

621.039

к 31

МФТИ

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

13

А. А. Кашутин В. В. Хромов



**ФАКУЛЬТЕТ
ТЕХНИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ**

**ГАЗОКИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ
ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ
В НЕРАЗМНОЖАЮЩИХ СРЕДАХ**

МОСКВА 1988

621-039

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

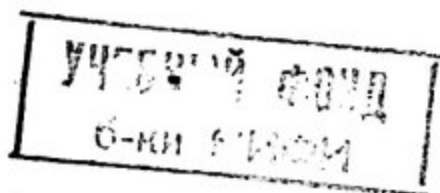
к-31

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

А. А. Кашутин В. В. Хромов

ГАЗОКИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПЕРЕНОСА
НЕЙТРОНОВ В НЕРАЗМНОЖАЮЩИХ СРЕДАХ

Утверждено
редсоветом института
в качестве учебного пособия



Москва 1988

УДК 621.039.5(75)

Кашутин А.А., Хромов В.В. Газокинетическая теория переноса нейтронов в неразмножающих средах. - М.: МИФИ, 1988.
- 72 с.

В основу учебного пособия положен центральный раздел курса "Теория переноса нейтронов", читающегося в настоящее время в Московском инженерно-физическом институте. В пособии рассматриваются основные вопросы, связанные с изучением глобальной модели взаимодействия нейтронов со средой - газокинетического уравнения переноса.

Пособие предназначено для студентов дневного отделения гр. Ф6-01, 01а, Ф7-02, 02а.

Рецензенты:
И.С. Слесарев, Л.В. Точный

© Московский инженерно-физический институт, 1988 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие содержит центральную часть материала курса "Теория переноса нейтронов", читаемого на протяжении ряда лет в Московском инженерно-физическом институте. Эта часть связана с изучением глобальной модели взаимодействия нейтронов со средой — газокинетического уравнения переноса нейтронов.

В первой части пособия вводятся необходимые понятия и определения теории переноса нейтронов. Обсуждаются основные положения газокинетической модели, которыми по существу определяются границы ее применимости. Вводятся в рассмотрение величины, позволяющие количественно характеризовать распределения нейтронов, и интенсивность их взаимодействия со средами.

Во второй части приводится вывод стационарного интегро-дифференциального газокинетического уравнения на основе анализа баланса скоростей нейтронно-физических процессов в неразмножающей нейтроны среде. Формулируются условия однозначного выбора решений этого уравнения в физических задачах. Приводится интегральная формулировка газокинетической модели переноса нейтронов в неразмножающих средах и показывается эквивалентность обеих формулировок (интегро-дифференциальной и интегральной) этой модели.

На примере простейших односкоростных задач теории переноса осуществляется анализ пространственно-угловых распределений нейтронов, генерируемых в средах внешними источниками. Изучаются общие закономерности формирования этих распределений в областях, непосредственно примыкающих к области размещения источника, а также удаленных от нее на достаточные расстояния. Рассматривается влияние анизотропии рассеяния на процессы взаимодействия нейтронов со средой. Дается общее представление о некоторых методах расчета нейтронных распределений.

При создании учебного пособия широко использован материал, содержащийся в работах [1] — [10].

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ

Поведение ядерного реактора в существенной степени определяется распределением нейтронов в его объеме. Композицию нейтронов, распределенную по некоторому закону в той или иной среде, будем называть нейтронным полем. Функция распределения нейтронов в общем случае зависит от пространственных координат, энергии нейтронов и направления их полета. Кроме этого, нейтронное поле в среде может быть нестационарным, то есть изменяться со временем.

Распределение нейтронов в среде в рамках современных представлений наиболее точно определяется газокинетическим уравнением [2, 5, 9], которое выводится из соотношений баланса между различными процессами взаимодействия нейтронов со средой. Эти процессы рассматриваются как среднестатистический результат большого числа единичных нейтронно-ядерных взаимодействий. Поведение нейтрона в этом случае определяется в среднем, т.е. по большому числу протекающих в среде нейтронно-ядерных реакций. Для количественного описания ожидаемых распределений нейтронов и их взаимодействия с ядрами среды в теории переноса нейтронов вводятся в рассмотрение различные величины, имеющие вероятностный характер: плотность нейтронного поля, плотности потока и тока нейтронов, микро- и макроскопические сечения нейтронно-ядерных реакций.

В настоящем разделе вводятся в рассмотрение все необходимые для построения моделей теории переноса нейтронов в средах понятия и определения. Обсуждаются фундаментальные положения, на которых базируется моделирование нейтронных полей. Эти положения позволяют четко определить границы применимости моделей теории переноса, что существенно важно при практическом использовании этих моделей.

1.1. Основные процессы взаимодействия нейтронов с ядрами среды. Исследуемый энергетический диапазон

Возникновение нейтронного поля в среде обусловлено либо действием внешних источников нейтронов (например, нейтронных пучков ядерного реактора, фотоисточников, космического излу-

чения и т.д.), либо реакцией деления ядер урана, плутония и других делящихся нуклидов. Нейтроны, перемещаясь по пространству среды, способны вступать во взаимодействие с ядрами, т.е. вызывать ту или иную ядерную реакцию. При описании нейтронно-ядерных взаимодействий опираются на положения теории Н.Бора, основанной на модели составного атомного ядра [1,6].

Нейтронно-ядерные взаимодействия при не очень большой кинетической энергии нейтронов (до 10 - 15 МэВ) сводятся к двум процессам: упругому рассеянию нейтрона в поле ядерных сил (потенциальное рассеяние) и захвату нейтрона с образованием составного ядра. Взаимодействие первого типа сопровождается лишь перераспределением кинетической энергии и импульса между нейтроном и ядром-мишенью в соответствии с законами сохранения энергии и импульса. Ядерная реакция захвата приводит к образованию промежуточного составного ядра, которое находится в возбужденном состоянии. Энергия возбуждения составного ядра равна сумме энергии связи нейтрона в этом ядре и его кинетической энергии. Составное ядро распадается одним из следующих способов (рис. 1.1):

- излучением γ -квантов (реакция радиационного захвата нейтрона (n, γ));
- испусканием нейтрона (реакция упругого резонансного рассеяния нейтрона на ядре (n, n));
- испусканием нейтрона и γ -кванта (реакция неупругого резонансного рассеяния нейтрона на ядре (n, n'));

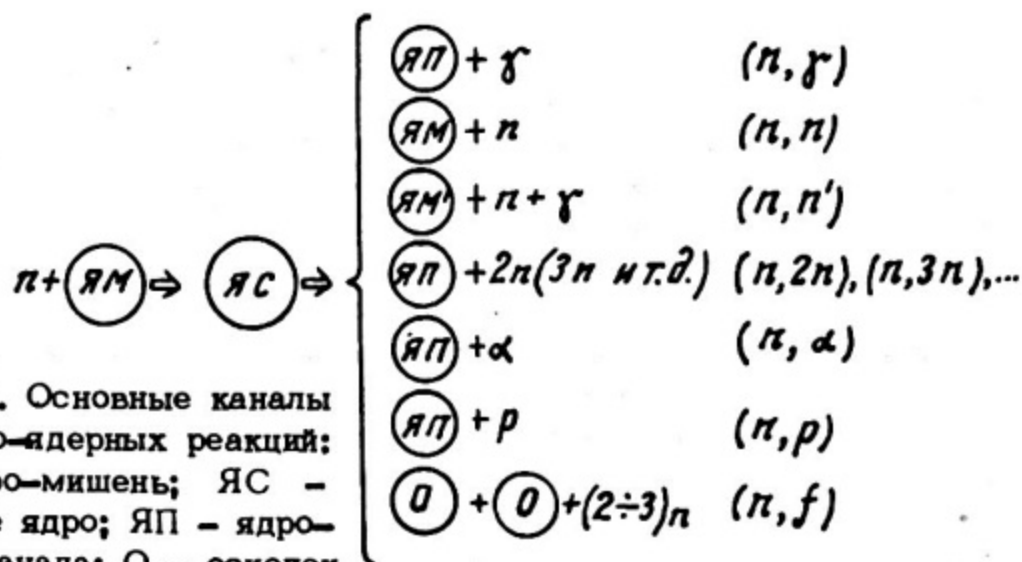


Рис. 1.1. Основные каналы нейтронно-ядерных реакций: ЯМ - ядро-мишень; ЯС - составное ядро; ЯП - ядро-продукт канала; O - осколок

- испусканием двух и более нейтронов (реакции $(n, 2n)$, $(n, 3n)$ и т.д.) и испусканием α -частиц и протонов (реакции (n, α) и (n, p)).

Перечисление основных закономерностей этих реакций начнем с реакции радиационного захвата нейтрона (n, γ) . Вероятность протекания этой реакции оказывается тем выше, чем меньше энергия вступающего в реакцию нейтрона. Действительно, вероятность снятия возбуждения в составном ядре посредством излучения γ -кванта тем выше, чем меньше превышение энергии возбуждения составного ядра над энергией связи нейтрона в нем ([6], с. 146), что имеет место при невысоких кинетических энергиях нейтрона.

В другом случае возможно резонансное рассеяние, сопровождающееся излучением нейтрона (упругое резонансное рассеяние (n, n) или нейтрона и γ -кванта (неупругое резонансное рассеяние (n, n')). Если ядро-продукт, которое по нуклонному составу в данном случае является исходным ядром-мишенью, оказывается в основном энергетическом состоянии, резонансное рассеяние является упругим и с кинематической точки зрения эквивалентным потенциальному рассеянию. Если же ядро-продукт оказывается в возбужденном состоянии, резонансное рассеяние является неупругим. Для этого ([6], с. 147) кинетическая энергия нейтрона, инициирующего ядерную реакцию неупругого резонансного рассеяния, должна превышать энергию первого возбужденного уровня ядра-мишени (примерно 0,1 МэВ и выше).

Следующая группа из ядерных реакций $((n, 2n), (n, 3n), \dots, (n, \alpha), (n, p))$ относится к классу высокоэнергетических, т.е. реакций, в которых исходный нейтрон имеет достаточно высокую кинетическую энергию.

Возможен еще один вид ядерной реакции через составное ядро. Самые тяжелые ядра после захвата нейтрона могут распадаться на два возбужденных осколка, испускающих один-два нейтрона каждый. Эта реакция называется ядерной реакцией деления. Реакция деления ядра урана и плутония положена в основу принципа работы ядерного реактора: образовавшиеся в результате деления некоторого ядра нейтроны вызывают деление других ядер среды реактора, т.е. порождают цепную ядерную реакцию деления. Нейтроны деления обладают высокой кинетической энергией, которая может достигать 18 МэВ. На рис.1.2 приведен энергетический спектр $\chi(E)$ нейтронов, образующихся при делении ядер ^{235}U тепловыми нейтронами. Величина $\int \chi(E) dE$ определяет

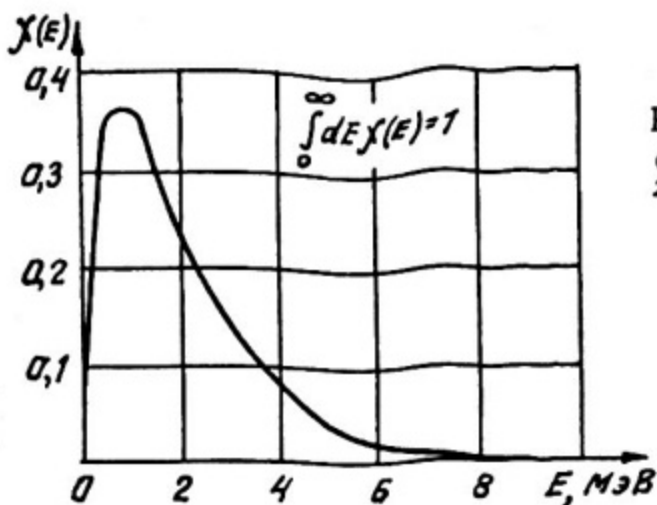


Рис. 1.2. Спектр нейтронов, образующихся при делении ^{235}U тепловыми нейтронами

долю мгновенных нейтронов деления, кинетическая энергия которых находится в элементарном энергетическом интервале dE , расположенном около значения E . Как видно из рисунка, спектр деления содержит относительно небольшое количество высокоэнергетических нейтронов с энергией более 5 МэВ. Средняя энергия спектра деления составляет 2 МэВ ([6], с. 119). Поэтому обычно не учитывают реакции типа $(n, 2n)$, $(n, 3n)$, ... (n, p) , (n, α) , так как они имеют место, если нейтрон обладает достаточно большой энергией. Поскольку число таких нейтронов в среде в рассматриваемых условиях относительно невелико, вклад указанных реакций в общую сумму нейтронно-ядерных взаимодействий будет мал.

Процессы рассеяния (упругого и неупругого) оказывают определяющее влияние на формирование энергетического распределения нейтронов в среде. Неупругое рассеяние оказывается существенным лишь при достаточно высоких энергиях нейтрона ([6], с. 147), при этом вероятность неупругого рассеяния на тяжелых ядрах значительно выше, чем на легких. При более низких энергиях определяющим становится процесс упругого рассеяния нейтронов.

При исследовании процессов замедления нейтронов за счет рассеяния ядро-мишень считается неподвижным, так как скорость его теплового движения значительно меньше скорости замедляющегося нейтрона. Теряя свою кинетическую энергию в результате рассеяния, нейтроны в конечном итоге замедляются до энергий, сравнимых с энергиями теплового движения ядер среды (порядка 0,025 эВ). При рассмотрении про-

цессов взаимодействия нейтронов тепловых энергий с ядрами среды необходимо учитывать тепловое движение ядер, поскольку в этом случае нейтрон в результате рассеяния на ядре-мишени может не только терять, но и приобретать энергию. Кроме этого, если при энергиях нейтрона, значительно выше тепловых (более 1 эВ), можно пренебречь эффектами молекулярных и кристаллических связей ядер, то в области тепловых энергий силы молекулярных и кристаллических связей вносят определенный вклад в ход нейтронно-ядерных процессов ([8], с. 37). Процесс формирования спектра нейтронов в области тепловых и эпитепловых энергий называется термализацией ([2], с. 249, [9], с. 180).

При построении нейтронно-физических моделей помимо перечисленных выше не принимаются во внимание эффекты поляризации, возникающие в связи с тем, что нейтрон имеет спин и магнитный момент. Поляризационные эффекты оказывают определенное влияние на рассеяние нейтронов ([2], с. 30), однако величина этих эффектов незначительна, и в общем случае, как показывает практика, учет этих эффектов в большинстве задач теории переноса не оказывает заметного влияния на уточнение распределений нейтронов в средах.

В практических задачах плотность нейтронов обычно значительно меньше ядерной плотности среды. Типичные плотности нейтронов в активных зонах ядерных реакторов не превышают 10^{17} нейтр./м³, среды 10^{28} яд./м³ ([2], с. 31). Поэтому взаимодействия нейтронов между собой значительно менее вероятны, чем взаимодействия нейтронов с ядрами среды. Это обстоятельство позволяет при построении моделей теории переноса нейтронов исключить без сколько-нибудь заметной погрешности из рассмотрения взаимодействия вида "нейтрон - нейтрон".

Нейтронное поле в среде ограничено по величине. Действительно, если процессы исчезновения нейтронов в среде преобладают над процессами генерации - нейтронное поле в среде затухает. В противном случае амплитуда нейтронного поля будет увеличиваться до тех пор, пока не будет достигнуто равновесие процессов исчезновения и генерации нейтронов. В самом деле, пусть в некоторой немультиплицирующей среде, заключенной в конечный объем, расположены внешние источники быстрых нейтронов. Среда окружена вакуумом. Генерируемые внешними источниками быстрые нейтроны взаимодействуют с ядрами среды, в результате чего могут поглощаться этими ядрами или рассеиваться на некоторый угол по отноше-

нию к первоначальному направлению полета с потерей кинетической энергии. Кроме этого, нейтроны могут вылетать из среды в вакуум (утечка нейтронов из конечной среды). Если скорость генерации быстрых нейтронов внешними источниками превышает скорость исчезновения нейтронов в среде за счет процессов поглощения и утечки, то плотность нейтронов в среде будет увеличиваться. Этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока не будет достигнуто равенство скоростей указанных выше конкурирующих процессов (с ростом плотности нейтронов увеличивается скорость их поглощения и утечки из среды). Таким образом, в конечном итоге в среде установится стационарное распределение нейтронов, ограниченное по величине. Если теперь "выключить" внешние источники нейтронов, нейтронное поле в среде будет затухать до уровня фона, создаваемого, например, космическим излучением.

1.2. Описание распределений нейтронов в средах. Плотности потока и тока нейтронов

В теории переноса нейтрон рассматривается как частица. Такое представление нейтрона оказывается вполне удовлетворительным, так как в исследуемом энергетическом диапазоне дебройлевская длина волны нейтрона мала по сравнению с межъядерными расстояниями и длиной свободного пробега нейтрона в среде ([2], с. 7, 30). И только для нейтронов низких энергий ($E \leq 5 \cdot 10^{-3}$ эВ) дебройлевская длина волны становится настолько большой, что нейтрон не может быть локализован. В этом случае возникает необходимость квантово-механического рассмотрения проблемы, поскольку при низких энергиях может возникать интерференция между нейтронными волнами, рассеянными кристаллическими решетками. Это явление следует учитывать при изучении распределений нейтронов в диапазоне низких энергий. Однако в подавляющем большинстве случаев количество нейтронов низких энергий в среде пренебрежимо мало, поскольку вероятность поглощения нейтронов ядрами среды возрастает с уменьшением энергии нейтронов. Поэтому корректный учет таких нейтронов (рассмотрение проблемы на квантово-механическом уровне) не приведет к заметному уточнению результата ([2], с. 7, 30).

Представление нейтрона в виде частицы означает, что ему приписывается некоторое положение в пространстве среды, определяемое вектором \vec{r} (рис. 1.3), скорость v и направле-

ние движения, определяемое вектором $\vec{\Omega}$ — единичным вектором, совпадающим с направлением движения нейтрона. В полярной системе координат единичный вектор $\vec{\Omega}$ может быть представлен с помощью полярного θ и азимутального φ углов

$$\vec{\Omega} = \Omega_x \vec{l}_0 + \Omega_y \vec{m}_0 + \Omega_z \vec{n}_0,$$

где $\Omega_x = \sin \theta \cos \varphi$, $\Omega_y = \sin \theta \sin \varphi$, $\Omega_z = \cos \theta$; \vec{l}_0 , \vec{m}_0 , \vec{n}_0 — единичные орты в направлениях осей x , y , z соответственно. Следовательно, функция, описывающая распределение плотности нейтронов в среде, в общем случае зависит от семи переменных x , y , z , E , θ , φ , t :

$$N = N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = N(x, y, z, E, \theta, \varphi, t),$$

где E — кинетическая энергия нейтрона, соответствующая скорости v ; t — момент времени, в который фиксируется распределение нейтронов. Определим физический смысл функции $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ ([2], с. 9; [9], с. 19).

Плотность нейтронов в активной зоне реактора обычно составляет $10^{12} \div 10^{14}$ нейтр./м³. Ясно, что в задачах с таким количеством частиц невозможно точно определить поведение каждой частицы. Достаточно рассмотреть поведение нейтрона в среднем, определив функцию $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ как функцию ожидаемого в момент времени t распределения плотности нейтронов. Поэтому под величиной $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{r} dE d\vec{\Omega}$ в дальнейшем будем понимать ожидаемое в момент времени t число нейтронов в элементарном пространственном объеме $d\vec{r}$ в окрестности пространственной точки \vec{r} , имеющих энергию из элементарного энергетического интервала dE в окрестности значения E и направления полета из элементарного телесного угла $d\vec{\Omega}$, ориентированного вдоль вектора $\vec{\Omega}$.

В теории переноса термин "ожидаемое распределение нейтронов" означает, что флуктуация нейтронного поля около его среднего (ожидаемого) значения не принимаются во внимание ([2], с. 31). Естественно, что если плотность нейтронов в среде велика, то истинное распределение нейтронов близко к

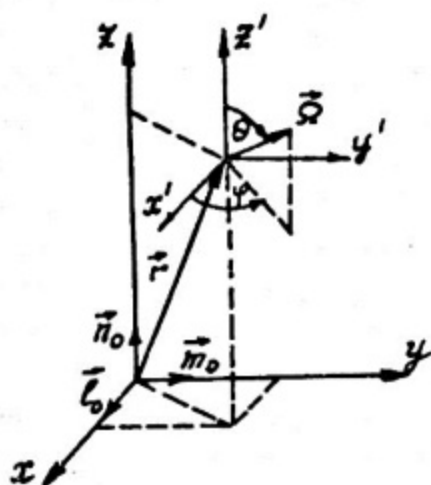


Рис. 1.3. Нейтрон в фазовом пространстве

ожидаемому и его флуктуации несущественны. При малых плотностях возможны существенные отклонения нейтронного поля от ожидаемого распределения. В дальнейшем будем полагать, что плотность нейтронов достаточно высокая и отклонения нейтронного поля от ожидаемых значений можно не принимать во внимание.

Совокупность переменных \vec{r} , E , $\vec{\Omega}$ образует так называемое фазовое пространство задачи. Поэтому, согласно данному выше определению, функция $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ есть не что иное, как распределение ожидаемой плотности нейтронов в фазовом пространстве в момент времени t . Формально это есть ожидаемое в момент времени t количество нейтронов в единичном объеме в окрестности пространственной точки \vec{r} , имеющих энергию из единичного интервала в окрестности значения E и направления полета из единичного телесного угла, ориентированного вдоль вектора $\vec{\Omega}$.

Интеграл от ожидаемой плотности нейтронов $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ по всем возможным направлениям полета нейтронов есть зависящая от энергии полная ожидаемая плотность нейтронов

$$n(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} d\vec{\Omega} N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t),$$

где

$$\int_{4\pi} d\vec{\Omega} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} d\theta \sin \theta.$$

Введем в рассмотрение также глобальную ожидаемую плотность нейтронов

$$n(\vec{r}, t) = \int_0^{E^*} dE n(\vec{r}, E, t);$$

где E^* — предельная энергия исследуемого энергетического диапазона.

Определим еще несколько характеристик нейтронных распределений. С этой целью в пространстве среды рассмотрим элементарную площадку dS (рис. 1.4). Подсчитаем количество нейтронов с энергией из элементарного энергетического интервала dE

и направлениями полета из элементарного телесного угла $d\vec{\Omega}$, пересекающих эту площадку за элементарный промежуток времени dt . При этом вектор $\vec{\Omega}$, вдоль которого ориентирован телесный угол $d\vec{\Omega}$, нормален к площадке dS . Искомая величина, которую обозначим через $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) dS dE d\vec{\Omega} dt$, определяется количеством нейтронов с энергией из элементарного интервала dE и направлением полета из элементарного телесного угла $d\vec{\Omega}$, которые содержатся в объеме цилиндра с основанием dS и высотой $v dt$, где v — скорость нейтрона, имеющего кинетическую энергию E . Только эти нейтроны за время dt

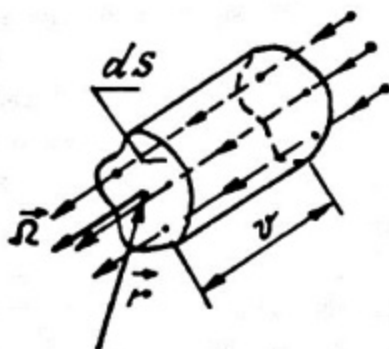


Рис. 1.4. Плотность потока нейтронов

пересекут площадку dS с требуемыми значениями энергии и направления полета. Используя введенное выше понятие плотности нейтронов $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$, находим

$$\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) dS dE d\vec{\Omega} dt = N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) v dt dS dE d\vec{\Omega} .$$

Функция

$$\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = v N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \quad (1.1)$$

называется плотностью потока нейтронов ([2], с. 11).

По аналогии с ранее введенной плотностью нейтронов введем в рассмотрение интегральные характеристики плотности потока нейтронов:

полную плотность потока нейтронов

$$\psi(\vec{r}, E, t) = \int d\vec{\Omega} \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) ;$$

глобальную плотность $\int_{E^*}^{4\pi}$ потока нейтронов

$$\Phi(\vec{r}, t) = \int_0^{\infty} dE \psi(\vec{r}, E, t) .$$

Формально полная плотность потока нейтронов $\psi(\vec{r}, E, t)$ определяет количество нейтронов с энергией из единичного энергетического интервала около значения E , пересекающих в единицу времени единичные площадки, ориентированные всевоз-

можными способами в окрестности пространственной точки \vec{r} в нормальных к этим площадкам направлениях. Определение глобальной плотности потока нейтронов $\Phi(\vec{r}, t)$ аналогично, только относится к нейтронам всех энергий.

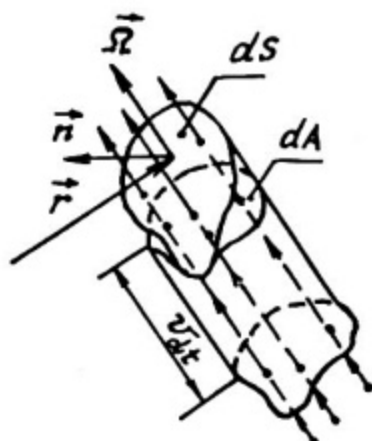


Рис. 1.5. Плотность тока нейтронов

Введем еще одну характеристику нейтронного поля. С этой целью рассмотрим элементарную площадку dS с нормалью \vec{n} (рис. 1.5). Подсчитаем количество нейтронов с энергией из элементарного интервала dE и направлением полета из элементарного телесного угла $d\vec{\Omega}$, произвольно ориентированного относительно площадки dS , пересекающих за элементарный промежуток времени dt эту площадку.

С этой целью рассмотрим площадку dA , являющуюся проекцией площадки dS на плоскость, нормальную к вектору $\vec{\Omega}$, и, воспользовавшись введенным понятием дифференциальной плотности потока нейтронов $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$, вычислим искомую величину в виде $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) dA dE d\vec{\Omega} dt$. Поскольку $dA = dS \cos \theta$, где $\cos \theta = (\vec{\Omega}, \vec{n})$, получаем $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) dA dE d\vec{\Omega} dt = \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) dS (\vec{\Omega}, \vec{n}) dE d\vec{\Omega} dt$.

Используя найденную величину, определим количество нейтронов с энергией из элементарного интервала dE , пересекающих элементарную площадку dS с нормалью \vec{n} за элементарный промежуток времени dt во всевозможных направлениях. Обозначив искомую величину через $i_n(\vec{r}, E, t) dS dE dt$, находим

$$i_n(\vec{r}, E, t) dS dE dt = \int_{4\pi} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega}, \vec{n}) \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) dS dE dt.$$

Функция

$$i_n(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega}, \vec{n}) \nu N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$$

называется плотностью тока нейтронов через единичную площадку с нормалью \vec{n} и формально определяет количество нейтронов с энергией из единичного энергетического интервала

около значения E , пересекающих за единицу времени во всевозможных направлениях единичную площадку с нормалью \vec{n} , расположенную в окрестности пространственной точки \vec{r} .

В практических задачах теории переноса важно знать составляющие плотности тока нейтронов $i_n(\vec{r}, E, t)$ вдоль и против направления нормали \vec{n} . Чтобы найти эти составляющие, представим функцию $i_n(\vec{r}, E, t)$ в виде двух слагаемых

$$i_n(\vec{r}, E, t) = \int_{(\vec{\Omega}, \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega}, \vec{n}) \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) - \left(- \int_{(\vec{\Omega}, \vec{n}) < 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega}, \vec{n}) \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \right)$$

и обозначим

$$i_n^+(\vec{r}, E, t) = \int_{(\vec{\Omega}, \vec{n}) > 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega}, \vec{n}) \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t),$$

$$i_n^-(\vec{r}, E, t) = - \int_{(\vec{\Omega}, \vec{n}) < 0} d\vec{\Omega} (\vec{\Omega}, \vec{n}) \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t).$$

Таким образом, $i_n(\vec{r}, E, t) = i_n^+(\vec{r}, E, t) - i_n^-(\vec{r}, E, t)$.

В дальнейшем функции $i_n^+(\vec{r}, E, t)$ и $i_n^-(\vec{r}, E, t)$ будем называть плотностями односторонних токов нейтронов соответственно в положительном и отрицательном направлениях через единичную площадку с нормалью \vec{n} , расположенную в окрестности точки \vec{r} .

Введенная в рассмотрение плотность тока нейтронов $i_n(\vec{r}, E, t)$, очевидно, есть не что иное, как проекция некоторой векторной функции $\vec{i}(\vec{r}, E, t)$ на направление нормали \vec{n} : $i_n = (\vec{i}, \vec{n})$. Векторная функция $\vec{i}(\vec{r}, E, t)$ определяется выражением

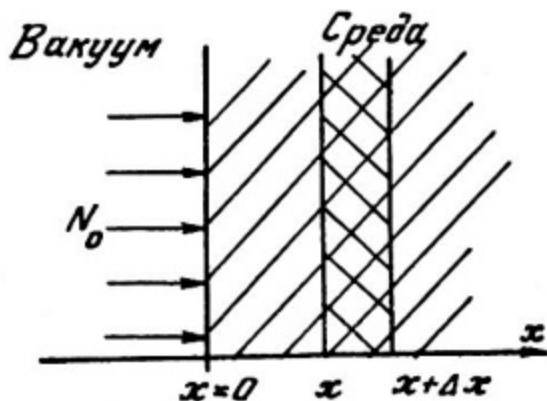
$$\vec{i}(\vec{r}, E, t) = \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \vec{\Omega} \varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \quad (1.2)$$

и называется вектором результирующей (разностной) плотности тока нейтронов. Вектор результирующей плотности тока нейтронов формально указывает направление преимущественного движения нейтронов в окрестности пространственной точки \vec{r} , а его модуль — плотность тока нейтронов через единичную площадку в окрестности точки \vec{r} , нормально ориентированную к направлению преимущественного движения нейтронов.

1.3. Описание взаимодействия нейтронов с ядрами среды. Скорость нейтронно-ядерного взаимодействия

Для количественной оценки протекания той или иной нейтронно-ядерной реакции вводится понятие сечения нейтронно-ядерного взаимодействия [1, 6], смысл которого поясним на следующем примере.

Рассмотрим полубесконечную среду (рис. 1.6), граничащую с вакуумом. Для определенности будем считать, что среда состоит из ядер одного сорта.



Пусть на поверхность раздела среды с вакуумом ($x=0$) нормально падает пучок коллимированных моноэнергетических нейтронов с плотностью N_0 . Попав в среду, нейтроны начинают выбывать из пучка в результате взаимодействий с веществом (например, за счет поглощения или рассеяния ядрами среды). Рассмотрим абстрактный процесс вывода нейтронов из пучка.

Рис. 1.6. Сечение ядерной реакции

Выбывание нейтронов из пучка в слое толщины Δx будет пропорционально ядерной плотности

среды $\rho(x)$ (количеству ядер среды в единице объема), толщине слоя Δx и плотности падающего на слой коллимированного пучка нейтронов $N(x)$:

$$\Delta N = N(x) - N(x + \Delta x) \sim \rho(x) N(x) \Delta x.$$

Коэффициент пропорциональности σ , связывающий левую и правую части этого соотношения между собой $\Delta N = \sigma \rho(x) N(x) \Delta x$, называется эффективным микроскопическим сечением вывода нейтронов из пучка коллимированных нейтронов. Нетрудно видеть, что микроскопическое сечение ядерной реакции измеряется в единицах площади. В задачах теории переноса нейтронов, как правило, микроскопические сечения ядерных реакций зависят только от энергии вступающих в эти реакции нейтронов $\sigma = \sigma(E)$. Однако в некоторых случаях микросечение может зависеть также от направления $\bar{\Omega}$ ([2], с. 11).

Получим уравнение, описывающее процесс вывода нейтронов в среде из пучка. Для этого вычислим предел выражения, определяющего выбывание нейтронов из коллимированного пучка в слое толщины Δx , при $\Delta x \rightarrow 0$. Результатом будет сле-

дующее дифференциальное уравнение

$$\frac{1}{N(x)} \frac{dN}{dx}(x) = -\Sigma(x).$$

Здесь величина $\Sigma(x) = \rho(x)\sigma$ называется макроскопическим сечением взаимодействия нейтронов с веществом и измеряется в единицах обратной длины. Для полной формулировки задачи к дифференциальному уравнению следует присоединить начальное условие $N(0) = N_0$, которому удовлетворяют нейтроны пучка. Это условие однозначно определяет зависимость плотности нейтронов в коллимированном пучке от расстояния, пройденного в среде:

$$N(x) = N_0 \exp \left\{ - \int_0^x dx' \Sigma(x') \right\}.$$

Опираясь на это решение вычислим ряд важнейших для дальнейшего изложения материала характеристик. Первая из них — вероятность нейтрону преодолеть путь Δx без взаимодействия с ядрами среды. Искомая вероятность, согласно ее смыслу, определяется из выражения

$$\omega_1(x) = \frac{N(x+\Delta x)}{N(x)}$$

и в данном случае имеет вид

$$\omega_1(x) = \frac{N_0 \exp \left\{ - \int_0^{x+\Delta x} dx' \Sigma(x') \right\}}{N_0 \exp \left\{ - \int_0^x dx' \Sigma(x') \right\}} = \exp \left\{ - \int_x^{x+\Delta x} dx' \Sigma(x') \right\}. \quad (1.3)$$

Если среда однородна ($\Sigma(x) = \text{const}$), вероятность $\omega_1 = \exp\{-\Sigma \Delta x\}$ не зависит от пространственной координаты, подтверждая тем самым предположение о равновероятном столкновении нейтронов по длине пробега с ядрами однородной среды. Это предположение состоит в следующем. Если нейтрон, двигаясь в однородной среде, преодолел без взаимодействия с ядрами некоторое расстояние, то вероятность, что он и далее преодолет то же расстояние без нейтронно-ядерных взаимодействий, такая же, как в начальный момент.

Вычислим еще одну характеристику пространственной миграции нейтронов в среде — плотность вероятности нейтронно-ядерного взаимодействия в окрестности некоторой пространственной точки среды. Эту характеристику определим следующим образом. Вычислим вероятность нейтрону, прошедшему в среде путь x без взаимодействия с ядрами, в конце этого пути на отрезке Δx вступить в нейтронно-ядерное взаимодействие. Согласно смыслу последняя величина определяется выражением

$$P(\Delta x, x) = \frac{N(x) - N(x + \Delta x)}{N_0}.$$

Тогда искомую плотность вероятности вычислим из соотношения ([7], с. 543)

$$w_2(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(\Delta x, x)}{\Delta x} = -\frac{1}{N_0} \frac{dN}{dx}(x) = \Sigma(x) \exp\left\{-\int_0^x dx' \Sigma(x')\right\}.$$

По существу, функция $w_2(x)$ определяет вероятность того, что нейтрон, пройдя в среде путь x без взаимодействия с ядрами, в конце этого пути вступит в нейтронно-ядерное взаимодействие.

Используем полученный результат, чтобы вычислить средний пробег нейтрона в среде до нейтронно-ядерного взаимодействия. Согласно определению средних величин ([7], с. 544) искомый пробег определяется выражением

$$l = \frac{\int_0^{\infty} dx x w_2(x)}{\int_0^{\infty} dx w_2(x)}$$

и в случае однородной среды составляет величину

$$l = \frac{\int_0^{\infty} dx x \Sigma \exp\{-\Sigma x\}}{\int_0^{\infty} dx \Sigma \exp\{-\Sigma x\}} = \frac{1}{\Sigma}. \quad (1.4)$$

Следовательно, средняя длина пробега нейтрона в однородной среде до взаимодействия с ее ядрами есть величина, обратная макроскопическому сечению. Последнее часто используется для расчета скоростей нейтронно-ядерных взаимодействий, т.е. оп-

ределения количества взаимодействий нейтронов с ядрами среды, отнесенного к единице фазового объема за единицу времени. Остановимся на этом подробнее.

Пусть $l(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ – средний путь, проходимый нейтроном с энергией из элементарного интервала dE и направлением полета из элементарного телесного угла $d\vec{\Omega}$ в окрестности пространственной точки \vec{r} среды до некоторого взаимодействия с ее ядрами. Если v – скорость нейтрона, то за время dt нейтрон пройдет в среде путь $v dt$ и испытает в среднем $\frac{v dt}{l}$ нейтронно-ядерных взаимодействий. Пусть плотность нейтронного поля $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$. Тогда в фазовом объеме $d\vec{r} dE d\vec{\Omega}$ содержится $N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{r} dE d\vec{\Omega}$ нейтронов, которые за время dt претерпят $\frac{v}{l} N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) \times d\vec{r} dE d\vec{\Omega} dt$ взаимодействий с ядрами среды. Последнее преобразуем, учитывая соотношения (1.1) и (1.4):

$$\frac{v}{l} N(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{r} dE d\vec{\Omega} dt = \sum(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) d\vec{r} dE d\vec{\Omega} dt.$$

Таким образом, искомая скорость $R(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$ нейтронно-ядерного взаимодействия определяется выражением $R(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t) = \sum(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}, t)$, т.е. является произведением макроскопического сечения соответствующего нейтронно-ядерного взаимодействия на плотность потока нейтронов.

В заключение раздела введем характеристики основных взаимодействий нейтронов с ядрами среды.

Микроскопическое сечение рассеяния σ_s нейтронов на ядрах среды складывается из микроскопических сечений упругого σ_e и неупругого σ_{in} рассеяний: $\sigma_s = \sigma_e + \sigma_{in}$. Соответствующие макроскопические сечения и длины пробега нейтронов до процесса рассеяния определяются выражениями:

$$\begin{aligned} \Sigma_e &= \rho \sigma_e; & \Sigma_{in} &= \rho \sigma_{in}; & \Sigma_s &= \rho \sigma_s = \Sigma_e + \Sigma_{in}; \\ l_e &= \frac{1}{\Sigma_e}; & l_{in} &= \frac{1}{\Sigma_{in}}; & l_s &= \frac{1}{\Sigma_s}. \end{aligned}$$

Микроскопическое сечение поглощения σ_a нейтронов ядрами среды складывается из микроскопических сечений радиационного захвата σ_c и деления σ_f : $\sigma_a = \sigma_c + \sigma_f$. Соответствующие макроскопические сечения и длины пробега:

$$\begin{aligned} \Sigma_c &= \rho \sigma_c; & \Sigma_f &= \rho \sigma_f; & \Sigma_a &= \rho \sigma_a = \Sigma_c + \Sigma_f; \\ l_c &= \frac{1}{\Sigma_c}; & l_f &= \frac{1}{\Sigma_f}; & l_a &= \frac{1}{\Sigma_a}. \end{aligned}$$

Полное микроскопическое сечение $\sigma_{tot} = \sigma_s + \sigma_a$. Соответствующее макроскопическое сечение и длина свободного пробега нейтрона $\Sigma_{tot} = \rho \sigma_{tot} = \Sigma_s + \Sigma_a$; $l = \frac{1}{\Sigma_{tot}}$.

1.4. Основные ограничения моделей теории переноса нейтронов

Суммируя материал предшествующих разделов, перечислим кратко основные ограничения, при которых строятся модели теории переноса нейтронов. Знание этих ограничений важно для корректного применения моделей.

Исследуемый энергетический диапазон простирается практически от тепловых энергий (порядка 0,025 эВ) и до 10 - 18 МэВ.

В этом диапазоне энергий определяющими нейтронно-ядерными процессами являются реакции упругого (n, n) и неупругого (n, n') рассеяния радиационного захвата (n, γ), деления (n, f). Обычно не учитываются высокоэнергетические реакции типа ($n, 2n$), ($n, 3n$), ..., (n, α) и (n, p), взаимодействие нейтронов друг с другом, эффекты поляризации при прохождении нейтронов через среду. Вклад этих реакций и эффектов в распределение нейтронов в среде, как показывает практика, в подавляющем большинстве задач теории переноса оказывается пренебрежимо мал.

В исследуемом диапазоне энергий нейтрон рассматривается как точечная частица, имеющая вполне определенные пространственные координаты, скорость и направление полета, а ядра среды считаются неподвижными, так как скорость их теплового движения пренебрежимо мала по сравнению со скоростью перемещения нейтрона в среде.

Г Л А В А 2

ГАЗОКИНЕТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ В НЕРАЗМНОЖАЮЩИХ СРЕДАХ

В настоящем разделе строится глобальная модель теории переноса нейтронов, основанная на газокинетическом представлении о нейтронном поле и его взаимодействии с ядрами среды. При выводе газокинетического уравнения дополнительно полагается, что среда не размножает нейтроны, т.е. из рассмотрения исключается реакция захвата нейтрона ядром с последующим делением этого ядра. В качестве источников, генерирующих нейтроны в среде, рассматриваются внешние, независимые от нейтронного поля источники. Эти источники полагаются стационарными, в связи с чем со временем в среде устанавливается стационарное распределение нейтронов. Последнее обстоятельство позволяет за счет некоторого упрощения структуры газокинетического уравнения сконцентрировать внимание на основных этапах его вывода.

В разделе приводятся две формулировки глобальной модели теории переноса нейтронов: интегро-дифференциальная и интегральная. Это обусловлено практической значимостью как той, так и другой формулировки. Доказывается эквивалентность обеих формулировок.

2.1. Балансное уравнение скоростей нейтронно-физических процессов в среде

Получим интегро-дифференциальную формулировку газокинетического уравнения переноса нейтронов. С этой целью рассмотрим бесконечную или конечную среду, которая в последнем случае заключена в выпуклый объем. Генерация нейтронов осуществляется распределенными в среде внешними источниками. Мощность источников нейтронов постоянна и, следовательно, со временем в среде устанавливается стационарное распределение нейтронов.

Рассмотрим баланс скоростей нейтронно-физических процессов в некотором произвольном элементарном фазовом объеме задачи, который в данном случае является пересечением:

- элементарного пространственного объема ΔV в окрестности пространственной точки, определяемой радиусом-вектором \vec{r} ;

- элементарного энергетического интервала ΔE в окрестности значения энергии E ;

- элементарного телесного угла $\Delta \vec{\Omega}$ в окрестности направления $\vec{\Omega}$.

Введем следующие обозначения для скоростей нейтронно-физических процессов в элементарном фазовом объеме $\Delta V \Delta E \Delta \vec{\Omega}$:

$L(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ - скорость утечки нейтронов за счет пространственной миграции;

$AR(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ - скорость убыли нейтронов за счет процессов поглощения и рассеяния;

$R(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ - скорость генерации нейтронов за счет процессов рассеяния при различных направлениях полета и энергиях нейтронов;

$Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ - скорость генерации нейтронов внешними источниками.

Исследуемая нейтронно-физическая задача стационарна. Поэтому сумма скоростей процессов, приводящих к генерации нейтронов в выделенном элементарном фазовом объеме, должна равняться сумме скоростей процессов, приводящих к исчезновению нейтронов из данного объема. В связи с этим балансное уравнение скоростей процессов в элементарном фазовом объеме $\Delta V \Delta E \Delta \vec{\Omega}$ имеет вид

$$-L(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) - AP(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + R(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = 0.$$

Определим явный вид членов уравнения.

Скорость убыли нейтронов из элементарного фазового объема за счет процессов пространственной миграции. Подсчитаем количество нейтронов, обладающих кинетической энергией из элементарного интервала $(E, E + \Delta E)$ и направлением полета из элементарного телесного угла $\Delta \vec{\Omega}$ в окрестности $\vec{\Omega}$, которые покидают в единицу времени элементарный пространственный объем ΔV (член $L(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ балансного уравнения).

С этой целью рассмотрим элементарный пространственный объем ΔV в виде бесконечно малого цилиндра (рис. 2.1), ось которого совпадает с направлением вектора $\vec{\Omega}$, а в основании лежит элементарная площадка ΔA . Высота цилиндра - Δl . Искомая величина утечки нейтронов $L(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ из цилиндра ΔV может быть вычислена с помощью введенной в п. 1.2 характе-

истики нейтронного поля – дифференциальной плотности потока нейтронов $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$:

$$L(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \left[\oint_S dS (\vec{\Omega}, \vec{n}_S) \psi(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) \right] \Delta E \Delta \vec{\Omega},$$

где S – внешняя поверхность цилиндрического объема ΔV ; \vec{r}_S – радиус-вектор, определяющий множество точек поверхности S ; \vec{n}_S – внешняя нормаль к поверхности S в точке \vec{r}_S ;

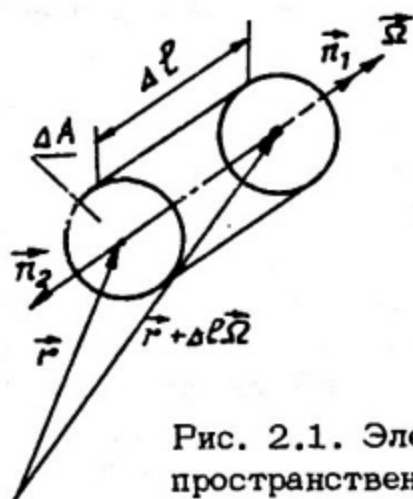


Рис. 2.1. Элементарный пространственный объем

На боковой поверхности цилиндра скалярное произведение $(\vec{\Omega}, \vec{n}_S) \approx 0$. Поэтому, считая площадку ΔA в основании цилиндра малой, последнее соотношение можем переписать следующим образом

$$L(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \left[\oint_S dS (\vec{\Omega}, \vec{n}_S) \psi(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) \right] \Delta E \Delta \vec{\Omega} \approx \\ \approx \left[(\vec{\Omega}, \vec{n}_1) \psi(\vec{r} + \Delta l \vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) + (\vec{\Omega}, \vec{n}_2) \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \right] \Delta A \Delta E \Delta \vec{\Omega}.$$

Здесь \vec{n}_1 и \vec{n}_2 – нормали к соответствующим основаниям цилиндра. Поскольку согласно выбору направления $\vec{\Omega}$ справедливы соотношения $(\vec{\Omega}, \vec{n}_1) = 1$ и $(\vec{\Omega}, \vec{n}_2) = -1$, окончательно получаем выражение

$$L(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \approx \left[\psi(\vec{r} + \Delta l \vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) - \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \right] \Delta A \Delta E \Delta \vec{\Omega},$$

определяющее скорость убыли нейтронов из элементарного фазового объема при свободном движении вдоль вектора $\vec{\Omega}$.

Скорость убыли нейтронов из элементарного фазового объема за счет процессов поглощения и рассеяния. В п. 1.3 показано, что искомая скорость убыли нейтронов из элементарного фазового объема за счет процессов поглощения и рассеяния определяется выражением

$$AR(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = [\Sigma(\vec{r}, E)\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})] \Delta V \Delta E \Delta \vec{\Omega}, \quad \Sigma = \Sigma_a + \Sigma_s,$$

где Σ_a и Σ_s – макроскопические сечения поглощения и рассеяния нейтронов ядрами среды.

Скорость генерации нейтронов в элементарном фазовом объеме за счет процессов рассеяния. Для определения искомой величины $R(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ подсчитаем количество нейтронов, рассеивающихся в единицу времени в элементарном фазовом объеме $\Delta V dE' d\vec{\Omega}'$. Данная величина определяется выражением $\Sigma_s(\vec{r}, E')\psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') \Delta V dE' d\vec{\Omega}'$. После рассеяния часть этих нейтронов приобретает энергию из интервала ΔE и направление полета в телесном угле $\Delta \vec{\Omega}$. Чтобы найти эту часть нейтронов, введем в рассмотрение индикатрису рассеяния $w(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega})$, которую определим как плотность вероятности нейтрону с энергией и направлением полета в окрестности значений E' и $\vec{\Omega}'$ соответственно после рассеяния приобрести энергию и направление полета в окрестности значений E и $\vec{\Omega}$. Тогда величина

$$dE' d\vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{r}, E') \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') w(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) \Delta V \Delta E \Delta \vec{\Omega}$$

определяет количество нейтронов, рассеивающихся в единицу времени из элементарного фазового объема $\Delta V dE' d\vec{\Omega}'$ в элементарный фазовый объем $\Delta V \Delta E \Delta \vec{\Omega}$. А искомая величина $R(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ находится интегрированием последнего выражения по всему энергетическому диапазону и всевозможным направлениям полета нейтронов. Таким образом, выражение

$$R(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \left[\int dE' \int d\vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{r}, E') \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') w(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) \right] \Delta V \Delta E \Delta \vec{\Omega}$$

определяет скорость генерации нейтронов в элементарном фазовом объеме за счет процессов рассеяния.

Скорость генерации нейтронов внешними источниками в элементарном фазовом объеме. Пусть $q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ – мощность внешних источников нейтронов, т.е. количество нейтронов, генерируемое в единицу времени внешними источниками в окрест-

ности пространственной точки \vec{r} с энергией и направлением полета в окрестности значений E и $\vec{\Omega}$ соответственно. Тогда искомая величина определяется выражением

$$Q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \Delta V \Delta E \Delta \vec{\Omega}.$$

2.2. Интегро-дифференциальное газокинетическое уравнение. Границы применимости уравнения

Подставим в балансное уравнение скоростей процессов полученные в п. 2.1 выражения для его членов, исключив из них одинаковые величины ΔV , ΔE и $\Delta \vec{\Omega}$ и учитывая, что $\frac{\Delta V}{\Delta l} = \Delta l$. Результатом будет соотношение

$$\begin{aligned} & - \frac{\psi(\vec{r} + \Delta l \vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) - \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})}{\Delta l} - \sum(\vec{r}, E) \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \\ & + \int dE' \int d\vec{\Omega}' \sum_s(\vec{r}, E') \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') \omega(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) + q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = 0. \end{aligned}$$

Перейдя к пределу (при $\Delta l \rightarrow 0$), преобразуем первый член этого соотношения следующим образом

$$\lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\psi(\vec{r} + \Delta l \vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) - \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})}{\Delta l} = \frac{d\psi}{dl}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}),$$

где $\frac{d\psi}{dl}(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ — производная от функции $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ по выбранному направлению l . Эта производная является проекцией градиента плотности потока нейтронов на направление $\vec{\Omega}$, совпадающее с направлением l :

$$\frac{d\psi}{dl}(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = (\vec{\Omega}, \nabla \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})) = \vec{\Omega} \nabla \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}).$$

Поэтому окончательно балансное уравнение скоростей процессов записывается как

$$\begin{aligned} & \vec{\Omega} \nabla \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \sum(\vec{r}, E) \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \\ & = \int dE' \int d\vec{\Omega}' \sum_s(\vec{r}, E') \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') \omega(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) + q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Уравнение (2.1) называется интегро-дифференциальным газокинетическим уравнением переноса нейтронов. Перечислим в краткой форме основные предположения, при которых получено газокинетическое уравнение:

1) нейтронно-физические процессы исследуются в энергетическом диапазоне, простирающемся от тепловых энергий нейтрона ($\sim 0,025$ эВ) до $10 - 18$ МэВ, при этом основная масса находящихся в среде нейтронов имеет энергию ниже 2 МэВ;

2) нейтрон рассматривается как частица, имеющая вполне определенную координату, направление и скорость движения, в связи с чем газокINETическое уравнение неприменимо к описанию распределений нейтронов в области низких и сверхнизких энергий, где в существенной степени проявляются волновые свойства нейтрона;

3) не рассматриваются взаимодействия типа "нейтрон - нейтрон", вероятность которых в практических задачах теории переноса исчезающе мала по сравнению с реакциями типа "нейтрон - нуклид";

4) не учитываются высокоэнергетические нейтронно-ядерные взаимодействия типа (n, α) , (n, p) , $(n, 2n)$ и т.д. и не принимаются во внимание эффекты поляризации, обусловленные наличием у нейтрона спина и магнитного момента, учет которых, как показывает практика, в подавляющем большинстве задач теории переноса нейтронов не оказывает заметного влияния на уточнение распределений нейтронов.

2.3. Условия однозначного выбора решений газокINETического уравнения в физических задачах

Интегро-дифференциальное уравнение (2.1) имеет множество допустимых решений. В связи с этим необходима постановка соответствующих граничных условий, обеспечивающих однозначный выбор из множества решений функции, соответствующей по физическому смыслу функции плотности потока нейтронов $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$. Обсудим постановку этих условий.

Условия "сшивки" решения на границе раздела двух сред. Рассмотрим постановку условий на границе раздела двух сред с различными нейтронно-физическими свойствами. Границу будем считать бесконечно тонкой пленкой, не поглощающей и не генерирующей нейтроны. Выделим в окрестности границы объем ΔV (рис. 2.2) и запишем уравнение баланса скоростей нейтронно-физических процессов в этом объеме. Это будет проинтегрированное по объему ΔV уравнение (2.1):

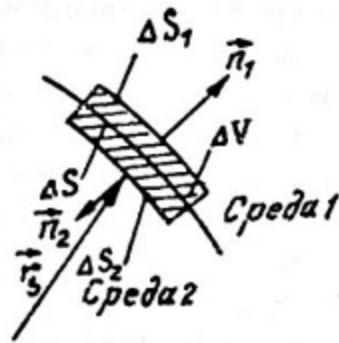


Рис. 2.2. Элементарный пространственный объем на границе раздела двух сред

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Delta V} d\vec{r} (\vec{\Omega}, \nabla \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})) - \int_{\Delta V} d\vec{r} \Sigma(\vec{r}, E) \times \\
 & \times \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) + \int_{\Delta V} d\vec{r} \int dE' \int d\vec{\Omega}' \Sigma_S(\vec{r}, E') \times \\
 & \times \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') w(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) + \int_{\Delta V} d\vec{r} q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = 0.
 \end{aligned}$$

Сожмем теперь объем ΔV к поверхности ΔS границы, для чего боковые поверхности ΔS_1 и ΔS_2 этого объема устремим к ΔS . При таком сжатии $\Delta V \rightarrow 0$. Поэтому все объемные интегралы в последнем соотношении обратятся в нуль за исключением первого. Этот интеграл, используя теорему Остроградского - Гаусса ([7], с. 175), преобразуем к поверхностному интегралу и вычислим предельное соотношение

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \int_{\Delta V} d\vec{r} (\vec{\Omega}, \nabla \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})) &= \lim_{\substack{\Delta S_1 \rightarrow \Delta S \\ \Delta S_2 \rightarrow \Delta S}} \oint_{\Delta S_V} dS (\vec{\Omega}, \vec{n}_S) \psi(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) = \\
 &= \lim_{\Delta S_1 \rightarrow \Delta S} \int_{\Delta S_1} dS (\vec{\Omega}, \vec{n}_1) \psi(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) + \lim_{\Delta S_2 \rightarrow \Delta S} \int_{\Delta S_2} dS (\vec{\Omega}, \vec{n}_2) \psi(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) = \\
 &= \int_{\Delta S} dS [(\vec{\Omega}, \vec{n}_1) \psi_1(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) + (\vec{\Omega}, \vec{n}_2) \psi_2(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega})],
 \end{aligned}$$

где ΔS_V - внешняя поверхность объема ΔV ; ψ_1 и ψ_2 - плотности потока нейтронов, вычисленные на границе раздела со стороны сред 1 и 2 соответственно.

В силу произвольности площадки ΔS границы раздела сред из полученного равенства следует равенство нулю подинтегрального выражения. Обозначая через \vec{n} внешнюю нормаль \vec{n}_1 к поверхности ΔS_1 и учитывая, что внешняя нормаль к поверхности ΔS_2 есть $\vec{n}_2 = -\vec{n}_1 = -\vec{n}$, получаем искомое условие

$$(\vec{\Omega}, \vec{n}) \psi_1(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) = (\vec{\Omega}, \vec{n}) \psi_2(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) \quad (2.2)$$

для направлений $(\vec{\Omega}, \vec{n}) \neq 0$.

Условие (2.2) требует непрерывности функции плотности потока нейтронов $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ при пересечении границы раздела двух сред в направлении $\vec{\Omega}$ и по существу имеет следующий физический смысл. Количество нейтронов с энергией около значения E и направлением полета около вектора $\vec{\Omega}$, вылетающих в единицу времени из среды 2 через границу раздела в окрестности пространственной точки, определяемой радиусом-вектором \vec{r}_S , равняется количеству нейтронов с указанными выше энергией и направлением полета, влетающих в единицу времени в среду 1 через границу раздела в той же окрестности пространственной точки \vec{r}_S (утверждение также справедливо для направлений из среды 1 в среду 2), поскольку граница раздела не поглощает и не генерирует нейтроны.

В случае, если граница раздела двух сред содержит внешний поверхностный источник нейтронов $q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = q(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) \delta(\vec{r} - \vec{r}_S)$, после интегрирования по объему ΔV уравнения (2.1) и предельного перехода последний член этого уравнения не будет равен нулю

$$\int_{\Delta V} d\vec{r} q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \int_{\Delta V} d\vec{r} q(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) \delta(\vec{r}_S - \vec{r}) = q(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}).$$

В связи с чем условие (2.2) трансформируется в следующее:

$$(\vec{\Omega}, \vec{n}) \psi_1(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) = (\vec{\Omega}, \vec{n}) \psi_2(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) + q(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}), \quad (\vec{\Omega}, \vec{n}) \neq 0. \quad (2.3)$$

Условие на выпуклой границе раздела среды с вакуумом.

Под выпуклой будем понимать такую границу среды с вакуумом, пересечение которой нейтроном по всевозможным направлениям из среды в вакуум не приведет к возврату этого нейтрона в среду при условии, что он сохраняет прямолинейное движение.

В случае отсутствия в вакууме внешних источников нейтронов, рассуждая, как в предыдущем случае, можно получить следующее условие на выпуклой границе раздела среды с вакуумом (рис. 2.3):

$$\psi(\vec{r}_S, E, \vec{\Omega}) = 0 \quad (2.4)$$

для направлений $(\vec{\Omega}, \vec{n}_S) < 0$.

Это же условие можно сформулировать на основе нижеследующего физического соображения. Поскольку в вакууме отсутствует рассеяние нейтронов и нет внешних источников, вылетевшие из среды в вакуум нейтроны обратно не возвращаются, что и отображает условие (2.4).

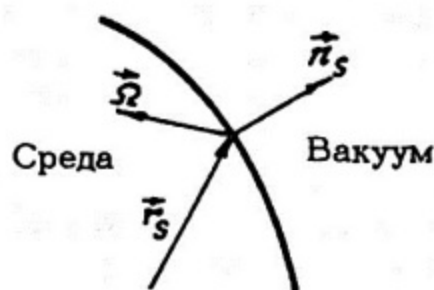


Рис. 2.3. Выпуклая граница среды с вакуумом

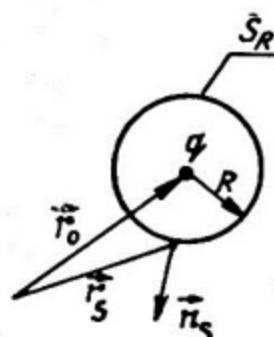


Рис. 2.4. Точечный внешний источник

Условие точечного источника. В среде в пространственной точке \vec{r}_0 расположен точечный источник нейтронов заданной мощности $q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \vec{q}(\vec{r}_0, E, \vec{\Omega}) \delta(\vec{r}_0 - \vec{r})$ (рис. 2.4). Окружим источник сферой радиуса R с центром в точке \vec{r}_0 , проинтегрируем (2.1) по объему сферы и вычислим предел, к которому стремится полученное соотношение при $R \rightarrow 0$. Воспользовавшись теоремой Остроградского - Гаусса, получаем условие точечного источника

$$\lim_{R \rightarrow 0} \oint_{S_R} dS(\vec{\Omega}, \vec{n}_s) \psi(\vec{r}_s, E, \vec{\Omega}) = q(\vec{r}_0, E, \vec{\Omega}), \quad (2.5)$$

позволяющее связать функцию плотности потока нейтронов с мощностью источника.

Условие неотрицательности и ограниченности решения. По физическому смыслу функция плотности потока нейтронов должна быть ограниченной и неотрицательной функцией

$$0 \leq \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) < \infty \quad (2.6)$$

в фазовом пространстве задачи (см. п. 1.1).

2.4. Вид оператора $\vec{\Omega} \nabla$ в различных геометриях

При анализе газокинетического уравнения переноса возникает необходимость иметь конкретные выражения для оператора $\vec{\Omega} \nabla$, описывающего пространственную миграцию нейтронов в среде. Эти выражения нетрудно получить в прямоугольных, сферических и цилиндрических системах координат ([2], с. 46).

Прямоугольная система координат. Положение нейтрона в пространстве определяется переменными x, y, z , направление полета — углами: полярным θ и азимутальным ψ (рис. 2.5). Согласно определению

$$\vec{\Omega} \nabla = \Omega_x \frac{\partial}{\partial x} + \Omega_y \frac{\partial}{\partial y} + \Omega_z \frac{\partial}{\partial z}$$

в рассматриваемой системе координат. Учитывая соотношения

$$\Omega_x = \sin \theta \cos \psi, \quad \Omega_y = \sin \theta \sin \psi, \quad \Omega_z = \cos \theta,$$

получаем следующее выражение для оператора $\vec{\Omega} \nabla$ в прямоугольной системе координат:

$$\vec{\Omega} \nabla = \sin \theta \cos \psi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \sin \psi \frac{\partial}{\partial y} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial z}.$$

Введя обозначение $\mu = \cos \theta$, преобразуем последнее выражение к следующему:

$$\vec{\Omega} \nabla = \sqrt{1-\mu^2} \left(\cos \psi \frac{\partial}{\partial x} + \sin \psi \frac{\partial}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z}. \quad (2.7)$$

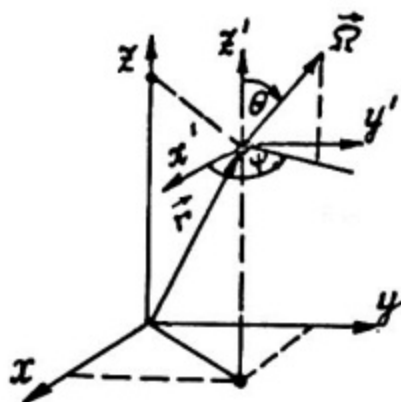


Рис. 2.5. Прямоугольная система координат

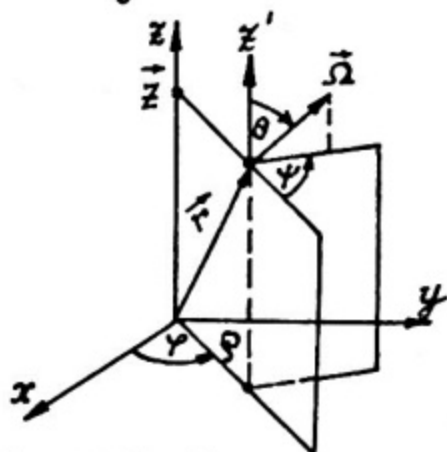


Рис. 2.6. Цилиндрическая система координат

Цилиндрическая система координат. Положение нейтрона в пространстве определяется переменными ρ, φ, z , направление полета — углами θ и ψ , где θ — угол между осью z' и вектором $\vec{\Omega}$, а ψ — угол между плоскостями, образованными соответственно векторами (\vec{r}, \vec{z}) и $(\vec{\Omega}, \vec{z}')$ (рис. 2.6). В этом случае оператор $\vec{\Omega} \nabla$ записывается следующим образом:

$$\vec{\Omega} \nabla = \sqrt{1-\mu^2} \cos \psi \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\rho} \sin \psi \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial \psi} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z},$$

где $\mu = \cos \theta$.

Сферическая система координат, Положение нейтрона в пространстве определяется переменными r, γ, φ , направление полета — углами θ и ψ . Здесь θ — угол между векторами \vec{r} и $\vec{\Omega}$, а ψ — угол между плоскостями, образованными соответственно векторами (\vec{r}, \vec{z}) и $(\vec{r}, \vec{\Omega})$ (рис. 2.7). Оператор $\vec{\Omega} \nabla$ в рассматриваемой системе координат записывается следующим образом:

$$\vec{\Omega} \nabla = \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sqrt{1-\mu^2} \sin \psi}{r \sin \gamma} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} \cos \psi \frac{\partial}{\partial \gamma} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} - \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{r} \sin \psi \operatorname{ctg} \gamma \frac{\partial}{\partial \psi} . \quad (2.8)$$

Здесь по-прежнему использовано обозначение $\mu = \cos \theta$.

Получим вид оператора $\vec{\Omega} \nabla$ в некоторых частных задачах теории переноса нейтронов [2].

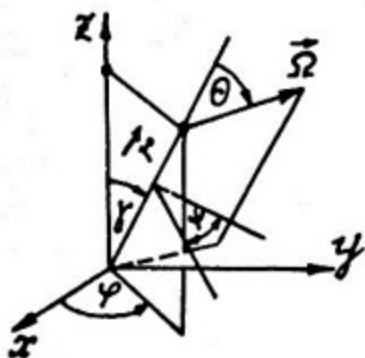


Рис. 2.7. Сферическая система координат

Случай плоской симметрии нейтронного поля. Функция плотности потока нейтронов $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ в прямоугольной системе координат зависит лишь от переменной x и угла θ (см. рис. 2.5) и не зависит от переменных x и y и азимутального угла ψ , образованного вращением вектора $\vec{\Omega}$ вокруг оси z' . Поэтому из (2.7) получаем

$$\vec{\Omega} \nabla = \mu \frac{\partial}{\partial x} . \quad (2.9)$$

Выражение (2.9) можно получить также из следующих рассуждений. Поскольку $\vec{\Omega} \nabla$ — проекция градиента функции $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ на направление $\vec{\Omega}$ или, иначе, производная функции $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ по направлению l , совпадающему с направлением $\vec{\Omega}$, можно записать следующее выражение (рис. 2.8):

$$\vec{\Omega} \nabla \varphi = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{dl} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dl} .$$

Геометрический анализ рис. 2.8 позволяет вычислить следующие соотношения

$$\frac{dz}{dl} = \cos \theta = \mu , \quad \frac{d\theta}{dl} = 0 ,$$

с учетом которых полученное выражение преобразуется к виду (2.9).

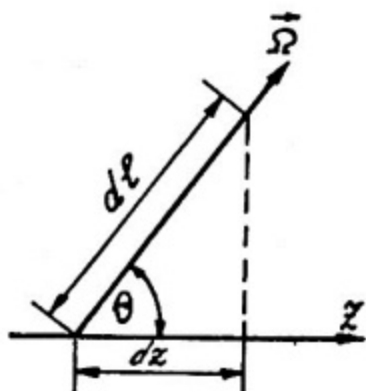


Рис. 2.8. Плоская симметрия нейтронного поля

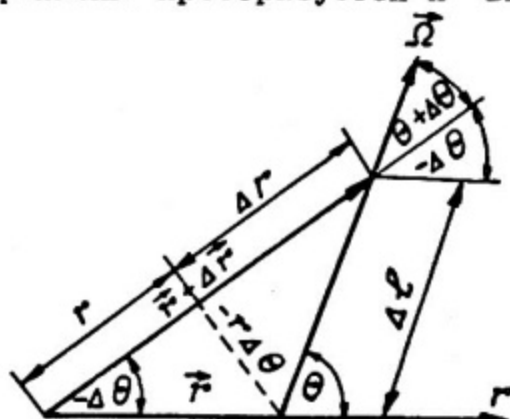


Рис. 2.9. Сферическая симметрия нейтронного поля

Случай сферической симметрии нейтронного поля. Функция плотности потока нейтронов в сферической системе координат зависит лишь от пространственной переменной r и полярного угла θ (см. рис. 2.7) и не зависит от углов φ , φ и ψ . Поэтому из (2.8) получаем:

$$\vec{\Omega} \nabla = \mu \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1-\mu^2}{r} \frac{\partial}{\partial \mu} . \quad (2.10)$$

Выражение (2.10) можно получить также из следующих рассуждений. Поскольку $\vec{\Omega} \nabla$ — производная по направлению l , совпадающему с $\vec{\Omega}$, можно записать следующее выражение (рис. 2.9):

$$\vec{\Omega} \nabla \varphi = \frac{d\varphi}{dl} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dr}{dl} + \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dl} . \quad (2.11)$$

Геометрический анализ рис. 2.9 приводит к следующим соотношениям:

$$\frac{\Delta r}{\Delta l} = \cos(\theta + \Delta\theta), \text{ или в пределе при } \Delta l \rightarrow 0 \quad \frac{dr}{dl} = \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta l} = \cos \theta = \mu;$$

$$-\frac{r \Delta \theta}{\Delta l} = \sin(\theta + \Delta\theta), \text{ или в пределе при } \Delta l \rightarrow 0 \quad -r \frac{d\theta}{dl} = -r \lim_{\Delta l \rightarrow 0} \frac{\Delta \theta}{\Delta l} = \sin \theta.$$

Отсюда $\frac{d\theta}{dl} = -\frac{1}{r} \sin \theta = -\frac{1}{r} \sqrt{1-\mu^2}$. Учитывая, что $\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \frac{d\mu}{d\theta} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \sqrt{1-\mu^2}$, так как $\frac{d\mu}{d\theta} = -\sin \theta = -\sqrt{1-\mu^2}$, из (2.11) получаем (2.10).

2.5. Интегральная формулировка газокинетического уравнения

В предыдущих разделах была получена интегро-дифференциальная формулировка газокинетического уравнения переноса нейтронов. Однако, как отмечалось, возможна интегральная формулировка глобального уравнения теории переноса нейтронов, которая в рамках некоторых ограничений на свойства среды и нейтронного поля преобразуется к интегральному уравнению Пайерлса [9].

Для вывода интегрального газокинетического уравнения сформулируем следующую нейтронно-физическую задачу. Рассмотрим заключенную в выпуклую оболочку среду, граничащую с вакуумом. Генерация нейтронов в среде осуществляется стационарными внешними источниками. Мощность внешних источников нейтронов определяется

функцией $q(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$. В окрестности пространственной точки среды, определяемой радиусом-вектором \vec{r}_0 , расположим элементарную площадку dS (рис. 2.10), нормально ориентированную к некоторому направлению $\vec{\Omega}$. Требуется определить количество нейтронов с энергией из элементарного интервала dE и направлением полета из элементарного телесного угла $d\vec{\Omega}$, пересекающих в единицу времени

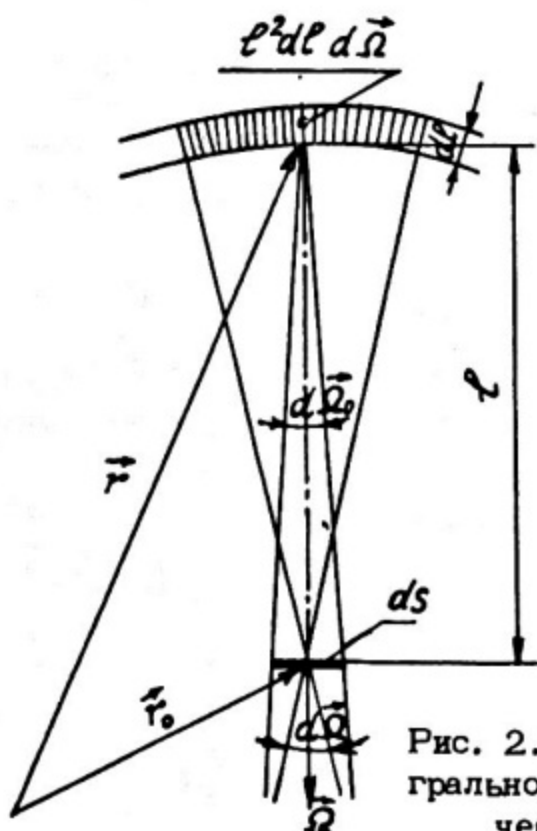


Рис. 2.10. К выводу интегральной формы газокинетического уравнения

площадку dS . Согласно определению плотности потока нейтронов $\varphi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ (п. 1.2), искомая величина есть

$$\varphi(\vec{r}_0, E, \vec{\Omega}) dS dE d\vec{\Omega}.$$

С другой стороны, эту величину можно вычислить из следующих рассуждений. Это есть количество нейтронов, которое, будучи испущено внешними источниками, а также рассеяно в верхнем полупространстве среды (см. рис. 2.10), приобретет энергию из интервала dE и направление полета из телесного угла $d\vec{\Omega}$ и, двигаясь в направлении площадки dS , достигнет и пересечет ее. Подсчитаем данное количество нейтронов. С этой целью в среде построим шаровой слой радиуса l и толщины dl , центр которого расположен в точке \vec{r}_0 . Не все нейтроны, которые испускаются внешними источниками и рассеиваются в шаровом слое, будут двигаться к площадке dS с требуемым направлением полета. Это могут быть лишь нейтроны, которые рассеиваются и излучаются в области шарового слоя объемом $d\vec{r} = l^2 dl d\vec{\Omega}$. Количество нейтронов, испускаемое в единицу времени внешними источниками в указанной области шарового слоя и летящих в направлении площадки dS с требуемыми значениями кинетической энергии и направления полета, определяется выражением

$$q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) d\vec{r} dE d\vec{\Omega}_0,$$

где $\vec{r} = \vec{r}_0 - l\vec{\Omega}$ — радиус-вектор, определяющий пространственную точку, в окрестности которой расположена рассматриваемая область шарового слоя; $d\vec{\Omega}_0 = dS/l^2$ — телесный угол, под которым из точки \vec{r} видна элементарная площадка dS .

Количество нейтронов, рассеивающихся в единицу времени на ядрах среды области шарового слоя и летящих в направлении площадки dS с требуемыми значениями кинетической энергии и направления полета, определяется выражением (см. п. 2.1)

$$\int dE' \int d\vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{r}, E') \varphi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') w(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) d\vec{r} dE d\vec{\Omega}_0.$$

Однако до площадки dS долетят не все из испущенных внешними источниками и рассеянных в шаровой области $l^2 dl d\vec{\Omega}$ нейтронов. В результате ядерных реакций поглощения и рассеяния произойдет ослабление интенсивности рассматриваемого ансамбля нейтронов. Коэффициент ослабления определяется выражением (1.3)

$$\exp \left\{ - \int_0^l dl' \Sigma(\vec{r}', E) \right\},$$

где $\Sigma(\vec{r}, E) = \Sigma_a(\vec{r}, E) + \Sigma_s(\vec{r}, E)$ и $\vec{r}' = \vec{r}_0 - l'\vec{\Omega}$. Таким образом, вклад процессов рассеяния и генерации в выделенной области шарового слоя в плотность потока нейтронов через площадку dS составляет величину

$$\int dE' \int d\vec{\Omega}' \Sigma_s(\vec{r}, E') \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') w(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) + q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \exp\left[-\int_0^l dl' \Sigma(\vec{r}', E)\right] \times d\vec{r}' dE d\vec{\Omega}_0.$$

Суммируя вклады всех слоев от точки \vec{r}_0 до внешней границы среды с вакуумом в направлении $-\vec{\Omega}$, координату которой обозначим через $R_S(\vec{r}_0, \vec{\Omega})$, и учитывая, что

$$d\vec{r}' dE d\vec{\Omega}_0 = l^2 dl d\vec{\Omega} dE \frac{dS}{l^2} = dl dE d\vec{\Omega} dS,$$

получаем

$$\psi(\vec{r}_0, E, \vec{\Omega}) = \int_0^{R_S(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})} dl \exp\left[-\int_0^l dl' \Sigma(\vec{r}', E)\right] \left[\int dE' \int d\vec{\Omega}' \times \Sigma_s(\vec{r}, E') \psi(\vec{r}, E', \vec{\Omega}') w(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) + q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) \right]. \quad (2.12)$$

Уравнение (2.12) – интегральная формулировка газокинетического уравнения переноса нейтронов.

2.6. Эквивалентность двух формулировок газокинетического уравнения

Получим интегральную формулировку (2.12) из интегродифференциального газокинетического уравнения (2.1), доказав тем самым эквивалентность обеих формулировок.

Поскольку для заданного направления $\vec{\Omega}$ переменная \vec{r} подчинена условию $\vec{r} = \vec{r}_0 - l\vec{\Omega}$, можно записать следующую цепочку равенств

$$\frac{d\psi}{dl} = \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{dx}{dl} + \frac{\partial\psi}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial\psi}{\partial z} \frac{dz}{dl} = -\Omega_x \frac{\partial\psi}{\partial x} - \Omega_y \frac{\partial\psi}{\partial y} - \Omega_z \frac{\partial\psi}{\partial z},$$

так как $x = x_0 - l\Omega_x$, $y = y_0 - l\Omega_y$, $z = z_0 - l\Omega_z$.

Поэтому $\frac{d\psi}{dl} = -\vec{\Omega} \nabla \psi$ и уравнение (2.1) можно преобразовать к виду

$$\frac{d\varphi}{dl}(\vec{r}_0 - l\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) - \Sigma(\vec{r}_0 - l\vec{\Omega}, E) \varphi(\vec{r}_0 - l\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) = - \int dE' \int d\vec{\Omega}' \times \\ \times \Sigma_S(\vec{r}_0 - l\vec{\Omega}, E') \varphi(\vec{r}_0 - l\vec{\Omega}, E', \vec{\Omega}') \omega(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) - q(\vec{r}_0 - l\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}).$$

При фиксированных значениях переменных \vec{r}_0 , $\vec{\Omega}$ и E последнее уравнение можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение, определенное на некотором отрезке $[l_0, l]$, решением которого является функция

$$\varphi(\vec{r}_0 - l\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) = \varphi(\vec{r}_0 - l_0\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) \exp \left[\int_{l_0}^l dl' \Sigma(\vec{r}_0 - l'\vec{\Omega}, E) \right] - \\ - \int_{l_0}^l dl' \exp \left[\int_{l'}^l dl'' \Sigma(\vec{r}_0 - l''\vec{\Omega}, E) \right] \left[\int dE' \int d\vec{\Omega}' \Sigma_S(\vec{r}_0 - l'\vec{\Omega}, E') \times \right. \\ \left. \times \varphi(\vec{r}_0 - l'\vec{\Omega}, E', \vec{\Omega}') \omega(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) + q(\vec{r}_0 - l'\vec{\Omega}, E, \vec{\Omega}) \right].$$

Поскольку область, занимаемая средой, ограничена, положим в полученном соотношении $l=0$ и $l_0 = R_S(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})$ (см. п. 2.5). В силу граничного условия (2.4) окончательно получаем

$$\varphi(\vec{r}_0, E, \vec{\Omega}) = \int_0^{R_S(\vec{r}_0, -\vec{\Omega})} dl \exp \left[- \int_0^l dl' \Sigma(\vec{r}', E) \right] \left[\int dE' \int d\vec{\Omega}' \Sigma_S(\vec{r}', E') \times \right. \\ \left. \times \varphi(\vec{r}', E', \vec{\Omega}') \omega(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) + q(\vec{r}', E, \vec{\Omega}) \right],$$

где $\vec{r} = \vec{r}_0 - l\vec{\Omega}$ и $\vec{r}' = \vec{r}_0 - l'\vec{\Omega}$. Данное уравнение полностью совпадает с уравнением (2.12).

2.7. Интегральное уравнение Пайерлса

Преобразуем интегральное газокINETическое уравнение переноса нейтронов (2.12), сделав следующие предположения о свойствах среды и нейтронного поля:

1) полное макроскопическое сечение Σ не зависит от пространственных координат, что позволяет преобразовать экспотенциальный член под интегралом к следующему:

$$\exp \left[- \int_0^l dl' \Sigma(\vec{r}', E) \right] = \exp \left[- \Sigma l \right];$$

2) внешние источники нейтронов изотропны, т.е. функция мощности внешних источников не зависит от направления полета нейтронов

$$q(\vec{r}, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} q_0(\vec{r}, E),$$

где

$$q_0(\vec{r}, E) = \int_{4\pi} d\vec{\Omega} q(\vec{r}, E, \vec{\Omega});$$

3) ядра среды достаточно тяжелые, в связи с чем рассеяние нейтронов оказывается практически изотропными в лабораторной системе координат [1], т.е. все направления полета нейтрона после рассеяния равновероятны и поэтому индикатрису рассеяния можно представить в виде

$$w(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} w(E' \rightarrow E),$$

где

$$w(E' \rightarrow E) = \int_{4\pi} d\vec{\Omega} w(E', \vec{\Omega}' \rightarrow E, \vec{\Omega}).$$

Учитывая, что $l = |\vec{r} - \vec{r}_0|$, преобразуем (2.12) с учетом сделанных предположений к виду

$$\psi(\vec{r}_0, E, \vec{\Omega}) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{R_s(\vec{r}_0, \vec{\Omega})} l^2 dl \frac{\exp(-\Sigma |\vec{r} - \vec{r}_0|)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \left[\int dE' \Sigma_s(\vec{r}, E') \psi_0(\vec{r}, E') w(E' \rightarrow E) + q_0(\vec{r}, E) \right].$$

Здесь введено обозначение $\psi_0(\vec{r}, E) = \int_{4\pi} d\vec{\Omega} \psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$. Проинтегрируем полученное соотношение по всевозможным направлениям полета нейтронов $\vec{\Omega}$. Учитывая введенное обозначение, а также выражение $d\vec{r} = l^2 dl d\vec{\Omega}$ для элементарного пространственного объема, получаем

$$\bar{\psi}_0(\vec{r}_0, E) = \frac{1}{4\pi} \int_V d\vec{r} \frac{\exp(-\Sigma |\vec{r} - \vec{r}_0|)}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^2} \left[\int dE' \Sigma_s(\vec{r}, E') \psi_0(\vec{r}, E') w(E' \rightarrow E) + q_0(\vec{r}, E) \right],$$

где V - объем, занятый средой. Полученное уравнение называется уравнением Пайерлса.

Г Л А В А 3

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОДНОСКОРОСТНОЙ ГАЗОКИНЕТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЕРЕНОСА НЕЙТРОНОВ И МЕТОДЫ ИХ РЕШЕНИЯ

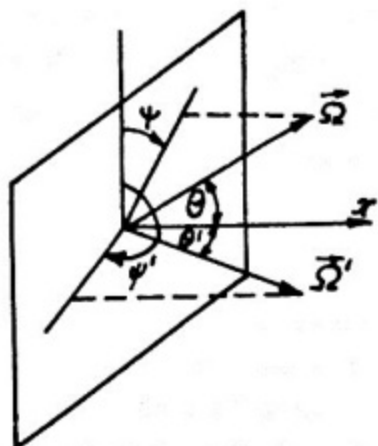
В настоящем разделе в рамках односкоростной газокинетической модели рассматриваются относительно простые задачи, предполагающие плоскую симметрию нейтронного поля и изотропию (либо слабую анизотропию) рассеяния нейтронов на ядрах бесконечной однородной среды. Внимание к этим задачам обусловлено в первую очередь тем, что в данном случае появляется возможность получить точное решение газокинетического уравнения переноса нейтронов. Далее, в ряде случаев оказывается возможным использовать эти решения для поиска распределений нейтронов в конечных средах. И наконец, решения могут быть использованы для анализа и уточнения приближенных моделей теории переноса [10].

3.1. Односкоростное газокинетическое уравнение. Случай плоской симметрии нейтронного поля

Упростим стационарное газокинетическое уравнение переноса (2.1), полагая, что нейтроны не изменяют свою кинетическую энергию при столкновениях с ядрами среды, а внешние источники испускают односкоростные нейтроны. В этом случае функция плотности потока нейтронов зависит лишь от пространственных и угловых переменных $\psi = \psi(\vec{r}, \vec{\Omega})$ и подчиняется интегро-дифференциальному уравнению

$$\vec{\Omega} \nabla \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) + \Sigma(\vec{r}) \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \Sigma_s(\vec{r}) \int d\vec{\Omega}' \psi(\vec{r}, \vec{\Omega}') \omega(\vec{\Omega}' - \vec{\Omega}) + q(\vec{r}, \vec{\Omega}). \quad (3.1)$$

Пусть свойства среды зависят лишь от одной пространственной переменной (например, x), а создаваемое внешними источниками поле нейтронов имеет форму плоской волны, т.е. зависит от одной пространственной переменной x , а зависимость



от угловых переменных выражается только через угол θ между направлением полета нейтрона $\vec{\Omega}$ и осью x (рис. 3.1)

$$q(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{2\pi} q(x, \theta),$$

где

$$q(x, \theta) = \int_0^{2\pi} d\psi q(\vec{r}, \vec{\Omega}).$$

Понятно, что в этом случае распределение плотности потока нейтронов в среде имеет также форму плоской волны, т.е. зависит лишь от пространственной переменной x и угла θ . От азимутального угла ψ функция плотности потока нейтронов не зависит, так как не зависит от пространственных переменных y и z . Учитывая это, введем обозначение

Рис. 3.1. Независимые переменные в задаче о плоской симметрии нейтронного поля

где $\mu = \cos \theta$. Аналогично $q(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{2\pi} q(x, \mu)$. Индикатриссу рассеяния определим соотношением $w(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = w(\mu_0)$, где $\mu_0 = (\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) = \cos \theta_0$, полагая, что она зависит лишь от угла между направлениями полета нейтрона до ($\vec{\Omega}'$) и после ($\vec{\Omega}$) рассеяния (см. рис. 3.1). Покажем, что для этого угла справедливо выражение

$$\vec{\Omega} \nabla \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{\mu}{2\pi} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \mu),$$

$$\Sigma(\vec{r}) \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{2\pi} \Sigma(x) \varphi(x, \mu),$$

где $\mu = \cos \theta$. Аналогично $q(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \frac{1}{2\pi} q(x, \mu)$. Индикатриссу рассеяния определим соотношением $w(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = w(\mu_0)$, где $\mu_0 = (\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) = \cos \theta_0$, полагая, что она зависит лишь от угла между направлениями полета нейтрона до ($\vec{\Omega}'$) и после ($\vec{\Omega}$) рассеяния (см. рис. 3.1). Покажем, что для этого угла справедливо выражение

$$\mu_0 = \cos \theta_0 = \mu \mu' + \sqrt{1 - \mu^2} \sqrt{1 - \mu'^2} \cos(\psi - \psi'), \quad (3.2)$$

где $\mu = \cos \theta$ и $\mu' = \cos \theta'$.

Действительно, $(\vec{\Omega}', \vec{\Omega}) = \Omega'_x \Omega_x + \Omega'_y \Omega_y + \Omega'_z \Omega_z$. Здесь проекции вектора $\vec{\Omega}$ на оси прямоугольной системы координат определены формулами

$$\Omega_x = \sin \theta \cos \psi = \sqrt{1-\mu^2} \cos \psi;$$

$$\Omega_y = \sin \theta \sin \psi = \sqrt{1-\mu^2} \sin \psi;$$

$$\Omega_z = \cos \theta = \mu.$$

Аналогичный вид имеют формулы для проекций Ω'_x , Ω'_y , Ω'_z вектора $\vec{\Omega}'$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \sqrt{1-\mu'^2} \cos \psi' \sqrt{1-\mu^2} \cos \psi + \sqrt{1-\mu'^2} \sin \psi' \sqrt{1-\mu^2} \sin \psi + \mu \mu' = \\ &= \mu \mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} (\cos \psi \cos \psi' + \sin \psi \sin \psi') = \mu \mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\psi - \psi'). \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \Sigma_S(\vec{r}) \int d\vec{\Omega}' \varphi(\vec{r}, \vec{\Omega}') \omega(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) &= \frac{1}{2\pi} \Sigma_S(x) \int_0^{2\pi} d\psi' \int_0^\pi d\theta' \sin \theta' \times \\ \times \varphi(x, \theta') \omega(\psi', \theta' \rightarrow \psi, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \Sigma_S(x) \int_{-1}^{+1} d\mu' \varphi(x, \mu') \omega(\mu_0), \end{aligned}$$

и уравнение, определяющее распределение нейтронов в исследуемой задаче, имеет вид

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \mu) + \Sigma(x) \varphi(x, \mu) &= \\ = \Sigma_S(x) \int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-1}^{+1} d\mu' \varphi(x, \mu') \omega(\mu_0) + q(x, \mu). \end{aligned} \quad (3.3)$$

В случае, когда рассеяние нейтронов сферически симметрично в лабораторной системе координат индикатрисса
 рассеяния не зависит от угловых переменных $w(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = w(\mu_0) = const$
 и может быть вычислена из нормировки

$$\int_{4\pi} d\vec{\Omega} w(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{+1} d\mu w(\mu_0) = 1.$$

Действительно, поскольку

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{+1} d\mu = 4\pi,$$

получаем выражение для индикатриссы в случае сферической симметрии рассеяния

$$w(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) = w(\mu_0) = \frac{1}{4\pi},$$

позволяющее упростить уравнение (3.3)

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \mu) + \Sigma(x) \varphi(x, \mu) = \frac{\Sigma_s(x)}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' \varphi(x, \mu') + q(x, \mu). \quad (3.4)$$

3.2. Односкоростная задача с плоской симметрией нейтронного поля и сферически симметричным рассеянием на ядрах среды. Метод Кейза

Рассмотрим одну из простейших задач односкоростной газокинетической теории — задачу о пространственно-угловом распределении нейтронов, генерируемых плоским бесконечно протяженным источником в бесконечной однородной среде, изотропно рассеивающей нейтроны. Используемый для решения этой задачи метод, получивший название метода Кейза [5] по существу является методом разделения переменных, нашедшим широкое применение в практике решения задач математической физики.

Прежде всего дадим математическую постановку задачи. Нейтроны в среде генерируются плоским бесконечно протяженным внешним источником заданной мощности $q(x, \mu) = q(\mu) \delta(x - x_0)$. Здесь x_0 — точка пространства среды, в которой размещен этот источник. Поэтому нейтронное поле обладает свойством плоской симметрии и определяется уравнением

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \mu) + \Sigma \varphi(x, \mu) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' \varphi(x, \mu') + q(\mu) \delta(x - x_0), \quad (3.5)$$

которое получено из (3.4) подстановкой заданной функции мощности внешнего источника. При этом функция плотности потока нейтронов согласно общим условиям (2.3) и (2.6) должна быть неотрицательной и ограниченной по величине во всей области изменения фазовых переменных задачи

$$0 \leq \varphi(x, \mu) < \infty \quad (3.6)$$

и на поверхности внешнего источника нейтронов должна удовлетворять следующему условию

$$\mu \varphi(x_0^+, \mu) = \mu \varphi(x_0^-, \mu) + q(\mu). \quad (3.7)$$

Здесь через x_0^- и x_0^+ соответственно обозначены левый и правый пределы, к которым стремится координата $x = x_0 \pm \varepsilon$, $\varepsilon \geq 0$, $x_0^\pm = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (x_0 \pm \varepsilon)$.

Прежде чем отыскивать решение сформулированной задачи (3.5) - (3.7), рассмотрим соответствующую ей однородную задачу и некоторые свойства ее решения.

Метод разделения переменных. Частные решения задачи и некоторые их свойства

Рассмотрим соответствующее (3.5) однородное уравнение

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \mu) + \Sigma \varphi(x, \mu) = \frac{\Sigma_s}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' \varphi(x, \mu').$$

Преобразуем его, разделив почленно на $\Sigma \neq 0$. Введя обозначение $h = \Sigma_s / \Sigma$, в результате получим

$$\frac{\mu}{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \mu) + \varphi(x, \mu) = \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' \varphi(x, \mu'). \quad (3.8)$$

Частное решение этого уравнения, на основе вышеизложенного, ищем в виде плоской волны

$$\varphi_x(x, \mu) = f_x(\mu) \exp\left(-\frac{\Sigma x}{\mu}\right),$$

с функцией $f_x(\mu)$, зависящей от угловой переменной μ . Полагая, что

$$\int_{-1}^{+1} d\mu f_x(\mu) \neq 0$$

(справедливость этого соотношения будет показана ниже), в дальнейшем удобно принять следующую нормировку

$$\int_{-1}^{+1} d\mu f_x(\mu) = 1. \quad (3.9)$$

Подставляя частное решение в (3.8), получаем уравнение, определяющее функцию $f_x(\mu)$:

$$\left(1 - \frac{\mu}{x}\right) f_x(\mu) = \frac{h}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu' f_x(\mu'), \quad (3.10)$$

которое с учетом нормировки (3.9) преобразуется к уравнению $(x-\mu)f_x(\mu) = hx$. Так как изменение угловой переменной ограничено интервалом $[-1, +1]$, то при любых значениях параметра x из промежутка

$$|x| > 1 \quad (3.11)$$

функция $f_x(\mu)$ не имеет особенностей и определяется выражением

$$f_x(\mu) = \frac{hx}{2(x-\mu)}. \quad (3.12)$$

Если же величина параметра x расположена в промежутке

$$|x| \leq 1, \quad (3.13)$$

функция $f_x(\mu)$ имеет особенность при значении угловой переменной

$$\mu = \mu^* = x \quad (3.14)$$

и нуждается в обобщении. С этой целью к правой части выражения (3.12) добавим член $\gamma(x)\delta(\mu^*-\mu)$, где $\gamma(x)$ — пока что произвольная функция. Нетрудно видеть, что функция

$$f_x(\mu) = \frac{hx}{2(x-\mu)} + \gamma(x)\delta(\mu^*-\mu) \quad (3.15)$$

по-прежнему удовлетворяет уравнению (3.10). В этом можно убедиться, подставив (3.15) в это уравнение

$$\frac{h\alpha}{2} + (\alpha - \mu)\gamma(\alpha)\delta(\mu^* - \mu) = \frac{h\alpha}{2}$$

и учитывая равенство (3.14), а также то, что функция Дирака ([7], с. 793) по определению удовлетворяет соотношению $x\delta(x) \equiv 0$.

Для значений α из промежутка, определяемого соотношением (3.11), (3.15) автоматически преобразуется в (3.12), поскольку в этом случае значение $\mu^* > 1$ и располагается вне интервала изменения угловой переменной $\mu \in [-1; +1]$. Если же значение параметра α находится в пределах промежутка, определяемого соотношением (3.13), соответствующим выбором функции $\gamma(\alpha)$ можно обеспечить выполнение нормировочного соотношения (3.9), поскольку для функции Дирака справедливо выражение $\int dx \delta(x) = 1$.

Рассмотрим отдельно случаи, определяемые соотношениями (3.11), (3.13).

Дискретные собственные функции и собственные значения

Интегрируя выражение (3.15) для функции $f_\alpha(\mu)$ по угловой переменной μ в интервале $[-1; +1]$ с учетом принятой нормировки (3.9) и ограничения (3.11), получаем выражение для расчета параметра α

$$\frac{h\alpha}{2} \ln \frac{1 + \frac{1}{\alpha}}{1 - \frac{1}{\alpha}} = 1.$$

Воспользовавшись равенством ([5], с. 77)

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+z}{1-z} = \text{Ar th } z,$$

перепишем полученное выражение

$$\frac{1}{h\alpha} = \text{Ar th } \frac{1}{\alpha}. \quad (3.16)$$

Это трансцендентное уравнение позволяет определить искомые значения параметра α . На рис. 3.2 изображены графики функций $\text{Ar th } \frac{1}{\alpha}$ и $\frac{1}{h\alpha}$. При этом учтено, что в исследу-

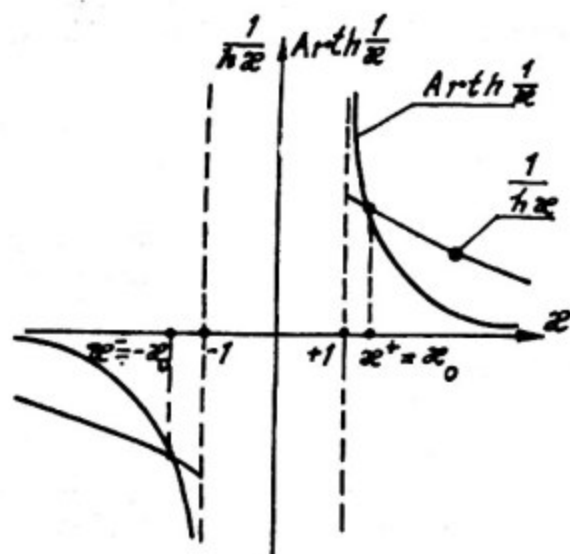


Рис. 3.2. Корни трансцендентного уравнения

дуюмом случае $k = \Sigma_s / \Sigma \leq 1$. Как видно из рисунка, трансцендентное уравнение в данном случае имеет два действительных корня. Эти корни равны по модулю и отличаются знаком $x^+ = -x^- = x_0$, $x_0 > 1$. При $k \rightarrow 0$ ($\Sigma_a \gg \Sigma_s$ - случай сильного поглощения нейтронов ядрами среды) корни трансцендентного уравнения близки к единице $x_0 \rightarrow 1$. При $k \rightarrow 1$ ($\Sigma_s \gg \Sigma_a$ - случай слабого поглощения) значение корней неограниченно растет $x_0 \rightarrow \infty$.

Соответствующие им угловые функции определяются выражением

$$f_0^\pm(\mu) = \pm \frac{kx_0}{2(\pm x_0 - \mu)} \quad (3.17)$$

Корни x^+ и x^- называются дискретными собственными числами уравнения (3.10), а соответствующие им угловые функции $f_0^+(\mu)$ и $f_0^-(\mu)$ - дискретными собственными функциями этого уравнения.

Частные решения однородного уравнения (3.8) в исследуемом случае, таким образом, имеют вид

$$\varphi_0^\pm(x, \mu) = \pm \frac{kx_0}{2(\pm x_0 - \mu)} \exp\left(\mp \frac{\Sigma x}{x_0}\right)$$

Завершая рассмотрение исследуемого случая, укажем способ вычисления корней x^+ и x^- . Эти корни можно вычислить, воспользовавшись соотношением ([5], с. 80)

$$\frac{1}{z} \text{Arth } z = 1 + \frac{z^2}{3} + \frac{z^4}{5} + \frac{z^6}{7} + \dots$$

Учитывая, что

$$\frac{1}{k} = \frac{\Sigma}{\Sigma_S} = \frac{\Sigma_S + \Sigma_a}{\Sigma_S} = 1 + \frac{\Sigma_a}{\Sigma_S},$$

из трансцендентного уравнения (3.16) получаем

$$\frac{1}{3x_0^2} + \frac{1}{5x_0^4} + \frac{1}{7x_0^6} + \dots = \frac{\Sigma_a}{\Sigma_S}. \quad (3.18)$$

Величина x_0 зависит только от свойств среды. Параметр $\frac{\Sigma}{x_0}$, также зависящий только от свойств среды, обычно называют материальным параметром среды.

В слабопоглощающей нейтроны среде ($k \approx 1$) $x_0 \gg 1$ и в равенстве (3.18) можно ограничиться лишь квадратичным членом $1/3x_0^2 \approx \Sigma_a/\Sigma_S$. В этом случае $\Sigma \approx \Sigma_S$ и

$$\frac{\Sigma}{x_0} \approx \Sigma \sqrt{3 \frac{\Sigma_a}{\Sigma_S}} \approx \sqrt{3 \Sigma_a \Sigma_S} = \frac{1}{L},$$

где L — длина диффузии односкоростных нейтронов ([10], с. 33).

Если среда сильно поглощает нейтроны ($k \ll 1$), $x_0 \approx 1$. В этом случае $\Sigma \approx \Sigma_a$ и $\frac{\Sigma}{x_0} \approx \frac{1}{l_a}$, где l_a — средняя длина пробега нейтронов по отношению к процессу поглощения.

Континуум собственных функций и собственных значений

В случае ограничения (3.13) параметр μ^* , определяемый выражением (3.14), имеет значения из интервала $[-1; +1]$. Поэтому для обеспечения принятой нормировки (3.9) для функции $f_x(\mu)$, необходимо указать способ интегрирования первого расходящегося члена в (3.15). С этой целью воспользуемся понятием главного значения интеграла в смысле Коши ([7], с. 116). В исследуемом случае это значение определим соотношением

$$P \left[\frac{kx}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{d\mu}{x-\mu} \right] = \frac{kx}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{\mu^* - \varepsilon} \frac{d\mu}{x-\mu} + \int_{\mu^* + \varepsilon}^{+1} \frac{d\mu}{x-\mu} \right].$$

Вычислим предельное соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{\mu^* - \varepsilon} \frac{d\mu}{x - \mu} + \int_{\mu^* + \varepsilon}^{+1} \frac{d\mu}{x - \mu} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\ln \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{\mu^* - \varepsilon}{x}} + \ln \frac{1 - \frac{\mu^* + \varepsilon}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \ln \left(\frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \frac{1 - \frac{\mu^* + \varepsilon}{x}}{1 - \frac{\mu^* - \varepsilon}{x}} \right).$$

Учитывая соотношение (3.14), окончательно получаем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{-1}^{\mu^* - \varepsilon} \frac{d\mu}{x - \mu} + \int_{\mu^* + \varepsilon}^{+1} \frac{d\mu}{x - \mu} \right] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1 + \frac{1}{x}}{1 - \frac{1}{x}} \frac{\left(-\frac{\varepsilon}{x}\right)}{\left(\frac{\varepsilon}{x}\right)} = \ln \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} = 2 \operatorname{Arth} x.$$

Интегрируя функцию $f_x(\mu)$, определенную выражением (3.15), по угловой переменной μ с учетом нормировки (3.9) и последнего выражения, находим неизвестную функцию $\gamma(x)$

$$\gamma(x) = 1 - \frac{hx}{2} \ln \frac{\frac{1}{x} + 1}{\frac{1}{x} - 1} = 1 - hx \operatorname{Arth} x, \quad |x| \leq 1.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае существует континуум собственных функций $f_x(\mu)$ и соответствующих им собственных значений x уравнения (3.10):

$$f_x(\mu) = p \left[\frac{hx}{2} \frac{x}{(x - \mu)} \right] + \gamma(x) \delta(\mu^* - \mu) \quad \text{для всех } |x| \leq 1. \quad (3.19)$$

Полученное выражение для собственной функции в исследуемом случае не определено при значениях $\mu = \mu^* = x$. Тем не менее его можно использовать при интегрировании по угловой переменной, поскольку соответствующие частные решения однородного уравнения (3.8) в исследуемом случае определяются выражением

$$\varphi_x(x, \mu) = \left\{ p \left[\frac{hx}{2(x - \mu)} \right] + \gamma(x) \delta(\mu^* - \mu) \right\} \exp \left\{ -\frac{\Sigma x}{x} \right\}, \quad |x| \leq 1.$$

В заключение покажем справедливость принятого соотношения

$$\int_{-1}^{+1} d\mu f_x(\mu) \neq 0.$$

Действительно, если нормировочный интеграл (3.9) обращается в нуль, то из (3.10) следует, что $(x-\mu)f_x(\mu)=0$, в связи с чем $f_x(\mu) \sim \delta(\mu^*- \mu)$. Но поскольку $\int_{-1}^{+1} d\mu \delta(\mu^*- \mu) \neq 0$, возникает противоречие с исходным предположением о значении нормировочного интеграла. Это противоречие обосновывает принятое неравенство.

Полнота и ортогональность собственных функций

Найденная система из двух дискретных собственных функций $f_0^\pm(\mu)$ и континуума собственных функций $f_x(\mu)$ ($|x| \leq 1$), определяемых соответственно выражениями (3.17) и (3.19), обладает свойством полноты на отрезке $\mu \in [-1; +1]$ относительно допустимых решений уравнения (3.5). Это означает, что решение данного уравнения может быть представлено в виде

$$\varphi(x, \mu) = A_0^+ f_0^+(\mu) \exp\left(-\frac{\Sigma x}{x_0}\right) + A_0^- f_0^-(\mu) \exp\left(\frac{\Sigma x}{x_0}\right) + \int_{-1}^{+1} dx B(x) f_x(\mu) \exp\left(-\frac{\Sigma x}{x}\right),$$

где значения коэффициентов A_0^\pm и $B(x)$ находятся из соответствующих ограничений (3.6) и граничных условий (3.7) рассматриваемой нейтронно-физической задачи. Таким образом, найденная ранее система собственных функций позволяет относительно просто сконструировать в пределах односкоростной газокинетической модели функцию пространственно-углового распределения нейтронного поля, генерируемого в бесконечной однородной среде внешним плоским бесконечно-протяженным стационарным источником.

Соответствующая теорема полноты системы собственных функций $f_0^\pm(\mu)$ и $f_x(\mu)$ ($|x| \leq 1$) сформулирована и доказана в работе [5] (с. 88). Ввиду ее относительной сложности и достаточной громоздкости, а также желания разумно упростить математическую сторону изложения материала, мы воспользуемся в дальнейшем результатами этой теоремы без доказательства. Здесь же ограничимся лишь рассмотрением полезного свойства ортонормированности указанной совокупности собственных функций на отрезке $\mu = [-1; +1]$, которое позволяет удобно вычислять коэффициенты A_0^\pm и $B(x)$.

Собственные функции $f_0^\pm(\mu)$ и $f_x(\mu)$ ($|x| \leq 1$) однородной задачи (3.10) ортогональны на отрезке $\mu = [-1; +1]$, т.е. удовлетворяют равенству

$$\int_{-1}^{+1} d\mu \mu f_{\xi}^{\pm}(\mu) f_{\xi'}^{\pm}(\mu) = 0 \quad (\text{для } \xi \neq \xi'). \quad (3.20)$$

Здесь индексами ξ и ξ' обозначены как дискретные собственные значения $\pm x_0$, отвечающие собственным функциям $f_0^{\pm}(\mu)$ и определяющиеся выражением (3.16), так и собственные значения из промежутка $|\alpha| \leq 1$, отвечающие континууму собственных функций $f_{\alpha}(\mu)$. Покажем справедливость соотношения ортогональности. Действительно, поскольку рассматриваемые собственные функции удовлетворяют уравнению (3.10), воспользуемся этим уравнением, переписав его с учетом нормировки (3.9) в виде

$$\left(1 - \frac{\mu}{\xi}\right) f_{\xi}^{\pm}(\mu) = \frac{h}{2}; \quad \left(1 - \frac{\mu}{\xi'}\right) f_{\xi'}^{\pm}(\mu) = \frac{h}{2}.$$

Умножая первое из этих равенств на функцию $f_{\xi'}^{\pm}(\mu)$, а второе — на функцию $f_{\xi}^{\pm}(\mu)$, интегрируя полученный результат в интервале $\mu \in [-1, +1]$ с последующим почленным вычитанием конечных выражений, приходим к следующему соотношению

$$\left(\frac{1}{\xi'} - \frac{1}{\xi}\right) \int_{-1}^{+1} d\mu \mu f_{\xi}^{\pm}(\mu) f_{\xi'}^{\pm}(\mu) = \frac{h}{2} \left[\int_{-1}^{+1} d\mu f_{\xi'}^{\pm}(\mu) - \int_{-1}^{+1} d\mu f_{\xi}^{\pm}(\mu) \right].$$

Из этого соотношения, учитывая принятую нормировку (3.9) и неравенство

$$\left(\frac{1}{\xi'} - \frac{1}{\xi}\right) \neq 0$$

для собственных чисел, соответствующих различным собственным функциям $f_{\xi}^{\pm}(\mu)$ и $f_{\xi'}^{\pm}(\mu)$, получаем искомое условие ортогональности (3.20).

Необходимые в дальнейшем нормировочные соотношения для собственных функций $f_0^{\pm}(\mu)$ и $f_{\alpha}(\mu)$ ($|\alpha| \leq 1$) вычислены в работе [5] (с. 84, 88) и приводятся здесь без вывода

$$N_0^{\pm} = \int_{-1}^{+1} d\mu \mu [f_0^{\pm}(\mu)]^2 = \pm \frac{h}{2} x_0^3 \left[\frac{h}{x_0^2 - 1} - \frac{1}{x_0^2} \right]; \quad (3.21)$$

$$N(\alpha) = \int_{-1}^{+1} d\mu \mu [f_{\alpha}(\mu)]^2 = \alpha \left[\gamma^2(\alpha) + \frac{\alpha^2 h^2 \alpha^2}{4} \right]. \quad (3.22)$$

Метод собственных функций

Приведем основные этапы вычислительной процедуры метода собственных функций ([7], с. 479). Пусть однородная задача

$$\hat{L} f_k(r) = \xi_k f_k(r), \quad k=1,2,\dots,\infty,$$

определяет систему собственных функций $\{f_k(r)\}$ и собственных значений $\{\xi_k\}$ оператора \hat{L} . Рассмотрим неоднородную задачу

$$\hat{L} \Phi(r) = q(r),$$

где функция источника $q(r)$ известна и удовлетворяет необходимым условиям разрешимости задачи ([7], с. 473). Если система собственных функций $\{f_k(r)\}$ полна и ортонормирована, решение неоднородной задачи можно сконструировать в виде

$$\Phi(r) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k(r).$$

Коэффициенты a_k определяются из следующей вычислительной процедуры. Представим источник $q(r)$ в виде ряда по собственным функциям

$$q(r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k f_k(r).$$

Здесь $b_k = \frac{1}{N_{kk}} \int dr q(r) f_k(r)$ и $N_{kk} = \int dr f_k^2(r)$. Подставляя выражения для функций $\Phi(r)$ и $q(r)$ в виде рядов в неоднородное уравнение, получаем

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \xi_k f_k(r) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k f_k(r).$$

Из последнего выражения вычисляем коэффициенты $a_k = b_k / \xi_k$, $k=1,2,\dots,\infty$. Применим рассмотренную процедуру к решению задачи (3.5) – (3.7). Для упрощения выкладок будем считать, что внешний источник нейтронов расположен в начале системы координат, т.е. $x_0 = 0$. Общее решение задачи (3.5) – (3.7), как было показано в предыдущих разделах, определяется выражением

$$\varphi(x, \mu) = A_0^+ f_0^+(\mu) \exp\left(-\frac{\Sigma x}{\alpha_0}\right) + A_0^- f_0^-(\mu) \exp\left(\frac{\Sigma x}{\alpha_0}\right) + \int_{-1}^{+1} dx B(x) f_x(\mu) \exp\left(-\frac{\Sigma x}{\alpha}\right).$$

Рассмотрим технику вычисления констант A_0^\pm и $B(x)$. Поскольку согласно условию (3.6) функция плотности потока нейтронов $\varphi(x, \mu)$ должна быть ограниченной по величине, необходимо в положительном полупространстве среды ($x \geq 0$) потребовать $A_0^- = 0$; $B(x) = 0$ для значений $x < 0$ и, соответственно, в отрицательном полупространстве среды ($x \leq 0$) потребовать $A_0^+ = 0$; $B(x) = 0$ для значений $x > 0$. Эти требования приводят к следующим выражениям для функции плотности потока нейтронов

$$\left. \begin{aligned} \varphi(x, \mu) &= A_0^+ f_0^+(\mu) \exp\left(-\frac{\Sigma x}{\alpha_0}\right) + \int_0^1 dx B(x) f_x(\mu) \exp\left(-\frac{\Sigma x}{\alpha}\right), x \geq 0, \\ \varphi(x, \mu) &= A_0^- f_0^-(\mu) \exp\left(\frac{\Sigma x}{\alpha_0}\right) - \int_{-1}^0 dx B(x) f_x(\mu) \exp\left(-\frac{\Sigma x}{\alpha}\right), x < 0. \end{aligned} \right\} (3.23)$$

В последнем выражении перед каждым членом можно поставить знак "-", поскольку константы A_0^- и $B(x)$ для значений $x < 0$ пока неопределены. Подставляя выражения (3.23) в условие сшивания решения (3.7), получаем

$$\mu A_0^+ f_0^+(\mu) + \int_0^1 dx B(x) f_x(\mu) \mu = -\mu A_0^- f_0^-(\mu) - \int_{-1}^0 dx B(x) f_x(\mu) \mu + q(\mu)$$

или, иначе,

$$\mu A_0^+ f_0^+(\mu) + \mu A_0^- f_0^-(\mu) + \mu \int_{-1}^{+1} dx B(x) f_x(\mu) = q(\mu).$$

Последнее выражение есть не что иное, как разложение функции источника $q(\mu)$ по полной системе собственных функций $f_0^\pm(\mu)$ и $f_x(\mu)$ уравнения (3.10). Коэффициенты этого разложения определим, воспользовавшись свойством ортонормированности (3.20):

$$A_0^\pm = \frac{1}{N_0^\pm} \int_{-1}^{+1} d\mu q(\mu) f_0^\pm(\mu); \quad (3.24)$$

$$B(x) = \frac{1}{N(x)} \int_{-1}^{+1} d\mu q(\mu) f_x(\mu). \quad (3.25)$$

Анализ решения задачи в случае внешнего источника

Проведем анализ пространственного поведения полной плотности потока нейтронов

$$\Phi(x) = \int_{-1}^{+1} d\mu \varphi(x, \mu)$$

в случае, если плоский источник нейтронов равномерно испускает нейтроны по всем направлениям

$$q(x, \mu) = q(\mu) \delta(x - x_0) = \frac{q_0}{2} \delta(x - x_0).$$

Принятое выражение для функции источника обеспечивает нормировку

$$\int_{-1}^{+1} d\mu q(\mu) = q_0,$$

где q_0 — количество односкоростных нейтронов, испускаемых в единицу времени с единицы поверхности источника. Решение задачи в этом случае будет симметрично относительно плоскости источника и согласно выражению (3.23) может быть записано

$$\varphi(x, \mu) = A_0^+ f_0^+(\mu) \exp\left(-\frac{\Sigma x}{x_0}\right) + \int_0^1 dx B(x) f_x(\mu) \exp\left(-\frac{\Sigma x}{x}\right), \quad x \geq 0.$$

Здесь коэффициенты A_0^+ и $B(x)$ определены в (3.24) — (3.25). С учетом принятой нормировки (3.9) и явного вида функции мощности внешнего источника нейтронов получаем следующее выражение, определяющее пространственное поведение полной плотности потока нейтронов в среде:

$$\Phi(x) = \frac{q_0}{2} \left[\frac{1}{N_0^+} \exp\left(-\frac{\Sigma x}{x_0}\right) + \int_0^1 dx \frac{\exp\left(-\frac{\Sigma x}{x}\right)}{N(x)} \right].$$

Нормировочные множители N_0^+ и $N(x)$ определены выражениями (3.21) — (3.22).

С удалением от области внешнего источника ($x \rightarrow \infty$) второй член решения затухает быстрее, чем первый, поскольку $x < x_0$, $x \in [0; 1]$. Следовательно, на достаточно больших

расстояниях от области внешнего источника нейтронов плотность потока нейтронов $\Phi(x)$ определяется исключительно первым членом (если конечно он не затухает на этих расстояниях до малых величин)

$$\Phi_{ac}(x) = \frac{q_0}{2N_0^+} \exp\left(-\frac{\Sigma x}{x_0}\right),$$

который обычно называют асимптотическим решением задачи. Второй член, именуемый сингулярным (переходным) решением,

$$\Phi_c(x) = \frac{q_0}{2} \int_0^1 dx \frac{\exp\left(-\frac{\Sigma x}{x}\right)}{N(x)}$$

дает вклад в функцию плотности потока нейтронов лишь в области, непосредственно примыкающей к внешнему источнику. Опираясь на эти выводы, проведем анализ пространственного поведения полной плотности потока нейтронов в случаях сильного ($\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s} \gg 1$) и слабого ($\frac{\Sigma_a}{\Sigma_s} \ll 1$) поглощения нейтронов средой.

В случае сильного поглощения $k = \frac{\Sigma_s}{\Sigma} \ll 1$ и $x_0 \approx 1$. Значение нормировки N_0^+ для этого случая вычислено в работе [5] (с. 119):

$$N_0^+ \approx \frac{k}{2} x_0 \left[\frac{k}{4 \exp\left(-\frac{2}{k}\right)} - 1 \right].$$

Оно неограниченно растет $N_0^+ \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow 0$. В связи с этим асимптотическая часть решения $\Phi_{ac}(x)$ оказывается бесконечно малой по величине во всей области среды. Поэтому на больших расстояниях от источника нейтронное поле в среде отсутствует, а в окрестности источника оно определяется исключительно сингулярным членом $\Phi_c(x)$.

Исследуем поведение сингулярного члена в окрестности источника. Из (3.22) можно получить

$$\lim_{k \rightarrow 0} N(x) = x.$$

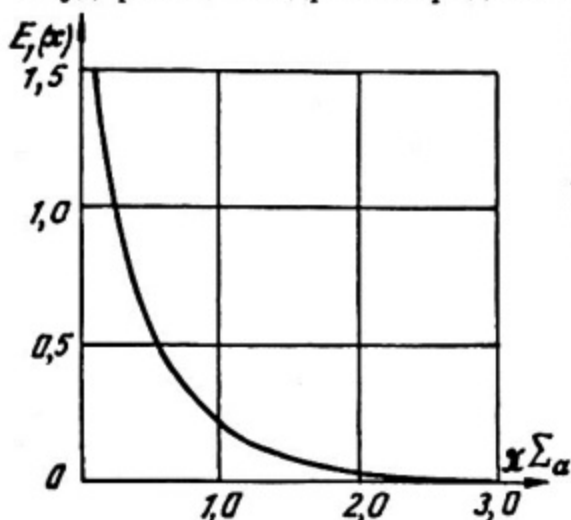
Поэтому зависимость сингулярного члена от пространственной переменной x определяется интегральной показательной функцией $E_1(x)$ ([7], с. 734):

$$\Phi_c(x) = \frac{q_0}{2} E_1(x),$$

где

$$E_1(x) = \int_0^1 dx \frac{\exp(-\frac{\Sigma_a x}{x})}{x} = -0,5772 - \ln \Sigma_a x + \frac{\Sigma_a x}{1 \cdot 1!} - \frac{(\Sigma_a x)^2}{2 \cdot 2!} + \frac{(\Sigma_a x)^3}{3 \cdot 3!} - \dots$$

(в исследуемом случае $\Sigma \approx \Sigma_a$). График этой функции приведен на рис. 3.3 и является распределением не испытавших соударений с ядрами среды нейтронов источника (прямопрострель-



ные нейтроны ([5], с. 126)). Из рис. 3.3 следует, что сингулярная часть решения существенно затухает на расстояниях $x \gg (1-2)l_a$ от источника нейтронов, где l_a — средняя длина пробега нейтронов в среде по отношению к процессу поглощения. Поэтому в случае сильного поглощения нейтронное поле существует лишь в области, непосредственно примыкающей к источнику, и по существу определяется только прямопрострельными нейтронами.

Рис. 3.3. Интегральная показательная функция

В случае слабого поглощения нейтронов средой $k \approx 1$ материальный параметр Σ/x_0 , как было ранее установлено, принимает значение $\Sigma/x_0 = \frac{1}{L}$, где длина диффузии $L \gg l_a$. Поэтому асимптотический член в распределении нейтронов определяется выражением

$$\Phi_{ac}(x) = \frac{q}{2N_0^+} \exp\left(-\frac{x}{L}\right).$$

По своему физическому смыслу он описывает распределение нейтронов, испытавших многократные соударения с ядрами среды или, как говорят, "диффузионно запутавшихся" нейтронов ([5], с. 128). Нормировку N_0^+ вычислим из (3.21)

$$N_0^+ = \frac{k}{2} x_0^3 \left[\frac{k}{x_0^2 - 1} - \frac{1}{x_0^2} \right] = \frac{k x_0}{2} \frac{k-1 + \frac{1}{x_0^2}}{1 - \frac{1}{x_0^2}}.$$

Так как $x_0 \gg 1$, то

$$N_0^+ \approx \frac{kx_0}{2} \left(k-1 + \frac{1}{x_0^2} \right) = \frac{kx_0}{2} \frac{\Sigma_s - \Sigma + 3\Sigma_a}{\Sigma} = \frac{k}{2} \sqrt{\frac{\Sigma_s}{3\Sigma_a}} \frac{2\Sigma_a}{\Sigma} = k \sqrt{\frac{\Sigma_a}{3\Sigma}} = \frac{D}{L},$$

где $D = \frac{1}{3\Sigma_s}$ - коэффициент диффузии ([10], с. 23).

Анализ пространственного распределения сингулярной части решения в окрестности внешнего источника в случае слабого поглощения предоставляется читателям. Заметим лишь, что в исследуемом случае при $\Sigma_a \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 1$) нормировка $N_0^+ \rightarrow 0$, так как $x_0 \rightarrow \infty$, и асимптотическая часть решения неограниченно растет по величине, в то время как сингулярная часть, определяемая интегралом

$$\int_0^1 dx \frac{\exp\left(-\frac{\Sigma x}{x}\right)}{N(x)},$$

является ограниченной функцией. Поэтому при $\Sigma_a \rightarrow 0$ ($k \rightarrow 1$) пространственное распределение полной плотности потока нейтронов в пространстве среды и, в частности, в окрестности внешнего источника определяется исключительно асимптотической частью решения. С ростом поглощения нейтронов средой вклад сингулярного члена в распределение нейтронов растет. Однако сказывается это лишь в области, непосредственно примыкающей к внешнему источнику нейтронов, поскольку при удалении от источника сингулярный член затухает быстрее асимптотического члена. В связи с этим на расстояниях $x \gg (2-3)l$, где l - средняя длина свободного пробега нейтронов в среде, распределение нейтронов по-прежнему определяется исключительно асимптотической частью решения задачи. Все сказанное подтверждается приведенными в табл. 3.1 результатами расчета пространственного распределения полной плотности потока нейтронов $\mathcal{P}(x)$ в окрестности внешнего источника и вклада в это распределение асимптотической

и сингулярной ($\epsilon_c = \frac{\varphi_c(x)}{\varphi(x)}$) частей решения для различных значений параметра k . В заключение отметим следующее обстоятельство. Распределение полной плотности потока нейтронов, определяющей в условиях слабого поглощения на значительных расстояниях от внешнего источника асимптотической частью решения, с учетом проделанных ранее вычислений имеет вид

$$\varphi(x) = \frac{qL}{2D} \exp\left(-\frac{x}{L}\right).$$

Таблица 3.1

Распределение полной плотности потока нейтронов $\Phi(x)$ в окрестности внешнего источника и вклад в нее сингулярной ε_c и асимптотической ε_{ac} частей решения

k	Параметр	$\Phi(x)$ при Σx , равной						
		0,01	0,10	0,40	1,00	2,00	3,00	5,00
0,99	$\frac{2}{q_0} \Phi(x)$	20,53	18,10	16,22	14,27	11,89	9,97	7,03
	ε_c	0,18	0,09	0,03	0,01	-	-	-
	ε_{ac}	0,82	0,91	0,97	0,99	1,00	1,00	1,00
0,95	$\frac{2}{q_0} \Phi(x)$	10,31	7,9	6,14	4,55	2,98	1,99	0,90
	ε_c	0,37	0,21	0,09	0,04	0,01	-	-
	ε_{ac}	0,63	0,79	0,91	0,96	0,99	1,00	1,00
0,9	$\frac{2}{q_0} \Phi(x)$	7,50	5,13	3,51	2,23	1,19	0,66	0,21
	ε_c	0,51	0,33	0,17	0,08	0,03	0,01	-
	ε_{ac}	0,49	0,67	0,83	0,92	0,97	0,99	1,00

и является, как нетрудно проверить, решением уравнения

$$\frac{d^2\Phi}{dx^2}(x) - \frac{\Phi(x)}{L^2} + \frac{q_0}{2D} \delta(x) = 0, \quad x \geq 0,$$

с условием ограниченности этого решения в области определения задачи. Последнее уравнение является не чем иным, как уравнением диффузии моноэнергетических нейтронов, генерируемых в бесконечной однородной среде плоским бесконечно протяженным внешним источником ([10], с. 38). Полученный результат, таким образом, подтверждает корректность применения уравнения диффузии к расчету распределений нейтронов в слабо поглощающих и изотропно рассеивающих нейтроны областях сред, достаточно далеко удаленных от сильных локализованных ис-

точников и поглотителей нейтронов (последние могут рассматриваться как внешние источники отрицательной мощности).

3.3. Учет анизотропии рассеяния нейтронов.

Понятие о P_n -методе

Рассмотрим задачу предыдущего параграфа в условиях анизотропии рассеяния нейтронов на ядрах среды. Формулировка задачи о распределении нейтронов в среде в этом случае сводится к следующему уравнению (см. (3.2) - (3.3))

$$\mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \mu) + \Sigma \varphi(x, \mu) = \Sigma_S \int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-1}^{+1} d\mu' \varphi(x, \mu') \omega_S(\mu_0), \quad (3.26)$$

где $\mu_0 = \mu \mu' + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu'^2} \cos(\psi-\psi')$,

с условием ограниченности и неотрицательности нейтронного поля в фазовой области задачи (3.6) и условием "сшивания" решения в "точке" размещения внешнего локализованного источника нейтронов (см. (3.7))

$$\mu \varphi(0^+, \mu) = \mu \varphi(0^-, \mu) + q(\mu). \quad (3.27)$$

Решение сформулированной задачи осуществим методом сферических гармоник [9].

Метод сферических гармоник. Свойства полиномов Лежандра

Прежде всего приведем основные определения и рассмотрим основные свойства полиномов Лежандра, на основе которых строится метод сферических гармоник.

Полином Лежандра n -й степени $P_n(\mu)$ определяется следующим выражением

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{d\mu^n} [(\mu^2 - 1)^n], \quad n = 0, 1, \dots, \infty.$$

Полиномы Лежандра соседних степеней связаны между собой рекуррентной формулой

$$(n+1)P_{n+1}(\mu) - \mu(2n+1)P_n(\mu) + nP_{n-1}(\mu) = 0, \quad (3.28)$$

которая позволяет вычислить любой из этих полиномов, начиная с полинома второй степени $P_2(\mu)$, поскольку известны полиномы начальных степеней

$$P_0(\mu) \equiv 1, \quad P_1(\mu) = \mu. \quad (3.29)$$

Если переменная μ_0 связана с переменными μ и μ' соотношением (3.2), имеет место следующее соотношение, называемое теоремой сложения для полиномов Лежандра:

$$P_n^k(\mu_0) = P_n^k(\mu)P_n^k(\mu') + 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\mu)P_n^k(\mu') \cos k(\psi' - \psi). \quad (3.30)$$

Здесь $P_n^k(\mu)$ — присоединенный полином Лежандра, определяемый выражением

$$P_n^k(\mu) = (1-\mu^2)^{k/2} \frac{d^k}{d\mu^k} P_n(\mu), \quad n, k = 0, 1, \dots, \infty.$$

На отрезке $[-1; +1]$ полиномы Лежандра образуют полную ортонормированную систему функций со следующими нормировочными условиями

$$\int_{-1}^{+1} d\mu P_n(\mu)P_k(\mu) = \begin{cases} 0, & \text{если } k \neq n; \\ \frac{2}{2n+1}, & \text{если } k = n. \end{cases} \quad (3.31)$$

Полнота системы полиномов Лежандра позволяет представить некоторую функцию $f(\mu)$, определенную на отрезке $\mu \in [-1; +1]$, в виде ряда Фурье

$$f(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} a_n P_n(\mu).$$

Коэффициенты ряда a_n определяются известным образом

$$a_n = \int_{-1}^{+1} d\mu P_n(\mu) f(\mu).$$

Вычислительная схема P_n -метода

Используем полиномы Лежандра для конструирования пространственно-углового распределения нейтронов в задаче (3.26) — (3.27). С этой целью представим функцию $\varphi(x, \mu)$ в виде ряда Фурье по полиномам Лежандра

$$\varphi(x, \mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \varphi_n(x) P_n(\mu). \quad (3.32)$$

"Кoeffициенты" ряда $\varphi_n(x)$ определяются равенством

$$\varphi_n(x) = \int_{-1}^{+1} d\mu P_n(\mu) \varphi(x, \mu), \quad n=0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (3.33)$$

Сформулируем уравнения, которым подчиняются функции $\varphi_n(x)$ ($n=0, 1, \dots, \infty$). Для этого умножим почленно (3.26) на функцию $P_k(\mu)$ и проинтегрируем результат по переменной μ в интервале $[-1; +1]$. Вычислим результат интегрирования для каждого члена уравнения.

Интегрирование 1-го члена уравнения:

$$I_1 = \int_{-1}^{+1} d\mu P_k(\mu) \mu \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \mu) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu P_k(\mu) \varphi(x, \mu).$$

Используем рекуррентное соотношение (3.28) и, учитывая равенство (3.33), получаем

$$I_1 = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-1}^{+1} d\mu \frac{(k+1)P_{k+1}(\mu) + kP_{k-1}(\mu)}{2k+1} \varphi(x, \mu) = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2k+1} \left[(k+1)\varphi_{k+1}(x) + k\varphi_{k-1}(x) \right] \right].$$

Окончательно

$$I_1 = \frac{1}{2k+1} \left[(k+1) \frac{d\varphi_{k+1}(x)}{dx} + k \frac{d\varphi_{k-1}(x)}{dx} \right].$$

Интегрирование 2-го члена уравнения:

$$I_2 = \int_{-1}^{+1} d\mu P_k(\mu) \sum \varphi(x, \mu) = \sum \varphi_k(\mu).$$

Соотношение получено с учетом равенства (3.33).

Интегрирование 3-го члена уравнения:

$$I_3 = \int_{-1}^{+1} d\mu P_k(\mu) \sum_S \int_0^{2\pi} d\psi' \int_{-1}^{+1} d\mu' \varphi(x, \mu') \omega_S(\mu_0).$$

Представим индикатрису рассеяния рядом Фурье по полиномам Лежандра

$$\omega_S(\mu_0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \omega_n P_n(\mu_0). \quad (3.34)$$

Коэффициенты ряда ω_n , как обычно, определены равенством

$$\omega_n = \int_{-1}^{+1} d\mu P_n(\mu) \omega_S(\mu), \quad n=0,1,\dots,\infty.$$

Используем выражение (3.34) для вычисления интеграла I_3

$$I_3 = \sum_S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \omega_n \int_{-1}^{+1} d\mu P_n(\mu) \int_{-1}^{+1} d\mu' \varphi(x, \mu') \int_0^{2\pi} d\psi' P_n(\mu_0).$$

Согласно теореме сложения (3.30) можем записать

$$\int_0^{2\pi} d\psi' P_n(\mu_0) = \int_0^{2\pi} d\psi' [P_n(\mu') P_n(\mu) +$$

$$+ 2 \sum_{k=1}^n \frac{(n-k)!}{(n+k)!} P_n^k(\mu') P_n^k(\mu) \cos k(\psi' - \psi)] = 2\pi P_n(\mu') P_n(\mu),$$

поскольку $\int_0^{2\pi} d\psi' \cos k(\psi' - \psi) = 0$ при любом целом значении k .

Таким образом, получаем следующее выражение

$$I_3 = 2\pi \sum_S \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} \omega_n \int_{-1}^{+1} d\mu P_n(\mu) P_n(\mu) \int_{-1}^{+1} d\mu' P_n(\mu') \varphi(x, \mu'),$$

которое с учетом нормировки (3.31) и выражения (3.33) преобразуется окончательно к следующему

$$I_3 = 2\pi \sum_S \frac{2k+1}{2} \omega_k \frac{2}{2k+1} \varphi_k(x) = 2\pi \sum_S \omega_k \varphi_k(x).$$

Результаты почленного интегрирования приводят к следующему уравнению

$$\frac{1}{2k+1} \left[(k+1) \frac{d\varphi_{k+1}(x)}{dx} + k \frac{d\varphi_{k-1}(x)}{dx} \right] + \sum \varphi_k(x) = 2\pi \sum_S \omega_k \varphi_k(x), \quad k=0,1,\dots,\infty,$$

которое в свою очередь преобразуется к рекуррентному уравнению для определения "коэффициентов" $\varphi_k(x)$ ряда (3.32)

$$k \frac{d\varphi_{k-1}(x)}{dx} + (k+1) \frac{d\varphi_{k+1}(x)}{dx} + (2k+1) \sum_k \varphi_k(x) = 0, \quad k=0,1,\dots,\infty. \quad (3.35)$$

Здесь введено обозначение

$$\sum_k = \sum - 2\pi \sum_S \omega_k, \quad k=0,1,\dots,\infty. \quad (3.36)$$

Для окончательной формулировки задачи поиска "коэффициентов" $\varphi_k(x)$ к (3.35) необходимо присоединить условия однозначного выбора решения, которые получим из "сшивочного" условия (3.27). Для этого в указанное условие подставим представление (3.32) при значении пространственной переменной $x_0 = 0^-$ и $x_0 = 0^+$ соответственно, умножим почленно на функцию $P_k(\mu)$ и промежуточный результат проинтегрируем по угловой переменной в интервале $\mu \in [-1; +1]$. Конечным результатом будет следующее "сшивочное" условие для функции $\varphi_k(x)$:

$$\frac{k+1}{2k+1} \varphi_{k+1}(0^+) + \frac{k}{2k+1} \varphi_{k-1}(0^-) = \frac{k+1}{2k+1} \varphi_{k+1}(0^-) + \frac{k}{2k+1} \varphi_{k-1}(0^+) + q_k, \quad (3.37)$$

$$k=0,1,\dots,\infty.$$

Здесь использовано представление функции внешнего источника в виде ряда Фурье

$$q(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{2} q_n P_n(\mu), \quad (3.38)$$

коэффициенты которого рассчитываются по формуле

$$q_n = \int_{-1}^{+1} d\mu P_n(\mu) q(\mu), \quad n=0,1,\dots,\infty.$$

P_1 -приближение

Будем полагать, что нейтронное поле $\varphi(x, \mu)$ обладает слабой анизотропией в фазовом пространстве задачи (3.26) - (3.27), что позволяет ограничиться в его представлении (3.32) двумя первыми членами

$$\varphi(x, \mu) = \frac{1}{2} \varphi_0(x) P_0(\mu) + \frac{3}{2} \varphi_1(x) P_1(\mu).$$

Последнее соотношение с учетом равенств (3.29) приобретает вид

$$\varphi(x, \mu) = \frac{1}{2} \varphi_0(x) + \frac{3}{2} \varphi_1(x) \mu. \quad (3.39)$$

Условиями, в которых выполняется представление (3.39), очевидно, будут слабая анизотропия генерации нейтронов внешним источником и слабая анизотропия рассеяния нейтронов ядрами среды, позволяющие ограничиться в суммах (3.34) и (3.38) двумя первыми членами. Уравнения для функций $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ в рассматриваемом приближении (в дальнейшем — P_1 -приближение) имеют вид (см. (3.35)):

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\varphi_1}{dx}(x) + \Sigma_0 \varphi_0(x) &= 0, & k=0, \\ \frac{d\varphi_0}{dx}(x) + 3\Sigma_1 \varphi_1(x) &= 0, & k=1, \end{aligned} \right\} \quad (3.40)$$

со следующими "сшивочными" условиями (см. (3.37))

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1(0^+) &= \varphi_1(0^-) + q_0, & k=0, \\ \varphi_0(0^+) &= \varphi_0(0^-) + 3q_1, & k=1. \end{aligned} \right\} \quad (3.41)$$

Из второго уравнения системы (3.40) вытекает важная в дальнейшем связь между функциями $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$:

$$\varphi_1(x) = -\frac{1}{3\Sigma_1} \frac{d\varphi_0}{dx}(x) = -D \frac{d\varphi_0}{dx}(x), \quad (3.42)$$

в которой введено обозначение

$$D = \frac{1}{3\Sigma_1}. \quad (3.43)$$

Связка (3.42) и обозначение (3.43) позволяют преобразовать первое уравнение системы (3.40)

$$-\frac{d}{dx} D \frac{d\varphi_0}{dx}(x) + \Sigma_0 \varphi_0(x) = 0. \quad (3.44)$$

Практическое подтверждение границ применимости теории диффузии нейтронов в средах

Используем результаты предыдущего раздела для анализа нейтронного поля, генерируемого в бесконечной слабо поглощающей среде ($\Sigma_a \ll \Sigma_s$) внешним бесконечно протяженным плоским изотропным источником мощности q с единицы поверхности. Среда изотропно рассеивает нейтроны.

Условия изотропии рассеяния и слабого поглощения нейтронов ядрами среды, как известно, являются основополагающими при применении теории диффузии для моделирования нейтронно-физических процессов ([10], с. 25). Поэтому в дополнение к практическому подтверждению границ применимости теории диффузии нейтронов, сделанному в конце п. 3.2, конкретизируем на газокинетическом уровне нейтронно-физическую модель для рассматриваемой задачи и покажем, что она является моделью теории диффузии нейтронов.

Условия задачи позволяют рассчитать распределение нейтронов в пределах P_1 -приближения, т.е. использовать результаты предыдущего раздела. Для этого необходимо вычислить коэффициенты представления мощности внешнего источника и индикатриссы рассеяния рядами Фурье (3.34) и (3.38). Так как по условию задачи $w_s(\mu) = \text{const}$ и $q(\mu) = \text{const}$ и, кроме того, должны обеспечиваться нормировка

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{+1} d\mu w_s(\mu_0) = 1$$

и соотношение

$$\int_{-1}^{+1} d\mu q(\mu) = q,$$

получаем

$$w_s(\mu_0) = \frac{1}{4\pi}, \quad q(\mu) = \frac{q}{2}.$$

Вычисленные значения индикатриссы рассеяния и мощности источника позволяют определить коэффициенты w_0, w_1, q_0, q_1 :

$$w_0 = \int_{-1}^{+1} d\mu P_0(\mu) w_s(\mu) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} d\mu = \frac{1}{2\pi};$$

$$w_1 = \int_{-1}^{+1} d\mu P_1(\mu) w_s(\mu) = \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu = 0;$$

$$q_0 = \int_{-1}^{+1} d\mu P_0(\mu) q(\mu) = \frac{q}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu = q ;$$

$$q_1 = \int_{-1}^{+1} d\mu P_1(\mu) q(\mu) = \frac{q}{2} \int_{-1}^{+1} d\mu \mu = 0 ,$$

а из (3.36) – значения макроскопических констант Σ_0 и Σ_1 , входящих в систему (3.40)

$$\Sigma_0 = \Sigma - 2\pi \Sigma_s \omega_0 = \Sigma - \Sigma_s = \Sigma_a ;$$

$$\Sigma_1 = \Sigma - 2\pi \Sigma_s \omega_1 = \Sigma = \Sigma_s + \Sigma_a \approx \Sigma_s .$$

Из последнего соотношения вытекает, что коэффициент D формально определенный соотношением (3.43), в данном случае является коэффициентом диффузии нейтронов в изотропно рассеивающей и слабо поглощающей нейтроны среде ([10], с. 23)

$$D = \frac{1}{3\Sigma_s} .$$

Следовательно, соотношение (3.42) – закон Фика, а (3.44) – уравнение диффузии моноэнергетических нейтронов в среде ([10], с. 24). Соотношения (3.41) в исследуемой задаче трансформируются в следующие условия "сшивания" решения

$$\psi_0(0^+) = \psi_0(0^-) ;$$

$$-D^+ \frac{d\psi}{dx}(0^+) = -D^- \frac{d\psi}{dx}(0^-) + q ,$$

которые являются "сшивочными" условиями на поверхностях внешних локализованных источников в рамках теории диффузии нейтронов ([10], с. 31).

Следовательно, функции $\psi_0(x)$ и $\psi_1(x)$ по своему смыслу являются соответственно плотностями потока $\varphi(x)$ и тока нейтронов $i_x(x)$, определяемых уравнением диффузии [10]. Это нетрудно проверить, воспользовавшись формальным определением плотностей потока и тока нейтронов (см. п. 1.2)

$$\varphi(x) = \int_{-1}^{+1} d\mu \varphi(x, \mu), \quad i_x(\mu) = \int_{-1}^{+1} d\mu \mu \varphi(x, \mu).$$

В исследуемой задаче эти соотношения преобразуются к следующему (см. (3.39))

$$\varphi(x) = \int_{-1}^{+1} d\mu \left[\frac{1}{2} \varphi_0(x) + \frac{3}{2} \varphi_1(x) \mu \right] = \varphi_0(x);$$

$$i_x(x) = \int_{-1}^{+1} d\mu \mu \left[\frac{1}{2} \varphi_0(x) + \frac{3}{2} \varphi_1(x) \mu \right] = \varphi_1(x).$$

Определяя также плотности односторонних токов

$$i_x^+(x) = \int_0^{+1} d\mu \mu \varphi(x, \mu) = \int_0^{+1} d\mu \mu \left[\frac{1}{2} \varphi_0(x) + \frac{3}{2} \varphi_1(x) \mu \right] = \\ = \frac{\varphi_0(x)}{4} + \frac{\varphi_1(x)}{2} = \frac{\varphi_0(x)}{4} - \frac{1}{6\Sigma_s} \frac{d\varphi_0}{dx}(x);$$

$$i_x^-(x) = -\int_{-1}^0 d\mu \mu \varphi(x, \mu) = -\int_{-1}^0 d\mu \mu \left[\frac{1}{2} \varphi_0(x) + \frac{3}{2} \varphi_1(x) \mu \right] = \\ = \frac{-1}{4} \varphi_0(x) - \frac{\varphi_1(x)}{2} = \frac{-\varphi_0(x)}{4} + \frac{1}{6\Sigma_s} \frac{d\varphi_0}{dx}(x),$$

нетрудно убедиться в совпадении этих выражений с соответствующими выражениями, полученными в рамках теории диффузии ([10], с. 23).

Теперь рассмотрим случай слабой анизотропии рассеяния нейтронов на ядрах среды. Пусть по прежнему индикатрисса рассеяния $w_s(\mu_0)$ определяется двумя членами ряда (3.34), однако значения коэффициентов w_0 и w_1 этого ряда отличны от соответствующих значений в случае изотропного рассеяния. Вычислим значения коэффициентов w_0 и w_1 . Из нормировки

$$\int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{+1} d\mu_0 w_s(\mu_0) = 1$$

следует

$$\int_{-1}^{+1} d\mu w_s(\mu) = \frac{1}{2\pi}.$$

По этой причине

$$\omega_0 = \int_{-1}^{+1} d\mu P_0(\mu) \omega_S(\mu) = \int_{-1}^{+1} d\mu \omega_S(\mu) = \frac{1}{2\pi}.$$

Далее

$$\omega_1 = \int_{-1}^{+1} d\mu P_1(\mu) \omega_S(\mu) = \int_{-1}^{+1} d\mu \mu \omega_S(\mu) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{+1} d\mu \mu \omega_S(\mu).$$

По определению средних величин выражение

$$\tilde{\mu} = \int_0^{2\pi} d\psi \int_{-1}^{+1} d\mu \mu \omega_S(\mu)$$

есть средний косинус угла рассеяния нейтронов на ядрах среды ([10], с. 65). Поэтому $\omega_1 = \tilde{\mu}/2\pi$. Вычислим значения макроскопических сечений Σ_0 и Σ_1 , входящих в (3.44) и закон (3.42). В рассматриваемом случае

$$\Sigma_0 = \Sigma - 2\pi \Sigma_S \omega_0 = \Sigma - \Sigma_S = \Sigma_a$$

и, следовательно, по-прежнему (3.44) — уравнение диффузии нейтронов. Макроскопическое сечение Σ_1 имеет иную величину по сравнению со случаем изотропного рассеяния:

$$\Sigma_1 = \Sigma - 2\pi \Sigma_S \omega_1 = \Sigma - \Sigma_S \tilde{\mu} = \Sigma_a + \Sigma_S (1 - \tilde{\mu}) = \Sigma_{tr}$$

и является макроскопическим транспортным сечением взаимодействия нейтронов с ядрами среды. Закон Фика (3.42) по-прежнему справедлив, однако входящий в него коэффициент диффузии D необходимо рассчитывать по уточненной формуле ([10], с. 25) $D = 1/3 \Sigma_{tr}$.

3.4. Проблема Милна. Постановка диффузионных условий на выпуклой границе среды с вакуумом

Проблема Милна является классической в астрофизике и связана с прохождением излучения через атмосферу звезд. В теории переноса нейтронов эта задача представляет интерес при изучении закономерностей пространственного поведения ней-

тронов в окрестности выпуклой границы среды с вакуумом. Рассмотрим проблему поиска распределения нейтронов в ограниченной однородной среде, для чего сформулируем следующую нейтронно-физическую задачу ([2], с. 31; [5], с. 135).

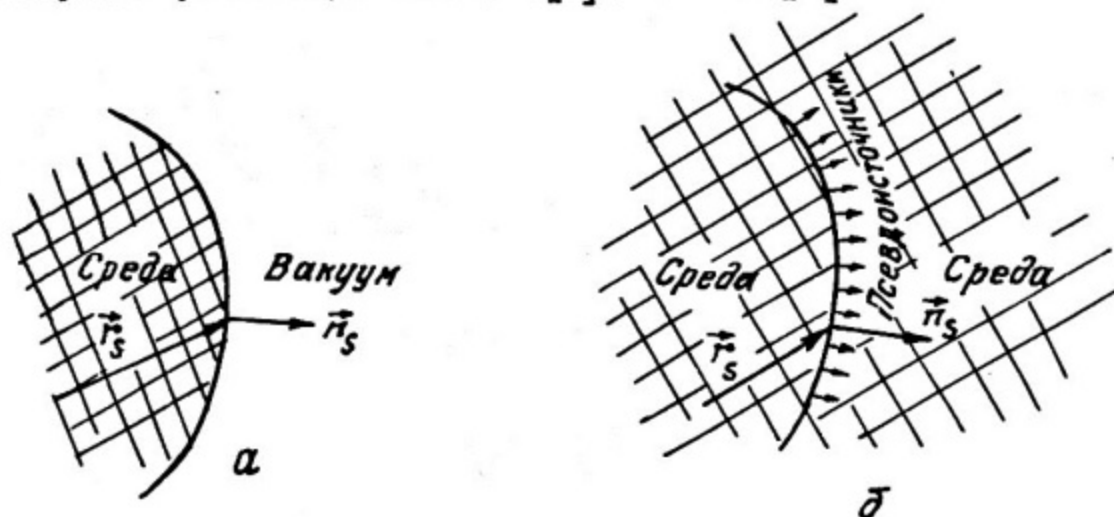


Рис. 3.4. Нейтронно-физическая задача в ограниченной среде (а) и эквивалентная ей в бесконечной среде с псевдоисточниками (б)

Требуется найти распределение нейтронов $\psi(\vec{r}, E, \vec{\Omega})$ в однородной среде, ограниченной выпуклой поверхностью S генерирующихся находящимися в среде внешними источниками нейтронов. Назовем эту задачу задачей А (рис. 3.4,а). Поскольку граница среды с вакуумом выпуклая и в вакууме отсутствуют источники и рассеиватели нейтронов, нейтронное поле в задаче А должно удовлетворять граничному условию

$$\psi_A(\vec{r}_s, E, \vec{\Omega}) = 0 \quad \text{для} \quad (\vec{n}_s, \vec{\Omega}) < 0,$$

где \vec{r}_s — радиус-вектор, определяющий множество точек поверхности S , а \vec{n}_s — внешняя нормаль к этой поверхности в точке \vec{r}_s . Как показано в работе [5, с. 135], решение задачи А эквивалентно решению некоторой задачи в бесконечной однородной среде со специальным распределением дополнительных источников (псевдоисточников). Эта задача (задача В) сформулирована ниже.

В задаче В (рис. 3.4,б) по сравнению с задачей А среда распространена до бесконечности. Источники внутри выпуклой границы S оставлены неизменными (такими же, как в задаче А), а на поверхности S размещены отрицательные псевдоисточники нейтронов (фактически — поглотители нейтронов). Их ин-

тенсивность выбрана таким образом, чтобы нейтрализовать направленный через поверхность S' против нормали \vec{n}_S ток нейтронов. Решение задачи В (а следовательно, и задачи А) можно получить методом Кейза.

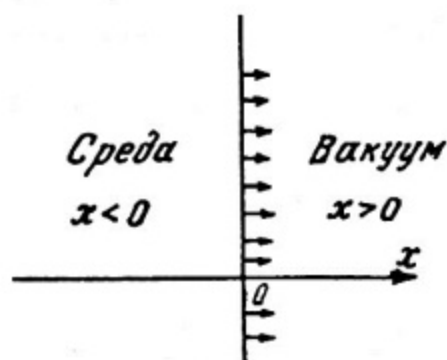


Рис. 3.5. Проблема Милна

Опираясь на рассмотренную выше процедуру, рассмотрим классическую проблему Милна в простейшей геометрии. Полубесконечная однородная среда ($x < 0$) граничит по плоской границе ($x = 0$) с вакуумом ($x > 0$) (рис. 3.5). Нейтронное поле в среде создается внешним плоским источником заданной мощности, достаточно далеко удаленным от границы. Требуется найти угловое распределение нейтронов, пересекающих границу раздела среды и вакуума ($x = 0$). Пользуясь изложенным выше подходом, рас-

пространим среду левого полупространства ($x < 0$) в правое полупространство ($x > 0$) с одновременным введением в плоскости $x = 0$ псевдоисточников. Достаточно далеко удаленный от границы $x = 0$ внешний источник, расположенный в левом полупространстве, создает в ее окрестности асимптотическое распределение нейтронов, экспоненциально увеличивающееся в направлении этого источника и определяющееся функцией (см. (3.23))

$$\varphi_{ac}(x, \mu) = A_0^+ f_0^+(\mu) \exp\left(-\frac{\Sigma x}{x_0}\right).$$

В свою очередь, поверхностный псевдоисточник ($x = 0$) формально также будет создавать нейтронное поле в окрестности границы

$$\varphi_{nc}(x, \mu) = -A_0^- f_0^-(\mu) \exp\left(\frac{\Sigma x}{x_0}\right) - \int_{-1}^0 dx B(x) f_x(\mu) \exp\left(\frac{\Sigma x}{x}\right).$$

Согласно принципу суперпозиции источников ([10], с. 42) результирующее нейтронное поле, создаваемое источником и псевдоисточником, будет простой суммой

$$\varphi(x, \mu) = A_0^+ f_0^+(\mu) \exp\left(-\frac{\Sigma x}{x_0}\right) - A_0^- f_0^-(\mu) \exp\left(\frac{\Sigma x}{x_0}\right) - \int_{-1}^0 dx B(x) f_x(\mu) \exp\left(\frac{\Sigma x}{x}\right).$$

Коэффициент A_0^+ можно принять равным единице $A_0^+ = 1$, так как для целей рассматриваемой задачи решение достаточно определить с точностью до постоянного множителя.

Подчиним решение условию на границе $\varphi(0, \mu) = 0$, $-1 < \mu < 0$. Это приводит нас к выражению

$$f_0^+(\mu) = A_0^- f_0^-(\mu) + \int_{-1}^0 dx B(x) f_x(\mu), \quad -1 < \mu < 0,$$

являющемуся разложением функции $f_0^+(\mu)$ по собственным функциям псевдоисточника $f_0^-(\mu)$ и $f_x(\mu)$ на половинном отрезке $\mu \in [-1; 0]$. A_0^- и $B(x)$ — коэффициенты этого разложения. Разложение функции $f_0^+(\mu)$ обеспечивается полнотой системы собственных функций $f_0^-(\mu)$ и $f_x(\mu)$, $x \in [-1; 0]$ на половинном отрезке $\mu \in [-1; 0]$ ([5], с. 95). Коэффициенты разложения A_0^- и $B(x)$ определяются обычным образом на основании соотношений ортонормированности собственных функций $f_0^-(\mu)$ и $f_x(\mu)$ на половинном отрезке ([5], с. 100).

Как показывает анализ, сингулярный член псевдоисточника в решении затухает на расстоянии нескольких длин свободного пробега нейтронов при удалении от границы раздела среды и вакуума. Кроме этого, как показано в п. 3.2, в случае слабого поглощения нейтронов средой распределение плотности потока нейтронов в окрестности псевдоисточника определяется в основном асимптотической частью. На основании этого можно сделать вывод, что пространственное распределение плотности потока нейтронов в окрестности границы среды с вакуумом $x=0$ определяется асимптотическими слагаемыми источника и псевдоисточника. Асимптотическая часть полной плотности потока нейтронов в исследуемой задаче, как показано в работе [4, с. 92], определяется выражением

$$\varphi_{ac}(x) = \int_{-1}^{+1} d\mu \varphi(x, \mu) = A sh \frac{\Sigma_s(x-x_0)}{x_0}.$$

На рис. 3.6 представлено поведение полной плотности потока нейтронов $\varphi(x)$ и ее асимптотической части $\varphi_{ac}(x)$ для случая $k \lesssim 1$. Асимптотическая часть, которая, как было установлено ранее, является решением уравнения диффузии, обращается в нуль в точке $x = x_0$. Параметр x_0 обычно называют длиной

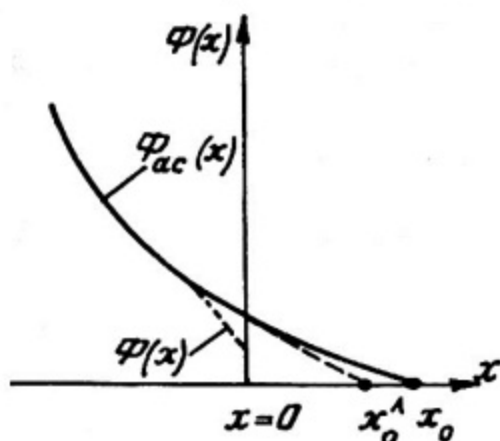


Рис. 3.6. Экстраполированная добавка и распределение полной плотности потока нейтронов $\varphi(x)$ и ее асимптотической части $\varphi_{ac}(x)$ в окрестности границы среды с вакуумом

экстраполяции и используют для постановки эффективного граничного условия в рамках диффузионного приближения ([10], с. 29). В общем случае слабопоглощающей среды ($k \neq 1$) этот параметр не совпадает с длиной линейной экстраполяции $x_0 = \frac{2}{3}L_S$ (см. рис. 3.6 и [10], с. 28), определяемой линейным продолжением функции $\varphi_{ac}(x)$ из точки $x=0$ в вакуум. Однако если среда не поглощает нейтроны ($k \rightarrow 1$, $L \rightarrow \infty$), асимптотическую часть решения можно представить линейной функцией

$$\varphi_{ac}(x) = A(x - x_0),$$

и длины экстраполяции в этом случае совпадают. Следует подчеркнуть, что параметр x_0 однозначно определяется газокинетической теорией. В случае слабого поглощения ($k \approx 1$) его значение представляется функцией [2, с. 74]

$$k \Sigma_s x_0 = 0,7104 [1 + 0,0199(1-k)^2 + 0(1-k)^3].$$

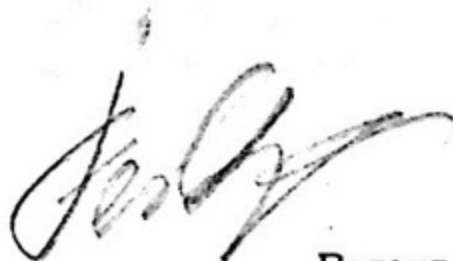
При отсутствии поглощения ($k=1$) $\lambda_0 \approx 0,71l_s$. Этот результат обосновывает применение соответствующего краевого условия на выпуклой экстраполированной границе среды с вакуумом в диффузионных задачах ([10], с. 29). Однако следует отметить, что вычисленная длина экстраполяции справедлива только для плоской границы среды с вакуумом. В окрестности криволинейных границ асимптотическая плотность потока нейтронов ведет себя иным образом, отличным от приведенного закона. Но учитывая, что непреложным атрибутом диффузионной модели является большой размер системы (в случае, если она конечна), кривизна границы системы с вакуумом будет невелика и в первом приближении эта граница может считаться плоской.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бекурц К., Виртц К. Нейтронная физика. — М.: Атомиздат, 1968, 456 с.
2. Белл Д., Глестон С. Теория ядерных реакторов. — М.: Атомиздат, 1974, 496 с.
3. Вейнберг А., Вигнер Е. Физическая теория ядерных реакторов. — М.: ИЛ, 1961, 732 с.
4. Девисон Б. Теория переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1960, 520 с.
5. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. — М.: Мир, 1972, 384 с.
6. Климов А.Н. Ядерная физика и ядерные реакторы. — М.: Энергоатомиздат, 1985, 352 с.
7. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. — М.: Наука, 1974, 831 с.
8. Мегреблиан Р., Холмс Д. Теория реакторов. — М.: Атомная наука и техника, 1962, 590 с.
9. Смелов В.В. Лекции по теории переноса нейтронов. — М.: Атомиздат, 1978, 216 с.
10. Хромов В.В., Кашутин А.А. Диффузия и замедление нейтронов в неразмножающих средах. — М.: МИФИ, 1982, 112 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
Глава 1. <u>Основные понятия и определения теории переноса нейтронов</u>	4
1.1. Основные процессы взаимодействия нейтронов с ядрами среды. Исследуемый энергетический диапазон.....	4
1.2. Описание распределений нейтронов в средах. Плотности потока и тока нейтронов.....	9
1.3. Описание взаимодействия нейтронов с ядрами среды. Скорость нейтронно-ядерного взаимодействия.....	15
1.4. Основные ограничения моделей теории переноса нейтронов.....	19
Глава 2. <u>Газокинетическая модель теории переноса нейтронов в неразмножающих средах</u>	20
2.1. Балансное уравнение скоростей нейтронно-физических процессов в среде.....	20
2.2. Интегро-дифференциальное газокинетическое уравнение. Границы применимости уравнения..	24
2.3. Условия однозначного выбора решений газокинетического уравнения в физических задачах.....	25
2.4. Вид оператора $\bar{\Omega} \nabla$ в различных геометриях	28
2.5. Интегральная формулировка газокинетического уравнения.....	32
2.6. Эквивалентность двух формулировок газокинетического уравнения.....	34
2.7. Интегральное уравнение Пайерлса.....	35
Глава 3. <u>Некоторые задачи односкоростной газокинетической теории переноса нейтронов и методы их решения</u>	37
3.1. Односкоростное газокинетическое уравнение. Случай плоской симметрии нейтронного поля..	37
3.2. Односкоростная задача с плоской симметрией нейтронного поля и сферически симметричным рассеянием на ядрах среды. Метод Кейза.....	40
3.3. Учет анизотропии рассеяния нейтронов. Понятие о P_n -методе.....	56
3.4. Проблема Милна. Постановка диффузионных условий на выпуклой границе среды с вакуумом.....	65
Список литературы.....	70



Редактор Е.Н. Кочубей
Техн.редактор Н.М.Воронцова
Корректор Н.П.Молодчинова

Тем. план 1988 г., поз. 85

Л.-50242

Подписано в печать 25/IV-1988г.

Формат 60x84 1/16

Объем 4,5 п.л.

Уч.-изд.л. 4,25

Тираж 200 экз.

Цена 25 коп.

Изд. № 021-1

Заказ 3757

Типография МИФИ, Каширское шоссе, 31