0 меньше единицы и, следовательно,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} f^{+(j)} = 0 . \quad (2.37)$$

Поэтому асимптотическое при $j \rightarrow \infty$ решение φ^+ уравнений для функций ценности сменяющихся поколений нейтронов определится равенством

$$\varphi_F^+ = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi^{+(j)} = \frac{k_0 \langle \psi_0, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \rangle}{\langle \psi_0^+, Q \psi_0 \rangle} \psi_0^+ . \quad (2.38)$$

Рассмотрим теперь функцию

$$f^+ = \sum_{j=0}^{\infty} f^{+(j)} . \quad (2.39)$$

Она подчиняется уравнению, образуемому в результате суммирования по всем j уравнений (2.24) и (2.25):

$$L^+ f^+ - \frac{1}{k_0} Q^+ f^+ = \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \frac{\langle \psi_0, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \rangle}{\langle \psi_0^+, Q \psi_0 \rangle} Q^+ \psi_0^+ , \quad (2.40)$$

$$f^+ \in d^+(U) .$$

Правая часть этого уравнения ортогональна нулевой гармонике ψ_0 , и поэтому оно имеет единственное решение на множестве $d^+(U)$ для любого функционала $F[\varphi]$.

Пусть $F = F_a[\varphi]$ — линейный функционал и $a(x) = \delta(x - x_0)$, тогда $F_a = \varphi(x_0)$. Соответствующую этому функционалу функцию $f^+(x)$ обозначим через $g^+(x, x_0)$. Уравнение (2.40) для $g^+(x, x_0)$ имеет следующий вид:

$$L^+ g^+(x, x_0) - \frac{1}{k_0} Q^+ g^+(x, x_0) = \delta(x - x_0) - \frac{\psi_0(x_0)}{\langle \psi_0^+, Q \psi_0 \rangle} Q^+ \psi_0^+(x) , \quad (2.41)$$

$$g^+(x, x_0) \in d^+(U) .$$

Функция $g^+(x, x_0)$ позволяет выразить в квадратурах решение уравнения

$$L^+ f^+(x) - \frac{1}{k_0} Q^+ f^+(x) = q^+(x) , \quad f^+ \in d^+(U) , \quad (2.42)$$

при произвольной правой части, удовлетворяющей условию ортогональности $\langle \psi_0, q^+ \rangle = 0$, в следующей интегральной форме:

$$f^+(x) = \int_U dx_0 g^+(x, x_0) q^+(x_0) , \quad f^+ \in d^+(U) . \quad (2.43)$$

Установим соотношение взаимности

$$g(x, x_0) = g^+(x_0, x) , \quad (2.44)$$

связывающее функцию $g^+(x, x_0)$ и функцию влияния $g(x, x_0)$, определяемую уравнением (1.97). Для этого запишем (1.97) при $x = x_0'$:

$$Lg(x, x_0) - \frac{1}{k_0} Qg(x, x_0) = \delta(x - x_0) - \frac{\psi_0^+(x_0)}{\langle \psi_0^+, Q\psi_0 \rangle} Q\psi_0(x). \quad (2.45)$$

Умножим уравнение (2.41) скалярно на $g(x, x_0)$, а уравнение (2.45) - на функцию $g^+(x, x_0)$ и образуем разность полученных таким образом равенств. Вследствие сопряженности операторов L , L^+ и Q , Q^+ в левой части результирующего выражения получим ноль:

$$0 = \int_U dx \delta(x - x_0) g(x, x_0) - \int_U dx \delta(x - x_0) g^+(x, x_0).$$

Отсюда следует соотношение взаимности (2.44).

2.4.1. Асимптотическая ценность нейтронов

Асимптотическое при $j \rightarrow \infty$ решение (2.38) уравнения для функций ценности поколений нейтронов, отличное от нуля при $\langle \psi_0, \frac{\partial F}{\partial \psi} \rangle \neq 0$, будем называть асимптотической ценностью нейтронов в условно-критическом реакторе. Во всех приближениях она пропорциональна нулевой сопряженной гармонике ψ_0^+ , а коэффициент пропорциональности зависит от рассматриваемого функционала, определенного на асимптотической плотности потока нейтронов. Для линейного функционала $F_a = \langle a, \psi \rangle$ производная $\frac{\partial F_a}{\partial \psi} = a$, поэтому асимптотическая ценность нейтронов будет пропорциональна $\langle a, \psi \rangle$, т.е. значению функционала F_a . Если принять $a = \delta(x - x_0)$, то

$$\varphi^+(x) = \frac{k_0 \psi_0(x_0)}{\langle \psi_0^+, Q\psi \rangle} \psi_0^+(x). \quad (2.46)$$

Иными словами, асимптотическая ценность нейтронов по отношению к плотности потока в некоторой фазовой точке x_0 пропорциональна асимптотической плотности потока нейтронов в этой точке.

Пропорциональность функции асимптотической ценности $\varphi^+(x)$ нулевой сопряженной гармонике позволяет записать при произвольном функционале F следующее уравнение для $\varphi^+(x)$ в условно-критическом реакторе:

$$L^+\varphi^+ = \frac{1}{k_0} Q^+\varphi^+, \quad \varphi^+ \in D^+(U). \quad (2.47)$$

Решение уравнения (2.47) обычно находится посредством итерационного процесса

$$L^+ \varphi^{+(0)} = q^+ , \quad \langle q^+ , \varphi \rangle \neq 0 , \quad (2.48)$$

$$L^+ \varphi^{+(j)} = Q^+ \varphi^{+(j-1)} , \quad (2.49)$$

где q^+ — некоторое произвольным образом задаваемое распределение. Реализуя этот процесс, определяют эффективный коэффициент размножения нейтронов k_0 :

$$k_0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\int dx Q^+ \varphi^{+(j)}(x)}{\int dx Q^+ \varphi^{+(j-1)}(x)} \quad (2.50)$$

и функцию асимптотической ценности нейтронов φ^+ :

$$\varphi^+ = \lim_{j \rightarrow \infty} \varphi^{+(j)} . \quad (2.51)$$

Справедливость равенств (2.50) и (2.51) легко устанавливается на основе проведенного выше анализа решения уравнения для функций ценностей сменяющихся поколений нейтронов.

2.4.2. Суммарная ценность сменяющихся поколений нейтронов в условно-критическом реакторе

Если

$$\langle \psi_0 , \frac{\partial F}{\partial \varphi} \rangle = 0 , \quad (2.52)$$

что имеет место, например, для дробно-линейных функционалов $F_{a,b}$ (см. (1.125)), то асимптотическая ценность $\varphi^+ = 0$ и общее решение уравнения сменяющихся поколений нейтронов определится равенством $\varphi_F^{+(j)} = f^+(j)$. Функции $f^+(j)$ в рассматриваемом случае подчиняются уравнениям

$$L^+ f^{+(0)} = \frac{\partial F}{\partial \varphi} , \quad \langle \varphi , \frac{\partial F}{\partial \varphi} \rangle = 0 , \quad (2.53)$$

$$L^+ f^{+(j)} = \frac{1}{k_0} Q^+ f^{+(j-1)} , \quad f^{+(j)} \in d^+(U) . \quad (2.54)$$

Функцию

$$\varphi_F^+ = \sum_{j=0}^{\infty} f^+(j)$$

будем называть суммарной по поколениям ценностью нейтронов по отношению к однородным функционалам, удовлетворяющим условию ортогональности (2.52).

Просуммировав по всем j уравнения (2.53), (2.54), получим уравнение для функции φ_F^+ :

$$L^+ \varphi_F^+ - \frac{1}{k_0} Q^+ \varphi_F^+ = \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \quad \langle \varphi, \frac{\partial F}{\partial \varphi} \rangle = 0, \quad \varphi_F^+ \in d^+(U). \quad (2.55)$$

Решения уравнений (1.96) и (2.55) удовлетворяют равенству

$$\left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, f \right\rangle = \langle \varphi_F^+, q \rangle, \quad (2.56)$$

которое получается после скалярного умножения этих уравнений на функции φ_F^+ и f соответственно и последующего вычитания результирующих выражений.

Если в качестве q в уравнении (1.96) и в равенстве (2.56) принять точечный источник ($q = \delta(x-x_0)$), то φ_F^+ будет представлять функцию влияния $g(x, x_0)$ и для φ_F^+ получим выражение

$$\varphi^+(x_0) = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, g(x, x_0) \right\rangle = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, g^+(x_0, x) \right\rangle, \quad (2.57)$$

что соответствует записи решения уравнения (2.57) в квадратурах.

Еще раз напомним, что принадлежность φ_F^+ к множеству $d^+(U)$ означает выполнение условия ортогональности

$$\langle \varphi_F^+, Q\varphi \rangle = 0 \quad (2.58)$$

и дополнительных условий для соответствующей модели поля.

Используя уравнение (1.89) для асимптотической плотности потока нейтронов, легко установить справедливость следующего соотношения ортогональности:

$$\langle \varphi_F^+, L\varphi \rangle = 0. \quad (2.59)$$

Функция ценности нейтронов φ_F^+ имеет важное практическое значение во многих реакторных задачах. Поэтому остановимся на ключевых вопросах, связанных с вычислением этой функции, рассмотрев два основных способа решения уравнения (2.55).

Первый способ заключается в организации итерационного процесса, представленного уравнениями (2.53) и (2.54). В этом процессе путем обращения оператора L^+ последовательно решаются уравнения относительно функций $f^{+(0)}$, $f^{+(1)}$, ..., а функция φ_F^+ (решение уравнения (2.55)) получается как сумма найденных $f^{+(j)}$. Решение системы уравнений (2.53), (2.54) проводится после того, как для рассматриваемой системы определены асимптотическая плотность потока нейтронов φ и эффективный коэффициент размножения k_0 .

Из уравнения (2.53) следует условие ортогональности

$$\langle \varphi, L^+ f^{+(0)} \rangle = \langle f^{+(0)}, L \varphi \rangle = 0, \quad (2.60)$$

а из уравнений (2.54) — рекуррентное соотношение

$$\langle f_F^{+(j)}, L \varphi \rangle = \langle f_F^{+(j-1)}, L \varphi \rangle. \quad (2.61)$$

Отсюда видно, что все функции $f^{+(j)}$ удовлетворяют условию ортогональности

$$\langle f_F^{+(j)}, L \varphi \rangle = 0, \quad j = 0, 1, \dots. \quad (2.62)$$

Последнее равенство, воспользовавшись уравнением (1.89) для φ , можно записать в виде

$$\langle f^{+(j)}, Q \varphi \rangle = 0. \quad (2.63)$$

Таким образом, решение уравнения (2.55), полученное с помощью итерационного процесса, должно принадлежать множеству $d^+(V)$ и удовлетворять соотношению ортогональности (2.58).

Однако вычисления, связанные с обращением оператора L и последующими операциями, всегда имеют некоторую погрешность, обусловленную, например, ошибками округления при оперировании с конечным числом значащих цифр. Это приводит к нарушению равенств (2.63), что можно интерпретировать как появление в решениях нулевой сопряженной гармоник ψ_0^+ .

Чтобы нейтрализовать влияние гармоник ψ_0^+ на итерационный процесс, используют процедуру исключения этой гармоник на основе предварительно найденной функции асимптотической плотности нейтронов $\varphi^+ = L \psi_0^+$. Процедура исключения гармоник ψ_0^+ заключается в замене функции $f^{+(j)}$, найденной на некотором шаге j итераций, функцией

$$f^{+(j)} = f^{+(j)} - A \varphi^+ \quad (2.64)$$

для следующего шага. Константа A определяется из условия подчинения функции $f^{V+(j)}$ условию ортогональности (2.63). Тогда

$$A = \frac{\langle f^{+(j)}, Q\psi \rangle}{\langle \psi^+, Q\psi \rangle},$$

$$f^{V+(j)} = f^{+(j)} - \frac{\langle f^{+(j)}, Q\psi \rangle}{\langle \psi^+, Q\psi \rangle} \psi^+.$$

Итерационный процесс решения уравнения (2.55) в условиях исключения гармоник ψ_0^+ на каждом шаге итераций будет выглядеть следующим образом:

$$L f^{+(0)} = \frac{\partial F}{\partial \psi}, \quad (2.65)$$

$$L^+ f^{+(j)} = \frac{1}{k_0} Q f^{V+(j-1)}, \quad j = 1, 2, \dots, \quad (2.66)$$

$$\psi_F^+ = \lim_{J \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^J f^{V+(j)}. \quad (2.67)$$

Реализация такого процесса обеспечивает определение функции ψ_F^+ , подчиненной условию ортогональности (2.58). Если вычисления ведутся с высокой точностью, то амплитуда генерируемой в процессе итераций гармоник ψ_0^+ будет невелика и медленно меняться от итерации к итерации. В этом случае процедуру исключения гармоник ψ_0^+ можно применять не на каждом шаге итерационного процесса.

Отметим еще одно важное с вычислительной точки зрения обстоятельство. Как правило, функции ψ^+ , ψ и параметр k_0 определяются с некоторой погрешностью за счет, например, конечного числа итераций, использованных при их вычислении. Однако процедура исключения нулевой гармоник (в данном случае приближенной асимптотической ценности ψ^+) позволяет в итерационном процессе (2.66) получать ψ^+ , удовлетворяющую равенству (2.58), где ψ — приближенная плотность потока нейтронов.

Второй способ решения уравнения (2.55) реализуется с помощью итерационного процесса

$$L^+ \psi_F^{+(i)} = \frac{1}{k_0} Q^+ \psi_F^{+(i-1)} + \frac{\partial F}{\partial \psi}, \quad i = 1, 2, \dots, \quad (2.68)$$

где начальное приближение выбирается таким образом, чтобы

$$\langle \psi_F^{+(0)}, Q\psi \rangle = 0. \quad (2.69)$$

Решение уравнения (2.55) определяется предельным соотношением

$$\psi_F^+ = \lim_{i \rightarrow \infty} \psi_F^{+(i)} \quad (2.70)$$

В уравнении (2.68) функциональная производная ортогональна на ψ . Поэтому, умножив скалярно это уравнение на ψ , получим:

$$\langle \psi_F^{+(i)} Q \psi \rangle = \langle \psi_F^{+(i-1)} Q \psi \rangle, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.71)$$

Отсюда и из равенства (2.69) следует: $\langle \psi_F^{+(i)} Q \psi \rangle = 0, i = 0, 1, 2, \dots$, что, в конечном счете, означает принадлежность получаемого таким способом решения ψ_F^+ множеству $d^+(U)$.

Покажем, что итерационный процесс (2.68) приводит к решению уравнения (2.55). На i -ом шаге итераций имеем:

$$\psi_F^{+(i)} = \sum_{j=0}^{i-1} f^{+(j)} + \left(\frac{M_1^+}{k_0}\right)^i \psi_F^{+(0)}, \quad f^{+(j)} = \left(\frac{M_1^+}{k_0}\right) (L^{-1})^+ \frac{\partial F}{\partial \psi}, \quad (2.72)$$

а в пределе при $i \rightarrow \infty$ получаем:

$$\psi_F^+ = \sum_{j=0}^{\infty} f^{+(j)} \quad (2.73)$$

Функции $f^{+(j)}$ имеют смысл ценности нейтронов поколения j (в таком виде они получаются в итерационном процессе (2.53), (2.54), поэтому решения уравнений (2.68) приводят к нахождению суммарной по поколениям функции ценности нейтронов ψ^+ .

Второй способ решения уравнения (2.68) отличается от первого возможностью задавать "начальное" приближение $\psi_F^{+(0)}$ функции ценности, а затем уточнять его в процессе итераций. При многовариантных расчетах систем такая возможность может привести к существенному сокращению машинного времени, если в качестве начального приближения использовать функцию ценности нейтронов, найденную для варианта системы, близкой по своему составу к рассматриваемой.

Для нейтрализации влияния генерации гармоники ψ_0^+ во втором способе, так же как и в первом, применяется процедура исключения этой гармоники. Если такая процедура используется на каждом шаге итераций, то процесс решения уравнения (2.55) выглядит следующим образом:

$$\psi_F^{+(i)} = \psi_F^{+(i-1)} - \frac{\langle \psi_F^{+(i-1)} Q \psi \rangle}{\langle \psi^+, Q \psi \rangle} \psi^+, \quad i = 0, 1, \dots, \quad (2.74)$$

$$L^+ \varphi_F^{+(i)} = \frac{1}{k_0} Q^+ \varphi_F^{+(i-1)} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \quad i = 1, 2, \dots \quad (2.75)$$

2.5. Ценность нейтронов в реакторе с нормированным нейтронным полем

Если асимптотическая плотность потока нейтронов φ в условно-критическом реакторе не подчинена какому-либо условию нормировки, то суммарная ценность φ_F^+ поколений нейтронов определена только по отношению к функционалам, значения которых не зависят от амплитуды функции φ . К таким функционалам относится, например, дробно-линейный функционал $F_{a,b}$. По отношению к линейным функционалам суммарная ценность поколений нейтронов не определена.

В условно-критическом реакторе с нормированным нейтронным полем, описываемом уравнениями (1.88), (1.89) и (1.90), функция φ_F^+ определена для произвольного функционала $F[\varphi]$, так как в соответствии с (1.88) и (1.89)

$$F[\varphi] = F\left[\frac{\psi_0 W}{\langle \omega, \psi_0 \rangle}\right] = F\left[\frac{\varphi W}{\langle \omega, \varphi \rangle}\right] \quad (2.76)$$

Из (2.76) следует, что в реакторе с нормированным нейтронным полем, если нормировка определяется с помощью линейного функционала W , любой функционал $F[\varphi]$ не зависит от амплитуды функции φ . Для линейного функционала $F_a = \langle a, \varphi \rangle$ имеем:

$$F_a[\varphi] = \langle a, \psi_0 \rangle = \frac{W \langle a, \psi_0 \rangle}{\langle \omega, \psi_0 \rangle} = W \frac{\langle a, \varphi \rangle}{\langle \omega, \varphi \rangle}, \quad (2.77)$$

что приводит к представлению линейного функционала в реакторе с нормированным нейтронным полем в виде дробно-линейного функционала, по отношению к которому суммарная ценность поколений нейтронов определяется уравнением

$$L^+ \varphi_F^+ - \frac{1}{k_0} Q^+ \varphi_F^+ = a - \langle a, \varphi \rangle \frac{\omega}{\langle \omega, \varphi \rangle}, \quad \varphi_F^+ \in d^+(U). \quad (2.78)$$

В случае произвольного функционала $F[\varphi]$ в реакторе с нормированным нейтронным полем функция суммарной ценности поколений нейтронов подчиняется уравнению

$$L^+ \varphi_F^+ - \frac{1}{k_0} Q^+ \varphi_F^+ = \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \varphi \right\rangle \frac{\omega}{\langle \omega, \varphi \rangle}, \quad \varphi_F^+ \in d^+(U). \quad (2.79)$$

Нетрудно убедиться, что уравнение (2.78) является частным случаем уравнения (2.79) для линейного функционала.

3. ЛАГРАНЖИАНЫ НЕЙТРОННЫХ ПОЛЕЙ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ

3.1. Вариационное исчисление и вариационные принципы

Многие практические задачи расчета распределений нейтронов и функционалов нейтронных полей решаются с использованием идей и методов вариационного исчисления, обобщающих классическую проблему поиска значений аргумента функции $f(x)$, при которых она обладает свойством стационарности.

Непрерывно дифференцируемая функция $f(\tilde{x})$ во всей области изменения \tilde{x} стационарна в точке x , если ее первый дифференциал, определенный для сколь угодно малого приращения Δx аргумента x , равен нулю: $df(x) = 0$.

Из произвольности Δx и определения

$$df(x) = \left. \frac{df(\tilde{x})}{d\tilde{x}} \right|_{x=\tilde{x}} \Delta x$$

следует необходимое и достаточное условие стационарности функции f в точке x :

$$\frac{df(x)}{dx} = 0,$$

которое является, по существу, уравнением, с помощью которого находятся точки стационарности функции $f(x)$.

Отметим важное для дальнейших обобщений свойство функции f в окрестности точки стационарности x . Пусть $\Delta x = o(\varepsilon)$, тогда

$$f(x + \Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx} \Delta x + o(\varepsilon^2)$$

или $f(x + \Delta x) - f(x) = o(\varepsilon^2)$.

Последнее равенство означает, что погрешность в значении функции будет величиной порядка ε^2 , т.е. величиной второго порядка малости по сравнению с погрешностью в аргументе x . Точка стационарности функции может быть точкой локального экстремума (максимума, минимума) либо седловой точкой. Характер поведения функции в окрестности точки стационарности определяется по знаку и величине второго дифференциала (второй производной) или старших дифференциалов и производных.

Вариационное исчисление обобщает проблему поиска точек стационарности функций и рассматривает в качестве основных объектов непрерывно дифференцируемые функционалы. Основная задача вариационного исчисления состоит в отыскании условий, кото-

рым должна удовлетворять функция $f(x)$, доставляющая некоторому функционалу $\mathcal{L}[f]$ стационарное значение.

Функция f называется точкой стационарности дифференцируемого функционала \mathcal{L} , если его первый дифференциал, обусловленный вариацией δf функции f , равен нулю:

$$\delta \mathcal{L}[f] = 0. \quad (3.1)$$

Если f принадлежит плотному множеству рассматриваемого функционального пространства, то из (3.1) в силу произвольности δf следует условие стационарности функционала $\mathcal{L}[\tilde{f}]$ в точке f в форме равенства нулю его производной в этой точке:

$$\frac{d\mathcal{L}[f]}{df} = 0. \quad (3.2)$$

Это равенство обычно представляет операторное уравнение, решение которого определяет функцию f , доставляющую функционалу \mathcal{L} стационарное значение. Такие уравнения называют уравнениями Эйлера-Лагранжа. Если уравнение Эйлера-Лагранжа является уравнением какого-либо поля, то функционал \mathcal{L} называют лагранжианом этого поля. Функция f может быть либо точкой экстремума функционала \mathcal{L} , либо его седловой точкой.

Вновь вернемся к проблеме стационарности функции f , но будем рассматривать ее как функцию двух переменных x и y . Если x и y независимы, то x, y будут "точкой" стационарности функции f , когда

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0.$$

Такая точка стационарности обычно называется безусловной.

Если аргументы x и y связаны уравнением (условием)

$$g(x, y) = 0, \quad (3.3)$$

где $g(x, y)$ — непрерывно дифференцируемая функция по x и y , то точка x, y , доставляющая стационарное значение функции f при наличии дополнительной связи (3.3), называется условной стационарной точкой.

Общий метод поиска условной стационарной точки в рассматриваемой задаче осуществляется с помощью метода множителей Лагранжа. Он заключается в следующем. Вводится новая независимая переменная $\tilde{\lambda}$ (множитель Лагранжа) и с ее помощью строится вспомогательная функция трех переменных $\mathcal{L}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\lambda})$ (функция Лагранжа):

$$l(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\lambda}) = f(\tilde{x}, \tilde{y}) - \tilde{\lambda} g(\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (3.4)$$

Показано, что задача поиска условной стационарной точки x, y функции $f(x, y)$ сводится к задаче поиска безусловной стационарной точки x, y, λ функции трех независимых переменных (3.4). В соответствии с общим подходом эта точка должна определяться из уравнений

$$\frac{\partial l(x, y, \lambda)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial l(x, y, \lambda)}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial l(x, y, \lambda)}{\partial \lambda} = 0,$$

которые согласно определению (3.4) представляются в форме $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = \lambda \frac{\partial g(x, y)}{\partial y}$; $g(x, y) = 0$.

Проблемы поиска условных стационарных точек в вариационном исчислении рассмотрим непосредственно на примере функционалов нейтронного поля.

3.2. Лагранжианы нейтронного поля в задаче с внешним источником

Пусть в задаче (1.85) с внешним источником основным объектом исследования является функционал $F[\varphi]$. Допустим, что мы не знаем точного решения уравнения (1.85), но нам известен некоторый его приближенный аналог $\tilde{\varphi}$, который также принадлежит множеству $D(V)$. Представим $\tilde{\varphi}$ в виде $\tilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon \tilde{q}$, где ε указывает на порядок отклонения $\tilde{\varphi}$ от точной функции φ .

Если рассчитать функционал F на приближенном решении $\tilde{\varphi}$, то в соответствии с (1.115) получим в его значении погрешность порядка ε : $F[\tilde{\varphi}] - F[\varphi] = O(\varepsilon)$. Однако можно улучшить точность оценки функционала F , если использовать некоторые дополнительные сведения о погрешности решения. Так, например, нам неизвестна погрешность в $\tilde{\varphi}$, но мы можем определить какую невязку \tilde{q} образует функция $\tilde{\varphi}$ после ее подстановки в уравнение (1.85):

$$\tilde{q} = L\tilde{\varphi} - q \quad (3.5)$$

Невязку \tilde{q} можно интерпретировать как некоторый дополнительный источник $\tilde{q} = O(\varepsilon)$, который нужно внести в систему, чтобы приближенное решение удовлетворяло уравнению переноса нейтронов в задаче с внешним источником.

Представим теперь функционал $F[\varphi]$ его разложением в ряд по \tilde{q} , учитывая неявную зависимость $\tilde{\varphi}$ от \tilde{q} :

$$F[\tilde{\varphi}] = F[\varphi] + \int dx \frac{dF[\varphi]}{dq(x)} \tilde{q}(x) + O(\varepsilon^2). \quad (3.6)$$

Используя определение функции ценности нейтронов и выражение (3.6) для невязки \tilde{q} , запишем:

$$F[\varphi] = F[\tilde{\varphi}] - \int dx \varphi^+(x) (L\tilde{\varphi}(x) - q(x)) + O(\varepsilon^2). \quad (3.7)$$

Допустим, что мы можем определить приближенную функцию ценности нейтронов φ_F^+ с погрешностью ε^+ , т.е. найти $\tilde{\varphi}_F^+ = \varphi_F^+ + O(\varepsilon^+)$. Тогда, подставив в (3.6) $\tilde{\varphi}_F^+(x)$ вместо $\tilde{\varphi}_F^+$, получим следующую оценку функционала F :

$$F[\varphi] = F[\tilde{\varphi}] - \int dx \tilde{\varphi}_F^+ (L\tilde{\varphi} - q) + O(\varepsilon \cdot \varepsilon^+). \quad (3.8)$$

Таким образом, мы построили функционал

$$\mathcal{L}_F[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_F^+] = F[\tilde{\varphi}] - \int dx \tilde{\varphi}_F^+ (L\tilde{\varphi} - q), \quad (3.9)$$

который позволяет, зная φ и φ_F^+ с точностью до величин ε и ε^+ первого порядка малости в задаче с внешним источником, оценить с точностью до величины второго порядка малости ($O(\varepsilon \cdot \varepsilon^+)$) значение интересующего нас функционала F .

Изучим свойства функционала $\mathcal{L}_F[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_F^+]$. Рассматривая $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_F^+$ как независимые функции (переменные), поставим задачу определения таких φ и φ_F^+ , которые доставляли бы функционалу \mathcal{L}_F стационарное значение. Будем считать, что $\tilde{\varphi} \in D(U)$, $\tilde{\varphi}_F^+ \in D^+(U)$, и рассмотрим первую вариацию функционала \mathcal{L}_F в окрестности некоторых фиксированных функций φ и φ^+ из этих множеств. Имеем:

$$\delta \mathcal{L}_F[\varphi, \varphi_F^+] = \int dx \frac{\partial F[\varphi]}{\partial \varphi(x)} \delta \varphi - \int dx \delta \varphi_F^+ (L\varphi - q) - \int dx \varphi_F^+ L \delta \varphi,$$

или

$$\delta \mathcal{L}_F[\varphi, \varphi_F^+] = - \int dx \delta \varphi_F^+ (L\varphi - q) - \int dx \delta \varphi (L^+ \varphi_F^+ - \frac{\partial F}{\partial \varphi}). \quad (3.10)$$

Используя представление первой вариации функционала через функциональные производные, можем записать:

$$\delta \mathcal{L}_F[\varphi, \varphi^+] = \left\langle \delta \varphi_F^+, \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \varphi_F^+} \right\rangle + \left\langle \delta \varphi, \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \varphi} \right\rangle, \quad (3.11)$$

где

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \varphi_F^+} = - (L\varphi - q), \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \varphi} = - \left(L^+ \varphi_F^+ - \frac{\partial F}{\partial \varphi} \right). \quad (3.13)$$

Точка φ, φ_F^+ является точкой стационарности функционала \mathcal{L}_F , когда

$$\delta \mathcal{L}_F[\varphi, \varphi_F^+] = 0; \quad \delta \varphi, \varphi \in D(U); \quad \delta \varphi_F^+, \varphi \in D^+(U). \quad (3.14)$$

Отсюда и из равенства (3.11) при произвольных $\delta \varphi$ и $\delta \varphi_F^+$ следуют уравнения Эйлера-Лагранжа, которым должны удовлетворять φ и φ^+ , доставляющие функционалу \mathcal{L}_F стационарное значение:

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \varphi_F^+} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial \varphi} = 0, \quad (3.15)$$

или

$$L\varphi = q, \quad \varphi \in D(U); \quad (3.16)$$

$$L^+ \varphi_F^+ = \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \quad \varphi_F^+ \in D^+(U). \quad (3.17)$$

Эти уравнения являются уравнениями для функций плотности потока и ценности нейтронов, поэтому функционал $\mathcal{L}_F[\hat{\varphi}, \hat{\varphi}^+]$ — лагранжиан нейтронного поля в системе с внешним источником. Вариационный принцип (3.14), определяющий уравнения нейтронного поля, называют вариационной формулировкой этих уравнений.

Анализируя структуру лагранжиана (3.9), можно заметить ее аналогию со структурой функции Лагранжа (3.4) в проблеме поиска условной стационарной точки аналитической функции, рассмотренной в п. 3.1, и обобщить формализм метода множителей Лагранжа на задачи исследования стационарных точек функционалов.

В соответствии с этим формализмом лагранжиан (3.9) следует рассматривать как некий вспомогательный функционал, образованный путем добавления к $F[\hat{\varphi}]$ с помощью "множителя" Лагранжа $\hat{\varphi}_F^+$ дополнительного условия (уравнения) $L\varphi - q = 0$, которому должна удовлетворять функция φ , доставляющая функционалу F условное стационарное значение. С помощью построенного таким образом лагранжиана \mathcal{L}_F задача поиска условной

точки стационарности φ функционала F сводится к вариационной задаче поиска безусловной точки стационарности φ , φ_F^+ лагранжиана (3.9).

Рассмотрим теперь лагранжиан (3.9) с позиций оценки функционалов. Пусть φ и φ^+ — точные решения уравнений (3.16) и (3.17), тогда:

$$\mathcal{L}_F[\varphi, \varphi^+] = F[\varphi];$$

$$\delta \mathcal{L}_F[\varphi, \varphi^+] = 0.$$

Эти свойства лагранжиана \mathcal{L}_F позволяют использовать его для уточненной оценки функционала F при известных приближенных решениях $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_F^+$ уравнений (3.16) и (3.17). Если функции $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_F^+$ имеют соответственно погрешности ε и ε^+ по сравнению с точными решениями, то

$$\mathcal{L}_F[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_F^+] = \mathcal{L}_F[\varphi, \varphi_F^+] + \delta \mathcal{L}_F[\varphi, \varphi_F^+] + O(\varepsilon \cdot \varepsilon^+). \quad (3.18)$$

Благодаря указанным свойствам из (3.18) имеем:

$$\mathcal{L}_F[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_F^+] = F[\varphi] + O(\varepsilon \cdot \varepsilon^+). \quad (3.19)$$

Использование равенства (3.19) будем называть вариационной оценкой функционала F .

Функции $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_F^+$, с помощью которых проводится вариационная оценка значения функционала F , обычно называют пробными функциями.

Форма (3.9) лагранжиана \mathcal{L}_F нейтронного поля в системе с внешним источником не является единственной. При вариационной оценке функционала $F[\varphi]$ удобно перейти к другой его форме, не чувствительной к амплитудам распределений $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_F^+$. Для этого подставим в (3.9) вместо фиксированных $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_F^+$ функции $\tilde{c}\tilde{\varphi}$ и $\tilde{c}^+\tilde{\varphi}_F^+$ с некоторыми постоянными множителями \tilde{c} и \tilde{c}^+ и определим эти множители из условия стационарности функционала $\mathcal{L}_F^{(0)}[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_F^+] = \mathcal{L}_F[\tilde{c}\tilde{\varphi}, \tilde{c}^+\tilde{\varphi}_F^+]$ при его варьировании относительно коэффициентов \tilde{c} и \tilde{c}^+ . Тогда значения \tilde{c} и \tilde{c}^+ множителей \tilde{c} и \tilde{c}^+ , доставляющие стационарное значение функционалу $\mathcal{L}_F^{(0)}$ при фиксированных $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_F^+$, определяются уравнениями

$$\frac{\partial \mathcal{L}_F^{(0)}}{\partial \tilde{c}^+} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}_F^{(0)}}{\partial \tilde{c}} = 0, \quad (3.20)$$

из которых следует:

$$C = \frac{\langle q, \tilde{\psi}_F \rangle}{\langle \tilde{\psi}_F^+, L \tilde{\psi} \rangle}, \quad C^+ = \frac{\langle \frac{\partial F[\tilde{\psi}]}{\partial \tilde{\psi}}, \tilde{\psi} \rangle}{\langle \tilde{\psi}_F^+, L \tilde{\psi} \rangle}. \quad (3.21)$$

Подставив C и C^+ , определенные равенствами (3.21), в выражение для лагранжиана $\mathcal{L}_F^{(0)}$ вместо \tilde{C} и \tilde{C}^+ , приходим к новой форме лагранжиана нейтронного поля в системе с внешним источником:

$$\mathcal{L}_F^{(0)}[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}_F^+] = F \left[\frac{\langle q, \tilde{\psi}_F^+ \rangle}{\langle \tilde{\psi}_F^+, L \tilde{\psi} \rangle} \tilde{\psi} \right]. \quad (3.22)$$

Из (3.22) следует, что лагранжиан $\mathcal{L}_F^{(0)}$ не зависит от изменения амплитуды распределений $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\psi}_F^+$.

Легко показать, что условиями стационарности лагранжиана $\mathcal{L}_F^{(0)}$ являются уравнения (3.16) и (3.17).

Если F — линейный функционал ($F = \langle a, \psi \rangle$), то $\mathcal{L}_F^{(0)}$ имеет вид

$$\mathcal{L}_F^{(0)}[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}_F^+] = \frac{\langle a, \tilde{\psi} \rangle \langle q, \tilde{\psi}_F^+ \rangle}{\langle \tilde{\psi}_F^+, L \tilde{\psi} \rangle}. \quad (3.23)$$

3.3. Лагранжиан \mathcal{L}_F нормированного нейтронного поля условно-критического реактора

Рассмотрим некоторый, в общем случае нелинейный, функционал $F[\psi]$, определенный на нормированной асимптотической плотности потока условно-критического реактора, подчиняющейся уравнениям

$$L\psi(x) - \frac{1}{k_0} Q\psi(x) = 0, \quad W = \int dx w(x)\psi(x). \quad (3.24)$$

Эти уравнения примем в качестве условий, которым должна удовлетворять функция $\psi(x)$ в вариационной задаче поиска условной стационарной точки функционала F .

В соответствии с формализмом метода множителей Лагранжа построим лагранжиан

$$\mathcal{L}_F[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}_F^+, \frac{\tilde{\lambda}}{k_0}, \tilde{\lambda}] = F[\tilde{\psi}] - \int dx \tilde{\psi}_F^+ (L - \frac{\tilde{\lambda}}{k_0} Q) \tilde{\psi} - \tilde{\lambda} (W - \int dx w \tilde{\psi}), \quad (3.25)$$

присоединив к функционалу F с помощью множителей Лагранжа $\tilde{\psi}_F^+$ и $\tilde{\lambda}$ условия (3.24).

Образуем первую вариацию лагранжиана (3.25), варьируя его по $\tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi}_F^+$, $\frac{\tilde{I}}{k_0}$ и $\tilde{\lambda}$ в окрестности некоторых фиксированных φ , φ_F^+ , $\frac{I}{k_0}$, λ и считая, что $\tilde{\varphi} \in D(U)$, $\tilde{\varphi}_F^+ \in D^+(U)$. Имеем:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{L}_F[\varphi, \varphi_F^+, \frac{I}{k_0}, \lambda] = & - \int dx \delta \varphi_F^+ (L\varphi - \frac{1}{k_0} Q\varphi) - \\ & - \int dx \delta \varphi [(L^+ - \frac{1}{k_0} Q^+) \varphi_F^+ - \frac{\partial F[\varphi]}{\partial \varphi} + \lambda w] - \\ & - \delta \frac{1}{k_0} \int dx \varphi_F^+ Q\varphi - \delta \lambda (W - \int dx w \varphi). \end{aligned} \quad (3.26)$$

Из вариационного принципа $\delta \mathcal{L}_F = 0$ при произвольных $\delta \varphi$, $\delta \varphi_F^+$, $\delta \frac{I}{k_0}$, $\delta \lambda$ следуют уравнения для φ , φ_F^+ , λ , доставляющие лагранжиану \mathcal{L}_F стационарное значение. Ими являются уравнения (3.24) и уравнение для множителя Лагранжа φ_F^+ :

$$L^+ \varphi_F^+ - \frac{1}{k_0} Q^+ \varphi_F^+ = \frac{\partial F}{\partial \varphi} - \lambda w, \quad (3.27)$$

а также условие ортогональности

$$\int dx \varphi_F^+ Q\varphi = 0. \quad (3.28)$$

Если считать, что k_0 - наибольшее собственное число оператора $(L^+)^{-1} Q^+$, то решение уравнения (3.27) будет принадлежать в соответствии с (3.28) множеству $d^+(U)$ и существовать в условиях ортогональности его первой части функции $\varphi(x)$, т.е. когда

$$\lambda = \left\langle \frac{\partial F}{\partial \varphi}, \varphi \right\rangle \frac{1}{\langle w, \varphi \rangle}. \quad (3.29)$$

Уравнение (3.27) с λ , определяемым равенством (3.29), совпадает с уравнением (2.19) для суммарной ценности нейтронов в условно-критическом реакторе с нормированным нейтронным полем.

Запишем выражение для лагранжиана \mathcal{L}_F нормированного нейтронного поля условно-критического реактора в случае линейного функционала ($F = F_a$):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_F^+, \frac{\tilde{I}}{k_0}] = & F_a[\tilde{\varphi}] - \int dx \tilde{\varphi}_F^+ (L\tilde{\varphi} - \frac{\tilde{I}}{k_0} Q\tilde{\varphi}) - \\ & - \frac{\langle a, \tilde{\varphi} \rangle}{\langle w, \tilde{\varphi} \rangle} (W - \int dx w \tilde{\varphi}). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Пусть $F = F_{a,b}$ - дробно-линейный функционал, тогда $\left\langle \frac{\delta F_{a,b}}{\delta \varphi}, \varphi \right\rangle = 0$ и

$$\alpha_F[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_F^+, \frac{1}{k_0}] = F_{a,b}[\tilde{\varphi}] - \int dx \tilde{\varphi}_F^+ (L\tilde{\varphi} - \frac{1}{k_0} Q\tilde{\varphi}). \quad (3.31)$$

Лагранжиан α_F , так же как и в случае неоднородной задачи с внешним источником нейтронов, может быть использован для вариационной оценки функционала F нейтронного поля условно-критического реактора.

Пусть $\tilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon h$, $\tilde{\varphi}_F^+ = \varphi_F^+ + \varepsilon h^+$, где φ и φ_F^+ - точные функции плотности потока и ценности нейтронов (например, решения уравнений (1.89) и (2.55)). Тогда

$$\alpha_F[\varphi, \varphi_F^+, \frac{1}{k_0}] = F[\varphi],$$

$$\delta \alpha_F[\varphi, \varphi_F^+, \frac{1}{k_0}] = 0,$$

что позволяет записать равенство (3.19) для вариационной оценки функционала F с помощью пробных функций $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}_F^+$.

3.4. Лагранжиан α_{χ} нейтронного поля условно-критического реактора

Важнейшим параметром системы является ее эффективный коэффициент размножения нейтронов k_0 . Поэтому желательно иметь лагранжиан, позволяющий вариационно оценивать k_0 . Оказывается, что таким лагранжианом является дробно-билинейный функционал

$$\alpha_{\chi}[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^+] = \frac{\langle \tilde{\varphi}^+, L\tilde{\varphi} \rangle}{\langle \tilde{\varphi}^+, Q\tilde{\varphi} \rangle}, \quad (3.32)$$

рассмотренный в пп. 1.9 и 1.10. Отметим нечувствительность функционала (3.32) к амплитудам распределений $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}^+$. На точных решениях уравнений (1.89) и (2.47) в условно-критическом реакторе (см. (1.103)) функционал (3.32) равен $\frac{1}{k_0}$. Равенства (1.131) и (1.132) показывают, что условия стационарности функционала (3.32)

$$\frac{\delta \alpha_{\chi}[\varphi, \varphi^+]}{\delta \varphi^+} = 0, \quad \frac{\delta \alpha_{\chi}[\varphi, \varphi^+]}{\delta \varphi} = 0$$

являются, соответственно, уравнениями (1.89) и (2.55), т.е. функционал (3.20) — лагранжиан асимптотического нейтронного поля условно-критического реактора. С другой стороны, можно утверждать, что первая вариация (1.128) лагранжиана \mathcal{L}_X в окрестности точных решений уравнений (1.89) и (2.55), обусловленная вариациями $\delta\varphi \in \mathcal{D}(U)$ и $\delta\varphi^+ \in \mathcal{D}^+(U)$, обращается в ноль.

Таким образом, для лагранжиана \mathcal{L}_X выполняются равенства

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+] &= \frac{1}{k_0}; \\ \delta\mathcal{L}_X[\varphi, \varphi^+] &= 0.\end{aligned}$$

Это позволяет использовать лагранжиан \mathcal{L}_X для вариационной оценки параметра $\frac{1}{k_0}$ на пробных функциях $\tilde{\varphi} = \varphi + \varepsilon h$ и $\tilde{\varphi}^+ = \varphi^+ + \varepsilon^+ h^+$ из $\mathcal{D}(U)$ и $\mathcal{D}^+(U)$ соответственно.

При этом из (1.140) следует:

$$\mathcal{L}_F[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}^+] = \frac{1}{k_0} + O(\varepsilon \cdot \varepsilon^+). \quad (3.33)$$

3.5. Естественные и главные дополнительные условия

Рассматриваемые здесь математические модели нейтронного поля описываются уравнениями с дифференциальными операторами и дополнительными условиями, определяющими непрерывность решений и их поведение на границе системы. Дополнительные условия характеризуют множества $\mathcal{D}(U)$ и $\mathcal{D}^+(U)$ функций, которым принадлежат решения уравнений для плотности потока и ценности нейтронов.

До сих пор считалось, что вариационная оценка функционалов должна производиться с помощью пробных функций $\tilde{\varphi}$ и $\tilde{\varphi}^+$, удовлетворяющих всем дополнительным условиям, свойственным выбранной модели нейтронного поля. Однако первая вариация лагранжиана, обусловленная варьированием пробных функций в окрестности точных решений уравнений нейтронного поля, может обращаться в ноль, даже если пробные функции не удовлетворяют некоторым дополнительным условиям. Такие дополнительные условия обычно называют естественными, в отличие от главных условий, которым обязаны удовлетворять пробные функции для обращения в ноль первой вариации лагранжиана.

В дальнейшем будет рассмотрен метод выявления естественных и главных дополнительных условий и указан способ конструирования лагранжианов, по отношению к которым заданные до-

полнительные условия являются естественными. Возможность построения таких лагранжианов существенно упрощает проблему выбора пробных функций для вариационной оценки функционалов.

3.5.1. Газокинетическая модель нейтронного поля

Проиллюстрируем общую схему анализа дополнительных условий на примере лагранжиана \mathcal{L}_F нейтронного поля двухзонной системы, представленной на рис. 1.1, в задаче (1.85) с внешним источником нейтронов.

Если свойства зон системы различны, то уравнения (1.85), (2.15) для плотности потока $\varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ и ценности нейтронов $\varphi_F^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ можно записать отдельно для каждой зоны $J (J = \bar{I}, \bar{II})$:

$$L_J \varphi_J = q_J, \quad L_J^+ \varphi_{F,J}^+ = \frac{\partial F}{\partial \varphi_J}, \quad (3.34)$$

где операторы L_J и L_J^+ определены тождествами (1.5) и (1.30) с учетом различия свойств зон.

Напомним, что для газокинетической модели нейтронного поля принадлежность функций φ и φ_F^+ множествам $D(U)$ и $D^+(U)$ означает их соответственное подчинение дополнительным условиям (1.13), (1.14) и (1.25), (1.26) на внешней границе S системы и внутренней поверхности R раздела двух зон.

Лагранжиан (3.9) также запишем с учетом зонной структуры системы:

$$\mathcal{L}_F = F[\tilde{\varphi}] - \sum_J \int_{V_J} d\bar{r} \int dE \int d\Omega \tilde{\varphi}_{F,J}^+ (L_J \tilde{\varphi}_J - q_J). \quad (3.35)$$

Представим, как и прежде, пробные функции $\tilde{\varphi}_J$ и $\tilde{\varphi}_{F,J}^+$ в виде

$$\tilde{\varphi}_J = \varphi_J + \delta\varphi_J, \quad \tilde{\varphi}_{F,J}^+ = \varphi_{F,J}^+ + \delta\varphi_{F,J}^+, \quad (3.36)$$

где φ_J и $\varphi_{F,J}^+$ — точные решения уравнений (1.85) и (2.15) при дополнительных условиях (1.13), (1.14) и (1.25), (1.26), а вариации $\delta\varphi_J$ и $\delta\varphi_{F,J}^+$ — функции, удовлетворяющие лишь одному ограничению: они непрерывны внутри объемов зон системы. Очевидно, что такому ограничению будут подчинены и пробные функции $\tilde{\varphi}_J$ и $\tilde{\varphi}_{F,J}^+$.

Рассмотрим теперь первую вариацию лагранжиана (3.35) в окрестности точных решений, обусловленную вариациями $\delta\varphi_J$ и $\delta\varphi_{F,J}^+$. Имеем:

$$\delta\mathcal{L}_F[\varphi, \varphi_F^+] = \sum_J \int_{V_J} d\bar{r} \int dE \int d\Omega \left[\frac{\partial F}{\partial \varphi_J} \delta\varphi_J - \delta\varphi_{F,J}^+ (L_J \varphi_J - q_J) - \varphi_{F,J}^+ L_J \delta\varphi_J \right].$$

Учитывая уравнения (3.34), получим:

$$\delta\mathcal{L}_F[\varphi, \varphi_F^+] = \sum_J \int_{V_J} d\bar{r} \int dE \int d\Omega \left[\delta\varphi_J L_J^+ \varphi_{F,J}^+ - \varphi_{F,J}^+ L_J \delta\varphi_J \right].$$

В этом равенстве используем определения (1.5) и (1.30) операторов L и L^+ . В результате приходим к выражению

$$\delta\mathcal{L}_F[\varphi, \varphi^+] = \sum_J \int_{V_J} d\bar{r} \int dE \int d\Omega \left[\delta\varphi_J (\bar{\Omega} \nabla) \varphi_{F,J}^+ + \varphi_{F,J}^+ (\bar{\Omega} \nabla) \delta\varphi_J \right]. \quad (3.37)$$

В соответствии с формулами (1.28), (1.29) можем записать:

$$\sum_J \int_{V_J} d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi_{F,J}^+ (\bar{\Omega} \nabla) \delta\varphi_J = - \sum_J \int_{V_J} d\bar{r} \int dE \int d\Omega \times$$

$$\times \delta\varphi_J (\bar{\Omega} \nabla) \varphi_{F,J}^+ + \sum_J \oint_{S_J} dS \int dE \int d\Omega (\bar{\Omega} \cdot \bar{n}_J) \delta\varphi_J \varphi_{F,J}^+ \quad (3.38)$$

Здесь S_J — поверхность объема V_J , включающая часть внешней границы системы S и внутреннюю поверхность R , а \bar{n}_J — внешняя нормаль в точках поверхности S_J . Сумму интегралов по поверхностям S_J можно представить через интеграл по внешней поверхности S и интегралы по поверхности R , тогда

$$\delta\mathcal{L}_F[\varphi, \varphi^+] = - \oint_S dS \int dE \int d\Omega (\bar{\Omega} \cdot \bar{n}) \delta\varphi \cdot \varphi_F^+ -$$

$$- \int_R dS \int dE \int d\Omega (\bar{\Omega} \cdot \bar{m}) \varphi_F^+ \left[\delta\varphi_I(\bar{r}_R, E, \bar{\Omega}) - \delta\varphi_{II}(\bar{r}_R, E, \bar{\Omega}) \right]. \quad (3.39)$$

При записи равенства (3.39) учтено краевое условие (1.25), условие непрерывности (1.26) для функции ценности нейтронов и тот факт, что нормаль \bar{m} , внешняя по отношению к участку R поверхности S_I , является внутренней нормалью по отношению к этому же участку поверхности S_{II} .

Анализируя первую вариацию $\delta\mathcal{L}_F$ в форме (3.39), можно сделать вывод, что она обращается в ноль только в случае, когда вариация $\delta\varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$, а следовательно, и пробная функция $\varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$,

удовлетворяет дополнительным условиям (1.13) и (1.14). При этом не обязательно, чтобы $\delta\varphi_F^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ удовлетворяли условиям (1.25) и (1.26).

Таким образом, установлено: дополнительные условия (1.13) и (1.14) являются по отношению к лагранжиану (3.9) главными, а условия (1.25) и (1.26) – естественными. Поэтому при вариационной оценке функционала F с помощью лагранжиана (3.9) можно использовать пробные функции $\tilde{\varphi}_F^+ \in D^+(V_\varphi)$.

Если вместо лагранжиана (3.9) взять его модификацию в форме

$$\mathcal{L}_F^{(*)}[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_F^+] = F[\tilde{\varphi}] - \langle \tilde{\varphi}, L^+ \tilde{\varphi}_F^+ \rangle + \langle \tilde{\varphi}_F^+, q \rangle, \quad (3.40)$$

то есть заменить в лагранжиане (3.9) скалярное произведение $\langle \tilde{\varphi}_F^+, L \tilde{\varphi} \rangle$ на $\langle \tilde{\varphi}, L^+ \tilde{\varphi}_F^+ \rangle$, то по отношению к $\mathcal{L}_F^{(*)}$ дополнительные условия (1.25) и (1.26) будут главными, а (1.13) и (1.14) – естественными.

Априорный выбор пробной функции $\tilde{\varphi}$ (или $\tilde{\varphi}_F^+$), удовлетворяющей краевому условию (1.13) (или (1.25)) на внешней поверхности S системы, приводит на практике к большим трудностям. Поэтому возникает вопрос: нельзя ли построить такой лагранжиан, по отношению к которому краевое условие (1.13), так же как и условие (1.25), было бы естественным? Ответ на этот вопрос можно получить, если проанализировать первую вариацию (3.39) лагранжиана (3.9). Желаемым является такой лагранжиан (назовем его $\mathcal{L}_F^{(S)}$), в первой вариации которого (в форме (3.39)) отсутствует интеграл по поверхности S .

Легко убедиться, что лагранжиан $\mathcal{L}_F^{(S)}$ определяется выражением

$$\mathcal{L}_F^{(S)}[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_F^+] = \mathcal{L}_F[\tilde{\varphi}, \tilde{\varphi}_F^+] + \oint_S \int dE \int d\Omega (\bar{\Omega} \cdot \bar{n}) \tilde{\varphi} \tilde{\varphi}_F^+ \quad (3.41)$$

$(\bar{\Omega} \cdot \bar{n}) < 0$

Действительно, первая вариация лагранжиана $\mathcal{L}_F^{(S)}$ в окрестности точных решений уравнений (1.85) и (2.15), выраженная через поверхностные интегралы, будет представляться равенством

$$\delta \mathcal{L}_F^{(S)}[\varphi, \varphi_F^+] = - \int_R dS \int dE \int d\Omega (\bar{\Omega} \cdot \bar{m}) \varphi_F^+ [\delta\varphi_{\bar{I}} - \delta\varphi_{\bar{II}}], \quad (3.42)$$

из которого следует, что по отношению к лагранжиану (3.41) дополнительные условия (1.13), (1.25) и (1.26) – естественные, а условие (1.14) – главное.

Формула (3.41) отражает общий способ построения лагранжиана с заданным естественным дополнительным условием с позиций метода множителей Лагранжа в задаче на поиск условий точки стационарности функционала F , когда к функционалу F присоединяются с помощью множителей Лагранжа $\tilde{\psi}_F^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ и $\tilde{\psi}_F^-(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ не только уравнение (1.85) для плотности потока нейтронов, но и дополнительное условие (1.13). Множители Лагранжа в точке стационарности имеют смысл функций ценности нейтронов в зонах системы и на границе S .

Проведенный анализ можно непосредственно перенести на лагранжианы газокINETической модели нейтронного поля в условно-критическом реакторе и установить следующие результаты:

1. По отношению к лагранжианам $\mathcal{L}_F[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}_F^+, \frac{\tilde{I}}{k_0}]$ (см. (3.30) и (3.31)), а также к лагранжиану $\mathcal{L}_X[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^+]$ (см. (3.32)) дополнительные условия (1.13), (1.14) — главные, а условия (1.25), (1.26) — естественные.

2. По отношению к лагранжианам

$$\mathcal{L}_F^{(S)}[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}_F^+, \frac{\tilde{I}}{k_0}] = \mathcal{L}_F[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}_F^+, \frac{1}{k_0}] + \oint_S dS \int dE \int d\Omega (\bar{\Omega} \cdot \bar{n}) \tilde{\psi} \tilde{\psi}_F^+, \quad (3.43)$$

$$\mathcal{L}_X^{(S)}[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^+] = \mathcal{L}_X[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^+] - \frac{\oint_S dS \int dE \int_{(\bar{\Omega} \cdot \bar{n}) < 0} d\Omega (\bar{\Omega} \cdot \bar{n}) \tilde{\psi} \tilde{\psi}^+}{\int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \tilde{\psi}^+ Q \tilde{\psi}} \quad (3.44)$$

дополнительные условия (1.14) являются главными, а условия (1.13), (1.25) и (1.26) — естественными.

3.5.2. Диффузионно-групповая модель нейтронного поля

Рассмотрим диффузионную векторно-матричную модель группового нейтронного поля в задаче с внешним источником $\bar{q}(\bar{r})$ на примере двухзонной системы (см. рис. 1.1). Плотность потока нейтронов $\psi(\bar{r})$ и функция ценности нейтронов $\bar{\psi}^+(\bar{r})$ по отношению к функционалу $F[\bar{\psi}]$ удовлетворяет в каждой зоне системы уравнениям

$$L_J \bar{\psi}_J = \bar{q}_J, \quad L^+ \bar{\psi}_J^+ = \frac{\partial F[\bar{\psi}]}{\partial \bar{\psi}}, \quad J = I, II, \quad (3.45)$$

где операторы-матрицы L и L^+ представлены тождествами (1.16) и (1.38), а правая часть уравнения для функций ценности нейтронов выражается тождеством (1.126). Решения урав-

нений (3.45) подчинены соответственно дополнительным условиям (1.19), (1.20), (1.21) и (1.33), (1.34), (1.35).

Лагранжиан \mathcal{L}_F (3.9) в рамках рассматриваемой модели, так же как и ранее, запишем с учетом зонной структуры системы и явного вида оператора L :

$$\mathcal{L}_F[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}_F^+] = F[\tilde{\psi}] - \sum_J \int_{V_J} d\tilde{r} \tilde{\psi}_{F,J}^+ \times \\ \times \left[-(\tilde{\psi}_{F,J}^+ \nabla \hat{D}_J \nabla \tilde{\psi}_J) + (\tilde{\psi}_{F,J}^+ \cdot \hat{\Sigma}_J \tilde{\psi}_J) - (\tilde{\psi}_{F,J}^+ \bar{q}) \right]. \quad (3.46)$$

Первую вариацию лагранжиана (3.46) в окрестности точных решений $\tilde{\psi}_J$ и $\tilde{\psi}_{F,J}^+$ обусловим непрерывными в пределах зон вариациями $\delta \tilde{\psi}_J$, $\delta \tilde{\psi}_{F,J}^+$ и $\hat{D}_J \nabla \delta \tilde{\psi}_J$, $\hat{D}_J^T \nabla \delta \tilde{\psi}_{F,J}^+$ и, так же как и в случае газокинетической модели нейтронного поля, представим $\delta \mathcal{L}_F$ в форме, содержащей дифференциальный оператор

$$\delta \mathcal{L}_F[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}_F^+] = \sum_J \int_{V_J} dr \left[(\delta \tilde{\psi}_{F,J}^+ \nabla \hat{D}_J \nabla \tilde{\psi}_J) - (\tilde{\psi}_J \cdot \nabla \hat{D}_J^T \nabla \delta \tilde{\psi}_{F,J}^+) \right]. \quad (3.47)$$

Применим к правой части этого равенства формулу Грина для каждого объема V_J , а затем перейдем к интегралам по внешней и внутренней поверхности S и R . Учитывая, что $\tilde{\psi}_F^+$ обращается в ноль на поверхности S и функции $\tilde{\psi}_F^+$ и $\hat{D}_F^T \nabla_{\pi} \tilde{\psi}_F^+$ непрерывна, получим:

$$\delta \mathcal{L}_F[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}_F^+] = - \oint_S dS (\delta \tilde{\psi} \cdot \hat{D}^T \nabla_{\pi} \tilde{\psi}_F^+) - \int_R dS \times \\ \times ((\delta \tilde{\psi}_I - \delta \tilde{\psi}_{II}) \cdot \hat{D}^T \nabla_{\pi} \tilde{\psi}_F^+) - \int_R dS (\tilde{\psi}_F^+ (\hat{D}_{II}^T \nabla_{\pi} \delta \tilde{\psi}_{II} - \hat{D}_I^T \nabla_{\pi} \delta \tilde{\psi}_I)). \quad (3.48)$$

Отсюда следует, что вариационная оценка функционала F с помощью лагранжиана (3.46) возможна, если пробные функции подчиняются главным дополнительным условиям (1.19), (1.20), (1.21). Дополнительные условия (1.33), (1.34), (1.35) являются естественными по отношению к лагранжиану (3.46).

В практике использования группового диффузионного приближения оказывается довольно трудным делом подбор пробных функций, удовлетворяющих условиям непрерывности (1.21) и (1.35). Поэтому желательно иметь лагранжиан, по отношению к которо-

му эти условия были бы естественными. Такой лагранжиан (назовем его $\alpha_F^{(J)}$) можно построить, используя описанную выше процедуру добавления к лагранжиану α_F соответствующих поверхностных интегралов. Здесь мы приведем лишь окончательный результат.

Функционал

$$\alpha_F^{(J)}[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}_F^+] = F[\tilde{\psi}] - \int_V d\vec{r} \left[(\nabla \tilde{\psi}_F^+ \cdot \hat{D} \nabla \tilde{\psi}) + (\tilde{\psi}_F^+ \cdot \hat{\Sigma} \tilde{\psi}) - (\tilde{\psi}_F^+ \cdot \hat{Q}) \right] \quad (3.49)$$

в задаче с внешним источником является лагранжианом нейтронного поля в диффузионно-групповом приближении, по отношению к которому условия непрерывности (1.21), (1.35) проекций векторов токов на направление нормали к поверхности раздела двух зон — естественные, а условия (1.19), (1.20) и (1.33), (1.34) — главные.

Формально лагранжиан $\alpha_F^{(J)}$ получается из α_F заменой в последнем скалярного произведения $-\int d\vec{r} (\tilde{\psi}_F^+ \cdot \nabla \hat{D} \nabla \tilde{\psi})$ на $\int d\vec{r} (\nabla \tilde{\psi}_F^+ \cdot \hat{D} \nabla \tilde{\psi})$. Подставляя в лагранжиан $\alpha_F^{(J)}$ точные решения уравнений (3.45) и используя формулу Грина, убеждаемся, что на точных решениях задачи $\alpha_F^{(J)} = F[\tilde{\psi}]$. В правильности выводов относительно дополнительных условий можно убедиться, рассмотрев первую вариацию $\delta \alpha_F^{(J)}[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}_F^+]$. Аналогичным образом могут быть получены следующие результаты для лагранжианов нейтронного поля в условно-критическом реакторе.

1. Функционал

$$\alpha_X^{(J)}[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}_F^+] = \frac{\int d\vec{r} \left[(\nabla \tilde{\psi}_F^+ \cdot \hat{D} \nabla \tilde{\psi}) + (\tilde{\psi}_F^+ \cdot \hat{\Sigma} \tilde{\psi}) \right]}{\int d\vec{r} (\tilde{\psi}_F^+ \cdot \hat{Q} \tilde{\psi})} \quad (3.50)$$

является лагранжианом асимптотического нейтронного поля в условно-критическом реакторе. На точных решениях уравнений (1.89), (2.47) он определяет эффективный коэффициент размножения нейтронов. Дополнительные условия (1.21) и (1.35) являются по отношению к лагранжиану (3.50) естественными.

2. Функционал

$$\alpha_F^{(J)}\left[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}_F^+, \frac{\tilde{I}}{k_0}\right] = F_{a,b}[\tilde{\psi}] - \int_V d\vec{r} \times \left[(\nabla \tilde{\psi}_F^+ \cdot \hat{D} \nabla \tilde{\psi}) + (\tilde{\psi}_F^+ \cdot \hat{\Sigma} \tilde{\psi}) - \frac{1}{k_0} (\tilde{\psi}_F^+ \cdot \hat{Q} \tilde{\psi}) \right] \quad (3.51)$$

является лагранжианом нейтронного поля в условно-критическом реакторе. На точных решениях уравнений (1.89) и (2.55) он

определяет дробно-линейный функционал $F_{a,b}[\bar{\varphi}]$. Дополнительные условия (1.21) и (1.35) по отношению к этому лагранжиану — естественные.

4. ВАРИАЦИОННАЯ ОЦЕНКА И ФОРМУЛЫ ВОЗМУЩЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ НЕЙТРОННОГО ПОЛЯ

4.1. Вариационный формализм полиномиальной аппроксимации функционалов нейтронного поля

Использование лагранжианов нейтронных полей позволяет развить общий вариационный подход к конструированию на их основе явных полиномиальных зависимостей функционалов от параметров, характеризующих композиционные особенности или состояние системы (концентрации ядер различных элементов, размеры зон системы, температуры среды и т.п.).

Рассмотрим в связи с этим явную зависимость операторов уравнений нейтронного поля от некоторого параметра \tilde{u} ($L=L(\tilde{u})$, $Q=Q(\tilde{u})$), считая, что операторы являются достаточно гладкими функциями этого параметра. Различным значениям параметра будут соответствовать различные условия протекания нейтронно-физических процессов, поэтому от параметра \tilde{u} будут в неявной форме зависеть распределения плотности потока и ценности нейтронов, а также эффективный коэффициент размножения k_0 :

$$\varphi = \varphi(\tilde{u}), \quad \varphi^+ = \varphi^+(\tilde{u}), \quad \frac{1}{k_0} = \lambda_0(\tilde{u}).$$

В дальнейшем будет представлена задача построения явной зависимости функционалов нейтронного поля от параметра \tilde{u} в полиномиальной форме. Систему при $\tilde{u} = u$ будем называть невозмущенной, а систему со значением параметра $\tilde{u} = u + \Delta u$ — возмущенной.

В соответствии с теоремами о неявной функции можно ожидать, что в случае дифференцируемости по \tilde{u} операторов уравнения нейтронного поля $\varphi(\tilde{u})$, $\varphi^+(\tilde{u})$ и $\lambda_0(\tilde{u})$ будут также дифференцируемы. Допустим, что мы умеем рассчитывать производные по \tilde{u} функций φ и φ^+ в точке $\tilde{u} = u$. Представим приближенно функции $\varphi(\tilde{u})$ и $\varphi^+(\tilde{u})$ в возмущенном реакторе конечными степенными рядами по Δu :

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(\tilde{u}) &= \varphi_{(m)}(\tilde{u}) = \sum_{l=0}^m \varphi^{(l)}(\Delta u)^l; \\ \tilde{\varphi}^+(\tilde{u}) &= \varphi^+_{(n)}(\tilde{u}) = \sum_{l=0}^n \varphi^{+(l)}(\Delta u)^l. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Здесь и в дальнейшем величина $Z^{(l)}$ получается действием оператора $\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\tilde{u}^l}$ на функцию $Z(\tilde{u})$ с последующим присвоением результату значения при $\tilde{u} = u$:

$$Z^{(l)} = \frac{1}{l!} \frac{d^{(l)}}{d\tilde{u}^l} Z(\tilde{u}) \Big|_{\tilde{u}=u} .$$

В наших обозначениях $\varphi^{(0)} = \varphi(u)$, $\varphi^{+(0)} = \varphi^+(u)$ — плотность потока и ценность нейтронов в невозмущенном реакторе. Вводя оценку остаточных членов, запишем:

$$\begin{aligned} \varphi_{(m)}(\tilde{u}) &= \varphi(\tilde{u}) + o((\Delta u)^{m+1}), \\ \varphi_{(n)}^+(\tilde{u}) &= \varphi^+(\tilde{u}) + o((\Delta u)^{n+1}), \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $\varphi(\tilde{u})$ и $\varphi^+(\tilde{u})$ — плотность потока и ценность нейтронов в возмущенном реакторе.

Используем теперь метод вариационной оценки интересующего нас функционала F нейтронного поля в возмущенной системе с помощью соответствующего лагранжиана:

$$\mathcal{L}_F [\tilde{\varphi}(\tilde{u}), \tilde{\varphi}^+(\tilde{u}), \tilde{u}] , \quad (4.3)$$

учитывая при записи "аргументов" лагранжиана возможность его неявной (через $\tilde{\varphi}(\tilde{u})$ и $\tilde{\varphi}^+(\tilde{u})$) и явной зависимости от параметра \tilde{u} .

Подставляя в лагранжиан (4.3) пробные функции в форме (4.2), приходим к его выражению, имеющему только явную зависимость от параметра \tilde{u} :

$$\mathcal{L}_F [\varphi_{(m)}(\tilde{u}), \varphi_{(n)}^+(\tilde{u}), \tilde{u}] . \quad (4.4)$$

Рассматривая остаточные члены в (4.2) как величины, определяющие погрешности $o(\epsilon)$ и $o(\epsilon^+)$, вносимые в пробные функции (по сравнению с точными $\varphi(\tilde{u})$ и $\varphi^+(\tilde{u})$), получаем следующую вариационную оценку функционала F на этих пробных функциях:

$$\mathcal{L}_F [\varphi_{(m)}(\tilde{u}), \varphi_{(n)}^+(\tilde{u}), \tilde{u}] = F[\varphi(\tilde{u})] + o((\Delta u)^{m+n+2}) . \quad (4.5)$$

Представим лагранжиан $\mathcal{L}_F [\varphi_{(m)}(\tilde{u}), \varphi_{(n)}^+(\tilde{u}), \tilde{u}]$ рядом Тейлора

$$\mathcal{L}_F [\varphi_{(m)}(\tilde{u}), \varphi_{(n)}^+(\tilde{u}), \tilde{u}] = \sum_{l=0}^{m+n+1} \mathcal{L}_{F, (m, n)}^{(l)} (\Delta u)^l + o((\Delta u)^{m+n+2}) , \quad (4.6)$$

где
$$\mathcal{L}_{F,(m,n)}^{(l)} = \frac{1}{l!} \left. \frac{d^l \mathcal{L}_F[\varphi^{(m)}(\tilde{u}), \varphi^{(n)}(\tilde{u}), \tilde{u}] }{d\tilde{u}^l} \right|_{\tilde{u}=u}$$

Сравнивая равенства (4.5) и (4.6), находим:

$$F[\varphi(\tilde{u})] = \sum_{l=0}^{m+n+1} \mathcal{L}_{F,(m,n)}^{(l)} (\Delta u)^l + O((\Delta u)^{m+n+2}).$$

Отбрасывая остаточный член, приходим к общему виду полиномиальной аппроксимации функционала F в приближении $N = m+n+1$ через посредство лагранжиана \mathcal{L}_F :

$$F_{(N)}[\varphi(\tilde{u})] = \sum_{l=0}^{m+n+1} \mathcal{L}_{F,(m,n)}^{(l)} (\Delta u)^l. \quad (4.7)$$

Если учесть, что

$$\mathcal{L}_{F,(m,n)}^{(0)} = \mathcal{L}_F[\varphi(u), \varphi^+(u), u] = F[\varphi(u)],$$

то равенство (4.7) можно записать в виде формулы возмущений порядка $N = m+n+1$ для оценки изменения функционала F при переходе от невозмущенной к возмущенной системе:

$$\Delta_{(N)} F = F_{(N)}[\varphi(\tilde{u})] - F[\varphi(u)] = \sum_{l=1}^{m+n+1} \mathcal{L}_{F,(m,n)}^{(l)} (\Delta u)^l. \quad (4.8)$$

Равенство (4.8) будем называть обобщенной формулой возмущений порядка N . Частным случаем (4.8) при $m=0$, $n=0$ является так называемая формула малых возмущений (формула возмущений первого порядка).

Для расчета коэффициентов $\mathcal{L}_{F,(m,n)}^{(l)}$ в приближении $m+n+1$ необходимо найти функции $\varphi^{(p)}$ ($p = 0, 1, 2, \dots, m$) и $\varphi^{+(q)}$ ($q = 0, 1, 2, \dots, n$). Уравнения для этих функций получаются последовательным действием оператора $\frac{1}{l!} \frac{d^l}{d\tilde{u}^l}$ ($l = 1, 2, \dots$) на уравнения для плотности потока и ценности нейтронов в возмущенной системе с последующим присвоением параметру \tilde{u} значения u .

Найденные таким образом $\varphi^{(p)}$ и $\varphi^{+(q)}$ позволяют одновременно с аппроксимацией функционала F построить по формулам (4.1) аппроксимации функций плотности потока и ценности нейтронов по параметру \tilde{u} порядка m и n соответственно.

Отличительная особенность формулы (4.7) заключается в том, что она позволяет с помощью функций $\psi_{(m)}(\tilde{u})$ и $\psi_{(n)}^+(\tilde{u})$, имеющих порядки аппроксимации m и n соответственно, получить аппроксимацию функционала порядка $m+n+1$. Эта особенность проявляется в существенном сокращении расчетных затрат на определение коэффициентов аппроксимационных формул, особенно в случае, когда строится многопараметрическая аппроксимация.

Для нахождения линейной аппроксимации достаточно знать плотность потока φ и ценность нейтронов φ^+ в невозмущенной системе.

В общем случае аппроксимация порядка N для рассматриваемого функционала может быть получена при различных m и n . Анализ расчетных алгоритмов показывает, что следует принимать $m \sim n$. В этом случае снижается погрешность, связанная с накоплением ошибки округления при последовательном определении функций $\varphi^{(p)}$ и $\varphi^{(q)}$. В задачах с нелинейным функционалом $F[\varphi]$ функция ценности φ_F^+ неявным образом зависит от φ , что приводит к выбору: $m > n$.

При построении аппроксимаций в виде степенных рядов, естественно, возникает вопрос о радиусе их сходимости. Радиус сходимости в существенной мере зависит от характера функциональной зависимости операторов и функционалов от параметра \tilde{u} . Если эти зависимости — достаточно гладкие функции, то можно ожидать, что приближения низких порядков обеспечат хорошую точность при относительно больших изменениях параметра \tilde{u} . Однако этот вопрос требует специального рассмотрения в каждом конкретном случае.

На практике, как правило, используют приближения низких порядков из-за существенного роста расчетных затрат при переходе к высоким приближениям, особенно в многопараметрических задачах. Поэтому в дальнейшем основное внимание будет уделено приближениям первого и второго порядков.

4.2. Формулы малых возмущений (линейное приближение)

4.2.1. Коэффициенты чувствительности и общие формулы малых возмущений

В задачах реакторной физики наиболее часто используется первое (линейное) приближение при $m=n=0$. Формулы первого

приближения дают хорошие результаты при достаточно малых Δu , поэтому их называют формулами малых возмущений.

В первом приближении используется лагранжиан $\mathcal{L}_\Phi[\varphi(u), \varphi^+(u), \tilde{u}]$, $\Phi = F, K$, где $\varphi(u)$ и $\varphi^+(u)$ — плотность потока и ценность нейтронов в невозмущенной системе.

Введем обозначение:

$$\left. \frac{\partial \mathcal{L}_\Phi[\varphi(u), \varphi^+(u), \tilde{u}]}{\partial \tilde{u}} \right|_{\tilde{u}=u} = \frac{\partial \mathcal{L}_\Phi(u)}{\partial u}, \quad \Phi = F, K.$$

Тогда формулы малых возмущений можно записать следующим образом:

$$\Delta_{(1)} F = \frac{\partial \mathcal{L}_F(u)}{\partial u} \Delta u; \quad \Delta_{(1)} \frac{1}{k_0} = \frac{\partial \mathcal{L}_K(u)}{\partial u} \Delta u. \quad (4.9)$$

Основное достоинство формулы (4.9) заключается в том, что в ней полная производная функционала представлена частной производной от лагранжиана:

$$\frac{dF}{du} = \frac{\partial \mathcal{L}_F(u)}{\partial u}; \quad \frac{d \frac{1}{k_0}}{du} = \frac{\partial \mathcal{L}_K(u)}{\partial u}. \quad (4.10)$$

Таким образом, производная $\frac{\partial \mathcal{L}_F(u)}{\partial u}$ является коэффициентом чувствительности функционала F к изменению параметра u . Большой практический интерес с точки зрения проблемы безопасности ядерных реакторов представляет исследование функционала ρ , определяющего реактивность системы:

$$\rho = \frac{k_0 - 1}{k_0}. \quad (4.11)$$

Коэффициент чувствительности реактивности ρ к параметру u в соответствии с определением (4.11) выражается соотношением

$$\frac{d\rho}{du} = - \frac{d \frac{1}{k_0}}{du}.$$

Величина $\frac{1}{k_0}$ определяется лагранжианом \mathcal{L}_K , поэтому расчетная формула для коэффициента чувствительности реактивности имеет следующий вид:

$$\frac{d\rho}{du} = - \frac{\partial \mathcal{L}_K(u)}{\partial u}. \quad (4.12)$$

Производную $\frac{d\rho}{du}$ обычно называют коэффициентом реактивности, обусловленным изменением параметра u .

В задачах анализа и оптимизации ядерных реакторов часто используются относительные коэффициенты чувствительности $\delta_{F,u} = \frac{1}{F} \frac{dF}{du}$ функционала F к параметру u . В соответствии с формулой малых возмущений коэффициент $\delta_{F,u}$ также может быть выражен через лагранжиан:

$$\delta_{F,u} = \frac{1}{F} \frac{\partial \mathcal{L}_F(u)}{\partial u} \quad (4.13)$$

Широкое применение находят коэффициенты чувствительности в задачах подгонки групповых микроконстант по данным интегральных экспериментов.

В реакторных расчетах часто исследуется одновременное возмущение нескольких параметров u_i ($i = 1, 2, \dots, I$). Тогда формулы малых возмущений для функционалов F и $\frac{1}{k_0}$ определяются выражениями

$$\Delta_{(1)} F = \sum_{i=1}^I \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial u_i} \Delta u_i, \quad \Delta_{(1)} \frac{1}{k_0} = \sum_{i=1}^I \frac{\partial \mathcal{L}_K}{\partial u_i} \Delta u_i.$$

В случае распределенных параметров, когда u_i являются функциями фазовых переменных ($u_i = u_i(x)$), формулы малых возмущений имеют вид

$$\Delta_{(1)} F = \sum_{i=1}^I \int dx \frac{\partial \mathcal{L}_F}{\partial u_i(x)} \Delta u_i(x), \quad \Delta_{(1)} \frac{1}{k_0} = \sum_{i=1}^I \int dx \frac{\partial \mathcal{L}_K}{\partial u_i(x)} \Delta u_i(x).$$

Остановимся на основных достоинствах формул малых возмущений. Во-первых, они позволяют, избегая прямых расчетов полей в возмущенной системе, оценивать очень малые изменения функционалов, для которых прямые расчеты могут привести к большим погрешностям в результате эффекта разности больших чисел, получаемых с ограниченной точностью. Во-вторых, на основе функций плотности потока и ценности нейтронов по отношению к заданному функционалу можно, не прибегая к расчету полей в возмущенных системах, рассчитать в первом приближении возможные изменения функционала F , обусловленные изменением большого многообразия параметров. В этом случае расчетные затраты практически не зависят от числа рассматриваемых

параметров, а определяются, как правило, лишь небольшим количеством исследуемых функционалов, для каждого из которых необходимо находить функцию ценности в невозмущенной системе.

Этими преимуществами и объясняется большая популярность формул малых возмущений среди физиков, занимающихся расчетными исследованиями ядерных реакторов. В дальнейшем будут приведены конкретные формулы малых возмущений в задачах с различными моделями нейтронного поля.

4.2.2. Формулы малых возмущений в задачах с газокинетической моделью нейтронного поля

Пусть $\varphi(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ и $\varphi^+(\bar{r}, E, \bar{\Omega})$ — функции плотности потока и ценности нейтронов в невозмущенной системе. Будем предполагать, что область определения оператора (1.5) уравнения нейтронного поля в возмущенной и невозмущенной системах совпадают. Запишем формулы для коэффициентов чувствительности и формулы малых возмущений в различных типичных задачах.

1. Задача с внешним источником. Объект исследования — нелинейный функционал $F[\varphi, u]$. Используя лагранжиан (3.9), получим:

$$\frac{dF}{du} = \frac{\partial F[\varphi, u]}{\partial u} - \int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi_F^+ \left(\frac{\partial L}{\partial u} \varphi - \frac{\partial q}{\partial u} \right), \quad (4.14)$$

$$\Delta_{(1)} F = \delta F[\varphi, u] - \int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi_F^+ (\delta L \varphi - \delta q). \quad (4.15)$$

Здесь и в дальнейшем через δZ обозначено изменение величины Z , обусловленное изменением свойств среды системы. При записи формулы (4.14) предполагается зависимость источника от параметра u .

2. Условно-критический реактор. Объект исследования — эффективный коэффициент размножения $k_0(u)$. Применяя в формулах (4.10), (4.9) лагранжиан (3.32), находим:

$$\frac{d \frac{1}{k_0}}{du} = \frac{\int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi^+ \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{1}{k_0} \frac{\partial Q}{\partial u} \right) \varphi}{\int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi^+ Q(u) \varphi}, \quad (4.16)$$

$$\Delta_{(1)} \frac{1}{k_0} = \frac{\int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi^+ (\delta L - \frac{1}{k_0} \delta Q) \varphi}{\int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \varphi^+ Q(u) \varphi}. \quad (4.17)$$

3. Условно-критический реактор. Объект исследования — дробно-линейный функционал $F_{a,b}[\varphi, u]$. Используя лагранжиан (3.31), получим:

$$\frac{d\bar{F}_{a,b}}{du} = \frac{\partial F_{a,b}}{\partial u} - \int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \psi^+ \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \frac{1}{k_0} \frac{\partial Q}{\partial u} \right) \psi, \quad (4.18)$$

$$\Delta_{(1)} \bar{F}_{a,b} = \delta F_{a,b} - \int d\bar{r} \int dE \int d\Omega \psi_F^+ \left(\delta L - \frac{1}{k_0} \delta Q \right) \psi. \quad (4.19)$$

В формулах (4.16)-(4.19) $\frac{1}{k_0}$ - параметр невозмущенной системы.

4.2.3. Формулы малых возмущений в задачах с диффузионно-групповой моделью нейтронного поля

Пусть $\bar{\varphi}(\bar{r})$ и $\bar{\varphi}^+(\bar{r})$ - функции плотности потока и ценности нейтронов в невозмущенной системе в групповом диффузионном приближении. Если раньше считалось, что переход к возмущенной системе не меняет область определения операторов, то теперь, находясь в рамках диффузионного приближения, необходимо учесть возможность изменения области определения оператора (1.16), даже в условиях сохранения геометрии системы. Это связано с тем, что в данном случае область определения оператора L характеризуется условием непрерывности (1.21), содержащим коэффициент диффузии среды, который может меняться при переходе к возмущенной системе. Поэтому формулы возмущений в диффузионном приближении, основанные на вариационной оценке функционалов, должны строиться с использованием таких лагранжианов, по отношению к которым условия (1.21), (1.35) были бы естественными. К таковым относятся полученные в разд. 3.5.2 лагранжианы типа $\mathcal{L}(J)$.

Ниже приводятся конкретные формулы для коэффициентов чувствительности и формулы малых возмущений для диффузионно-групповой модели нейтронного поля, построенные на основе лагранжианов $\mathcal{L}(J)$.

1. Задача с внешним источником. Объект исследования - нелинейный функционал F . Применяя в формулах (4.9) и (4.10) лагранжиан (3.49), получаем:

$$\frac{dF}{du} = \frac{\partial F}{\partial u} - \int d\bar{r} \left[(\nabla \bar{\varphi}_F^+ \cdot \frac{\partial \hat{D}}{\partial u} \nabla \bar{\varphi}) + (\bar{\varphi}_F^+ \cdot \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial u} \bar{\varphi}) - (\bar{\varphi}_F^+ \frac{\partial \bar{q}}{\partial u}) \right], \quad (4.20)$$

$$\Delta_{(1)} F = \delta F - \int d\bar{r} \left[(\nabla \bar{\varphi}_F^+ \delta \hat{D} \nabla \bar{\varphi}) + (\bar{\varphi}_F^+ \delta \hat{\Sigma} \bar{\varphi}) - (\bar{\varphi}_F^+ \delta \bar{q}) \right]. \quad (4.21)$$

2. Условно-критический реактор. Объект исследования - параметр k_0 . Используя лагранжиан (3.50), получаем:

$$\frac{d \frac{1}{k_0}}{du} = \frac{\int d\bar{r} \left[(\nabla \bar{\psi}^+ \frac{\partial \hat{D}}{\partial u} \nabla \bar{\psi}) + (\bar{\psi}^+ \frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial u} \bar{\psi}) - \frac{1}{k_0} (\bar{\psi}^+ \frac{\partial \hat{Q}}{\partial u} \bar{\psi}) \right]}{\int d\bar{r} (\bar{\psi}^+ \hat{Q}(u) \bar{\psi})}, \quad (4.22)$$

$$\Delta_{(1)} \frac{1}{k_0} = \frac{\int d\bar{r} \left[(\nabla \bar{\psi}^+ \delta \hat{D} \nabla \bar{\psi}) + (\bar{\psi}^+ \delta \hat{\Sigma} \bar{\psi}) - \frac{1}{k_0} (\bar{\psi}^+ \delta \hat{Q} \bar{\psi}) \right]}{\int d\bar{r} (\bar{\psi}^+ \hat{Q}(u) \bar{\psi})}. \quad (4.23)$$

3. Условно-критический реактор. Объект исследования - дробно-линейный функционал $F_{a,b}$. Применяя в формулах (4.9) и (4.10) лагранжиан (3.51), находим:

$$\frac{dF_{a,b}}{du} = \frac{\partial F_{a,b}}{\partial u} - \int d\bar{r} \left[(\nabla \bar{\psi}_F^+ \frac{\partial \hat{D}}{\partial u} \nabla \bar{\psi}) + (\bar{\psi}_F^+ (\frac{\partial \hat{\Sigma}}{\partial u} - \frac{1}{k_0} \frac{\partial \hat{Q}}{\partial u}) \bar{\psi}) \right], \quad (4.24)$$

$$\Delta_{(1)} F_{a,b} = \delta F_{a,b} - \int d\bar{r} \left[(\nabla \bar{\psi}_F^+ \delta \hat{D} \nabla \bar{\psi}) + (\bar{\psi}_F^+ (\delta \hat{\Sigma} - \frac{1}{k_0} \delta \hat{Q}) \bar{\psi}) \right]. \quad (4.25)$$

4.3. Формулы возмущений второго порядка

Анализ формул возмущений второго порядка позволит, с одной стороны, раскрыть особенности общего вариационного подхода к построению формул возмущений высоких переходов, а с другой - получить конкретные выражения для оценки возмущений типичных функционалов нейтронного поля в квадратичном приближении.

В качестве основных объектов исследований выберем эффективный коэффициент размножения нейтронов и дробно-линейный функционал $F_{a,b}$ в условно-критическом реакторе. Пусть \hat{u} и u - параметры возмущенной и невозмущенной систем. Переход от общих формул (4.8) к формулам возмущений второго порядка ($N=2$) осуществляется путем выбора $\pi=1$, $\pi=0$ в лагранжианах \mathcal{L}_X и \mathcal{L}_F , определяющих параметр $\frac{1}{k_0}$ и функционал $F_{a,b}$ в возмущенной системе:

$$\mathcal{L}_X[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^+] = \mathcal{L}_X[\psi_{(1)}(\tilde{u}), \psi^+(u), \tilde{u}] = \frac{\langle \psi^+(u), L(\tilde{u}) \psi_{(1)}(\tilde{u}) \rangle}{\langle \psi^+(u), Q(\tilde{u}) \psi_{(1)}(\tilde{u}) \rangle}, \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^+, \frac{\hat{1}}{k_0}] &= \mathcal{L}_F[\psi_{(1)}(\tilde{u}), \psi_F^+(u), \tilde{u}] = \\ &= F_{a,b}[\psi_{(1)}(\tilde{u}), \tilde{u}] - \langle \psi_F^+(u), (L(\tilde{u}) - \frac{1}{k_0(u)} Q(\tilde{u})) \psi_{(1)}(\tilde{u}) \rangle. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Здесь $\varphi_{(1)}(\tilde{u}) = \varphi + \varphi^{(1)} \Delta u$ — линейная аппроксимация плотности потока нейтронов в окрестности $\tilde{u} = u$, а φ^+ и φ_F^+ — функции ценности нейтронов, определяемые уравнениями (2.47), (2.55) в невозмущенной системе.

Уравнение для плотности потока нейтронов в возмущенной системе представим в виде

$$L(\tilde{u})\varphi(\tilde{u}) - \lambda_0(\tilde{u})Q(\tilde{u})\varphi(\tilde{u}) = 0, \quad \lambda_0(\tilde{u}) = \frac{1}{k_0(\tilde{u})} \quad (4.28)$$

и будем считать, что области определения операторов этого уравнения и его решения остаются неизменными при любом значении \tilde{u} в окрестности u . В этом случае уравнение для функции $\varphi^{(1)}$ получим, дифференцируя по \tilde{u} уравнение (4.28) возмущенного реактора, положив затем $\tilde{u} = u$. В результате находим:

$$L(u)\varphi^{(1)} - \lambda_0(u)Q(u)\varphi^{(1)} = -(L^{(1)} - \lambda_0 Q^{(1)})\varphi + \lambda^{(1)}Q(u)\varphi, \quad (4.29)$$

где φ — плотность потока нейтронов в невозмущенной системе.

Величина $\lambda^{(1)}$ в правой части уравнения (4.29) определяет коэффициент чувствительности $\frac{d}{du} \frac{1}{k_0(u)}$ и, в соответствии с (4.16), выражается равенством

$$\lambda_0^{(1)} = \frac{\langle \varphi^+, (L^{(1)} - \lambda_0(u)Q^{(1)})\varphi \rangle}{\langle \varphi^+, Q(u)\varphi \rangle} \quad (4.30)$$

Поэтому правая часть уравнения (4.29) ортогональна φ^+ и оно имеет единственное решение на множестве функций $d(u)$, удовлетворяющих условию ортогональности

$$\langle \varphi^+, Q\varphi^{(1)} \rangle = 0 \quad (4.31)$$

Формула возмущений второго порядка для параметра $\lambda_0 = \frac{1}{k_0}$ имеет следующий вид:

$$\Delta_{(2)} \frac{1}{k_0} = \mathcal{L}_X^{(1)} \Delta u + \mathcal{L}_X^{(2)} (\Delta u)^2 \quad (4.32)$$

Взяв производную лагранжиана (4.26) по \tilde{u} при $\tilde{u} = u$ и учитывая уравнение (4.29) совместно с условием ортогональности (4.31) для функции $\varphi^{(1)}$, находим: $\mathcal{L}_X^{(1)} = \lambda_0^{(1)}$.

В дальнейшем для сокращения записи результатов введем оператор $T_{\lambda_0}(\tilde{u}) = L(\tilde{u}) - \lambda_0(u)Q(\tilde{u})$. В новых обозначениях $\mathcal{L}_X^{(1)}$ выражается равенством

$$\mathcal{L}_X^{(1)} = \frac{\langle \varphi^+, T_{\lambda_0}^{(1)} \varphi \rangle}{\langle \varphi^+, Q\varphi \rangle} \quad (4.33)$$

Взяв вторую производную лагранжиана (4.26) по \tilde{u} при $\tilde{u} = u$, получим:

$$\mathcal{L}_K^{(2)} = \frac{\langle \psi^+, T_{\lambda_0}^{(2)} \psi \rangle + \langle \psi^+, T_{\lambda_0}^{(1)} \psi^{(1)} \rangle - \lambda^{(1)} \langle \psi^+, Q^{(1)} \psi \rangle}{\langle \psi^+, Q(u) \psi \rangle} \quad (4.34)$$

Формула возмущений второго порядка при $m=1$, $n=0$ для дробно-линейного функционала $F_{a,b}$ нейтронного поля условно-критического реактора представляется суммой

$$\Delta_{(2)} F_{a,b} = \alpha_F^{(1)} \Delta u + \mathcal{L}_F^{(2)} (\Delta u)^2, \quad (4.35)$$

где $\mathcal{L}_F^{(1)}$ по аналогии с (4.18) определяется выражением

$$\mathcal{L}_F^{(1)} = \frac{\partial F_{a,b}}{\partial u} - \langle \psi_F^+, T_{\lambda_0}^{(1)} \psi \rangle. \quad (4.36)$$

Взяв вторую производную лагранжиана (4.27) по \tilde{u} при $\tilde{u} = u$ находим:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_F^{(2)} = & \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_{a,b}[\psi^{(1)}, u]}{\partial u^2} - [\langle \psi_F^+, T_{\lambda_0}^{(2)} \psi \rangle + \langle \psi_F^+, T_{\lambda_0}^{(1)} \psi^{(1)} \rangle - \\ & - \lambda_0(u) \langle \psi_F^+, Q^{(1)} \psi^{(1)} \rangle - \lambda_0^{(1)} \langle \psi_F^+, Q^{(1)} \psi \rangle]. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Приведем явный вид производных $\frac{\partial F_{a,b}}{\partial u}$ и $\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}$ для дробно-линейного функционала, в котором $a = a(u)$, $b = b(u)$:

$$\frac{\partial F_{a,b}}{\partial u} = F_{a,b} \left[\frac{\langle a^{(1)} \psi \rangle + \langle a, \psi^{(1)} \rangle}{\langle a, \psi \rangle} - \frac{\langle b^{(1)} \psi \rangle + \langle b, \psi^{(1)} \rangle}{\langle b, \psi \rangle} \right], \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_{a,b}}{\partial u^2} = & F_{a,b} \left[\frac{\langle a^{(2)} \psi \rangle + \langle a^{(1)} \psi^{(1)} \rangle}{\langle a, \psi \rangle} - \frac{\langle b^{(2)} \psi \rangle + \langle b^{(1)} \psi^{(1)} \rangle}{\langle b, \psi \rangle} \right] - \\ & - \frac{\partial F_{a,b}}{\partial u} \cdot \frac{\langle b^{(1)} \psi \rangle + \langle b, \psi^{(1)} \rangle}{\langle b, \psi \rangle}. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Полученные выражения легко записать в виде рабочих формул для газокINETической модели нейтронного поля.

Если рассматривается групповое диффузионное приближение, то необходимо в качестве лагранжианов \mathcal{L}_F и \mathcal{L}_K использовать лагранжианы $\mathcal{L}_F^{(j)}$ и $\mathcal{L}_K^{(j)}$, определенные равенствами (3.50) и (3.49), так как при возмущении системы может меняться коэффициент диффузии и возмущенная функция плотности потока ней-

тронов $\bar{\varphi}^{(1)}(\bar{r})$ уже не будет принадлежать области определения дифференциального оператора для невозмущенной системы.

Уравнение

$$\begin{aligned} & -\nabla \hat{D} \nabla \bar{\varphi}^{(1)}(\bar{r}) + \hat{\Sigma} \bar{\varphi}^{(1)}(\bar{r}) - \lambda_0^{(1)} \hat{Q} \bar{\varphi}^{(1)}(\bar{r}) = \\ & = \nabla \hat{D}^{(1)} \nabla \bar{\varphi}(\bar{r}) - \hat{\Sigma}^{(1)} \bar{\varphi}(\bar{r}) + \lambda_0 \hat{Q}^{(1)} \bar{\varphi}(\bar{r}) + \lambda_0^{(1)} \hat{Q} \bar{\varphi}(\bar{r}), \end{aligned} \quad (4.40)$$

где \hat{D} , $\hat{\Sigma}$, \hat{Q} - матрицы, относящиеся к невозмущенной системе, представляет векторно-матричную форму уравнения (4.29) относительно функции $\bar{\varphi}^{(1)}(\bar{r})$ в групповом диффузионном приближении.

Дополнительные условия для функции $\bar{\varphi}^{(1)}(\bar{r})$ получаются дифференцированием равенств (1.19), (1.20) и (1.21) по \tilde{u} при $\tilde{u} = u$ и имеют следующий вид:

$$\bar{\varphi}^{(1)}(\bar{r}_S) = 0, \quad (4.41)$$

$$\bar{\varphi}_I^{(1)}(\bar{r}_R) = \bar{\varphi}_{II}^{(1)}(\bar{r}_R), \quad (4.42)$$

$$\hat{D}_I \nabla_m \bar{\varphi}^{(1)}(\bar{r}_R) - \hat{D}_{II} \nabla_m \bar{\varphi}^{(1)}(\bar{r}_R) = \hat{D}_0^{(1)} \nabla_m \bar{\varphi}_{II}(\bar{r}_R) - \hat{D}_I^{(1)} \nabla \bar{\varphi}_I(\bar{r}_R). \quad (4.43)$$

Из (4.43) следует, что уравнение (4.40) должно решаться в условиях разрывности функции $\hat{D} \nabla_m \bar{\varphi}^{(1)}(\bar{r})$ на границе раздела двух зон с разными свойствами.

Рассмотрим вопрос о существовании решения уравнения (4.40) с дополнительными условиями (4.41), (4.42) и (4.43). Обозначим через \bar{q}_I правую часть уравнения (4.40) в зоне I, через \bar{q}_{II} - правую часть уравнения (4.40) в зоне II и через \bar{q}_R - правую часть равенства (4.43). Если отбросить правые части, то образуются уравнения, имеющие ненулевое решение, так как $\lambda_0 = \frac{1}{k_0}$ - собственное число соответствующей однородной задачи.

Согласно альтернативе Фредгольма, решение неоднородного уравнения (4.40) при неоднородном дополнительном условии (4.43) будет в рассматриваемой ситуации существовать, если имеет место следующее условие ортогональности:

$$\int_{V_I} d\bar{r} \bar{\varphi}_I^+(\bar{r}) \bar{q}_I(\bar{r}) + \int_{V_{II}} d\bar{r} \bar{\varphi}_{II}^+(\bar{r}) \bar{q}_{II}(\bar{r}) + \int_R d\bar{r} \bar{\varphi}_R^+(\bar{r}) \bar{q}_R(\bar{r}) = 0, \quad (4.44)$$

где $\bar{\varphi}^+(\bar{r})$ - решение сопряженной однородной задачи (асимптотическая ценность нейтронов).

Покажем, что это условие выполняется. Если подставить в равенство (4.44) выражения для $\bar{q}_I(\bar{r})$, $\bar{q}_{II}(\bar{r})$ и $\bar{q}_R(\bar{r})$ и прове-

сти преобразование объемных интегралов, содержащих операторы $\nabla \hat{D}^{(1)} \nabla, \nabla \hat{D} \nabla$ с помощью формулы Грина, то поверхностные интегралы исчезнут и мы придем к равенству

$$\int_V d\vec{r} \left[(\nabla \bar{\varphi} + \hat{D}^{(1)} \nabla \bar{\varphi}) + (\bar{\varphi} + \hat{\Sigma}^{(1)} \bar{\varphi}) - \lambda_0 (\bar{\varphi} + \hat{Q}^{(1)} \bar{\varphi}) \right] - \lambda_0^{(1)} \int_V d\vec{r} (\bar{\varphi} + \hat{Q} \bar{\varphi}) = 0.$$

В справедливости последнего равенства легко убедиться, если учесть, что $\lambda_0^{(1)}$ в нем определяется выражением (4.22).

Решение уравнения (4.40) единственно на множестве функций, удовлетворяющих условию ортогональности

$$\int_V d\vec{r} (\bar{\varphi}^{(1)} \hat{Q} + \bar{\varphi} +) = 0. \quad (4.45)$$

4.4. Формулы малых возмущений для коэффициентов реактивности

При исследованиях ядерных реакторов наряду с расчетом коэффициентов реактивности важно уметь решать задачу об определении зависимости этих коэффициентов от состояния системы. Такая задача ставится следующим образом. Пусть состояние системы характеризуется параметрами \tilde{u} и \tilde{w} , от которых явно зависят операторы $L(\tilde{u}, \tilde{w})$ и $Q(\tilde{u}, \tilde{w})$ уравнений нейтронного поля в условно-критическом реакторе и неявным — функции $\varphi(\tilde{u}, \tilde{w})$ и $\varphi^*(\tilde{u}, \tilde{w})$ плотности потока и ценности нейтронов, а также реактивность системы $\rho(\tilde{u}, \tilde{w})$. Допустим, что определен коэффициент реактивности $d\rho/du$, обусловленный изменением параметра u для невозмущенной системы ($\tilde{u} = u, \tilde{w} = w$). Требуется найти в линейном приближении изменение коэффициента реактивности при изменении параметра \tilde{w} , т.е. представить его в виде

$$\frac{d\rho(u, \tilde{w})}{d\tilde{w}} = \frac{d\rho(u, w)}{dw} + \frac{d^2\rho(u, w)}{dw du} \Delta w, \quad (4.46)$$

определив коэффициент чувствительности коэффициента реактивности к изменению параметра w :

$$\frac{d^2\rho(u, w)}{dw du} = - \frac{d}{dw} \frac{d \frac{1}{k_0}}{du}. \quad (4.47)$$

Рассмотрим вариационный метод решения поставленной задачи на основе лагранжиана \mathcal{L}_X , определяющего собственное число системы $\lambda_0 = \frac{1}{k_0}$. В качестве исходной примем невозмущен-

ную систему с параметрами $\tilde{u} = u$, $\tilde{w} = w$. Пусть произведено достаточно малое изменение Δu параметра u . Лагранжиан возмущенной таким образом системы равен собственному числу $\lambda_0(\tilde{u}, w)$:

$$\mathcal{L}_X[\varphi(\tilde{u}, w), \varphi^+(\tilde{u}, w), \tilde{u}, w] = \lambda_0(\tilde{u}, w). \quad (4.48)$$

С точностью до величины порядка $(\Delta u)^4$ число $\lambda_0(\tilde{u}, w)$ может быть оценено с помощью пробных функций:

$$\tilde{\varphi}(u, w) = \varphi + \varphi^{(1)} \Delta u, \quad \tilde{\varphi}^+(u, w) = \varphi^+ + \varphi^{+(1)} \Delta u, \quad (4.49)$$

где φ и φ^+ — функции плотности потока и ценности нейтронов в невозмущенной системе.

Уравнения для функций

$$\varphi^{(1)} = \frac{d\varphi(u, w)}{du}, \quad \varphi^{+(1)} = \frac{d\varphi^+(u, w)}{du} \quad (4.50)$$

получаются дифференцированием по \tilde{u} уравнений (1.89) и (2.47) для функций плотности потока и ценности нейтронов в возмущенной системе при $\tilde{u} = u$:

$$L\varphi^{(1)} - \lambda_0 Q\varphi^{(1)} = -(L^{(1,0)} - \lambda_0 Q^{(1,0)})\varphi + \lambda_0^{(1)} Q\varphi, \quad (4.51)$$

$$L^+\varphi^{+(1)} - \lambda_0 Q^+\varphi^{+(1)} = -(L^{+(1,0)} - \lambda_0 Q^{+(1,0)})\varphi^+ + \lambda_0^{(1)} Q^+\varphi^+. \quad (4.52)$$

Здесь использованы обозначения

$$T^{(1,0)} = \left. \frac{dT(\tilde{u}, w)}{d\tilde{u}} \right|_{\tilde{u}=u}, \quad T = L, Q. \quad (4.53)$$

В то же время, если произвести также возмущение параметра w , то лагранжиан

$$\mathcal{L}_X[\tilde{\varphi}(\tilde{u}, w), \tilde{\varphi}^+(\tilde{u}, w), \tilde{u}, \tilde{w}] \quad (4.54)$$

позволит оценить с точностью до величины порядка $(\Delta w)^2$ по параметру w собственное число $\lambda_0(\tilde{u}, \tilde{w})$ такой возмущенной системы.

Дважды дифференцируя лагранжиан (4.54) в форме (3.32) по \tilde{u} и \tilde{w} при $\tilde{u} = u$ и $\tilde{w} = w$, получим формулу для расчета коэффициента чувствительности к параметру w

$$\rho^{(1,1)} = \left. \frac{d}{d\tilde{w}} \frac{d\rho(\tilde{u}, \tilde{w})}{d\tilde{u}} \right|_{\substack{\tilde{u}=u \\ \tilde{w}=w}}$$

$$\rho^{(1,1)} = \frac{\langle \varphi^+, (L^{(1,1)} - \lambda_0 Q^{(1,1)}) \varphi \rangle - \langle \varphi^{+(1)} / (L^{(0,1)} - \lambda_0 Q^{(0,1)}) \varphi \rangle - \langle \varphi^{(1)} / (L^{+(0,1)} - \lambda_0 Q^{+(0,1)}) \varphi^+ \rangle}{\langle \varphi^+, Q \varphi \rangle} \quad (4.55)$$

В формуле (4.55) введены обозначения:

$$T^{(1,1)} = \left. \frac{\partial^2 T(\tilde{u}, \tilde{w})}{\partial \tilde{u} \partial \tilde{w}} \right|_{\substack{\tilde{u}=u \\ \tilde{w}=w}} ; \quad T^{(0,1)} = \left. \frac{\partial T(\tilde{u}, \tilde{w})}{\partial \tilde{w}} \right|_{\substack{\tilde{u}=u \\ \tilde{w}=w}} ; \quad T = L, Q.$$

Итак, чтобы найти для исследуемой системы коэффициент чувствительности коэффициента реактивности к изменению параметра w , необходимо решить следующие задачи.

1. Решить уравнения (1.89) и (2.47) и найти распределения плотности потока φ и ценности φ^+ , а также параметр λ_0 в невозмущенной системе.

2. Решить уравнения (4.51) и (4.52) и определить функции чувствительности $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{+(1)}$ распределений φ и φ^+ к изменению параметра u , определяющего изучаемый коэффициент реактивности.

3. Рассчитать $\rho^{(1,1)}$ по формуле (4.55), используя явную зависимость операторов уравнений нейтронного поля от параметров u и w .

Важно подчеркнуть, что параметр u в рассматриваемой задаче фиксирован. Переход от u к другому параметру приведет к анализу нового коэффициента реактивности и в связи с этим потребуются расчет новых функций $\varphi^{(1)}$ и $\varphi^{+(1)}$. В то же время параметр w свободный в том смысле, что он может представлять некоторую совокупность параметров. Расчет коэффициентов чувствительности может быть проведен для любого параметра из этой совокупности без пересчета функций чувствительности. Требуется лишь знание аналитической зависимости операторов уравнений нейтронного поля от параметров. В этом и заключаются основные достоинства формулы (4.55), впервые полученной Л.Н. Усачевым и С.М. Зарицким.

Отметим, что рассмотренный метод может применяться к анализу вторых смешанных производных любого интересующего нас функционала. Для этого необходимо только воспользоваться соответствующим этому функционалу лагранжианом нейтронного поля.

Перейдем теперь к вопросам практической реализации формулы (4.55). Ее можно непосредственно использовать в условиях газокинетической модели нейтронного поля, так как в этом случае операторы уравнений поля в возмущенной и невозмущенной си-

стемах определены на одном и том же множестве функций, если при возмущении не изменяется геометрия системы.

В диффузионно-групповой модели нейтронного поля необходимо использовать лагранжианы типа $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}^{(J)}$ (см. (3.50)), учитывая разрывность функций $\hat{D} \nabla_m \bar{\varphi}^{(1)}$ и $\hat{D}^T \nabla_m \bar{\varphi}^{+(1)}$ на внутренней границе R радиуса двух зон. Уравнение для функции $\bar{\varphi}^{(1)}(\bar{r})$ совместно с дополнительными условиями (4.41), (4.42) и (4.43) уже рассмотрено в п. 4.3. Уравнение

$$\begin{aligned} & -\nabla \hat{D}^T \nabla \bar{\varphi}^{+(1)} + \hat{\Sigma}^T \bar{\varphi}^{+(1)} - \lambda_0 \hat{Q}^T \bar{\varphi}^{+(1)} = \\ & = (\nabla \hat{D}^{(1)T} \nabla - \hat{\Sigma}^{(1)T} + \lambda_0 \hat{Q}^{(1)T}) \bar{\varphi}^{+(1)} + \lambda_0^{(1)} \hat{Q}^T \bar{\varphi}^{+(1)} \end{aligned} \quad (4.56)$$

определяет функцию $\bar{\varphi}^{+(1)}$ в групповом диффузионном приближении при дополнительных условиях

$$\bar{\varphi}^{+(1)}(\bar{r}_S) = 0, \quad (4.57)$$

$$\bar{\varphi}_I^{+(1)}(\bar{r}_R) = \bar{\varphi}_{II}^{+(1)}(\bar{r}_R), \quad (4.58)$$

$$\hat{D}_I^T \nabla_m \bar{\varphi}_I^{+(1)}(\bar{r}_R) - \hat{D}_{II}^T \nabla_m \bar{\varphi}_{II}^{+(1)}(\bar{r}_R) = \hat{D}_{II}^{(1)T} \nabla_m \bar{\varphi}_{II}^{+(1)}(\bar{r}_R) - \hat{D}_I^{(1)T} \nabla_m \bar{\varphi}_I^{+(1)}(\bar{r}_R). \quad (4.59)$$

Единственное решение уравнения (4.56) принадлежит множеству функций, удовлетворяющих условию ортогональности

$$\int d\bar{r} (\bar{\varphi}^{+(1)}, \hat{Q} \bar{\varphi}) = 0. \quad (4.60)$$

И, наконец, запишем формулу $\rho^{(1,1)}$ в диффузионно-групповом приближении, полученную на основе лагранжиана $\mathcal{L}_{\mathcal{X}}^J$:

$$\begin{aligned} \rho^{(1,1)} = & -\frac{1}{\langle \bar{\varphi}^+, \hat{Q} \bar{\varphi} \rangle} \int d\bar{r} \left\{ [(\nabla \bar{\varphi}^+ \hat{D}^{(1,1)} \nabla \bar{\varphi}) + (\bar{\varphi}^+ (\hat{\Sigma}^{(1,1)} - \lambda_0 \hat{Q}^{(1,1)}) \bar{\varphi})] - \right. \\ & - [(\nabla \bar{\varphi}^{+(1)} \hat{D}^{(0,1)} \nabla \bar{\varphi}) + (\bar{\varphi}^{+(1)} (\hat{\Sigma}^{(0,1)} - \lambda_0 \hat{Q}^{(0,1)}) \bar{\varphi})] - \\ & \left. - [(\nabla \bar{\varphi}^+ \hat{D}^{(0,1)} \nabla \bar{\varphi}^{(1)}) + (\bar{\varphi}^+ (\hat{\Sigma}^{(0,1)} - \lambda_0 \hat{Q}^{(0,1)}) \bar{\varphi}^{(1)})] \right\}. \end{aligned} \quad (4.61)$$

4.5. Возмущение размеров зон реактора

В уравнения нейтронного поля с дифференциальными операторами не входят в явном виде параметры, определяющие размеры реактора и его отдельных зон. В связи с этим конструирование формул возмущений различных функционалов нейтронного поля, обусловленных изменением размеров (объемов) зон реактора, требует специального подхода.

Проиллюстрируем основные особенности этого подхода на примере одномерного, симметричного, двухзонного реактора, используя групповое диффузионное приближение для описания нейтронного поля.

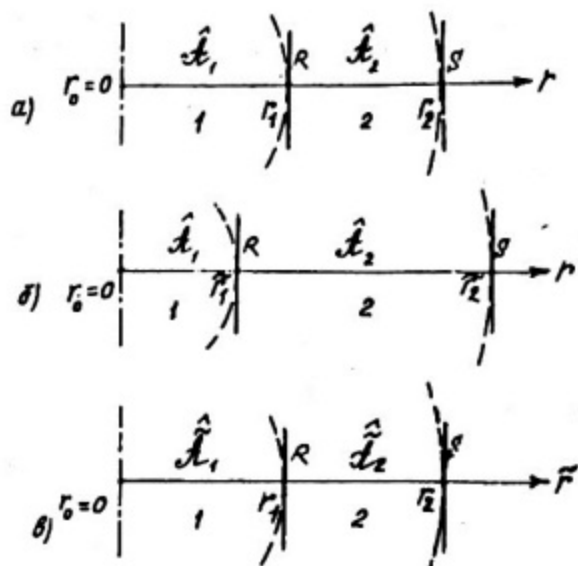


Рис. 4.1. Двухзонная, одномерная, симметричная система: а - невозмущенный реактор; б - реактор с возмущенными размерами зон; в - эквивалентный возмущенный реактор

На рис. 4.1,а представлен невозмущенный реактор, симметричный относительно $r = r_0 = 0$, с границей R раздела двух зон (1,2) при $r = r_1$. Через r_2 обозначено положение внешней границы S системы с вакуумом, а через $\hat{A}_{1,2}$ - совокупность матриц \hat{D} , $\hat{\Sigma}$, \hat{Q} , характеризующих макроскопические свойства среды в зонах 1 и 2 соответственно.

Будем считать, что реактор может иметь любую из трех форм: плоскую (R и S - бесконечные плоские границы), сферическую (R и S - сферические поверхности), цилиндрическую (R и S - бесконечные по высоте цилиндрические поверхности). На рис. 4.1 криволинейные границы показаны пунктиром. Вариационный вывод формул возмущений функционалов в случае возмущения размеров зон рассматриваемой системы получим на примере лагранжиана $\mathcal{L}_X^{(j)}$, определяющего эффективный коэффициент размножения нейтронов. Лагранжиан $\mathcal{L}_X^{(j)}$ (3.50) представим в невозмущенной системе, используя входящие в него интегралы по объему системы суммой интегралов по объемам выделенных зон:

$$\mathcal{L}_X^{(j)}[\hat{\psi}, \hat{\psi}^+] = \frac{\sum_{j=1}^2 \int_{r_{j-1}}^{r_j} dr r^{\nu} [(\nabla \hat{\psi}_j^+ \hat{D}_j \nabla \hat{\psi}_j) + (\hat{\psi}_j^+ \hat{\Sigma}_j \hat{\psi}_j)]}{\sum_{j=1}^2 \int_{r_{j-1}}^{r_j} dr r^{\nu} (\hat{\psi}_j^+ \hat{Q}_j \hat{\psi}_j)} \quad (4.62)$$

Различным значениям целочисленного параметра ν соответствуют плоская, цилиндрическая и сферическая геометрия реактора ($\nu = 0, 1$ и 2 соответственно).

Реактор с возмущенными размерами зон (в условиях сохранения свойств зон и формы границ) представлен на рис. 4.1,б, где через \tilde{r}_1 и \tilde{r}_2 обозначены новые координаты границ R и S при "неподвижной" точке симметрии $r = r_0 = 0$.

Обозначим через $\tilde{\psi}(\tilde{r})$ и $\tilde{\psi}^+$ асимптотическую плотность потока и ценность нейтронов в возмущенном реакторе. Тогда для возмущенной системы лагранжиан $\mathcal{L}_X^{(\nu)}$ может быть представлен в виде

$$\mathcal{L}_X^{(\nu)}[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^+] = \frac{\sum_{j=1}^2 \int_{\tilde{r}_{j-1}}^{\tilde{r}_j} dr r^\nu [(\nabla \tilde{\psi}_j^+ \hat{D}_j \nabla \tilde{\psi}_j) + (\tilde{\psi}_j^+ \hat{\Sigma}_j \tilde{\psi}_j)]}{\sum_{j=1}^2 \int_{\tilde{r}_{j-1}}^{\tilde{r}_j} dr r^\nu (\tilde{\psi}^+ \hat{Q} \tilde{\psi})} \quad (4.63)$$

С помощью простейшего линейного преобразования координат вида

$$r = a + b\tilde{r} \quad (4.64)$$

осуществим отображение зон возмущенного реактора в соответствующие зоны невозмущенного реактора, выбрав коэффициенты a и b из условий:

$$\begin{aligned} \text{при } r = \tilde{r}_1 & \quad \tilde{r} = r_1 ; \\ \text{при } r = \tilde{r}_2 & \quad \tilde{r} = r_2 . \end{aligned}$$

Тогда формула преобразования (4.64) в каждой зоне j будет иметь следующий вид:

$$r = \frac{\tilde{r}_j - \tilde{r}_{j-1}}{r_j - r_{j-1}} (\tilde{r} - r_{j-1}) + r_{j-1} \quad , \quad j = 1, 2 \quad (4.65)$$

В результате указанных преобразований приходим к лагранжиану

$$\mathcal{L}_X^{(\nu)}[\tilde{\psi}, \tilde{\psi}^+, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2] = \frac{\sum_{j=1}^2 \int_{\tilde{r}_{j-1}}^{\tilde{r}_j} d\tilde{r} \tilde{r}^\nu [(\nabla \tilde{\psi}_j^+ \hat{D}_j \nabla \tilde{\psi}_j) + (\tilde{\psi}_j^+ \hat{\Sigma}_j \tilde{\psi}_j)]}{\sum_{j=1}^2 \int_{\tilde{r}_{j-1}}^{\tilde{r}_j} d\tilde{r} \tilde{r}^\nu (\tilde{\psi}_j^+ \hat{Q}_j \tilde{\psi}_j)} \quad , \quad (4.66)$$

где элементы dr и $d\tilde{r}$ и элементы объемов $r^\nu dr$ и $\tilde{r}^\nu d\tilde{r}$ связаны соотношениями

$$dr = \frac{\tilde{r}_j - \tilde{r}_{j-1}}{r_j - r_{j-1}} d\tilde{r}, \quad r^\nu dr = \Psi_j(\tilde{r}) \tilde{r}^\nu d\tilde{r}$$

при

$$\Psi_j(\tilde{r}) = \frac{1}{\tilde{r}^\nu} \left[\frac{\tilde{r}_j - \tilde{r}_{j-1}}{r_j - r_{j-1}} (\tilde{r} - r_{j-1}) + \tilde{r}_{j-1} \right]^\nu \frac{(\tilde{r}_j - \tilde{r}_{j-1})}{(r_j - r_{j-1})} \quad (4.67)$$

Аргументы функций $\tilde{\psi}$ и $\tilde{\psi}^+$ в (4.66) определены в каждой зоне равенством (4.65), а для матриц \hat{D}_j , $\hat{\Sigma}_j$ и \hat{Q}_j имеют место следующие выражения:

$$\begin{aligned} \hat{D}_j &= \hat{D}_j \Psi_j(\tilde{r}) \left(\frac{r_j - r_{j-1}}{\tilde{r}_j - \tilde{r}_{j-1}} \right)^2, \\ \hat{\Sigma}_j &= \hat{\Sigma}_j \Psi_j(\tilde{r}), \\ \hat{Q}_j &= \hat{Q}_j \Psi_j(\tilde{r}). \end{aligned} \quad (4.68)$$

Отметим, что появление множителя $\left(\frac{r_j - r_{j-1}}{\tilde{r}_j - \tilde{r}_{j-1}} \right)^2$ в \hat{D}_j обусловлено преобразованием оператора ∇ :

$$\nabla \Psi_j(r) = \frac{d}{dr} \Psi_j = \frac{d\Psi_j}{d\tilde{r}} \frac{d\tilde{r}}{dr} = \frac{d\Psi_j}{d\tilde{r}} \frac{r_j - r_{j-1}}{\tilde{r}_j - \tilde{r}_{j-1}}.$$

Значение лагранжиана (4.63) в возмущенном реакторе остается неизменным при его преобразовании к виду (4.66), поэтому (4.66) можно рассматривать как лагранжиан реактора, эквивалентного возмущенному реактору (в смысле сохранения эффективного коэффициента размножения нейтронов), размеры которого приведены к размерам невозмущенной системы. Эквивалентный реактор представлен на рис. 4.1, в. Из (4.66) следует, что переход к эквивалентному реактору осуществляется путем изменения свойств зон реактора в соответствии с равенствами (4.68). При $\tilde{r}_j = r_j$ ($j = 0, 1, 2$) лагранжиан (4.66) приобретает форму (4.62), соответствующую невозмущенному реактору. Проведенные преобразования привели к явной зависимости операторов, входящих в подынтегральные выражения в формуле (4.66), от размеров зон, характеризуемых параметрами \tilde{r}_1 и \tilde{r}_2 . Это позволяет использовать лагранжиан (4.66) для вариационной оценки изменения эффективного коэффициента размножения нейтронов при изменении размеров зон реактора.

Так, воспользовавшись формулой (4.12), можно найти коэффициенты чувствительности реактивности реактора к изменениям параметров \tilde{r}_1 и \tilde{r}_2 :

$$\frac{d\rho}{dr_j} = \frac{\partial \alpha_F^{(j)}[\bar{\varphi}, \bar{\varphi}^+, \tilde{r}_1, \tilde{r}_2]}{\partial \tilde{r}_j} \bigg|_{\tilde{r}_j = r_j}, \quad j = 1, 2, \quad (4.69)$$

где $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}^+$ - асимптотическая плотность потока и ценность нейтронов в невозмущенном реакторе.

Если возмущенный эквивалентный реактор рассматривать по отношению к невозмущенному как реактор, в котором произведено изменение материальных свойств его зон, то используя формулу (4.23) можно получить оценку изменения эффективного коэффициента размножения нейтронов при изменении размеров зон реактора, приняв в (4.23)

$$\delta \hat{D}_j = \hat{D}_j - \bar{D}_j; \quad \delta \hat{\Sigma}_j = \hat{\Sigma}_j - \bar{\Sigma}_j; \quad \delta \hat{Q}_j = \hat{Q}_j - \bar{Q}_j.$$

Рассмотренный выше на примере функционала $\frac{1}{k_0}$ метод построения формул для коэффициентов чувствительности и малых возмущений, вызванных изменением размера зон реактора, без особых трудностей распространяется на случай, когда в качестве объекта исследования принимается, например, дробно-линейный функционал $\tilde{r}_{a,b}$, определяемый лагранжианом $\mathcal{L}_F^{(j)}$ (3.51).

4.6. Возмущение граничных условий

До сих пор на внешней границе S системы рассматривались однородные условия для плотности потока нейтронов. При анализе систем с нейтронными полями в рамках диффузионно-групповой модели помимо условий Дирихле используются однородные условия Неймана (в случае расчета ячеек) либо смешанное условие, которое мы запишем в общей форме:

$$\hat{D}(\bar{r}_S) \nabla_n \bar{\varphi}(\bar{r}_S) + \hat{Y}(\bar{r}_S) \bar{\varphi}(\bar{r}_S) = 0, \quad (4.70)$$

где \hat{D} - матричный коэффициент диффузии приграничной среды, а матрица \hat{Y} считается априорно заданной. Если, например, рассматриваемая нами система окружена отражателем нейтронов, то равенство (4.70) можно рассматривать как эффективное граничное условие, позволяющее, не рассматривая отражателя, правильно описать нейтронное поле в системе. Эффективное граничное условие типа (4.70) ставится также на поверхности стержня-поглотителя нейтронов.

Не останавливаясь на вопросах определения матрицы $\hat{\gamma}$ эффективного граничного условия, построим формулы малых возмущений, позволяющие оценивать изменения функционалов нейтронного поля в системе при изменении матрицы $\hat{\gamma}$. В связи с этим необходимо построить такие лагранжианы нейтронного поля, по отношению к которым условие (4.70) было бы естественным.

Сделаем это на примере лагранжиана $\mathcal{L}_{\chi}^{(j)}$, определяющего эффективный коэффициент размножения нейтронов. Пусть $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}^+$ — некоторые решения уравнений для асимптотической плотности потока и ценности нейтронов. Тогда первая вариация лагранжиана $\mathcal{L}_{\chi}^{(j)}$ (3.50) в окрестности этих решений может быть представлена в виде

$$\delta \mathcal{L}_{\chi}^{(j)}[\bar{\varphi}, \bar{\varphi}^+] = \frac{\oint_S dS [(\delta \bar{\varphi}^+ \cdot \hat{D} \nabla_n \bar{\varphi}) + (\delta \bar{\varphi} \cdot \hat{D}^T \nabla_n \bar{\varphi}^+)]}{\int_V d\bar{r} (\bar{\varphi}^+ \cdot \hat{Q} \bar{\varphi})} \quad (4.71)$$

Вариация (4.71) обращается в ноль при произвольных $\delta \bar{\varphi}$ и $\delta \bar{\varphi}^+$, если $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}^+$ удовлетворяют однородным условиям Неймана $\nabla_n \bar{\varphi} = 0$, $\nabla_n \bar{\varphi}^+ = 0$, которые являются естественными по отношению к лагранжиану (3.50).

Если в числитель лагранжиана (3.50) добавить поверхностный член $\oint_S dS (\hat{\varphi}^+ \cdot \hat{\gamma} \hat{\varphi})$ и образовать тем самым лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\chi}^{(j, \gamma)}[\hat{\varphi}^+, \hat{\varphi}] = \frac{\int_V d\bar{r} [(\nabla \hat{\varphi}^+ \cdot \hat{D} \nabla \hat{\varphi}) + (\hat{\varphi}^+ \cdot \hat{\Sigma} \hat{\varphi})] + \oint_S dS (\hat{\varphi}^+ \cdot \hat{\gamma} \hat{\varphi})}{\int_V d\bar{r} (\hat{\varphi}^+ \cdot \hat{Q} \hat{\varphi})}, \quad (4.72)$$

то его первая вариация в окрестности $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}^+$ определится выражением

$$\delta \mathcal{L}_{\chi}^{(j, \gamma)}[\bar{\varphi}^+, \bar{\varphi}] = \frac{\oint_S dS [(\delta \bar{\varphi}^+ (\hat{D} \nabla_n \bar{\varphi} + \hat{\gamma} \bar{\varphi})) + (\delta \bar{\varphi} (\hat{D}^T \nabla_n \bar{\varphi}^+ + \hat{\gamma}^T \bar{\varphi}^+))]}{\int_V d\bar{r} (\bar{\varphi}^+ \cdot \hat{Q} \bar{\varphi})} \quad (4.73)$$

и обратится в ноль, если $\bar{\varphi}$ удовлетворяет граничному условию (4.70), а $\bar{\varphi}^+$ — однородному граничному условию

$$\hat{D}^T(\bar{r}_S) \nabla_n \bar{\varphi}^+(\bar{r}_S) + \hat{\gamma}^T(\bar{r}_S) \bar{\varphi}^+(\bar{r}_S) = 0. \quad (4.74)$$

Таким образом, дополнительные условия (4.70) и (4.74) являются естественными по отношению к лагранжиану (4.72) и его можно использовать для оценки изменения параметра $\frac{1}{k_0}$ при изменении $\delta \hat{\gamma}$ матрицы $\hat{\gamma}$. Соответствующая формула малых возмущений имеет вид

$$\delta \frac{1}{k_0} = \frac{\oint_S dS (\bar{\varphi}^+ \cdot \delta \hat{\gamma} \bar{\varphi})}{\int_V d\bar{r} (\bar{\varphi}^+ \cdot \hat{Q} \bar{\varphi})}, \quad (4.75)$$

где $\bar{\varphi}$ и $\bar{\varphi}^+$ — решения уравнений $L\bar{\varphi} - \frac{1}{k_0} Q\bar{\varphi} = 0$ и $L^+\bar{\varphi}^+ - \frac{1}{k_0} Q^+\bar{\varphi}^+ = 0$ при невозмущенных краевых условиях (4.70) и (4.74) соответственно.

Формула (4.75) может быть использована для оценки в первом приближении эффективности регулятора, размещенного внутри объема V . В отсутствие регулятора (невозмущенная система) плотность потока нейтронов определяется при однородных, например, краевых условиях на внешней поверхности S . Пусть регулятор имеет объем V_0 и поверхность S_0 . Тогда, фиксируя этот объем и поверхность в том месте внутри системы, где должен расположиться регулятор, определим на основе решения $\bar{\varphi}$ функции $\bar{\varphi}(\bar{r}_S)$ и $\hat{D}(\bar{r}_S) V_n \bar{\varphi}(\bar{r}_S)$, а следовательно, и диагональную матрицу $\hat{\gamma}$, связывающую эти функции на контуре S_0 . Теперь $\bar{\varphi}$ можно рассматривать как решение в объеме $V - V_0$ невозмущенной системы с эффективным граничным условием (4.70) на поверхности S_0 . Если регулятор характеризуется матрицей $\hat{\gamma}_0(\bar{r}_S)$, то его размещение внутри возмущенной системы можно описать возмущением $\delta \hat{\gamma} = \hat{\gamma}_0 - \hat{\gamma}$ матрицы эффективного граничного условия (4.70). Эффект такого возмущения на реактивность системы определяется по формуле (4.75), где в качестве S рассматривается поверхность регулятора S_0 , а интегрирование в знаменателе ведется по объему $V - V_0$.

Отметим, что использование формул малых возмущений для оценки эффективности регуляторов, сильно поглощающих нейтроны, может привести к заметным погрешностям, так как в (4.75) не учитывается возмущение нейтронного поля. В этом случае не учитывается также возможный эффект интерференции совокупности регуляторов, размещаемых в системе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фейнберг С.М., Шихов С.Б., Троянский В.Б. Теория ядерных реакторов. Т. 1. Элементарная теория реакторов. М.: Атомиздат, 1978.
2. Шихов С.Б. Вопросы математической теории реакторов. М.: Атомиздат, 1973.
3. Белл Д., Глестон С. Теория ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1974.

СОДЕРЖАНИЕ

1. УРАВНЕНИЯ И ФУНКЦИОНАЛЫ НЕЙТРОННЫХ ПОЛЕЙ.....	3
1.1. Функции распределения нейтронов.....	3
1.2. Уравнение нестационарного нейтронного поля	4
1.3. Уравнение сменяющихся поколений нейтронов	6
1.4. Уравнения нейтронного поля в абстрактной операторной форме.....	7
1.5. Сопряженные операторы уравнений нейтронного поля.....	10
1.6. Основные свойства операторов уравнений нейтронного поля.....	13
1.6.1. Фундаментальные свойства операторов.....	13
1.6.2. Множества $d(U)$ и $d^+(U)$	16
1.6.3. Альтернатива Фредгольма.....	17
1.7. Решения уравнений сменяющихся поколений нейтронов.....	18
1.8. Стационарные уравнения нейтронного поля..	21
1.8.1. Уравнения нейтронного поля в подкритической системе.....	22
1.8.2. Уравнения критического и условно-критического реакторов.....	23
1.9. Функционалы стационарного нейтронного поля.....	25
1.10. Вариации и производные функционалов.....	27
1.10.1. Вариация функции, вариации и производные функционалов.....	27
1.10.2. Первые вариации и производные функционалов.....	29
1.10.3. Вторые вариации функционалов...	32
2. ФУНКЦИИ ЦЕННОСТИ НЕЙТРОНОВ.....	33
2.1. Общее определение функции ценности.....	33
2.2. Уравнение для функции ценности нейтронов в подкритической системе.....	35
2.3. Ценность сменяющихся поколений нейтронов в условно-критическом реакторе.....	40
2.4. Асимптотическая и суммарная ценности сменяющихся поколений нейтронов.....	43

2.4.1. Асимптотическая ценность нейтронов...	46
2.4.2. Суммарная ценность сменяющихся поколений нейтронов, в условно критическом реакторе	47
2.5. Ценность нейтронов в реакторе с нормированным нейтронным полем.....	52
3. ЛАГРАНЖИАНЫ НЕЙТРОННЫХ ПОЛЕЙ И ВАРИАЦИОННЫЕ ПРИНЦИПЫ.....	53
3.1. Вариационное исчисление и вариационные принципы.....	53
3.2. Лагранжианы нейтронного поля в задаче с внешним источником.....	55
3.3. Лагранжиан \mathcal{L}_F нормированного нейтронного поля условно-критического реактора.....	59
3.4. Лагранжиан \mathcal{L}_X нейтронного поля условно-критического реактора.....	61
3.5. Естественные и главные дополнительные условия.....	62
3.5.1. Газокинетическая модель нейтронного поля.....	63
3.5.2. Диффузионно-групповая модель нейтронного поля.....	66
4. ВАРИАЦИОННАЯ ОЦЕНКА И ФОРМУЛЫ ВОЗМУЩЕНИЙ ФУНКЦИОНАЛОВ НЕЙТРОННОГО ПОЛЯ.....	69
4.1. Вариационный формализм полиномиальной аппроксимации функционалов нейтронного поля	69
4.2. Формулы малых возмущений (линейное приближение).....	72
4.2.1. Коэффициенты чувствительности и общие формулы малых возмущений.....	72
4.2.2. Формулы малых возмущений в задачах с газокинетической моделью нейтронного поля.....	75
4.2.3. Формулы малых возмущений в задачах с диффузионно-групповой моделью нейтронного поля	76
4.3. Формулы возмущений второго порядка.....	77
4.4. Формулы малых возмущений для коэффициентов реактивности.....	81
4.5. Возмущение размеров зон реактора.....	84
4.6. Возмущение граничных условий.....	88
Список литературы.....	90