

514

Н47

ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

**НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ
НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ
И ИНЖЕНЕРНОЙ ГРАФИКИ**

ВЫПУСК 1

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ РСФСР
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

544
1874
Труды института

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИНЖЕНЕРНОЙ ГРАФИКИ

ВЫПУСК 1

Под редакцией канд. техн. наук, доцента
В. Л. Вальцгебера

МОСКВА

1962

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

<i>В. Л. Вальцгебер.</i> Анализ способов непосредственного построения натуральных величин плоских сечений поверхностей многогранников и поверхностей второго порядка	5
<i>Н. Т. Чувиков.</i> Реконструкция ортогональной системы координат по аксонометрическому чертежу общего вида	36
<i>Н. Т. Чувиков.</i> Построение очерков некоторых поверхностей второго порядка в аксонометрии	54
<i>Н. Т. Чувиков.</i> Новый способ построения осей прямоугольной аксонометрии по заданным показателям искажения	79
<i>Е. А. Раевская.</i> К вопросу о выборе рационального вида проекций многогранников в некоторых областях науки	84

Рецензент профессор С. М. КУЛИКОВ

Редактор *И. А. Козлова.*

Корректор *Л. Г. Девятова.*

Техн. редактор *И. М. Суровенков.*

Л 29050. Подп. к печ. 12/I-63 г. Объем 6,5 п. л. Зак. 758. Тир. 500 экз.

Типография МИФИ, М. Пионерская, 12

О Т РЕДАКТОРА

При подготовке настоящих работ к печати кафедра начертательной геометрии и графики Московского инженерно-физического института не имела в виду объединить помещенные здесь статьи какой-либо одной темой. Поэтому приведенные работы затрагивают только отдельные вопросы начертательной геометрии и инженерной графики.

Так, статья В. Л. Вальцгефера посвящена анализу наиболее простых способов непосредственного построения натуральных величин плоских сечений поверхностей, три статьи Н. Т. Чувикова — теории аксонометрии, статья Е. А. Раевской — вопросу выбора рационального вида проекций различных многогранников (в частности, в области металлографии и металлофизики).

Разработка тем, по которым В. Л. Вальцгефер, Е. А. Раевская и Н. Т. Чувиков дали для сборника свои статьи, проводилась на кафедре начертательной геометрии и графики МИФИ в 1959 и 1960 гг. По этим темам на заседаниях секции начертательной геометрии и инженерной графики научных конференций МИФИ В. Л. Вальцгефер и Е. А. Раевская сделали доклады в мае 1959 г. и Н. Т. Чувиков — в мае 1960 г.

На заседаниях секции было принято решение опубликовать в печати материалы всех пяти докладов, что и выполняется путем издания настоящего сборника для ознакомления с ним преподавателей кафедр начертательной геометрии и графики других высших технических учебных заведений.

В. Л. Вальцгефер

В. Л. Вальцгебер

АНАЛИЗ СПОСОБОВ НЕПОСРЕДСТВЕННОГО ПОСТРОЕНИЯ НАТУРАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ ПОВЕРХНОСТЕЙ МНОГОГРАННИКОВ И ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

ВВЕДЕНИЕ

При построении натуральных величин плоских сечений различных поверхностей обычно находят сначала проекции этих сечений, что значительно усложняет решение подобных задач и, несомненно, снижает точность самих построений.

Способы преобразования эпюра, рассматриваемые в курсах начертательной геометрии, а именно способы вращения, совмещения и перемены плоскостей проекций, применяемые для решения метрических задач, в том числе и для построения натуральных величин плоских сечений поверхностей, не могут быть использованы до тех пор, пока не решена позиционная часть задачи, т. е. не построены проекции оригинала, истинную величину которого надо определить.

Первое исключение составляет построение натуральной величины плоского сечения шаровой поверхности. Если секущая плоскость перпендикулярна к одной из плоскостей проекций, то диаметр окружности сечения поверхности шара этой плоскостью известен; если шаровая поверхность пересекается плоскостью общего положения, то натуральную величину диаметра окружности сечения можно получить путем преобразования плоскости общего положения в плоскость, перпендикулярную к одной из плоскостей проекций.

Вторым исключением являются те случаи, когда плоскость, перпендикулярная к одной из плоскостей проекций, пересекает поверхность, проектирующую по отношению к другой плоскости проекций (например, поверхность прямой призмы или поверхность цилиндра вращения). В таких случаях обе проекции сечения известны, следовательно, натуральная величина сечения может быть построена.

Если поверхность, проектирующая по отношению к одной из плоскостей проекций, пересекается плоскостью общего положения, то известна одна из проекций сечения. Для этих случаев можно не строить вторую проекцию сечения, а воспользоваться тем, что между фигурой сечения и каждой из ее проекций имеется аффинное соответствие. Таким образом, задача сводится к построению фигуры, аффинной известной проекции сечения.

На рис. 1 построена натуральная величина сечения прямой треугольной призмы плоскостью общего положения P . Имея горизонтальную проекцию сечения (треугольник abc), находим хотя бы точку c_1 , аффинную точке c . Осью аффинитета является след P_H плоскости P , а направление аффинитета перпендикулярно к этой оси. Точку $(c'; c)$ совмещаем с плоскостью H вращением вокруг следа P_H секущей плоскости P . Точка c_1 — одна из вершин натуральной величины сечения призмы плоскостью P . Остальные вершины (a_1 и b_1) треугольника $a_1b_1c_1$, являющегося натуральной величиной сечения призмы плоскостью P , находим, используя коллинеарность как один из инвариантов аффинных преобразований.

На рис. 2 построена натуральная величина сечения цилиндра вращения, боковая поверхность которого является горизонтально проектирующей плоскостью треугольника ABC . В этом случае задача сводится к построению эллипса, являющегося натуральной величиной сечения, как кривой аффинной окружности (горизонтальной проекции сечения цилиндра плоскостью ABC). За ось аффинитета принята нулевая горизонтальная плоскость треугольника ABC . Вершина A принадлежит этой нулевой горизонтали, поэтому ось аффинитета проходит через точку A параллельно горизонтали KC , проведенной в плоскости треугольника. Направление аффинитета перпендикулярно к его оси. Точка $(i'; i)$, являющаяся центром эллипса сечения, вращением вокруг нулевой горизонтали (оси аффинитета) совмещена с плоскостью H ($i_{10} = i'i_x$). Совмещенное положение i' этой точки дает центр эллипса, малая ось fg_1 которого равна диаметру fg окружности. Найдя точку d_1 , аффинную точке d окружности, получим большую полуось i_1d_1 эллипса, представляющего собой натуральную величину сечения поверхности цилиндра плоскостью треугольника ABC .

Таким образом, применение аффинных соответствий для непосредственного построения натуральных величин плоских сечений хотя бы для отдельных частных случаев упрощает решение подобных задач. Что же касается непосредственного построения натуральных величин плоских сечений для общих случаев, то здесь приходится применять или аппарат проективной геометрии и, в частности, преобразования гомологии, или косоугольное проектирование (а в некоторых случаях прямоугольное) фигуры основания заданной поверхности на

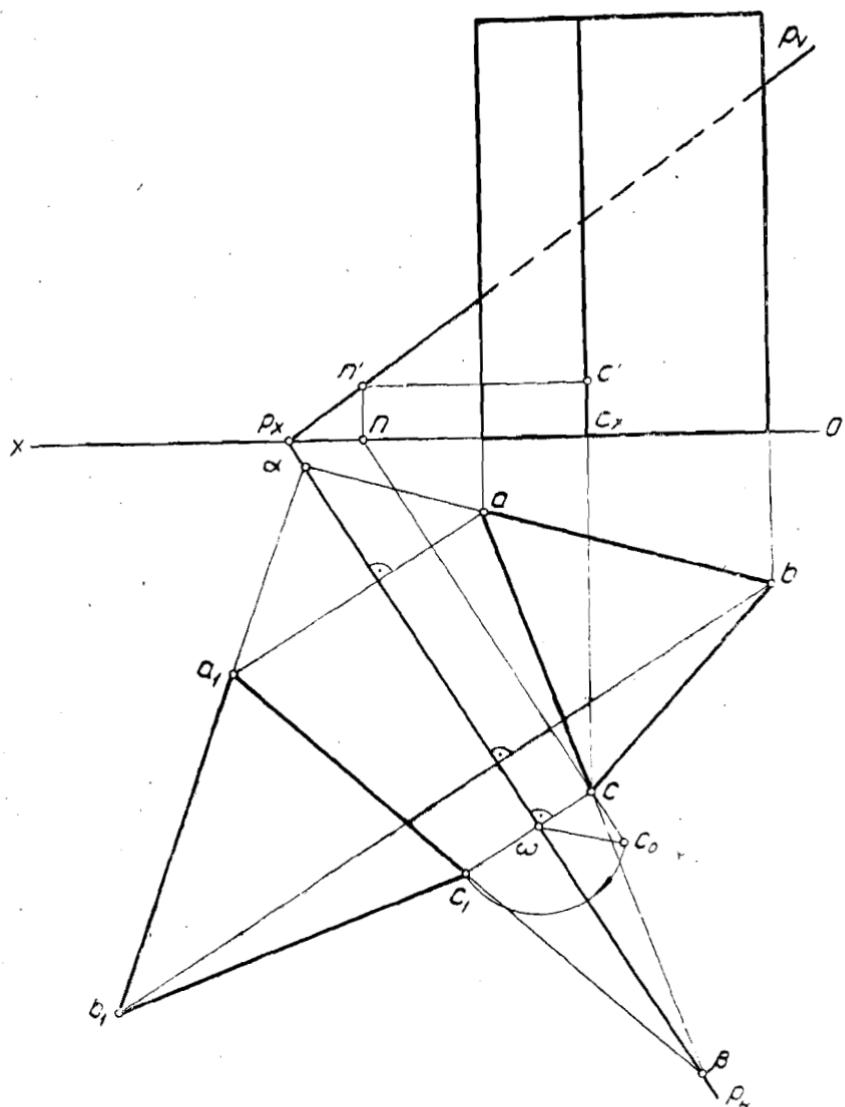


Рис. 1

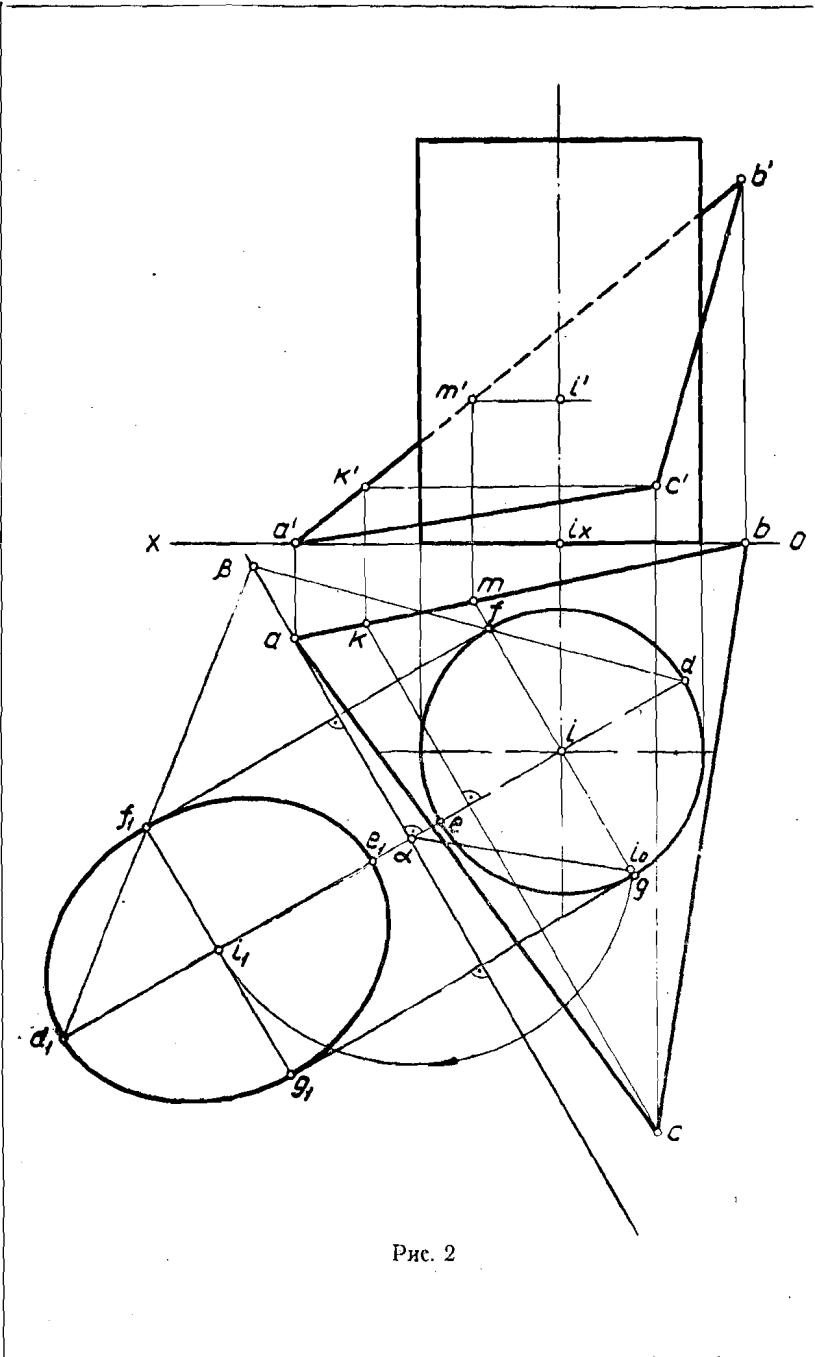


Рис. 2

секущую плоскость с последующим совмещением этой плоскости вместе со спроектированной на нее фигурой основания с одной из плоскостей проекций.

Перспективная коллинеация (гомология) двух точечных полей

На рис. 3 даны плоскости P и H , пересекающиеся по прямой P_H , точка S , не принадлежащая ни одной из этих плоскостей (точечных полей) и треугольник $A'B'C'$, расположенный в плоскости P . Найдем центральную проекцию ABC треугольника $A'B'C'$ на плоскость H , для чего через точку S и каждую из вершин этого треугольника проведем проектирующие лучи до пересечения их с плоскостью H . При таком построении между треугольниками $A'B'C'$ и ABC устанавливается соответствие перспективной коллинеации, или, иначе говоря, эти треугольники гомологичны.

Если принять точку S за вершину пирамиды, а треугольник ABC — за основание этой пирамиды, то треугольник $A'B'C'$ будет сечением пирамиды $SABC$ плоскостью P . Таким образом, основание пирамиды и плоское сечение пирамиды представляют собой гомологические треугольники.

Продолжим соответственные стороны треугольников: $A'B'$ и AB до пересечения в точке α , $B'C'$ и BC до пересечения в точке β , $A'C'$ и AC до пересечения в точке γ . Согласно теореме Дезарга, точки α , β и γ будут расположены на одной прямой P_H , по которой пересекаются плоскости P и H . Как известно, эта прямая носит название оси гомологии.

При вращении плоскости P , которой принадлежит треугольник $A'B'C'$, вокруг оси гомологии гомологическое соответствие между треугольниками $A'B'C'$ и ABC сохраняется. Это соответствие сохранится и при совмещении плоскости P с плоскостью H , и, следовательно, треугольник $A_1B_1C_1$, представляющий собой совмещенное положение треугольника $A'B'C'$ с плоскостью H , гомологичен треугольнику ABC .

Если продолжить стороны A_1B_1 , B_1C_1 и A_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$ до пересечения с осью гомологии, то на основании теоремы Дезарга для случая плоской конфигурации найдем, что продолжения этих сторон пересекут ось гомологии соответственно в тех же точках α , β и γ .

Совместим точку S , называемую центром гомологии, с плоскостью H . Ось вращения для точки S будет предельная прямая, которая представляет собой горизонтальный след плоскости, проведенной через точку S параллельно плоскости P , а центром вращения является точка M , принадлежащая этой предельной прямой. Получив точку S_1 (совмещенное с плоскостью H положение центра гомологии S), проведем в плоскости H прямые S_1A_1A , S_1B_1B и S_1C_1C . Таким образом, цент-

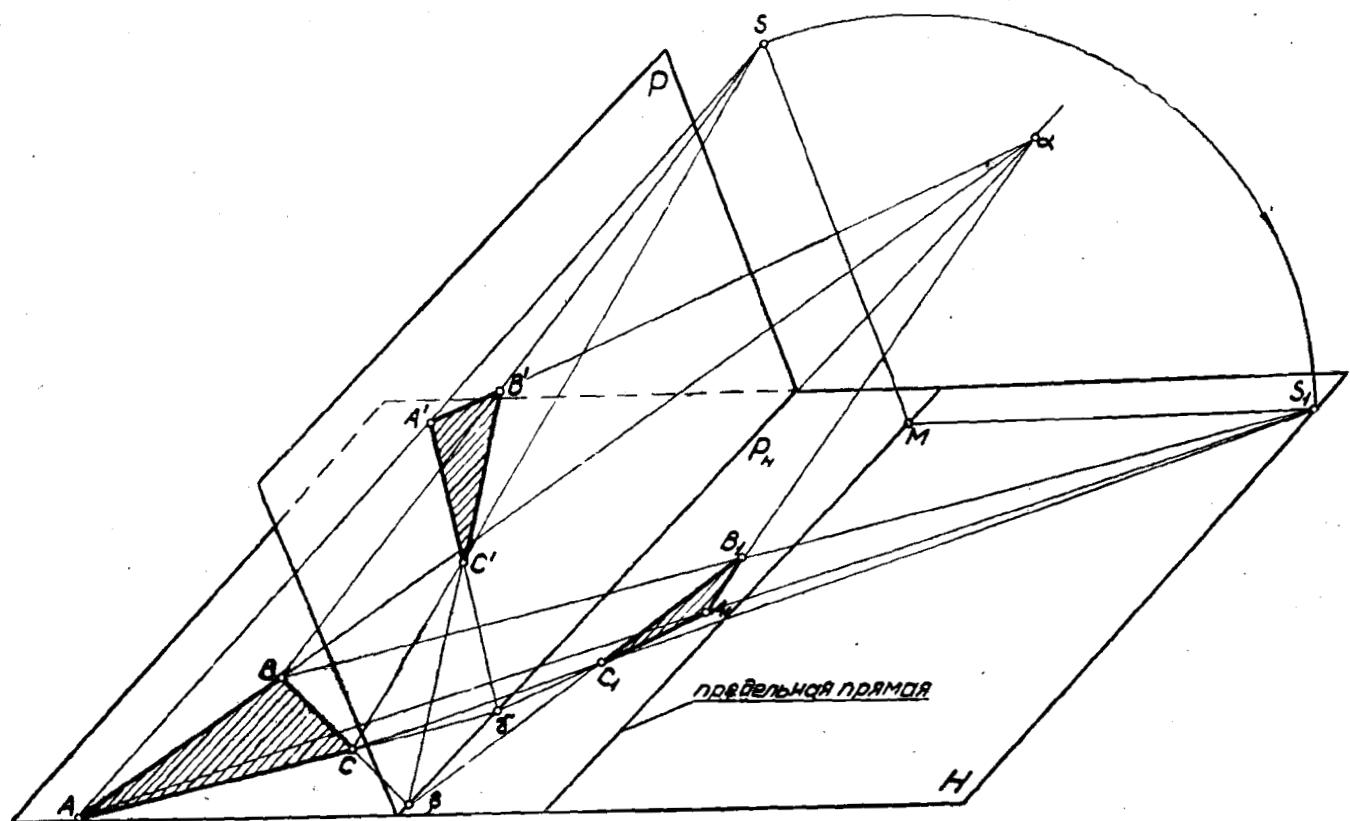


Рис. 3

ром гомологии для треугольников $A_1B_1C_1$ и ABC является точка S_1 .

Гомологическое соответствие может быть получено не только для двух треугольников, но и для двух других однородных плоских фигур (например, для двух плоских четырехугольников, окружности и эллипса).

Элементами, определяющими гомологическое соответствие двух плоских фигур, являются: центр гомологии, ось гомологии и одна пара соответственных точек.

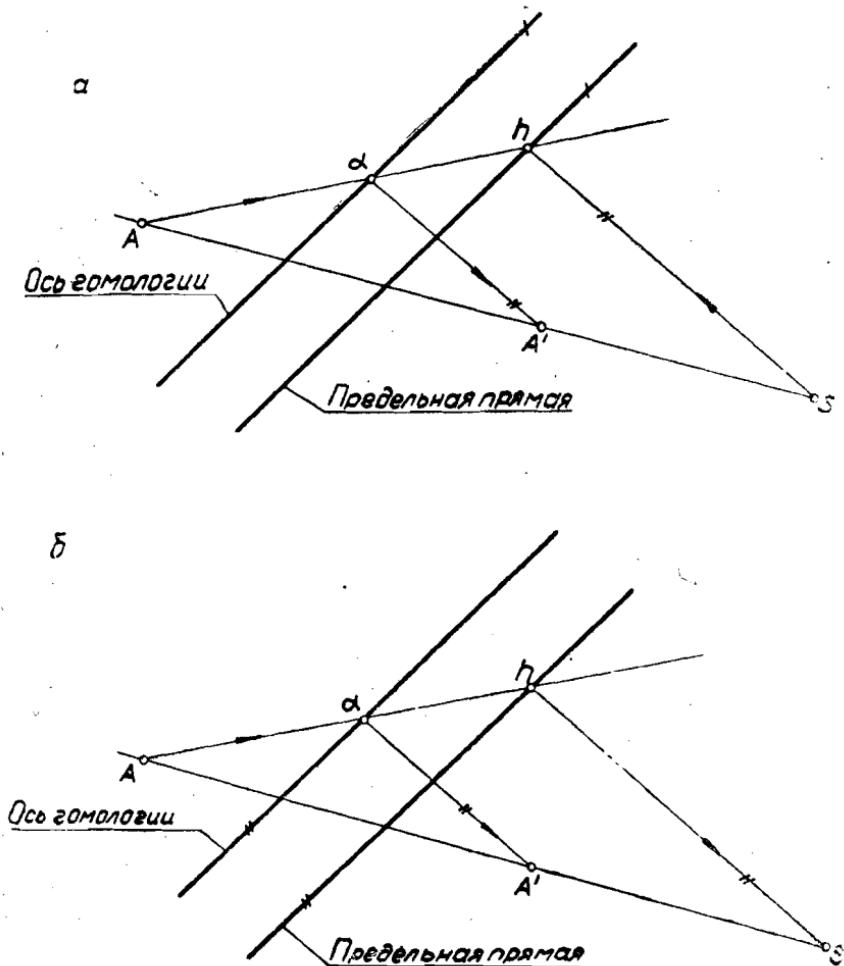


Рис. 4

Так, имея точку S , прямую P_H и точки A' и A (см. рис. 3), можно построить точки B и C , если взять в плоскости P точки B' и C' , и, наоборот, построить точки B' и C' , если взять точки B

и C в плоскости H . Те же элементы определяют гомологическое соответствие и после совмещения плоскости P с плоскостью H .

На рис. 4,а заданы ось гомологии, центр гомологии S и соответственные точки A и A' , расположенные на прямой, выходящей из точки S . Построим предельную прямую для заданного гомологического соответствия, для чего через точку A проведем произвольную прямую, пересекающую ось гомологии в точке a , и соединим точку a с точкой A' . Если провести теперь через центр гомологии S прямую, параллельную прямой aA' , то эта прямая пересечет в точке h прямую Aa . Через полученную точку h проведем параллельно оси гомологии предельную прямую.

Имея центр гомологии S , ось гомологии, предельную прямую и какую-либо точку A , можно найти точку A' , соответственную точке A . Для этого (рис. 4,б) соединим точки S и A , через точку A проведем произвольную прямую, пересекающую ось гомологии в точке a , а предельную прямую — в точке h . Соединив точку h с точкой S , проведем через точку a прямую, параллельную hS до пересечения с SA в точке A' , которая и является точкой, соответственной точке A .

О сопряженных центрах гомологии

На рис. 5 даны прямые 1 , 2 и 3 , пересекающиеся в точке O , а также точки S_1 и S_2 . Проведем из точки S_1 пучок лучей, пересекающих прямую 3 в точках A , B , C и D , а прямую 1 — в точках A_1 , B_1 , C_1 и D_1 . Соединим точку S_2 с точками A , B , C и D прямыми линиями, образующими другой пучок лучей и пересекающими прямую 2 в точках A_2 , B_2 , C_2 и D_2 .

На основании теоремы проективной геометрии о сложном отношении четырех точек имеем, что два взаимно перспективных ряда точек A_1 , B_1 , C_1 и D_1 на прямой 1 и точек A_2 , B_2 , C_2 и D_2 на прямой 2 получены при проектировании из центра S_3 , положение которого зависит от положения заданных центров S_1 и S_2 .

Если центр S_3 удален в бесконечность, то в проективных рядах соответствуют друг другу бесконечно удаленные точки и в этом случае точки A_1 , B_1 , C_1 , D_1 и A_2 , B_2 , C_2 , D_2 будут находиться уже не в сложном (ангармоническом), а в простом отношении.

Итак, если пересекающиеся прямые 1 и 2 пересечены двумя пучками лучей, проведенных из центров S_1 и S_2 , то можно получить такое положение соответствующих точек перспективных рядов на прямых 1 , 2 и 3 , что отношения между группами точек $A_1B_1C_1D_1$ и $ABCD$, а также между группами точек $A_2B_2C_2D_2$ и $ABCD$ останутся сложными, в то время как отно-

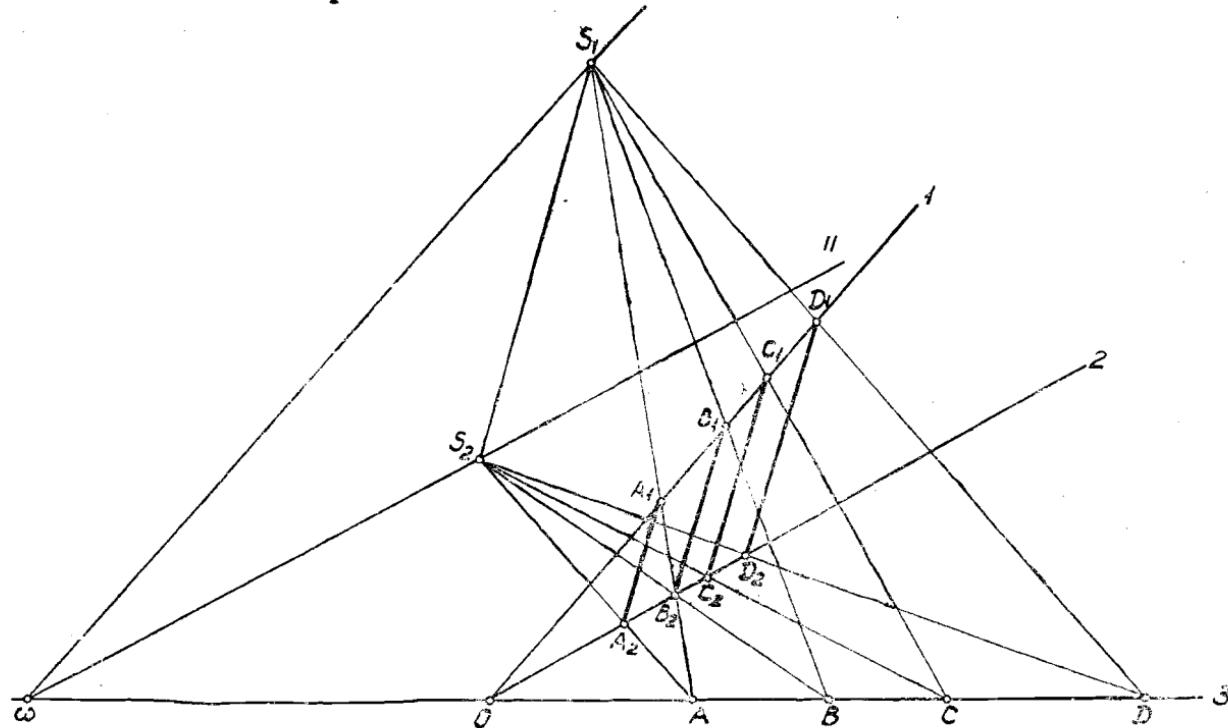


Рис. 5

шения между группами точек $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$ станут простыми.

Проведем через точку S_1 прямую I , параллельную прямой I , до пересечения с прямой β в точке ω , а через эту точку ω проведем прямую II , параллельную прямой 2 .

Если взять теперь на прямой II произвольную точку (на рис. 5 взята точка S_2) и соединить ее с точками A , B , C и D на прямой β , то прямые, соединяющие точки A_1 и A_2 , B_1 и B_2 , C_1 и C_2 , D_1 и D_2 , будут параллельны, что и соответствует удалению точки S_3 в бесконечность. Таким образом, установлено аффинное соответствие фигур $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$, гомологичных $ABCD$, причем направление аффинитета параллельно S_1S_2 и центры гомологии S_1 и S_2 сопряжены.

Следовательно, при удалении центра S_3 в бесконечность и задании центра гомологии S_1 второй, сопряженный с ним центр гомологии S_2 может быть взят только на прямой II , проведенной через точку ω параллельно прямой 2 (см. рис. 5).

Проектирование точек на плоскость общего положения

Как уже было сказано выше, для непосредственного построения натуральных величин плоских сечений поверхностей, кроме гомологических соответствий, основы которых только что кратко изложены, можно проектировать фигуру основания заданной поверхности на секущую плоскость, совмещая затем эту плоскость вместе со спроектированной на нее фигурой основания с одной из плоскостей проекций.

Как известно, проектирование точки на плоскость общего положения по заданному направлению проектирования сводится к тому, что через проектирующий луч, проходящий через эту точку, проводится горизонтально проектирующая плоскость, пересекающая плоскость общего положения по одной прямой, и фронтально проектирующая плоскость, пересекающая плоскость общего положения по другой прямой. Пересечение двух этих прямых дает точку, являющуюся проекцией заданной точки по заданному направлению проектирования на плоскость общего положения.

На рис. 6 показано прямоугольное проектирование точки A на плоскость общего положения P (проекции проектирующего луча AS перпендикулярны к одноименным следам плоскости P). Через проектирующий луч AS проведена горизонтально проектирующая плоскость R , пересекающая плоскость P по линии наибольшего ската, и фронтально проектирующая плоскость Q , пересекающая плоскость P по линии наибольшего наклона к плоскости V .

Вращением вокруг P_H плоскость P вместе с линиями наибольшего ската и наибольшего наклона к плоскости V совмещена с горизонтальной плоскостью проекций. Совмещенные

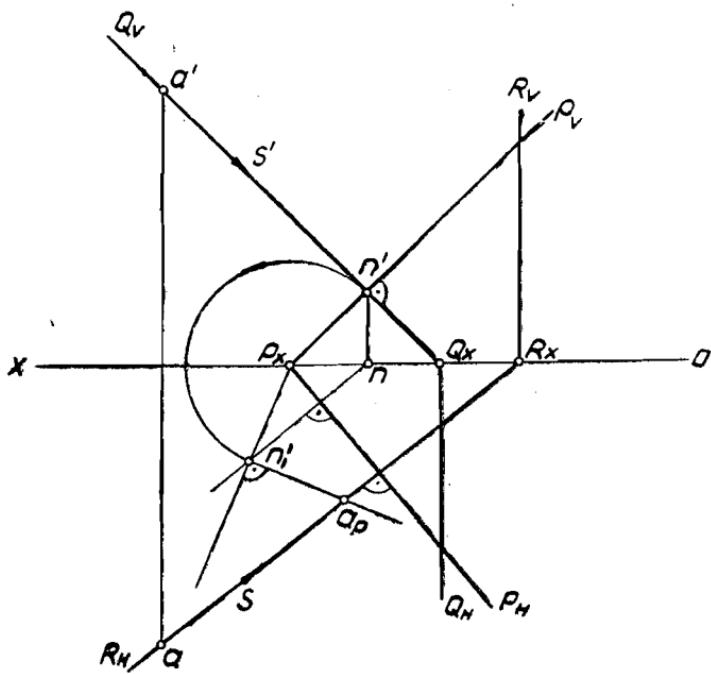


Рис. 6

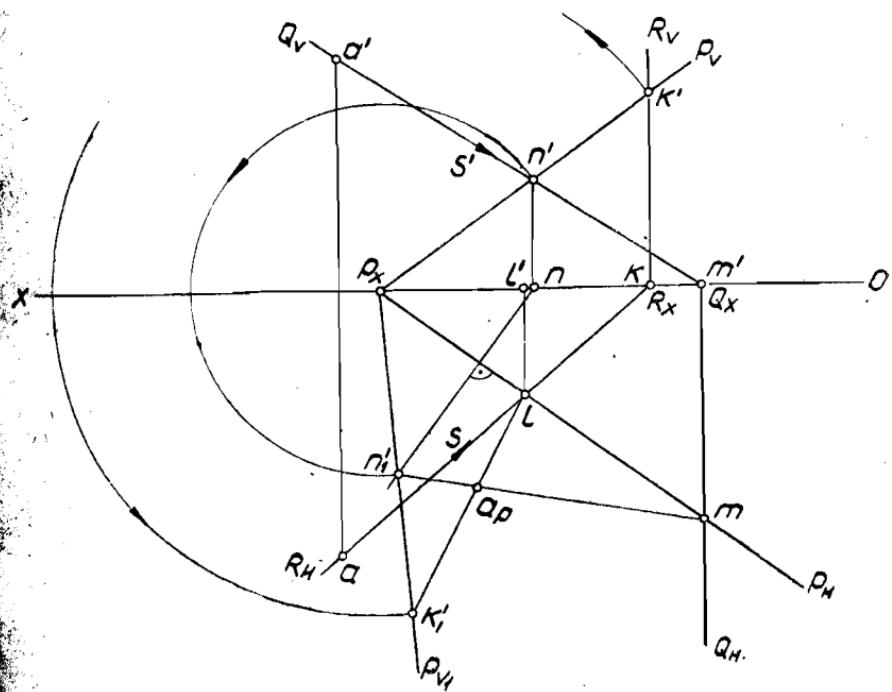


Рис. 7

положения линий наибольшего ската и наибольшего наклона к плоскости V пересекаются в точке a_p , которая является совмещенным с плоскостью H положением прямоугольной проекции точки A на плоскость P .

На рис. 7 показано косоугольное проектирование точки A на плоскость общего положения P по заданному направлению AS . Через проектирующий луч AS , как и в предыдущем случае, проведена горизонтально проектирующая плоскость R и фронтально проектирующая плоскость Q . Точка пересечения плоскостей P , Q и R будет косоугольной проекцией точки A на плоскость общего положения P .

Вращением вокруг P_H плоскость P вместе с прямыми KL (по которой эта плоскость пересекается плоскостью R) и MN (по которой плоскость P пересекается плоскостью Q) совмещена с горизонтальной плоскостью проекций. Совмещенные положения прямых KL и MN пересекаются в точке a_p , являющейся совмещенным с плоскостью H положением косоугольной проекции точки A на плоскость P .

Непосредственное построение натуральных величин плоских сечений пирамид и конусов

На рис. 8 пирамида $SABC$ пересекается плоскостью общего положения P . Найдем натуральную величину сечения как треугольник, гомологичный треугольнику ABC основания пирамиды. Для решения задачи воспользуемся случаем плоской конфигурации теоремы Дезарга. Осью гомологии будет горизонтальный след P_H секущей плоскости P , центром гомологии — совмещенное с плоскостью H положение вершины S пирамиды. Это совмещенное положение точки S с плоскостью H находим, построив предельную прямую, вокруг которой вращается точка S . Поскольку предельная прямая является горизонтальным следом плоскости, проведенной через точку S параллельно плоскости P , проведем через вершину пирамиды S фронталь, параллельную плоскости P , а через горизонтальный след M этой фронтали — предельную прямую параллельно оси гомологии P_H . Так как вращение точки S будет происходить в плоскости, перпендикулярной к предельной прямой, через горизонтальную проекцию s вершины пирамиды проведем прямую, перпендикулярную к предельной прямой, а из точки m радиусом $ms_1 = s'm'$ — дугу до пересечения в точке s_1 с только что проведенным из точки s перпендикуляром к предельной прямой. Точка s_1 является центром гомологии. Остается найти точки a_1 , b_1 и c_1 , соответственные точкам a , b и c . Соединив s_1 с точками a , b и c , продолжим сторону bc треугольника abc до пересечения с осью гомологии в точке β и с предельной прямой в точке h . Соединим точки s_1 и h и на основании построений, рассмотренных на рис. 4,6,

через точку β проведём прямую, параллельную прямой s_1h , которая пересечет s_1c в точке c_1 и s_1b в точке b_1 .

Продолжим теперь сторону ac треугольника abc до пересечения с осью гомологии в точке γ , которую соединим с точ-

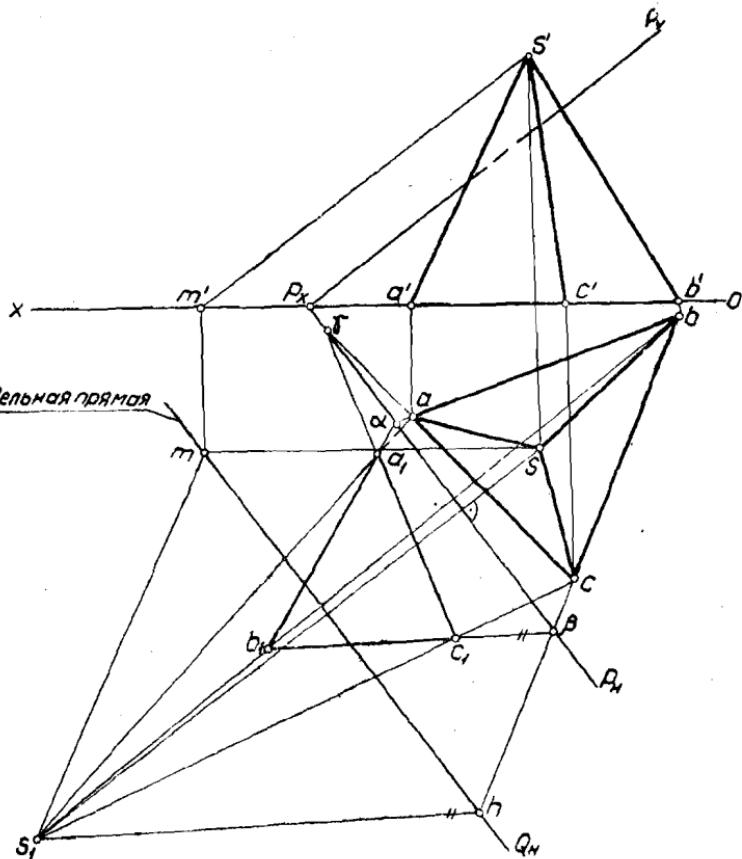


Рис. 8

кой c_1 . В пересечении прямых γc_1 и s_1a получим точку a_1 , соответственную точке a . Совершенно очевидно, что соответственные стороны ab и a_1b_1 пересекают ось гомологии в одной и той же точке a .

Итак, треугольник $a_1b_1c_1$, вершины которого найдены, гомологичен треугольнику abc и является натуральной величиной сечения пирамиды $SABC$ плоскостью P .

На рис. 9 показано непосредственное построение натуральной величины сечения поверхности конуса вращения плоскостью общего положения P . Как и в предыдущем случае, осью гомологии является горизонтальный след P_H секущей плоскости P , а центром гомологии — совмещенное с плос-

костью H положение вершины S конуса. Через вершину S конуса проведена фронталь, параллельная плоскости P , а через горизонтальный след этой фронтали — предельная прямая, параллельная оси гомологии P_H .

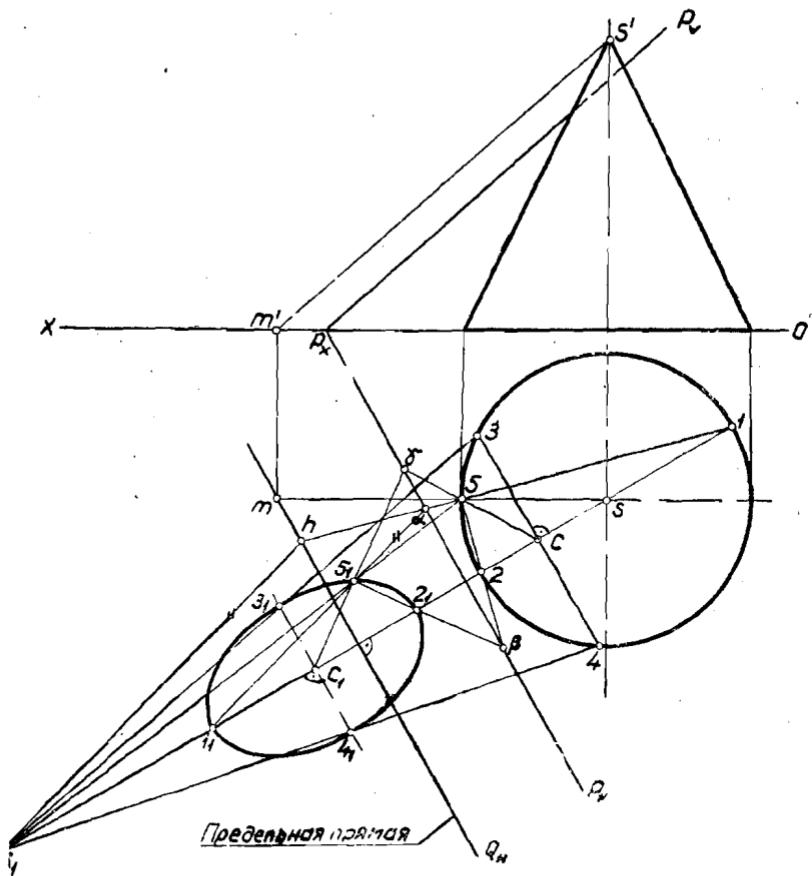


Рис. 9

Центр гомологии s_1 получен как точка пересечения перпендикуляра к предельной прямой, проведенного через горизонтальную проекцию s вершины конуса, с дугой окружности радиуса $ms_1 = m's'$, проведенной из центра m . Как и в предыдущем примере (см. рис. 8), при вращении отрезка MS фронтали вокруг предельной прямой точка M неподвижна, а сам отрезок до совмещения его с плоскостью H проектируется на плоскость V в натуральную величину.

Поскольку предельная прямая не пересекает окружности основания конуса, сечением поверхности конуса плоскостью P

будет эллипс (если предельная прямая касается основания конуса, получается парабола, а если пересекается с основанием конуса — гипербола).

Для построения эллипса, являющегося натуральной величиной сечения поверхности конуса плоскостью P и представляющего собой фигуру, гомологичную окружности основания, достаточно найти оси этого эллипса. Так как большая ось эллипса должна быть перпендикулярна к предельной прямой, то, взяв на окружности основания точку l на прямой ss_1 , проведем через эту точку и точку b , произвольно взятую на той же окружности, прямую до пересечения с осью гомологии в точке a , а с предельной прямой — в точке h , после чего соединим центр гомологии s_1 с точками h и b .

На основании построений, рассмотренных на рис. 4, б, через точку a проведем прямую, параллельную s_1h и пересекающую луч s_1b в точке b_1 , а луч s_1l в точке l_1 , которая является одним из концов большой оси эллипса. Проводя далее прямую через точку 2 , диаметрально противоположную точке l , и через точку b до пересечения с осью гомологии в точке β , соединим точку β с точкой b_1 , найдя при этом точку 2_1 , в которой прямая βb_1 пересекает направление большой оси эллипса. Точка 2_1 является вторым концом большой оси эллипса, а середина c_1 отрезка l_12_1 — центром эллипса.

Для построения малой оси эллипса найдем сначала точку c , соответственную точке c_1 , для чего через точки c_1 и b_1 проведем прямую, пересекающую ось гомологии в точке γ . Проводя теперь прямую через точки γ и b до пересечения с s_1l , получим точку c . Остается найти точки 3 и 4 , в которых прямая, проведенная через точку c перпендикулярно к s_1l , пересекает окружность основания конуса. Соединив точку s_1 с точками 3 и 4 , получим точки 3_1 и 4_1 , в которых направление малой оси эллипса пересекает лучи s_13 и s_14 . Точки 3_1 и 4_1 являются концами малой оси эллипса.

Рассмотрим теперь решения тех же двух задач (рис. 8 и 9) путем косоугольного проектирования оснований пирамиды и конуса на секущую плоскость с последующим совмещением секущей плоскости вместе со спроектированным на нее основанием пирамиды или конуса с горизонтальной плоскостью проекций.

На рис. 10 изображена пирамида $SABC$, пересеченная плоскостью общего положения P . Для непосредственного построения натуральной величины этого сечения достаточно найти косоугольную проекцию на плоскость P каждой из вершин треугольника основания пирамиды по направлению того бокового ребра пирамиды, которому эта точка принадлежит. Проведем хотя бы через ребро SB пирамиды горизонтально проектирующую плоскость R и фронтально проектирующую плоскость Q . Тогда на основании построений, показанных на рис. 7,

точка пересечения плоскостей P , Q и R дает косоугольную проекцию точки B , на плоскость P . Совместив плоскость P

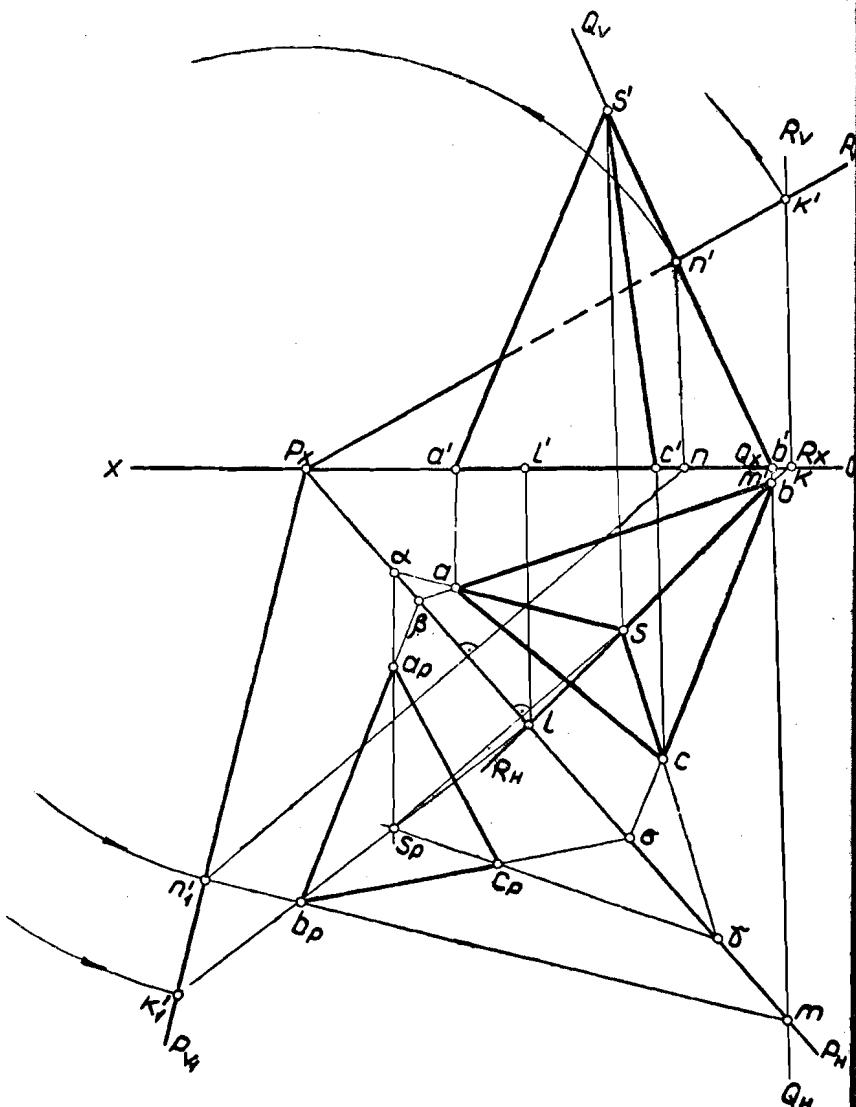


Рис. 10

вместе с прямыми ее пересечения плоскостями Q и R с плоскостью H , получим в пересечении совмещенных положений этих прямых точку b_p , которая будет одной из вершин натуральной величины сечения.

Для упрощения построения двух остальных вершин треугольника, являющегося натуральной величиной сечения пирамиды плоскостью P , найдем совмещенное с плоскостью H положение косоугольной проекции на плоскость P по направлению ребра SB вершины S пирамиды. Это совмещенное положение s_p косоугольной проекции точки S на плоскость P является точкой пересечения перпендикуляра, проведенного из горизонтальной проекции s вершины пирамиды к следу P_H , являющегося осью вращения для плоскости P , с совмещенным положением k'_l прямой пересечения плоскостей P и R .

Теперь совмещенное положение a_p с плоскостью H косоугольной проекции точки A по направлению проектирования SA может быть построено следующим образом: продолжим горизонтальную проекцию ребра SA пирамиды до пересечения с P_H в точке a , а горизонтальную проекцию ребра AB основания до пересечения с P_H в точке β . Точку a соединим с s_p , а точку β — с точкой b_p .

Пересечение прямых as_p и βb_p дает точку a_p , являющуюся второй вершиной треугольника — натуральной величины сечения поверхности пирамиды плоскостью P .

Третья вершина c_p треугольника $a_p b_p c_p$ строится так же, как и вершина a_p .

На рис. 11 показано непосредственное построение натуральной величины сечения поверхности конуса вращения плоскостью общего положения P . Для этого построения применено косоугольное проектирование точек окружности основания конуса на плоскость P по направлениям образующих конуса с последующим совмещением плоскости P вместе с косоугольными проекциями этих точек на плоскость P с плоскостью H .

Через левую образующую конуса, которой принадлежит точка K окружности основания, проведены фронтально проектирующая плоскость Q и фронтальная плоскость R . Точка пересечения плоскостей P , Q и R является косоугольной проекцией точки K на плоскость P по направлению образующей SK .

После совмещения плоскости P вместе с прямыми ее пересечения плоскостями Q и R с плоскостью H точка пересечения совмещенных положений этих прямых будет принадлежать эллипсу, являющемуся натуральной величиной сечения поверхности конуса плоскостью P .

Соединив точки m и n_1 и проведя через точку m_1 прямую, параллельную P_V , и являющуюся совмещенным с плоскостью H положением прямой пересечения плоскостей P и R , до пересечения с mn_1 , получим точку k_p , принадлежащую эллипсу.

Концы a_p и b_p большой оси эллипса, являющиеся косоугольными проекциями на плоскость P точек A и B , принадлежащих окружности основания конуса, по направлениям образующих конуса SA и SB будут расположены на перпенди-

куляре к оси вращения P_H , проходящем через горизонтальную проекцию s вершины конуса. Проведем этот перпендикуляр, пересекающий окружность основания конуса в точках a и b .

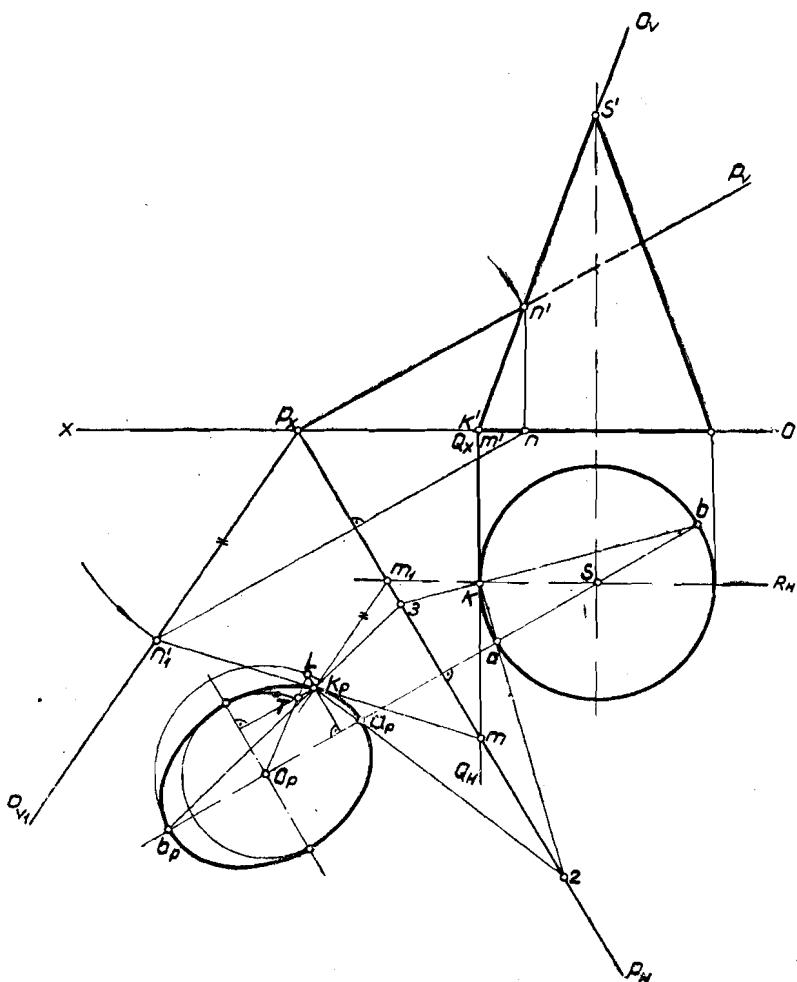


Рис. 11

Через точки k и a проведем прямую до пересечения с P_H в точке 2 , а точку 2 соединим с точкой k_p . Прямая $2k_p$ пересекает перпендикуляр, проведенный через точку s к следу P_H плоскости P , в точке a_p , являющейся одним из концов большой оси эллипса.

Проводя прямую bk до пересечения с P_H в точке 3 , через точки 3 и k_p проведем прямую, пересекающую тот же перпен-

дикуляр в точке b_p , являющейся вторым концом большой оси эллипса.

Найдя центр o_p эллипса, на $a_p b_p$, как на диаметре, описываем полуокружность и через точку k_p проведем перпендикуляр к $a_p b_p$ до пересечения с этой полуокружностью в точке L . Далее из точки k_p проведем перпендикуляр к направлению малой оси эллипса, а точку o_p соединим с точкой L , получая в пересечении прямой $o_p L$ с этим перпендикуляром точку T . Отрезок $o_p T$ является величиной малой полуоси эллипса. Отложив этот отрезок от центра o_p эллипса в обе стороны по направлению малой оси, получим концы малой оси эллипса, являющегося натуральной величиной сечения поверхности конуса плоскостью P .

Следует отметить, что в примерах, разобранных на рис. 10 и 11, для непосредственного построения натуральной величины сечения поверхности плоскостью понадобилось проводить проектирующие плоскости только через одно боковое ребро пирамиды или через одну образующую конуса.

Непосредственное построение натуральных величин плоских сечений призм и цилиндров

Непосредственное построение натуральных величин плоских сечений поверхностей прямой призмы и цилиндра вращения, боковые поверхности которых по отношению к одной из плоскостей проекций являются проектирующими, было рассмотрено выше (см. рис. 1 и 2). Во всех остальных случаях расположения боковых поверхностей призм и цилиндров для непосредственного построения натуральных величин их плоских сечений приходится применять или гомологические соответствия, или косоугольное проектирование на секущую плоскость.

На рис. 12 изображена призма $ABCDEF$, пересеченная плоскостью общего положения P . Для непосредственного построения натуральной величины этого сечения найдем сопряженные центры гомологического соответствия между треугольником нижнего основания призмы и треугольником, являющимся натуральной величиной сечения поверхности призмы плоскостью P .

Как было показано выше (см. рис. 5), при наличии двух сопряженных центров гомологии между двумя из трех групп точек будет иметь место сложное отношение, в то время как между двумя другими группами точек будет установлено аффинное соответствие с направлением аффинитета, параллельным прямой, соединяющей сопряженные центры гомологии.

Построим геометрические места сопряженных центров гомологии S_1 и S_2 . Для этого проведем в плоскости P одну из

линий наибольшего ската MN и найдем совмещенное с плоскостью H положение $(n'_1; n_1)$ фронтального следа $(n'; n)$ этой линии наибольшего ската. Далее через одну из вершин треугольника верхнего основания призмы проведем прямую, параллельную линии наибольшего ската MN (на рис. 12 эта

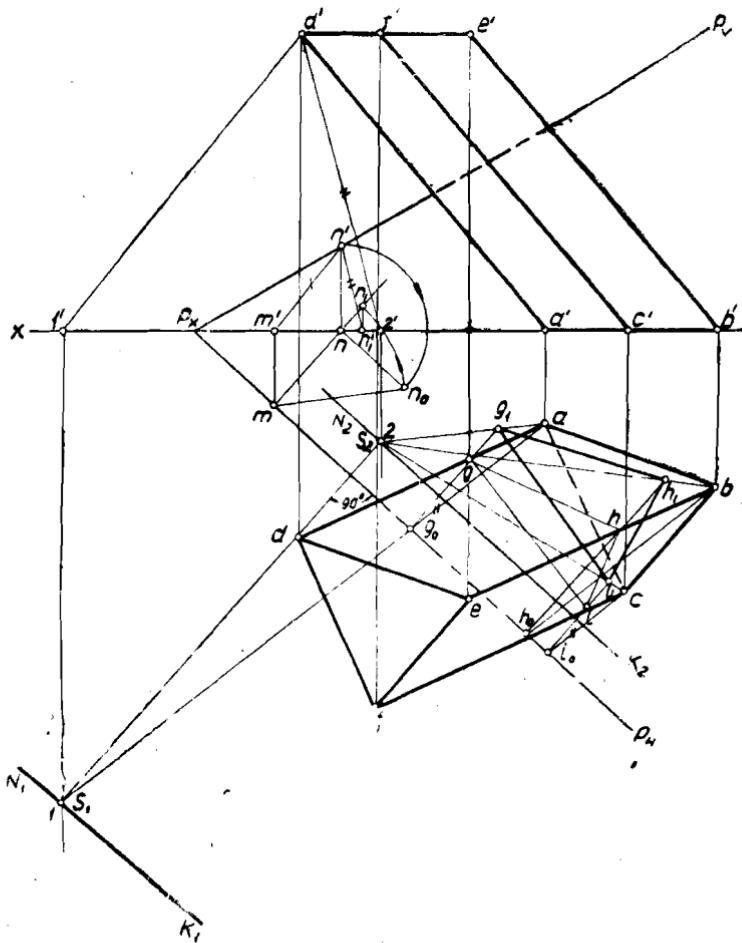


Рис. 12

прямая проведена через вершину D). Найдя горизонтальный след $(1'; 1)$ прямой $D1$, через этот след параллельно P_H проведем прямую K_1N_1 , являющуюся геометрическим местом положений одного из сопряженных центров гомологии.

Через ту же точку D проведем прямую, параллельную прямой $(n'n'_1; nn_1)$, и через горизонтальный след $(2'; 2)$ этой прямой $D2$ параллельно P_H проводим прямую K_2N_2 , являющуюся

геометрическим местом положений второго центра гомологии, сопряженного с первым.

Если теперь через точку d провести произвольную прямую, но не параллельную P_H , то эта прямая пересечет геометрические места положений сопряженных центров гомологии в точках S_1 и S_2 , являющихся сопряженными центрами гомологии (на рис. 12 эта прямая перпендикулярна к P_H). Центр S_2 соединяется горизонтальными проекциями вершин A , B и C треугольника нижнего основания призмы, принадлежащего плоскости H , а центр S_1 — с горизонтальной проекцией вершины A того же треугольника.

Поскольку центры S_1 и S_2 гомологии сопряжены, между вершинами натуральной величины сечения призмы плоскостью P и вершинами треугольника, являющегося горизонтальной проекцией этого сечения, имеется аффинное соответствие с направлением родства, параллельным S_1S_2 . Поэтому через точку g_0 пересечения прямой S_1a с P_H проводим прямую, параллельную S_1S_2 , до пересечения с S_2a в точке g_1 , являющейся одной из вершин треугольника — натуральной величины сечения. Для построения двух остальных вершин этого треугольника достаточно провести через точки b и c прямые, параллельные прямой S_1a , до пересечения с P_H соответственно в точках h_0 и i_0 . Через точки h_0 и i_0 проведем прямые, параллельные S_1S_2 , до пересечения соответственно с прямой S_2b в точке h_1 и с прямой S_2c в точке i_1 . Треугольник $g_1h_1i_1$ является натуральной величиной сечения поверхности призмы плоскостью P .

Следует заметить, что пересечения прямых g_0g_1 , h_0h_1 и i_0i_1 соответственно с горизонтальными проекциями боковых ребер AD , BE и CF призмы дают точки g , h и i , являющиеся вершинами треугольника, аффинного треугольнику $g_1h_1i_1$ и представляющего собой горизонтальную проекцию сечения поверхности призмы плоскостью P .

Непосредственное построение натуральной величины сечения поверхности наклонного цилиндра плоскостью общего положения может быть произведено также путем предварительного определения сопряженных центров гомологического соответствия между этой натуральной величиной сечения и основанием цилиндра.

Рассмотрим теперь непосредственное построение натуральных величин плоских сечений призмы и цилиндра путем косоугольного проектирования их оснований на секущую плоскость с последующим совмещением этой плоскости вместе со спроектированной на нее фигурой основания с одной из плоскостей проекций.

На рис. 13 дана призма, пересеченная плоскостью общего положения P . Проектируем вершины A , B и C треугольника основания этой призмы на плоскость P по направлению боко-

вых ребер призмы. Через левое боковое ребро проведены фронтально проектирующая плоскость Q и горизонтально проектирующая плоскость R , после чего плоскость P вместе с прямыми ее пересечения плоскостями Q и R совмещена с плоскостью H .

Совмещенное положение $n'_1 m$ прямой MN , по которой

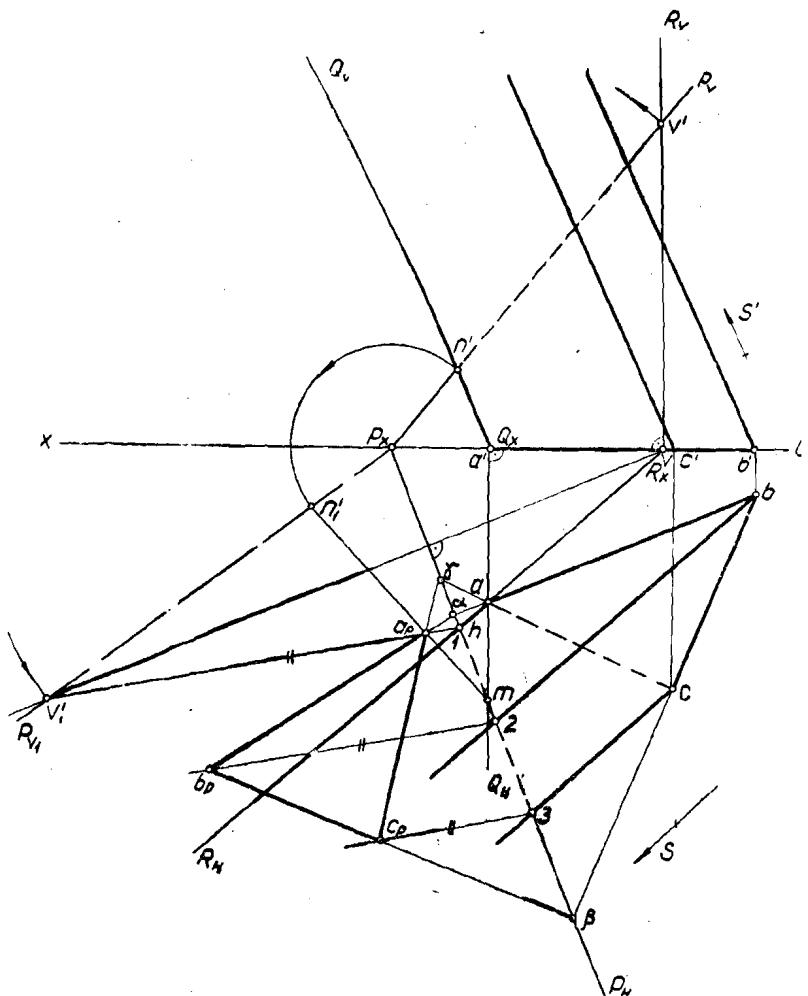


Рис. 13

плоскость Q пересекает плоскость P , пересекается с совмещенным положением $v'_1 h$ прямой пересечения плоскостей P и R в точке a_p , являющейся одной из вершин треугольника — натуральной величины сечения поверхности призмы плоскостью P . Вершины b_p и c_p этого треугольника могут быть

легко построены. Поскольку горизонтально проектирующие плоскости, проводимые через боковые ребра призмы, параллельны между собой, совмещенные с плоскостью H положения прямых пересечения этих плоскостей с плоскостью P также параллельны.

Найдя точку 2 пересечения горизонтальной проекции бокового ребра, проходящего через вершину B основания призмы, с P_H , проведем через нее параллельно $v'h$ совмещенное положение прямой пересечения горизонтально проектирующей плоскости, проведенной через это боковое ребро, с плоскостью P . Продолжив ab до пересечения с P_H в точке a , через точки a и a_p проведем прямую до пересечения с прямой, ранее проведенной через точку 2 параллельно $v'h$, в точке b_p , являющейся второй вершиной искомого треугольника. Аналогично строится третья вершина c_p треугольника $a_p b_p c_p$, представляющего собой натуральную величину сечения поверхности призмы плоскостью P .

На рис. 14 показано построение натуральной величины сечения поверхности цилиндра (горизонтальный след которой является окружностью) плоскостью общего положения P . Для этого построения применено косоугольное проектирование окружности основания по направлению оси цилиндра на секущую плоскость P и последующее совмещение с плоскостью H плоскости P вместе с прямыми ее пересечения фронтально проектирующей плоскостью Q и горизонтально проектирующей плоскостью R , проведенными через ось цилиндра. Пересечение совмещенной с плоскостью H прямой MN пересечения плоскостей P и Q с совмещенной с плоскостью H прямой KL пересечения плоскостей P и R дает точку O_p , являющуюся центром эллипса — натуральной величины сечения поверхности цилиндра плоскостью P .

Найдем направления и величины двух сопряженных диаметров этого эллипса. Проведем через левую образующую цилиндра, проходящую через точку $(a'; a)$ фронтально проектирующую плоскость T . Совмещенное положение прямой FG , по которой эта плоскость пересечет плоскость P , пройдет через совмещенный с плоскостью H фронтальный след F прямой пересечения этих плоскостей, принадлежащий P_V , и будет параллельно mn' .

Двум взаимно перпендикулярным диаметрам ab и cd окружности основания цилиндра будут соответствовать два взаимно сопряженных диаметра $a_p b_p$ и $c_p d_p$ эллипса, причем точки a_p , b_p , c_p и d_p являются совмещенными с плоскостью H косоугольными проекциями соответственно точек a , b , c и d окружности основания на плоскость P .

Продолжим прямую ab до пересечения с P_H в точке a и проведем через точки a и O_p направление одного из двух взаимно сопряженных диаметров эллипса. Точка a_p , в которой

прямая $\alpha_0 p$ пересекает прямую $f'_1 g$, дает один из концов этого диаметра эллипса. Имея направление одного из сопряженных диаметров эллипса и точку a_p , получим точку b_p — второй конец этого диаметра. Для построения диаметра $c_p d_p$, взаимно

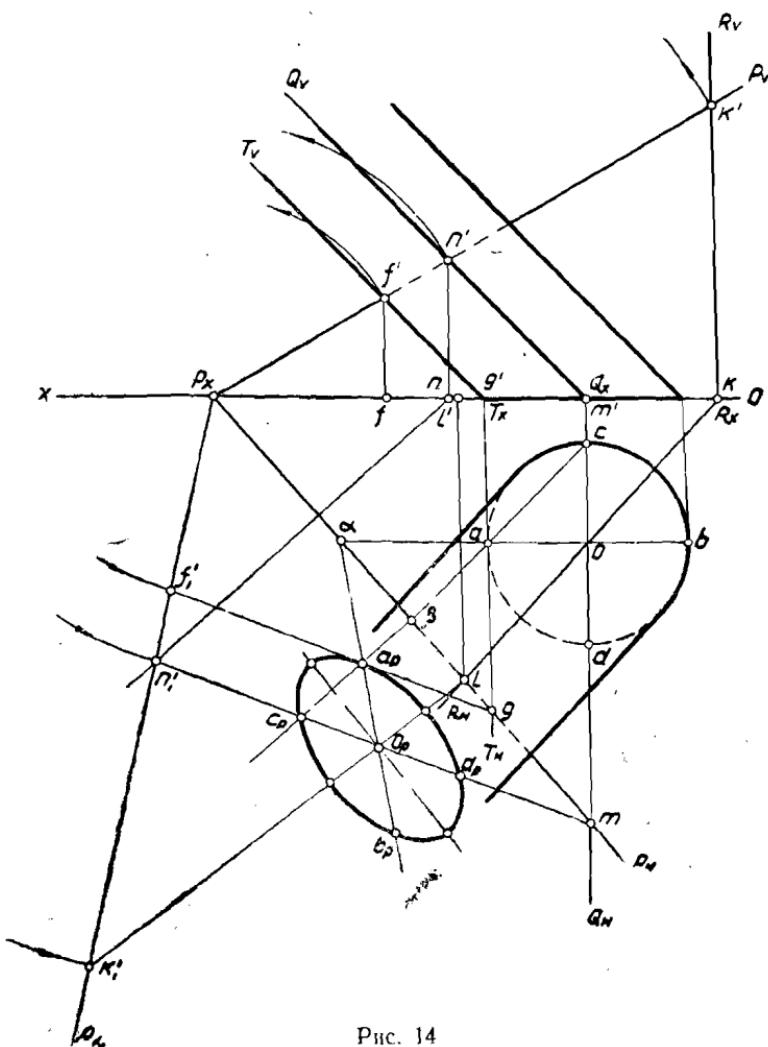


Рис. 14

сопряженного с диаметром $a_p b_p$, через точки s и a проведем прямую до пересечения с P_H в точке β , а через точки β и a_p — прямую до пересечения в точке c_p с прямой $n'_1 m$, являющейся совмещенным положением с плоскостью H прямой пересечения плоскостей P и Q и дающей направление диаметра эллипса, сопряженного с диаметром $a_p b_p$. Точка c_p — один из концов этого диаметра. Найдя второй конец d_p диаметра

$c_p d_p$, по двум сопряженным диаметрам $a_p b_p$ и $c_p d_p$ эллипса строим этот эллипс, являющийся натуральной величиной сечения поверхности цилиндра плоскостью P .

Непосредственное построение натуральных величин нормальных сечений поверхностей призм и цилиндров

В тех случаях, когда секущая плоскость перпендикулярна к боковым ребрам призмы или к оси цилиндра, непосредст-

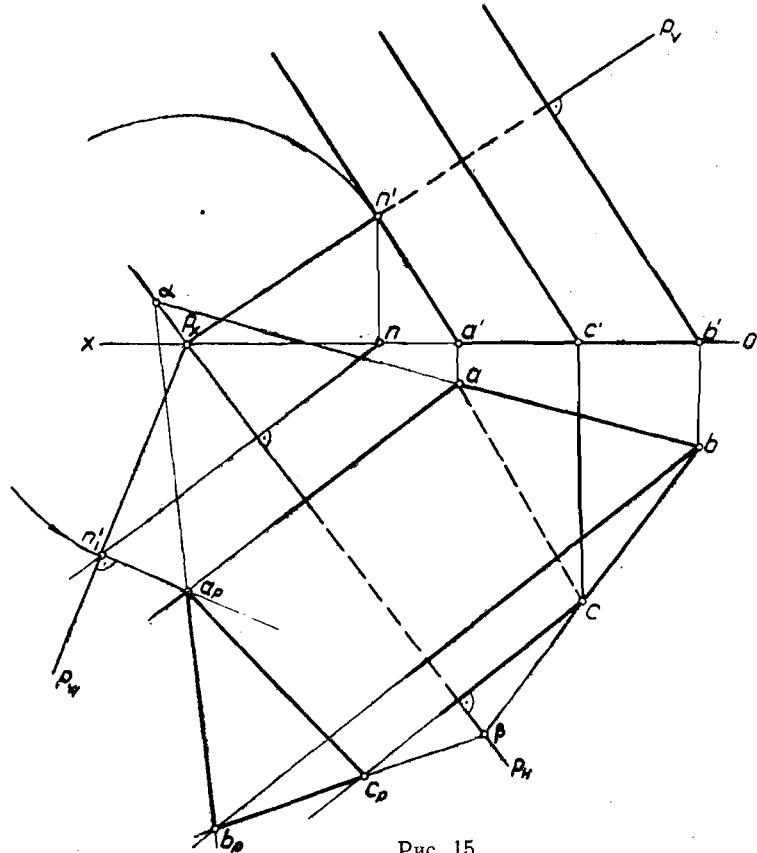


Рис. 15

венное построение натуральных величин таких нормальных сечений проще всего осуществить прямоугольным проектированием точек, принадлежащих основанию призмы или цилиндра, на секущую плоскость с последующим совмещением этой плоскости вместе со спроектированными на нее точками с одной из плоскостей проекций.

На рис. 15 показано непосредственное построение нормального сечения поверхности треугольной призмы плоскостью

общего положения P . Через левое боковое ребро, которому принадлежит вершина $(a'; a)$ треугольника основания, проведены фронтально проектирующая и горизонтально проектирующая плоскости (на рис. 15 следы этих плоскостей не обозначены). Как уже было показано на рис. 6, фронтально проектирующая плоскость пересекает плоскость P по линии наибольшего наклона к плоскости V , а горизонтально проектирующая плоскость пересекает плоскость P по линии наибольшего ската.

После совмещения плоскости P (вместе с принадлежащими ей линиями наибольшего наклона к плоскости V и наибольшего ската) с плоскостью H совмещенное положение линии наибольшего наклона к плоскости V остается перпендикулярным к совмещенному фронтальному следу плоскости P , а совмещенное положение линии наибольшего ската сольется с ее горизонтальной проекцией.

Найдя при помощи точки $(n'; n)$ совмещенное положение P_V , фронтального следа плоскости P , из точки n'_1 проведем перпендикуляр к P_V до пересечения с горизонтальной проекцией левого ребра призмы, которому принадлежит точка $(a'; a)$ треугольника основания, в точке a_p , являющейся одной из вершин треугольника $a_p b_p c_p$, представляющего собой натуральную величину нормального сечения поверхности призмы плоскостью P .

Вершины b_p и c_p этого треугольника найдены как точки, родственные точкам b и c , поскольку основание призмы и натуральная величина сечения аффинны.

На рис. 16 показано непосредственное построение натуральной величины нормального сечения поверхности цилиндра плоскостью общего положения P . Здесь применено прямоугольное проектирование окружности основания цилиндра на плоскость P , причем для решения задачи достаточно спроектировать только одну точку этой окружности, а именно один из концов того диаметра окружности, который перпендикулярен к горизонтальному следу секущей плоскости.

Через образующую цилиндра, которой принадлежит точка $(c'; c)$, проведем фронтально проектирующую и горизонтально проектирующую плоскости (на рис. 16 следы этих плоскостей не обозначены).

Точку $(n'; n)$, являющуюся фронтальным следом прямой пересечения проведенной фронтально проектирующей плоскости с плоскостью P , совмещаем с плоскостью H , после чего проведем совмещенный с плоскостью H фронтальный след P_V , плоскости P . Через точку n'_1 проведем перпендикулярно к P_V , совмещенное положение линии наибольшего наклона к плоскости V до пересечения с совмещенным с плоскостью H положением линии наибольшего ската. Полученная таким построением точка c_p является одним из концов малой оси эллипса,

представляющего собой натуральную величину нормального сечения поверхности цилиндра плоскостью P . Так как этого эллипс аффинен окружности основания цилиндра, причем осью аффинитета является след P_H плоскости P , а направле-

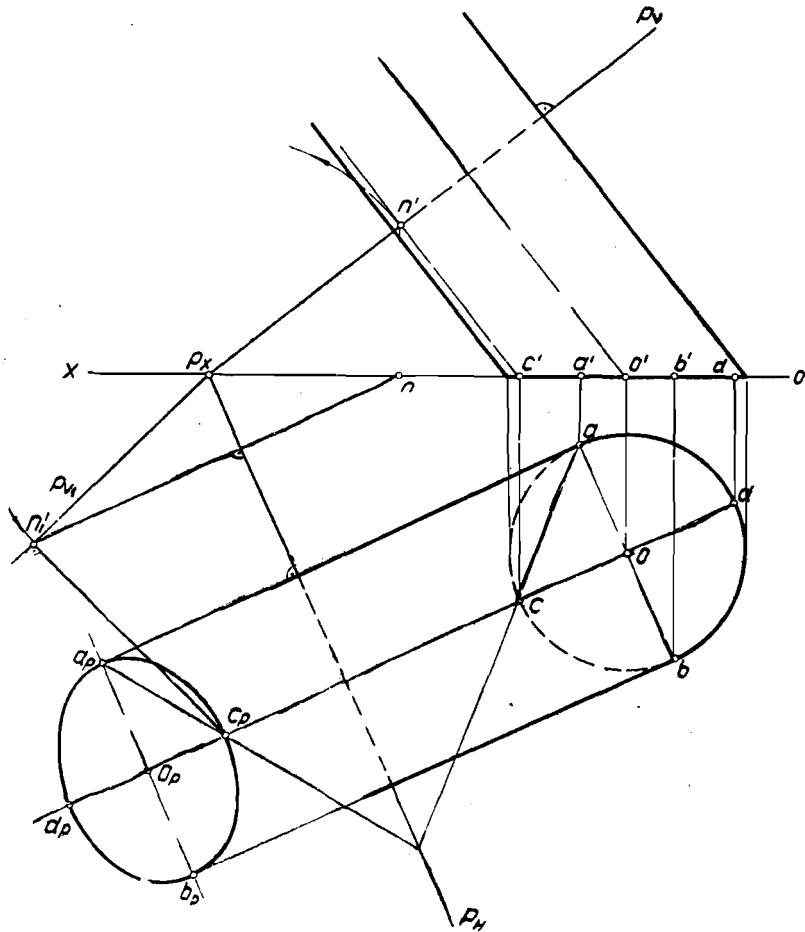


Рис. 16

ние аффинитета перпендикулярно к этой оси, то через конец a диаметра окружности, параллельного P_H , и точку c проведем прямую до пересечения с осью аффинитета. Этой прямой соответствует прямая $c_p a_p$, причем точка a_p является одним из концов большой оси эллипса. Так как положение центра O_p эллипса известно, находим точки b_p и d_p и строим эллипс, являющийся натуральной величиной нормального сечения поверхности цилиндра плоскостью P .

Следует отметить, что для непосредственного построения натуральных величин нормальных сечений поверхностей призм и цилиндров можно воспользоваться и способом вспомогательного проектирования, применяя диаграмму проф. С. М. Колотова.

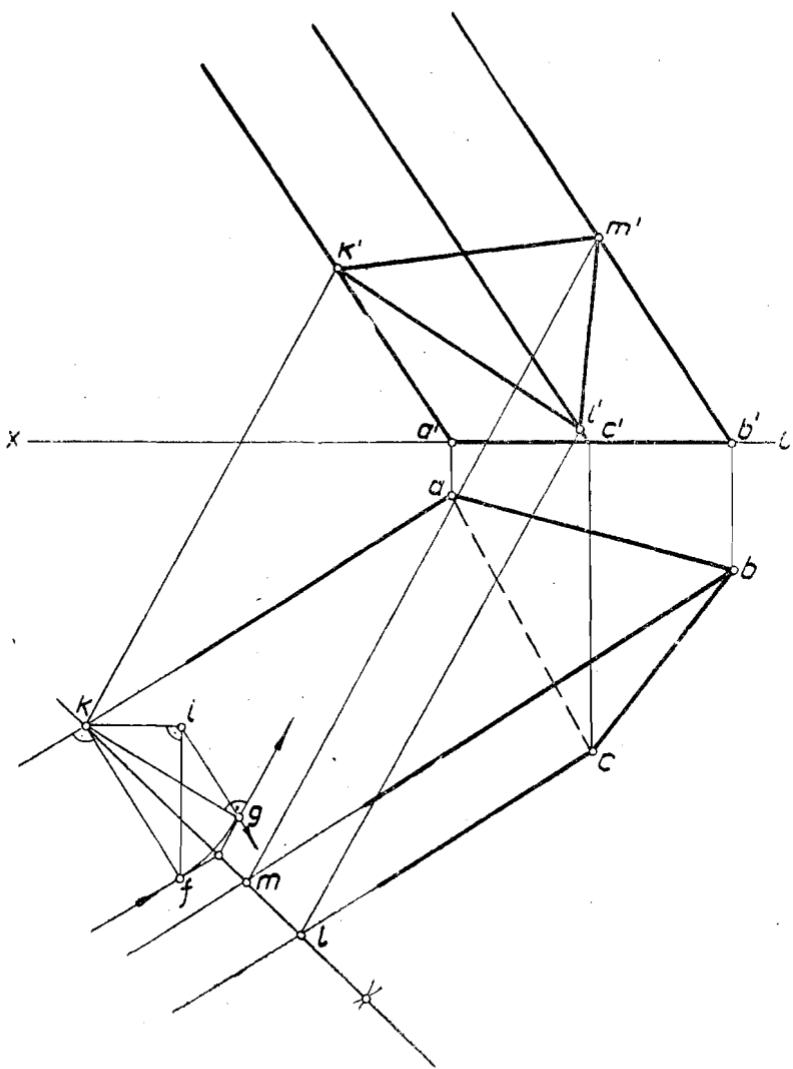


Рис. 17

На рис. 17 способом вспомогательного проектирования построена натуральная величина нормального сечения поверхности треугольной призмы.

При построении диаграммы С. М. Колотова через точку k , произвольно взятую на горизонтальной проекции одного из боковых ребер призмы, проведены перпендикуляр к этой горизонтальной проекции ребра, а также прямая, параллельная оси ox . На этой прямой взята произвольная точка i , через ко-

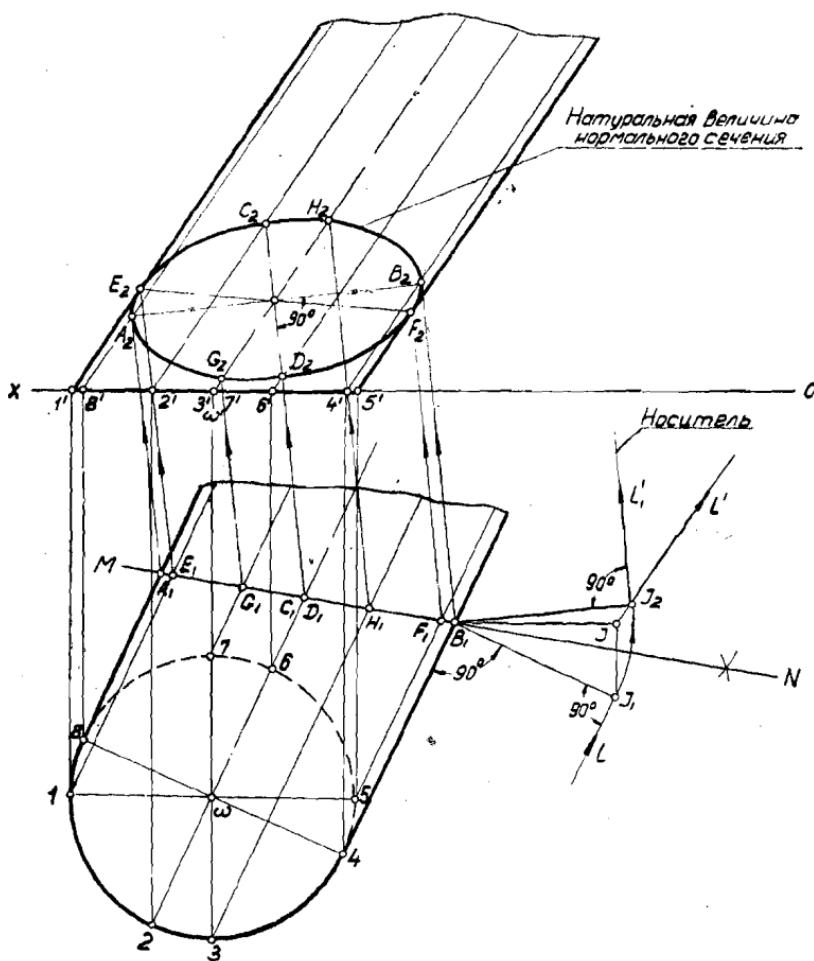


Рис. 18

торую проведены перпендикуляр ij к прямой ki и прямая ig , параллельная фронтальным проекциям боковых ребер призмы.

Из точки k , как из центра, радиусом kg проведена дуга окружности, пересекающая прямую ig в точке g , после чего точка g соединена с точкой k . Тогда перпендикуляр, проведенный к прямой kg в точке g , названный С. М. Колотовым носителем изображения, дает направление вспомогательного проектирования. Биссектриса угла jkg пересекает горизонталь-

ные проекции боковых ребер, проходящих через точки b и c , соответственно в точках m и l .

Остается через точки k , m и l провести лучи, параллельные носителю, до пересечения их с фронтальными проекциями боковых ребер призмы соответственно в точках k' , m' и l' , являющихся вершинами треугольника, представляющего собой натуральную величину нормального сечения поверхности призмы.

На рис. 18 способом вспомогательного проектирования построена натуральная величина нормального сечения поверхности цилиндра. На горизонтальной проекции образующей, проходящей через точку 4 окружности основания, взята произвольная точка B_1 , после чего, как и на рис. 17, построена диаграмма С. М. Колотова и получен носитель изображения l'_1 . Через точки пересечения биссектрисы MN угла $I_1B_1I_2$ с горизонтальными проекциями ряда образующих цилиндра параллельно носителю l'_1 проведены лучи до пересечения с фронтальными проекциями соответствующих образующих. Эти точки пересечения принадлежат эллипсу, являющемуся натуральной величиной нормального сечения заданной цилиндрической поверхности.

Для построения этого эллипса достаточно ограничиться проведением только трех лучей (через точки A_1 , B_1 и C_1D_1), так как точки A_2 и B_2 являются концами большой оси, а точки C_2 и D_2 — концами малой оси эллипса, которая параллельна носителю изображения.

ВЫВОДЫ

1. Непосредственное построение натуральных величин плоских сечений поверхностей без предварительного получения на чертеже проекций этих сечений значительно облегчает решения подобных задач и повышает точность построений.

2. Для поверхностей пирамид и конусов непосредственное построение натуральных величин их плоских сечений осуществляется достаточно просто как применением соответствий гомологии, так и косоугольным проектированием фигур оснований на секущую плоскость с последующим совмещением этой плоскости вместе со спроектированной на неё фигурой основания с одной из плоскостей проекций.

3. Для поверхностей призм и цилиндов непосредственное построение натуральных величин их плоских сечений значительно проще осуществляется способом косоугольного проектирования фигуры основания на секущую плоскость, так как использование соответствий гомологии приводит к предварительному построению двух сопряженных центров гомологии.

4. Для непосредственного построения натуральных величин нормальных сечений призм и цилиндов применение

прямоугольного проектирования фигуры основания на секущую плоскость с последующим совмещением этой плоскости вместе со спроектированной на нее фигурой основания с одной из плоскостей проекций настолько упрощает решение задачи, что это решение ограничивается прямоугольным проектированием на секущую плоскость только одной точки фигуры основания.

5. При изложении в курсе начертательной геометрии способов преобразования эпюра нельзя ограничиваться только способами вращения, совмещения и перемены плоскостей проекций. Необходимо расширить этот раздел, дополнив его сведениями об основах аффинных и гомологических соответствий, о способе косоугольного проектирования на плоскость общего положения и особенно о способе прямоугольного проектирования на плоскость общего положения, как равнозначного двум последовательным вращениям геометрических элементов или двум последовательным переменам плоскостей проекций и дающего значительное уменьшение графических операций при решении целого ряда метрических задач начертательной геометрии.

ЛИТЕРАТУРА

1. Колотов С. М. Вспомогательное проектирование. Киев, Госстройиздат УССР, 1956.
2. Родионов-Кузнецов Г. В. Непосредственное построение натурального вида плоских сечений конусов и пирамид. Труды Московского семинара по начертательной геометрии и инженерной графике. М., Изд-во «Советская наука», 1958.
3. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия. М., Физматгиз, 1953.
4. Чувиков Н. Т. Преобразование ортогональных проекций. М., Изд-во «Советская наука», 1957.

Н. Т. Чувиков

РЕКОНСТРУКЦИЯ ОРТОГОНАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ ПО АКСОНОМЕТРИЧЕСКОМУ ЧЕРТЕЖУ ОБЩЕГО ВИДА

Постановка задачи

Теория и приемы построения параллельной аксонометрии основаны на теореме, предложенной в 1853 г. Карлом Польке.

Дословный текст теоремы Польке таков: «Три отрезка $a'x$, $a'y$, $a'z'$ произвольной длины, лежащие в одной плоскости, выходящие из одной точки a' под произвольными углами друг к другу, представляют параллельную проекцию трех равных отрезков ax , ay , az , отложенных на прямоугольных осях координат от начала».

Доказательство своей теоремы Польке не опубликовал; а в 1864 г. Шварц, ученик Польке, доказал более общую теорему, названную теоремой Польке-Шварца. Однако первоначальная формулировка теоремы Польке сохраняет свое фундаментальное значение как в теории параллельной аксонометрии, так и в ее практических применениях. Именно поэтому теорему Польке и поныне считают «основным предложением аксонометрии».

На основании этой теоремы система аксонометрических осей и аксонометрические масштабы по осям могут быть заданы или выбраны совершенно произвольным образом. Такое задание определяет аксонометрический чертеж общего вида, ибо непосредственно из этого задания неизвестно, косоугольной или прямоугольной является заданная аксонометрическая система. Остаются неизвестными и показатели искажения по осям: аксонометрические масштабы позволяют определить лишь отношения показателей искажения и выяснить род аксонометрии, т. е. установить, будет ли данная аксонометрическая проекция изометрической, диметрической или триметрической. Пользуясь отношениями показателей искажения, можно построить аксонометрическую проекцию оригинала с точностью до подобия.

Однако задание аксонометрической системы на основании теоремы Польке дает возможность построить точную аксонометрию, выяснить все ее параметры и восстановить картину ее получения. Для этого необходимо определить: положение аксонометрической плоскости относительно натуральной системы координатных осей, направление проектирования на эту плоскость и размер единицы натурального масштаба.

Решение указанных задач составляет процесс полной реконструкции ортогональной системы координат по заданному аксонометрическому изображению. Практическое значение реконструкции состоит в том, что переход к ортогональному чертежу, являясь дешифрированием аксонометрии, позволяет не только восстановить истинные формы оригинала, но и решить наиболее просто метрические задачи, относящиеся к оригиналу.

В теоретическом отношении проблема реконструкции, связанная с определением проектирующего аппарата по оригиналу и его параллельной проекции, считается наиболее сложной: ее решение, равноценное непосредственному доказательству теоремы Польке, играет в начертательной геометрии ту же роль, какую в других областях математики играют теоремы существования.

Реконструкция в частном случае

Систему осей параллельной аксонометрии любого вида и рода можно построить непосредственно по ортогональному чертежу. Вводя в пространство трехгранный угла, образованного плоскостями проекций V , H и W , произвольную аксонометрическую плоскость и проектируя на эту плоскость координатные оси OX , OY и OZ по произвольному направлению проектирования, будем получать в общем случае систему осей косоугольной триметрической проекции. Аксонометрическую плоскость P удобно определить на эпюре ее следами P_V и P_H , пересекающими координатные оси OX , OY и OZ соответственно в точках P_x , P_y и P_z — вершинах треугольника следов плоскости P (рис. 1). В этом случае для перехода от натуральных осей к их аксонометрической проекции достаточно спроектировать на плоскость P по направлению проектирования OS только точку O . Чтобы аксонометрические оси оказались в плоскости чертежа, плоскость P должна совмещаться с ней: совмещенное положение P_{z1} точки P_z вместе с точками P_x и P_y определяет совмешенный треугольник следов аксонометрической плоскости P .

Проекцию O_P точки O на плоскость P по направлению проектирования OS получим теперь как результат пересечения трех плоскостей: горизонтально проектирующей плоскости ZOS с плоскостью P (прямая mP_{z1}) и фронтально

проектирующей плоскости YOS с плоскостью P (прямая NP_Y). Прямые $O_P P_X$, $O_P P_Y$ и $O_P P_{Z1}$ определяют систему аксонометрических осей $O_P X_P$, $O_P Y_P$, $O_P Z_P$.

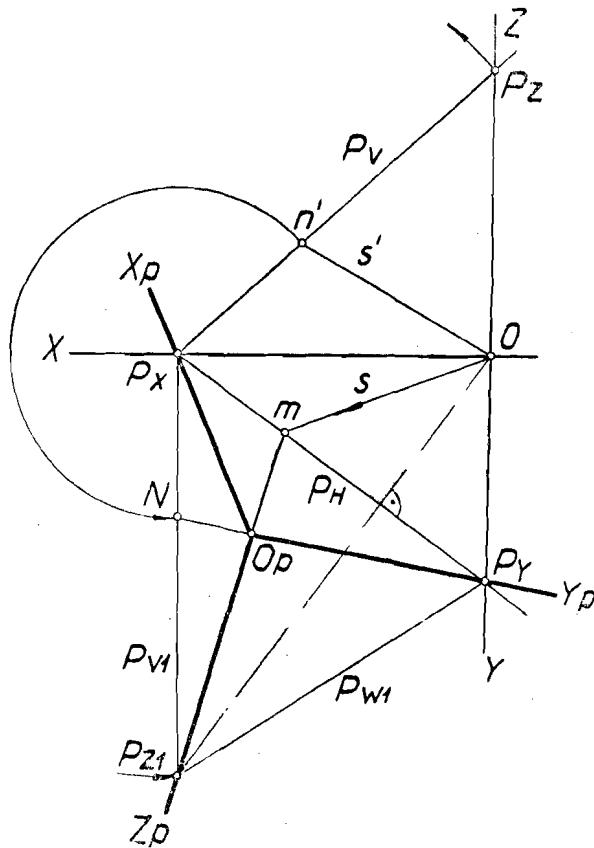


Рис. 1

Из рис. 1 следует, что положение каждой из аксонометрических осей (как прямой пересечения с аксонометрической плоскостью проектирующей плоскости, определяемой соответствующей натуральной осью и проектирующей прямой, проходящей через начало натуральных осей) зависит от направления проектирования. Очевидно, что изменяя это направление на одной и той же аксонометрической плоскости, можно получить множество систем осей косоугольной аксонометрии, но лишь одну для случая прямоугольного проектирования, когда направление OS перпендикулярно к плоскости P , то плоскости ZOS и YOS оказываются также перпендикулярными к плоскости P и пересекают ее по линиям наибольших укло-

нов; поэтому оси прямоугольной аксонометрии совпадают с высотами треугольника следов аксонометрической плоскости.

На основании рис. 1 легко решается и обратная задача — реконструкция натуральной системы. Действительно, если заданы не только оси косоугольной аксонометрии, но и треугольник следов $P_X P_Y P_Z$ аксонометрической плоскости P (рис. 2), совмещенной с плоскостью чертежа, то в треуголь-

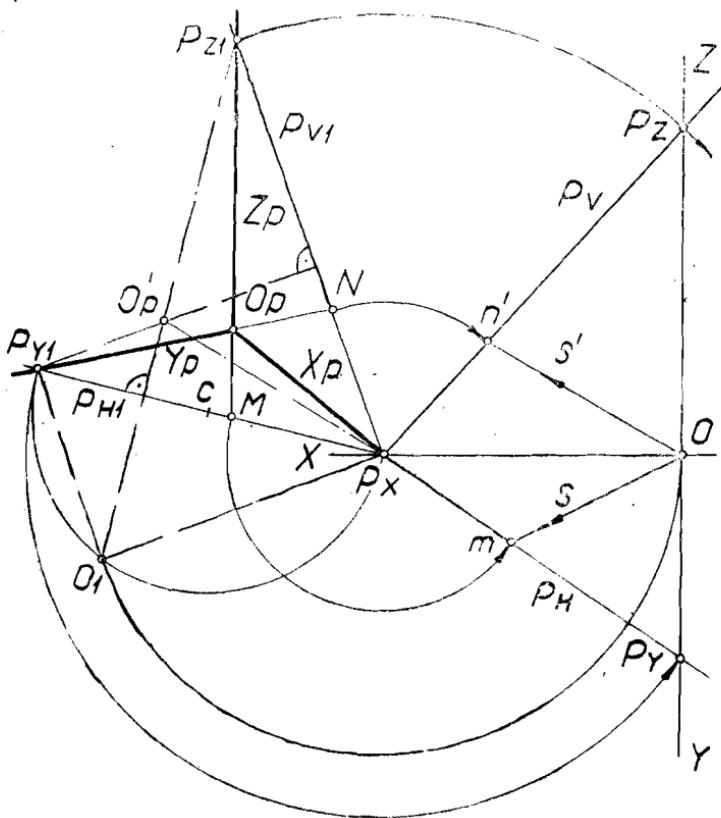


Рис. 2

нике следов можно провести его высоты, определяющие направления осей прямоугольной аксонометрии, и получить в их пересечении ортоцентр O_p — начало этих осей.

Прямоугольная проекция координатного трехгранника позволяет определить истинную величину любой его грани, например грани $P_Y O_1 P_X$, и получить натуральные длины отрезков $P_X O_1$ и $P_Y O_1$, отсекаемых аксонометрической плоскостью P на осях OX и OY . Повернув прямоугольный треугольник $P_Y O_1 P_X$ в плоскости чертежа вокруг точки P_X ,

переходим к ортогональной системе осей OX , OY , OZ , в которую затем возвращаем следы P_V и P_H аксонометрической плоскости P . С помощью точек M и N определяем ортогональные проекции os и os' направления проектирования OS .

Таким образом, полная реконструкция выполнена. Очевидно, что и при других условиях задания аксонометрической проекции для реконструкции ортогональной системы достаточно определить следы аксонометрической плоскости.

Первый вариант реконструкции в общем случае

Если аксонометрическая система задана условиями теоремы Польке, то любой из следов аксонометрической плоскости можно определить на основании следующих соображений.

Окружность, описанная в любой из координатных плоскостей из точки O , как из центра, радиусом, принятым за единицу натурального масштаба, изобразится в аксонометрии эллипсом. Один из диаметров этого эллипса, равный двум единицам натурального масштаба, будет параллелен следу аксонометрической плоскости на той из координатных плоскостей, в которой проведена масштабная окружность.

Для решения поставленной задачи будет нужен только один эллипс, например тот, который является аксонометрической проекцией масштабной окружности, описанной в плоскости XOY . Заданные отрезки Ope_{XP} и Ope_{YP} (рис. 3) служат сопряженными полудиаметрами этого эллипса и позволяют его построить.

Единицу натурального масштаба можно определить как малую полуось эллипса — аксонометрического очерка масштабной сферы. Расположив один из диаметров очеркового эллипса по направлению заданного отрезка Ope_{ZP} , половину длины этого диаметра Opa_P определим на основании зависимости $(Opa_P)^2 = (Ope_{ZP})^2 + (Opd_P)^2$, полученной проф. А. И. Добряковым.

Вторым полудиаметром очеркового эллипса, сопряженным с Opa_P будет отрезок Opb_P , если точку b_P определить как точку касания прямой, параллельной Opa_P , к эллипсу — аксонометрической проекции масштабной окружности, являющейся также и проекцией экватора масштабной сферы. По сопряженным полудиаметрам Opb_P и Opa_P после поворота Opa_P на угол 90° в положение Opa_1 на рис. 3 получена малая полуось масштабной сферы, равная единице натурального масштаба ($b_Pk = E$).

Окружность, описанная из центра O_P радиусом, равным E , пересекает масштабный эллипс в четырех точках — 1, 2 и им симметричным относительно O_P . Очевидно, что полудиаметры OPI и $OPII$, равные единице натурального масштаба E ,

определяют искомые направления горизонтальных следов двух аксонометрических плоскостей.

След P_{H1} одной из таких плоскостей проведен на рис. 3 через точку e_{yp} параллельно $O_p I$ и пересекает аксонометрическую ось $O_p X_p$, определяемую отрезком $O_p e_{xp}$, в точке P_x . Совмещая грань $e_{yp} O_p P_x$ координатного трехгранника с плоскостью чертежа, получим прямоугольный треугольник

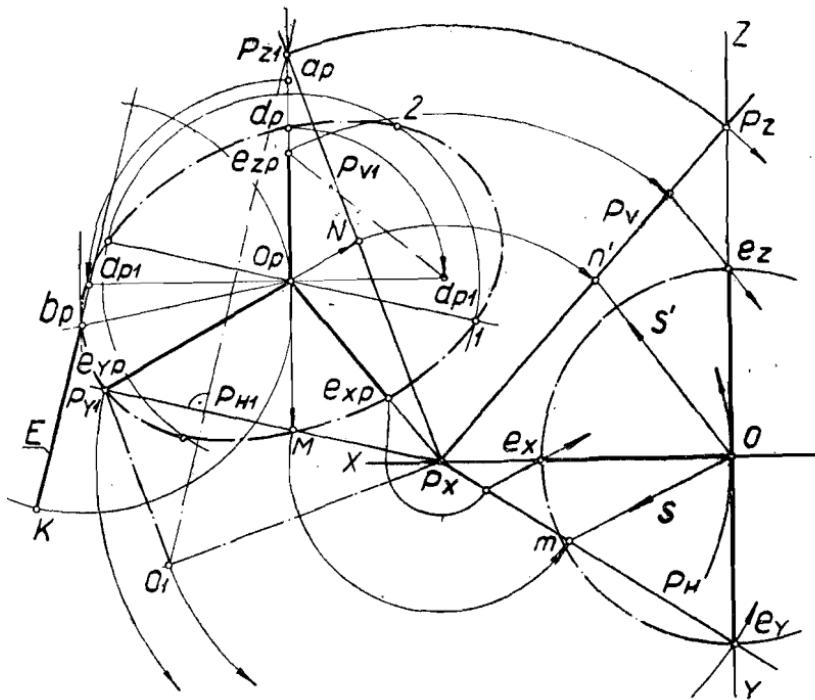


Рис. 3

$e_{yp} O_1 P_x$, катет которого $e_{yp} O_1$ равен E . По совмещенному положению точки O_1 легко получить точку P_{z1} , проведя $O_1 P_{z1} \perp P_{H1}$ до пересечения в точке P_{z1} с аксонометрической осью $O_p Z_p$, определяемой отрезком $O_p e_{zp}$. Точки P_x и P_{z1} определяют совмещенный фронтальный след P_{v1} аксонометрической плоскости P .

Следы P_{H1} и P_{v1} позволяют выполнить реконструкцию таким же образом, как это было сделано на рис. 2.

Второй вариант реконструкции

В первом варианте построений мы пользовались эллипсом — аксонометрической проекцией экватора масштабной сферы, и очевидно, что графическая точность решения задачи

зависит от точности вычерчивания этого эллипса. Поскольку очертание эллипса обводится по его отдельным точкам и включает в работу исполнителя элемент глазомера, предложенное выше построение может вызвать некоторое недоверие относительно его точности. И хотя во многих, выполненных по первому варианту, реконструкциях получились хорошие результаты, автор считал целесообразным найти такие решения задачи, в которых не надо вычерчивать эллипсы или другие лекальные кривые.

На рис. 4 дано одно из таких решений, основанное на использовании подобия масштабных тетраэдров и применении теоремы Данделена.

По аксонометрической системе общего вида, заданной тремя произвольными отрезками Ope_{xp} , Ope_{yp} и Ope_{zp} (рис. 4,а), с помощью точек 1_p и 2_p определяем на эпюре направление проектирования OS ($OS \equiv 01$ и $OS' \equiv 02$), при этом тетраэдр специального вида, подобный масштабному тетраэдру, берется так, что отрезок $\bar{e}_x\bar{e}_y$ был равен отрезку e_xe_{yp} (рис. 4,в). Затем из точки O , как из центра, радиусом $Oe_x = Oe_y = Oe_z$ описывается окружность — очерк ортогональных проекций вспомогательной сферы — и после совмещения центральной лучевой плоскости R с плоскостью чертежа определяются положения центрального луча Os_1 , проектирующего на аксонометрическую плоскость начало натуральных осей, и точки a_1 ($Oa_1 \perp Os_1$), совмещенного положения точки \bar{A} , принадлежащей контуру видимости вспомогательной сферы и проектирующейся на аксонометрическую ось O_pZ_p .

Точки \bar{E}_z и \bar{A}_z проектируются косоугольно (по направлению OS) на плоскость H соответственно в точки \bar{e}_{zh} и \bar{a}_h на прямой Os . Нетрудно видеть, что взаимно перпендикулярные отрезки Oa_h и Ob_h являются полуосами эллипса — очерка вспомогательной сферы после ее проектирования на плоскость H по направлению OS , а треугольник $e_xe_ye_{zh}$ будет новой проекцией основания $\bar{E}_x\bar{E}_y\bar{E}_z$ тетраэдра на плоскость H по тому же направлению проектирования OS .

Инвариантность простого отношения трех точек, имеющая место в параллельном проектировании, позволяет отрезки Oa_h и Ob_h преобразовать соответственно в отрезки Opa_p и Opb_p — сопряженные полудиаметры эллипса, которым на аксонометрическую плоскость P проектируется масштабная сфера. Это преобразование сводится к делению отрезков прямых в данном отношении: точка a_p (рис. 4,а) получается из условия $Ope_{zp}:e_{zp}a_p = Oe_{zh}:e_{zh}a_h$, а точка b_p — по условию $Opc_p:c_pc_p = Os_h:c_hb_h$; при этом точки c_p и b_p определяются после непосредственного переноса точек 4 и 5 с $\bar{e}_x\bar{e}_y$

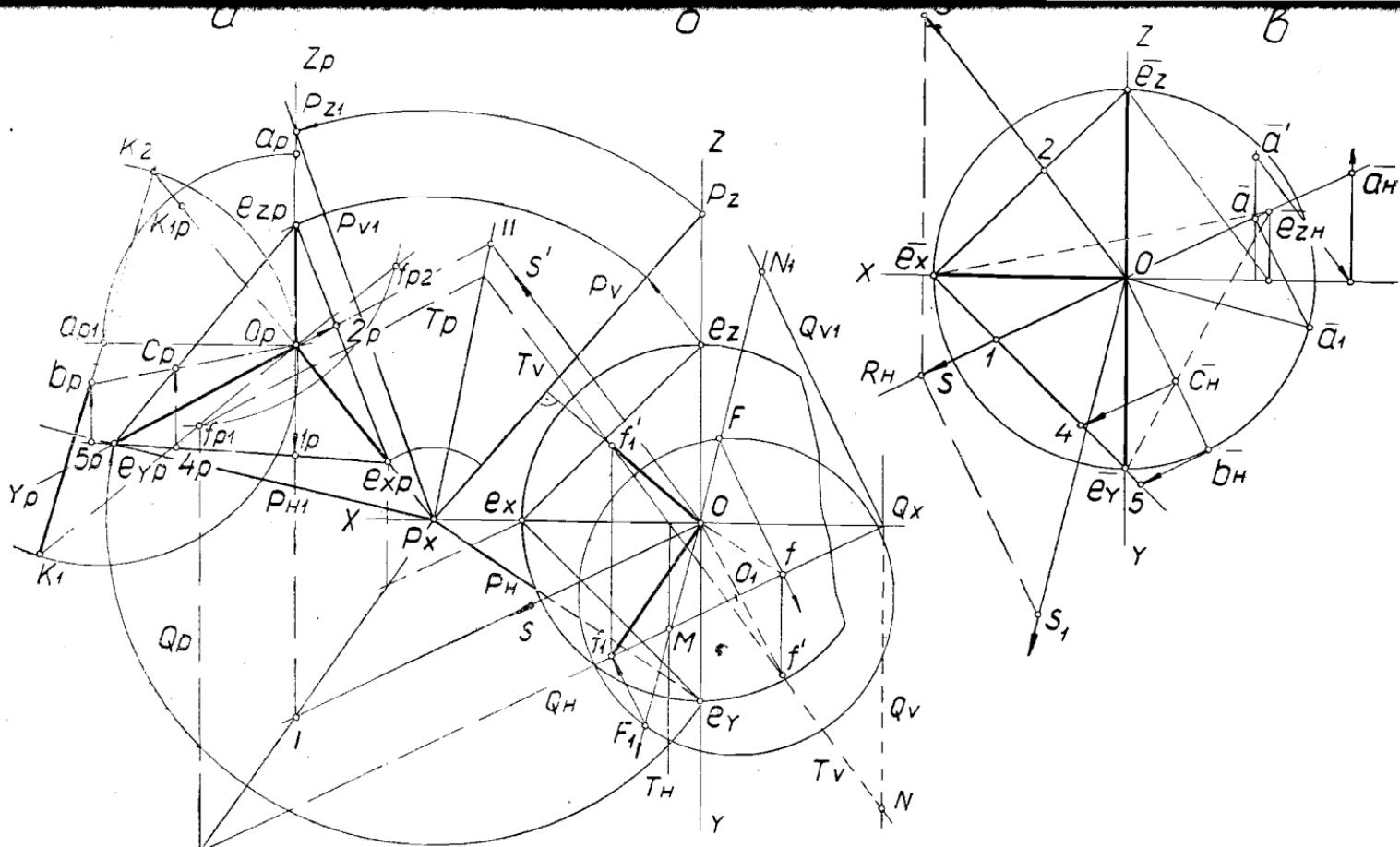


Рис. 4

на $e_{xp}e_{yp}$ соответственно в точки 4_p и 5_p , поскольку ранее принималось $e_xe_y = e_{xp}e_{yp}$.

Получив сопряженные полудиаметры $O_p a_p$ и $O_p b_p$ очеркового эллипса масштабной сферы, известным образом определяем размеры малой ($b_p k_1$) и большой ($b_p k_2$) полуосей этого эллипса и направления $O_p k_1$ и $O_p k_2$ его осей.

Имея направление проектирования OS (рис. 4,в) и единицу натурального масштаба $E = b_p k_1$ (рис. 4,а), определим положение аксонометрической плоскости P на ортогональном чертеже, сохранив проекционную связь с заданной аксонометрической системой. Точку схода следов P_X этой плоскости можно взять на направлении $O_p e_{xp}$ произвольно; на рис. 4,б точка P_X взята так, что отрезок $O_p P_X = 1,5(O_p e_{xp})$, и поэтому отрезок $P_X O = 1,5 E$ (где $E = b_p k_1$). Из точки O , через которую проведены оси натуральной системы OX , OY , OZ и проекции направления проектирования OS , радиусом $R = E$ описываем окружность — очерк ортогональных проекций масштабной сферы. Если на этой сфере найти точку ее касания к аксонометрической плоскости P , то плоскость, перпендикулярная радиусу сферы, проведенному в точку касания, и будет аксонометрической плоскостью P . Но из теоремы Данделена известно, что точка прикосновения сферы к плоскости сечения цилиндра является фокусом эллипса — сечения. Поэтому фокусы f_{1P} и f_{2P} очеркового эллипса масштабной сферы, полученные на рис. 4,а засечками из конца малой оси K_{1P} радиусом $b_p k_2$ (размер большой полуоси), можно рассматривать как аксонометрические проекции точек касания двух взаимно параллельных плоскостей к масштабной сфере.

Ортогональные проекции точки F_1 определяются с помощью двух плоскостей Q и T : след Q_p проводится через точку f_{1P} параллельно оси $O_p Z_p$, и поэтому плоскость Q будет горизонтально проектирующей плоскостью, параллельной направлению проектирования OS ; след T_p проводится через точку f_{1P} параллельно аксонометрической оси $O_p Y_p$, и поэтому плоскость T будет фронтально проектирующей плоскостью, параллельной направлению проектирования OS . Положение следов плоскостей Q и T в ортогональной системе можно определить по точкам пересечения следов Q_p и T_p со сторонами $e_{xp}e_{yp}$ и $e_{xp}e_{zp}$ основания масштабного тетраэдра или с помощью постоянных прямых $P_X I$ и $P_X II$ (точка $I = Os \times Z_p O_p$, точка $II = Os' \times Y_p O_p$), как это сделано на рис. 4,а и 4,б.

Плоскость Q пересекает масштабную сферу по некоторой окружности с центром в точке O_1 (на Q_H), а плоскость T — по прямой NM ; взаимное пересечение указанной окружности с прямой N_1M после их совмещения с плоскостью чертежа определяет точки F и F_1 , каждая из которых может служить

точкой касания аксонометрической плоскости к масштабной сфере. После возвращения в систему V/H получаем ортогональные проекции точек F и F_1 и радиусов OF и OF_1 : любая плоскость, перпендикулярная радиусу OF или радиусу OF_1 , является аксонометрической плоскостью, ибо проектирование на эту плоскость натуральной системы осей OX , OY , OZ с масштабными единицами $OE_x = OE_y = OE_z = E$ по направлению проектирования OS дает заданную аксонометрическую систему.

На рис. 4,б следы P_H и P_V , перпендикулярные соответственно O_f и O'_f , проведены через точку P_x , взятую ранее на направлении $Orexp$; эти следы вращением в плоскости чертежа вокруг точки P_x наложены на рис. 4,а, а затем выполнены некоторые контрольные построения.

Третий вариант реконструкции

Прямые, проектирующие точки e_x , e_y и e_z — концы единиц натурального масштаба — на аксонометрическую плоскость, можно рассматривать как образующие некоторого цилиндра. Если нормальное сечение этого цилиндра считать круговым, то его след на аксонометрической плоскости будет являться косым сечением цилиндра и изобразится эллипсом. Возможно также считать, что точки e_{xp} , e_{yp} и e_{zp} определяют окружность, но тогда нормальным сечением проектирующего цилиндра будет эллипс. Задание косого и нормального сечений цилиндра позволяет определить положение секущей плоскости. При этом сечения могут задаваться с точностью до подобия, а секущая плоскость определится с точностью до параллельного перенесения.

На рис. 5,а аксонометрическая система задана на основании теоремы Польке. Концы аксонометрических единиц e_{xp} , e_{yp} и e_{zp} определяют окружность с центром в c_p , хордами которой будут отрезки $e_{xp}e_{yp}$, $e_{yp}e_{zp}$ и $e_{zp}e_{xp}$, совпадающие с аксонометрическими проекциями сторон основания масштабного тетраэдра. Определенный вид последнего позволяет построить его ортогональные проекции с точностью до подобия и определить направление проектирования OS (на рис. 5,б $Os \equiv O1$; $Os' \equiv O2$). Затем строится прямоугольная проекция точек \bar{e}_x , \bar{e}_y и \bar{e}_z на плоскость R ($R_V \perp O2$, $R_H \perp O1$); полученные после совмещения плоскости R с плоскостью чертежа точки e_{xr} , e_{yr} , e_{zr} принимаются за точки эллипса — нормального сечения проектирующего цилиндра. Центр c_R этого эллипса определяется на основании простого отношения трех точек, сохраняющегося при параллельном проектировании. При этом взаимно перпендикулярные радиусы $e_{zp}c_p$ и $c_p\bar{e}_x$ окружности (рис. 5,а) преобразуются в сопряженные

полудиаметры $ezrc_R$ и c_Rb эллипса (рис. 5,б). По этим сопряженным полудиаметрам определяются размеры полуосей эллипса: $A6$ — большая полуось и $B6$ — малая полуось.

Для выполнения дальнейших построений ось проектирующего цилиндра, центр эллипса c_R и направление его большой оси Bc_R из совмещенного положения «поднимаются» в пространство и определяются на эпюре их проекциями. Затем через ось цилиндра проводится плоскость Q , перпендикулярная направлению большой оси CM_1 эллипса нормального сечения. Эта плоскость пересекает поверхность проектирующего цилиндра по таким двум образующим, которые служат проектирующими прямыми для концов малой оси эллипса нормального сечения.

После совмещения плоскости Q с плоскостью чертежа определяются совмещенный центр эллипса c_Q и направление совмещенной оси mc_Q проектирующего цилиндра; при этом, очевидно, нормальное сечение цилиндра изобразится отрезком (равным малой оси эллипса) прямой, проходящей через c_Q и перпендикулярной mc_Q . На рис. 5,б показана половина этого отрезка $c_Q7 = B6$, а через точку 7 проведена образующая, параллельная оси mc_Q (эта образующая для точки 7 будет являться проектирующей прямой).

Чтобы эллиптическое нормальное сечение спроектировалось в окружность, необходимо отрезок c_Q7 , равный малой полуоси эллипса, спроектировать в отрезок, равный большой полуоси этого эллипса. Поэтому из точки c_Q , как из центра, радиусом, равным большой полуоси $A6$, описывается дуга, пересекающая совмещенную образующую цилиндра в точках 8 и 9; любой из отрезков c_Q8 или c_Q9 в паре с прямой CM_1 определяет плоскость, пересекающую проектирующий цилиндр по окружности. Эта плоскость и будет искомой аксонометрической плоскостью P , поскольку вначале было принято условие, что точки exp , eyp , ezp определяют окружность.

Построив следы P_H и P_V плоскости P на эпюре накладываем эти следы на заданную аксонометрическую систему: при этом выполняется преобразование подобия и возможен параллельный перенос плоскости P , как это и сделано на рис. 5 для удобства дальнейших построений.

По совмещенным и повернутым следам P_{H1} и P_{V1} аксонометрической плоскости P реконструкция ортогональной системы выполняется так же, как на рис. 2.

Аналогичным образом можно осуществить полную реконструкцию ортогональной системы, приняв за начальное условие, что нормальным сечением проектирующего цилиндра является окружность, аксонометрической проекцией которой будет эллипс, проходящий через заданные на рис. 5,а точки exp , eyp , ezp .

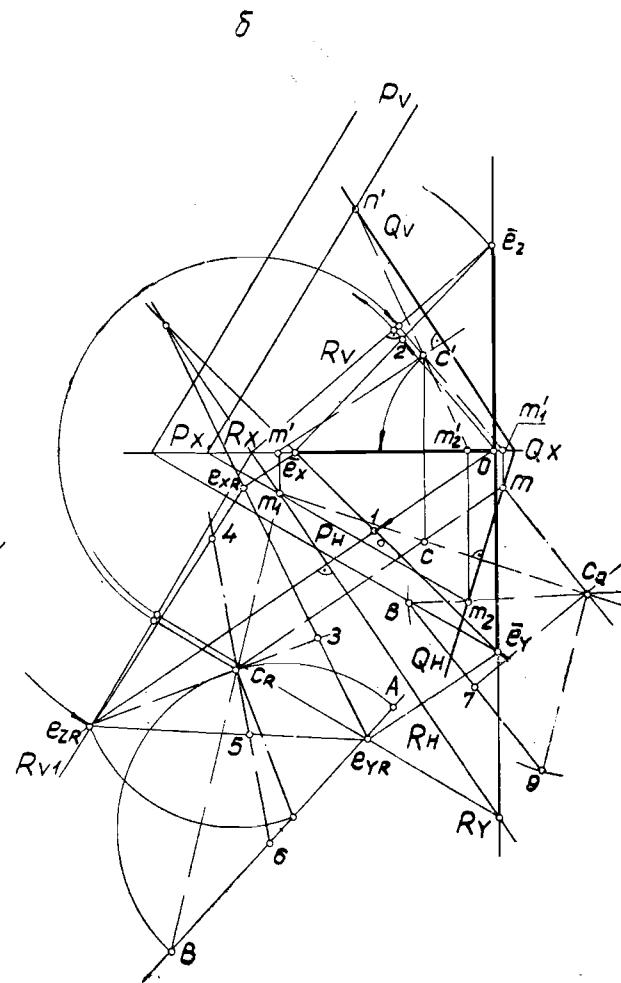
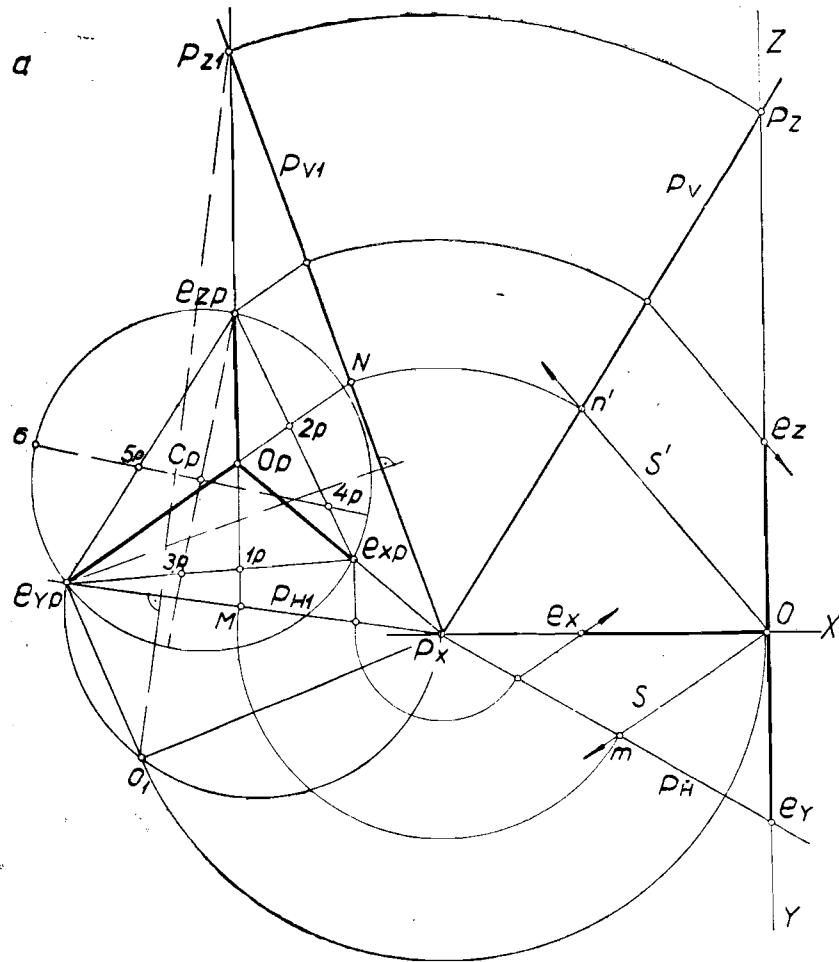


Рис. 5

Число решений

Принципиальное решение задачи реконструкции натуральной системы координат по ее аксонометрическому изображению имеется в книге Е. А. Глазунова и Н. Ф. Четверухина «Аксонометрия». В этом решении, основанном на перспективно-аффинном соответствии двух сечений проектирующего цилиндра, рассматривается лишь частный случай (образующие цилиндра параллельны плоскости V), а реконструкция не закончена, так как эпюра натуральной системы не получен и положение аксонометрической плоскости в натуральной системе координатных осей не определено. В результате не оказалось возможным выяснить полное число решений данной задачи. В книге отмечается, что «... кроме указанных положений масштабного трехгранника возможны еще два симметричных с ними положения относительно плоскости проекций». Из этого следует вывод о наличии лишь четырех решений, не считая, конечно, параллельного переноса масштабного трехгранника или плоскости проекций.

В действительности в общем случае задача имеет восемь решений, что подтверждается в каждом из трех вариантов построений, описанных в данной статье.

В первом варианте решений (см. рис. 3) наличие двух полудиаметров ($O\rho_1$ и $O\rho_2$) эллипса, равных единице натурального масштаба, указывает на существование двух аксонометрических плоскостей, относительно каждой из которых возможно четыре положения масштабного трехгранника. Изобразив эти решения на эпюре (рис. 6), получим восемь различных комбинаций проектирующего аппарата, обеспечивающего построение заданной (на рис. 3) аксонометрической системы.

Во втором варианте реконструкции (см. рис. 4) для каждого фиксированного положения масштабного трехгранника также существуют две аксонометрические плоскости: одна из них перпендикулярна OF_1 и другая (на рис. 4,б не проведена) — OF .

Из третьего варианта реконструкции (см. рис. 5) существование двух аксонометрических плоскостей для каждого из четырех возможных направлений проектирования выявляется наиболее наглядно: сечение эллиптического цилиндра в виде окружности может быть получено двумя плоскостями, симметричными относительно плоскости его нормального сечения.

Следует особо отметить, что и в частных случаях задания косоугольной аксонометрии задача реконструкции натуральной системы будет иметь восемь решений, так как получаются восемь различных комбинаций проектирующего аппарата.

Первый случай: аксонометрическая система задана так, что фокус f_{1P} эллипса — очерка масштабной сферы

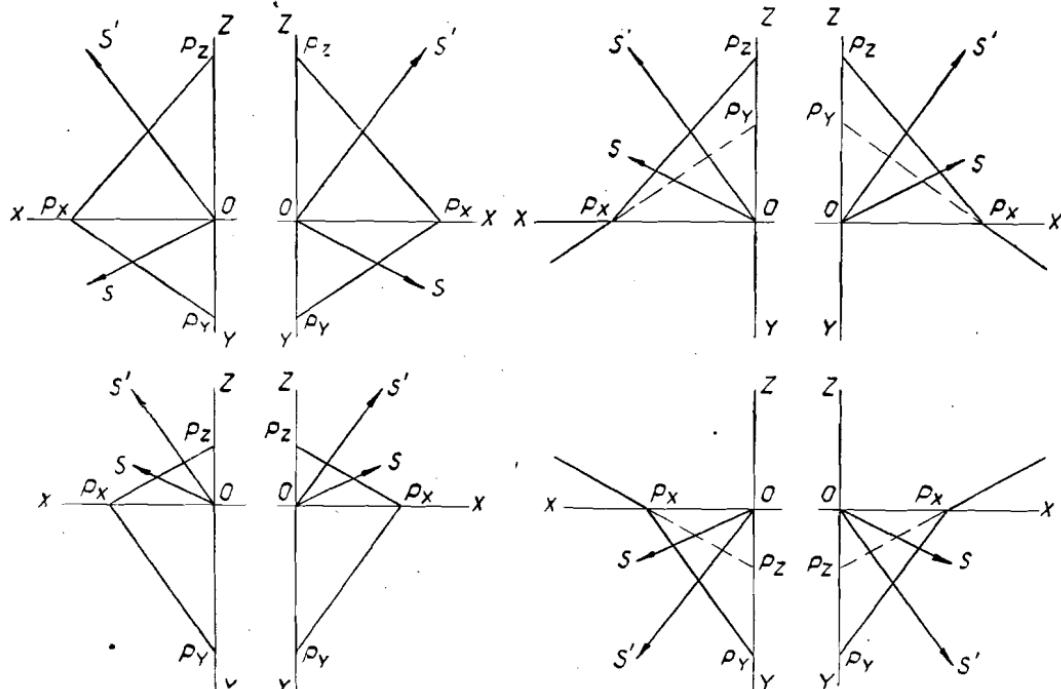


Рис. 6

(рис. 7) после реконструкции эпюра оказывается на экваторе масштабной сферы (точка F_1). В этом случае одна картинная плоскость ($P_1 \perp OF_1$) будет горизонтально проектирующей плоскостью, которая может занимать также второе положение P_2 . Относительно каждого из этих положений картинной плоскости возможно два различных направления проектирования, что дает четыре различных комбинации проектирующего аппарата.

Второе положение фокуса f_{1P} определяется на масштабной сфере точкой F_2 ; плоскость общего положения, перпендикулярная радиусу OF_2 , будет второй картинной плоскостью для заданной аксонометрической системы, а четырем возможным направлениям проектирования будут соответствовать четыре различных положения этой второй картинной плоскости, давая еще четыре комбинации проектирующего аппарата.

Нетрудно представить, что когда фокус эллипса — очерка масштабной сферы после реконструкции эпюра оказывается в одном из своих положений на главном меридиане сферы, то одна картинная плоскость будет фронтально проектирующей, а вторая — плоскостью общего положения.

Одна из картинных плоскостей в виде профильно проектирующей получается в том случае, когда фокус эллипса — очерка масштабной сферы после реконструкции эпюра окажется на меридиане сферы, лежащем в профильной плоскости.

Второй случай: аксонометрическая система задана так, что фокус эллипса — очерка масштабной сферы после реконструкции эпюра в одном из своих положений оказывается на пересечении экватора и главного меридиана сферы. В этом случае одна картинная плоскость будет профильной плоскостью, на которой заданная аксонометрическая система может быть получена с помощью четырех различных направлений проектирования. Второе положение фокуса, как еще одной точки касания картинной плоскости к масштабной сфере, определяет картинную плоскость общего положения, перпендикулярную к радиусу сферы, проведенному в точку касания. А эта плоскость, как было выяснено ранее, вместе с соответствующими направлениями проектирования дает еще четыре комбинации проектирующего аппарата.

При других экстремальных положениях точек касания картинной плоскости к масштабной сфере одна из аксонометрических плоскостей будет горизонтальной или фронтальной плоскостью, а вторая — плоскостью общего положения.

Таким образом, задача реконструкции ортогональной (натуральной) системы координатных осей по заданной косоугольной аксонометрической системе всегда имеет восемь решений.

Четыре решения — четыре различных проектирующих аппарата — будут получаться лишь в результате реконструк-

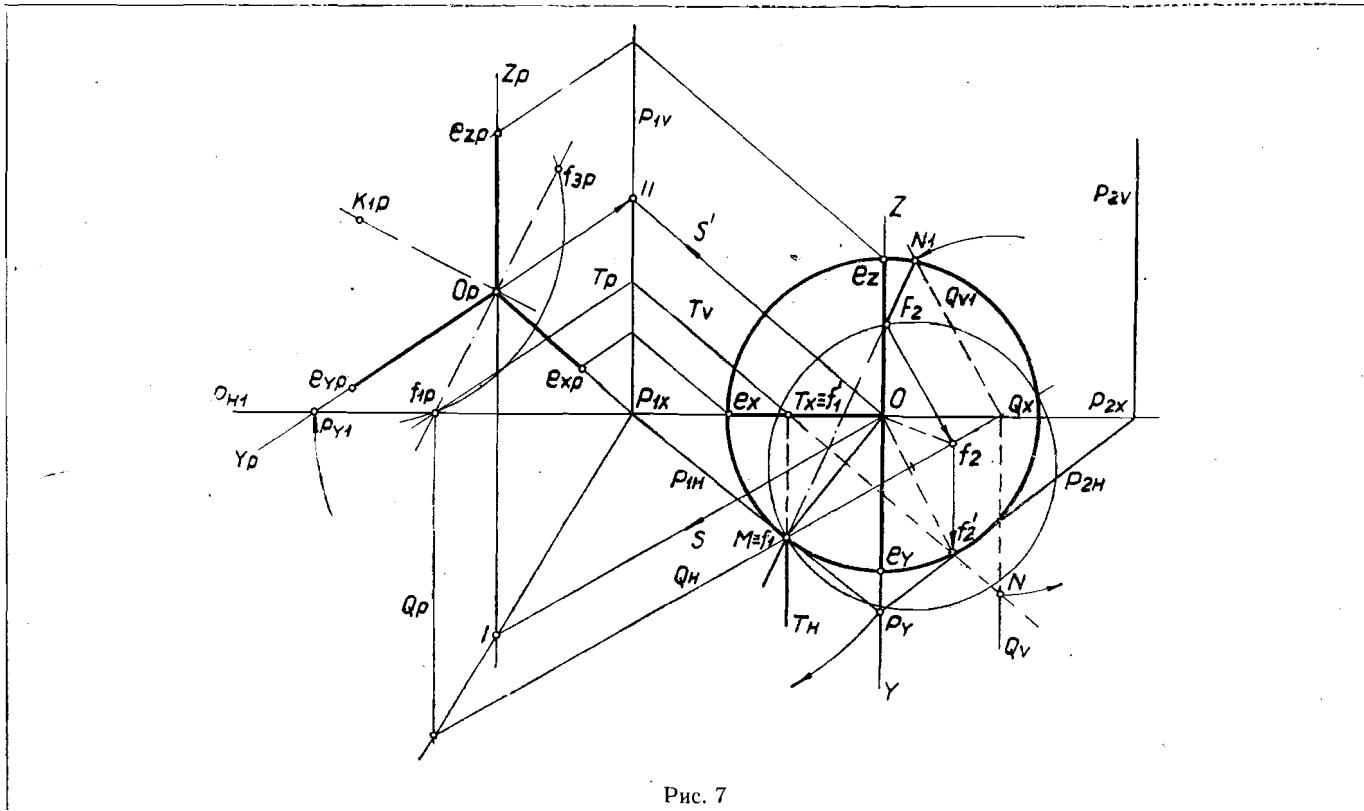


Рис. 7

ции натуральной системы осей по заданной прямоугольной аксонометрии. В этом случае очерком масштабной сферы служит окружность, представляющая нормальное сечение проектирующего цилиндра.

Практические применения

Реконструкция ортогональной системы координатных осей по ее заданному аксонометрическому изображению помимо теоретического значения может получить широкое применение в качестве способа перехода от аксонометрических проекций к ортогональным проекциям — от монопроекции к комплексному чертежу.

Указанный переход потребуется, по крайней мере, в трех следующих случаях:

1) при необходимости дешифрировать данное аксонометрическое изображение с целью выполнения по нему производственного чертежа в ортогональных проекциях, расположенных в соответствии со стандартом (ГОСТ 3453-59);

2) при проектировании деталей или изделий, форма которых должна удовлетворять не только конструктивным, но и определенным эстетическим требованиям: в поисках нужных форм конструктор может одновременно оперировать наглядным аксонометрическим изображением и удобоизмеримым ортогональным чертежом. (По мнению автора, именно такой чертеж, состоящий из взаимосвязанных аксонометрической и ортогональной проекций, и следует называть комплексным чертежом.);

3) в случае решения позиционных и, главным образом, метрических задач относительно элементов, заданных на аксонометрическом изображении.

Поскольку последний случай охватывает два предыдущих, ниже будет рассмотрен пример решения метрической задачи.

Предварительно заметим следующее:

1. Для осуществления реконструкции натуральной системы необходимо задать аксонометрическую систему непосредственно по условиям теоремы Польке или иным условиям, позволяющим определить длины отрезков трех аксонометрических масштабных единиц (это можно сделать, например, после задания размеров трех отрезков аксонометрического изображения детали, расположенных во взаимно перпендикулярных направлениях).

2. Для перехода от аксонометрического изображения предмета к его ортогональному чертежу нет надобности определять следы аксонометрической плоскости на эпюре: вместо следов можно использовать «постоянные» прямые, устанавливающие связь между аксонометрией и эпюром простейшим образом. Это значительно упрощает все построения.

На рис. 8, а аксонометрическая система задана по условиям теоремы Польке, а отрезок прямой AB задан аксонометрической $A_P B_P$ и вторичной $a'_P b'_P$ проекциями; требуется на отрезке AB определить точку C , удаленную от точки B (в сторону A) на заданное расстояние.

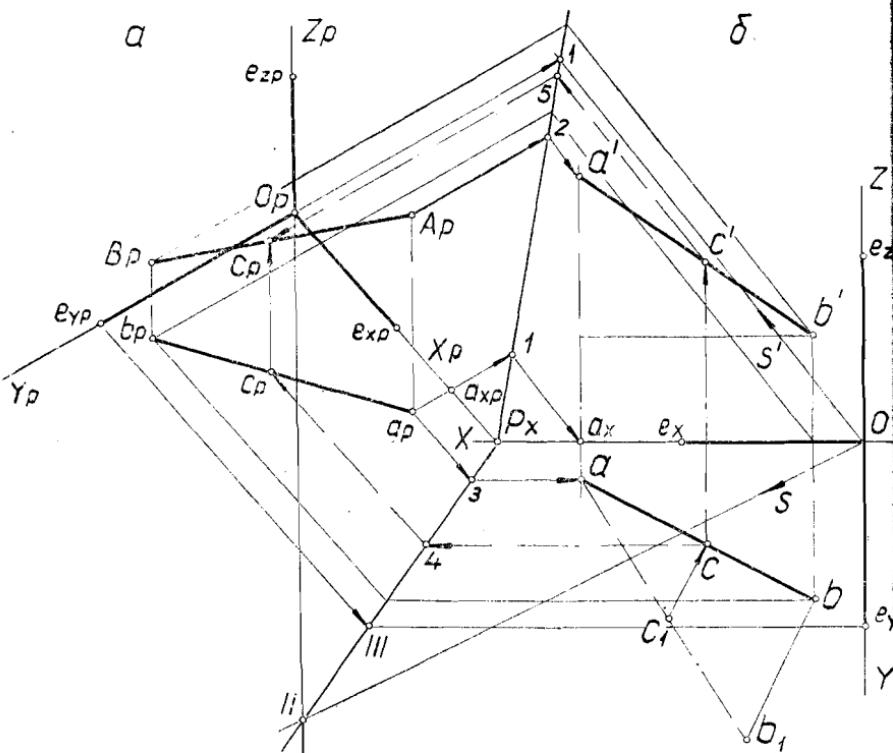


Рис. 8

Первый этап решения этой и любой задачи, связанный с переходом от аксонометрии к эпюру, состоит в определении натуральной длины масштабной единицы и реконструкции натуральных осей. Для этого сначала нужно выполнить построения по первому (см. рис. 3) или по второму (см. рис. 4) вариантам реконструкции; на рис. 8 эти построения не показаны.

Затем на аксонометрической оси $O_P X_P$ (совпадает с $O_P e_{xP}$) берется произвольная точка P_X , принимаемая за точку схода следов аксонометрической плоскости P ; точку P_X удобно взять так, чтобы длина отрезка $O_P P_X$, измеренная отрезком $O_P e_{xP}$, была известна [на рис. 8 $O_P P_X = 2(O_P e_{xP})$].

Через точку P_X проводится горизонтальная прямая, принимаемая за ось X натуральной системы, на оси X отмечается

начало O из условия $P_x \dot{O} = 2(Oe_x) = 2E$ (две единицы натурального масштаба), через точку O проводятся ортогональные проекции Os и Os' направления проектирования, которые определяются, как и на рис. 4,в.

После этого определяются положения постоянных прямых $P_x I$ и $P_x II$; точка I лежит в пересечении оси $O_p Y_p$ с Os' , а точка II — в пересечении $O_p Z_p$ с Os . (Вместо точки II в случае ее недоступности можно воспользоваться точкой III , построение которой показано на рис. 8.)

Второй этап решения задачи включает построение эпюра и определение искомых элементов на эпюре. Для построения ортогональных проекций любой точки, например точки A , через ее вторичную проекцию a_p проводится луч, параллельный оси $O_p Y_p$, до пересечения с прямой $P_x I$ в точке I ; этот луч, представляющий аксонометрическую проекцию горизонтального следа горизонтально проектирующей плоскости, параллельной направлению OS , отсекает на оси $O_p X_p$ аксонометрическую координату $x_p = O_p a_{Xp}$ точки A . Проведя через точку I луч, параллельный Os' , до пересечения с осью X в точке a_X , получим натуральную координату x точки A (отрезок Oa_X); через a_X проводится линия связи, на которой будут располагаться фронтальная a' и горизонтальная a проекции точки A . Для построения a' проводится луч $A_p 2 \parallel O_p Y_p$ и луч $2a' \parallel Os'$, горизонтальная проекция a получается с помощью лучей $a_p 3 \parallel O_p X_p$ и $3a \parallel OX$.

Аналогичным образом строятся ортогональные проекции точки B и любой точки, которая была бы задана на аксонометрическом изображении. Получив эпюр, определяем натуральную длину отрезка $AB = ab_1$ и на заданном расстоянии от B находим точку C_1 , а затем ортогональные проекции точки C .

Третий этап решения задачи — возвращение точки C в аксонометрическую систему, что можно выполнить с помощью «обратных» лучей, как это показано на рис. 8; замкнутый контур $c4c_pC_p b_1 c'$ обеспечивает надежный контроль правильности решения задачи.

В заключение отметим возможность использования постоянных прямых для построения аксонометрических изображений непосредственно по ортогональному чертежу.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бескин Н. М. Основное предложение аксонометрии. Сб.: «Вопросы современной начертательной геометрии». Под ред. Н. Ф. Четверухина. М.-Л., Гостехиздат, 1947.
2. Глазунов Е. А., Четверухин Н. Ф. Аксонометрия. М., Гостехиздат, 1953.
3. Добрjakов А. И. Курс начертательной геометрии. М., Гос. архитект. изд-во, 1949.
4. Чувиков Н. Т. Преобразование ортогональных проекций. М., Изд-во «Советская наука», 1957.

Н. Т. Чувиков

ПОСТРОЕНИЕ ОЧЕРКОВ НЕКОТОРЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В АКСОНОМЕТРИИ

Обзор способов построения очерков поверхностей в аксонометрии

Наглядность и выразительность аксонометрических изображений, кроме изображения элементов, определяющая их достоверность, вызывает необходимость вычерчивания очертаний, представляющего собой аксонометрическую «контура видимости», называемого также «очерком». Эта линия — в общем случае пространственных случаях плоская кривая — образуется как совокупность точек, в которых образующие проекции цилиндра касаются проектируемой поверхности. проектирующего цилиндра, обертывающего проекцию поверхности, с аксонометрической плоскостью дает кривую — очерк аксонометрической проекции поверхности. Поэтому очерк поверхности служит для делящей проекцию поверхности от остальной части цилиндра и разделяющей видимую часть поверхности.

Очерки аксонометрических проекций поверхностей вычерчивают одним из трех способов, рекомендованных в литературе:

1. Поверхность вращения пересекается перпендикулярными осями этой поверхности; полученные параллели вычерчиваются в аксонометрии в виде эллипсов; проводятся лекальные кривые, огибающие эллипсы, которые и дают искомый очерк.

2. Контур видимости строится в ортогональных проекциях, а затем по координатам отдельных точек этого контура делаются аксонометрические проекции точек, которые проводятся очерк аксонометрической проекции поверхности вращения.

Н. Т. Чувиков

ПОСТРОЕНИЕ ОЧЕРКОВ НЕКОТОРЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА В АКСОНОМЕТРИИ

Обзор способов построения очерков поверхностей вращения в аксонометрии

Наглядность и выразительность аксонометрических проекций, кроме изображения элементов, определяющих поверхность, вызывает необходимость вычерчивания очерка этой поверхности, представляющего собой аксонометрическую проекцию «контура видимости», называемого также «линией отдела». Эта линия — в общем случае пространственная, а в частных случаях плоская кривая — образуется как непрерывная совокупность точек, в которых образующие проектирующего цилиндра касаются проектируемой поверхности. Пересечение проектирующего цилиндра, обертывающего проектируемую поверхность, с аксонометрической плоскостью дает плоскую кривую — очерк аксонометрической проекции данной поверхности. Поэтому очерк поверхности служит границей, отделяющей проекцию поверхности от остальной части поля чертежа и разделяющей видимую часть поверхности от невидимой.

Очерки аксонометрических проекций поверхностей вращения вычерчивают одним из трех способов, рекомендуемых в литературе:

1. Поверхность вращения пересекается плоскостями, перпендикулярными осям этой поверхности; полученные круговые параллели вычерчиваются в аксонометрии в виде подобных эллипсов; проводятся лекальные кривые, огибающие построенные эллипсы, которые и дают искомый очерк.

2. Контуры видимости строятся в ортогональных проекциях, а затем по координатам отдельных точек этого контура определяются аксонометрические проекции точек, через которые проводится очерк аксонометрической проекции поверхности вращения.

3. Строится дополнительная проекция поверхности вращения на плоскость, параллельную оси этой поверхности; при помощи сферических поверхностей, вписанных в данную поверхность вращения, вычерчивается дополнительная проекция контура видимости, по которой затем определяются отдельные точки очерка аксонометрической проекции изображаемой поверхности.

Первый из указанных способов является наиболее общим и наиболее часто применяется, но требует построения нескольких вспомогательных эллипсов. Второй и третий способы по сути равнозначны: не требуют вычерчивания вспомогательных эллипсов, но вызывают необходимость выполнять вспомогательные построения, связанные с вычерчиванием ортогональных или дополнительной проекций контура видимости.

Все указанные способы разработаны применительно к аксонометрическому методу построения наглядных изображений, и поэтому, естественно, связаны с использованием точных или «приведенных» показателей искажения по аксонометрическим осям, значительно осложняющих все построения. Именно поэтому на практике предпочитают применять прямоугольную изометрическую проекцию и совсем отказываются от триметрических проекций.

Заметим также, что способ сфер, вписываемых в поверхность для определения контура видимости, используется лишь для построения очерков аксонометрических проекций поверхностей вращения: применение этого способа к вычерчиванию очерков поверхностей второго порядка, не являющихся поверхностями вращения, в литературе не встречается. Так, в капитальном труде Е. А. Глазунова и Н. Ф. Четверухина «Аксонометрия» нет ни одного примера построения очерков эллипсоидов, параболоидов и гиперболоидов с изменяющимися образующими.

Краткие сведения о новом способе построения аксонометрических проекций*

Прямоугольные и косоугольные аксонометрические проекции любого рода (изометрические, диметрические и триметрические) можно строить как результат преобразования эпюра параллельным проектированием оригинала, заданного его ортогональными проекциями, на специально выбранную плоскость по произвольному или определенным образом выбранному направлению проектирования. При этом новую аксоно-

* Подробнее см. Н. Т. Чувиков. «Преобразование ортогональных проекций». М., Изд-во «Советская наука», 1957.

метрическую проекцию оригинала вычерчивают после совмещения аксонометрической плоскости с плоскостью чертежа.

Для придания аксонометрическому изображению общепринятого расположения — вертикальные прямые оригинала остаются вертикальными на чертеже — приходится также совмещенные следы аксонометрической плоскости повернуть в плоскости чертежа определенным образом. Но операции совмещения и поворота следов могут быть выполнены одновременно.

Действительно, пусть требуется построить прямоугольную аксонометрическую проекцию призмы на плоскость P (рис. 1). Чтобы ребра призмы в аксонометрии оказались на вертикаль-

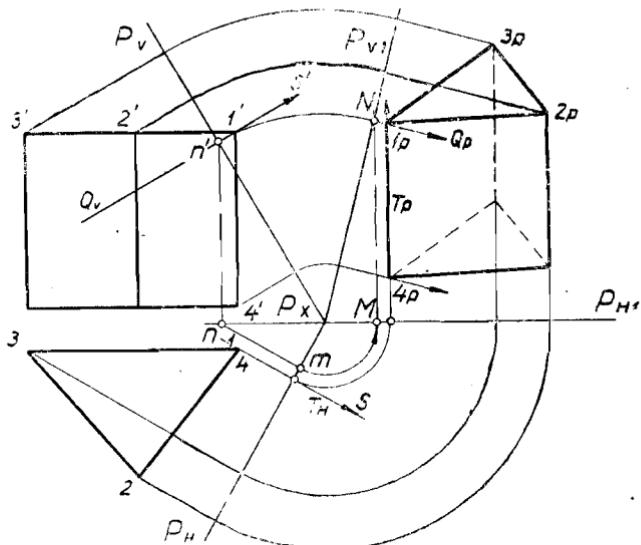


Рис. 1

ных прямых, необходимо, очевидно, след P_H расположить горизонтально: тогда аксонометрическая ось OZ будет перпендикулярна повернутому следу P_{H1} . Совмещенное и повернутое положение P_{V1} фронтального следа P_V определится с помощью точек N и M .

Аксонометрические проекции вершин оснований призмы определяются как совмещенные точки пересечения трех плоскостей: аксонометрической плоскости P и двух проектирующих, проведенных через проектирующую прямую. Так, фронтально проектирующая плоскость Q , проведенная через прямую IS , пересечет плоскость P по прямой Q_P — линии ее наибольшего уклона к плоскости V , поэтому $Q_P \perp P_{V1}$. Горизонтально проектирующая плоскость T , проведенная через прямую

мую $1S$ пересечет плоскость P по линии ее ската $T_P \perp P_{H1}$; взаимное пересечение Q_P и T_P дает прямоугольную аксонометрическую проекцию $1p$ точки 1 . Аналогичным образом будут построены точки $2p$, $3p$ и $4p$, позволяющие вычертить прямоугольную аксонометрию призмы.

Отметим, что описанный способ построения аксонометрии исключает необходимость пользоваться показателями искажения и дает точную, а не приведенную аксонометрическую проекцию. Поэтому появляется возможность широко применять не только стандартные, но и любые аксонометрические системы. Для получения же стандартной прямоугольной изометрии следы аксонометрической плоскости должны составлять с осью X углы 45° , а для получения стандартной диметрии нужно взять аксонометрическую плоскость, у которой фронтальный след P_V наклонен к оси X под углом 45° , а горизонтальный след P_H наклонен к оси X под углом $20^\circ 40'$ или $\sim 21^\circ$.

Принципиально так же, как это сделано на рис. 1, можно строить косоугольные аксонометрические проекции на плоскостях общего положения, но в этом случае прямые Q_P и T_P не будут линиями наибольших наклонов аксонометрической плоскости.

Особого внимания заслуживают косоугольные аксонометрические проекции, картиными плоскостями для которых служат проектирующие плоскости: такие изображения весьма выразительны и вместе с тем могут быть получены при помощи простых построений.

На рис. 2 предмет проектируется косоугольно по направлению $1S$ на горизонтально проектирующую плоскость P . Фронтально проектирующая плоскость Q , параллельная лучу $1S$, пересекает плоскость P по прямой NM , которая, будучи построенной сразу в совмещенном положении, определяет направление второго звена линии связи между фронтальной и аксонометрической проекциями. Горизонтально проектирующая плоскость T , параллельная направлению проектирования $1S$, пересекает плоскость P по прямой $T_P \perp P_{H1}$, определяющей направление второго звена линии связи между горизонтальной и аксонометрической проекциями. Построение косоугольных аксонометрических проекций отдельных точек предмета сводится теперь к проведению через их ортогональные проекции линий связи: в первом звене параллельных $1'S'$ и $1S$, а во втором звене параллельных соответственно NM и T_P .

Заметим, что для получения полного изображения предмета нет надобности проектировать все его точки, определяющие линии контуров; достаточно построить лишь опорные точки, с помощью которых, используя свойства параллельных проекций, можно вычертить все изображение. При этом следует

иметь в виду, что размеры вертикальных отрезков на плоскости P проектируются без искажения.

Из рис. 2 нетрудно заключить, что, изменяя положение следа или направление проектирования, можно получать косоугольные аксонометрические проекции с различными показателями искажения, но не надо непосредственно пользоваться этими показателями. Имеется возможность выбирать картины плоскости из числа проектирующих плоскостей других видов, а также любую из плоскостей уровня.

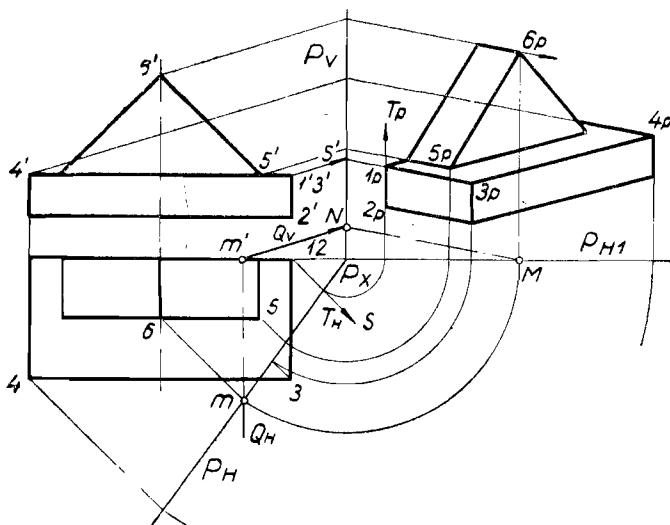


Рис. 2

угольные аксонометрические проекции с различными показателями искажения, но не надо непосредственно пользоваться этими показателями. Имеется возможность выбирать картины плоскости из числа проектирующих плоскостей других видов, а также любую из плоскостей уровня.

Построение аксонометрических проекций цилиндров и конусов

Построение аксонометрических проекций цилиндров сводится в основном к вычерчиванию аксонометрических проекций их оснований; очерком цилиндрической поверхности будут две прямые, касательные к проекциям оснований.

Для вычерчивания прямоугольной аксонометрии цилиндра вращения (рис. 3) проектированием определяются положения только трех точек: двух центров и конца малой оси эллипсов — аксонометрических проекций оснований. Направление большой оси указанных эллипсов перпендикулярно к аксонометрической проекции оси цилиндра, а размер большой оси равен диаметру основания цилиндра.

На рис. 4 показано построение косоугольных аксонометрических проекций двух соосных цилиндров вращения проектированием их на профильную плоскость K (справа от заданных

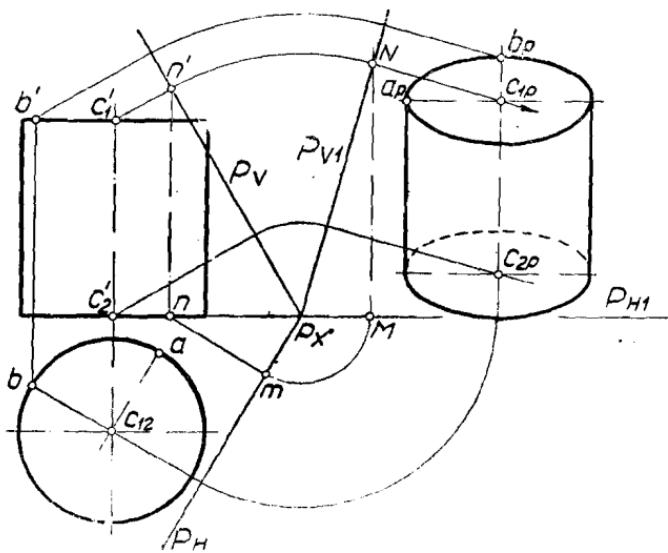


Рис. 3

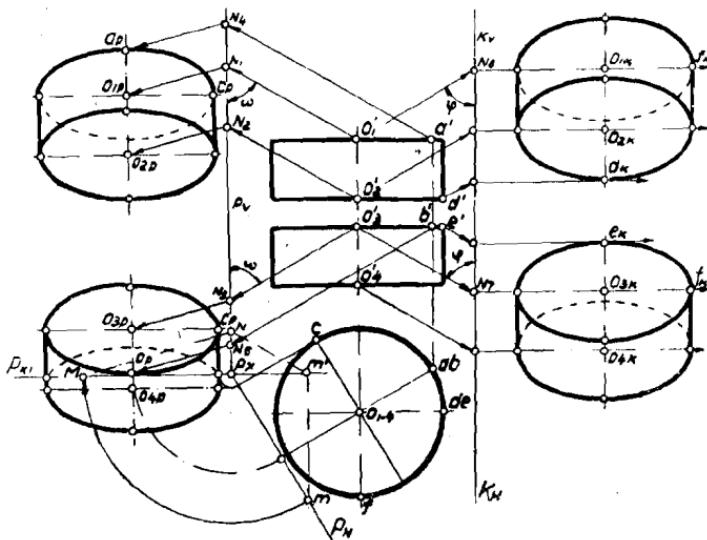


Рис. 4

ортогональных проекций) и на горизонтально проектирующую плоскость P . Чтобы и в этих случаях получить горизонтальное расположение большой оси эллипсов, наиболее естественное для круговых цилиндров, необходимо направление проектирования определить прямой, лежащей в плоскости, перпендикулярной к аксонометрической плоскости. Поставленное условие выполняется на рис. 4 проведением горизонтальной проекции проектирующей прямой перпендикулярно к горизонтальным следам K_h и P_h аксонометрических плоскостей. Этим же обеспечивается равенство больших осей эллипсов диаметрам круговых оснований цилиндров. Фронтальные проекции проектирующих лучей могут составлять с фронтальными следами картинных плоскостей любые углы, исключая 0 и 90° , и могут быть направлены в сторону картинных плоскостей как вверх, так и вниз. Нетрудно видеть, что при изменении указанных углов от 90 до 0° происходит растяжение эллипсов по вертикальному направлению, что позволяет исполнителю в каждом конкретном случае выбирать направление фронтальных проекций проектирующих прямых в соответствии с желанием получать большее или меньшее сжатие эллипсов.

Техника построения косоугольной проекции цилиндров на любую из взятых на рис. 4 плоскостей проста: достаточно спроектировать на картинную плоскость всего две точки — центр одного из оснований и конец того из диаметров основания цилиндра, который в аксонометрии будет концом малой оси эллипса. Боковые очерковые линии аксонометрических проекций цилиндров, касательные к эллипсам — аксонометрическим проекциям оснований, изобразятся отрезками прямых, соединяющих концы больших осей этих эллипсов.

Прямоугольные и косоугольные аксонометрические проекции эллиптических цилиндров строятся аналогичным образом: на картинную плоскость проектируются центры и концы осей (или концы двух сопряженных диаметров эллипсов — оснований); по полученным в аксонометрии сопряженным диаметрам вычерчиваются эллипсы и к ним проводятся касательные — очерковые образующие цилиндрической поверхности.

Очерковые образующие, ограничивающие аксонометрическую проекцию конической поверхности, могут быть проведены как прямые, проходящие через вершину конуса и касательные к аксонометрической проекции основания, или как касательные к аксонометрическим проекциям основания и сечения конуса. Практически эту операцию выполняют непосредственно по линейке, не отыскивая точек касания. Однако имеется возможность определить точки касания до или после построения аксонометрических проекций основания и сечения (или вершины) конуса.

На рис. 5 конус вращения, усеченный плоскостью T , перпендикулярной к его оси, проектируется на фронтально проектирующую плоскость P . Окружность (сечение конуса) может быть принята за сечение сферы, вписанной в коническую поверхность. Прямые, проектирующие конус и сферу на плоскость P , каснутся сферы по окружности, пло-

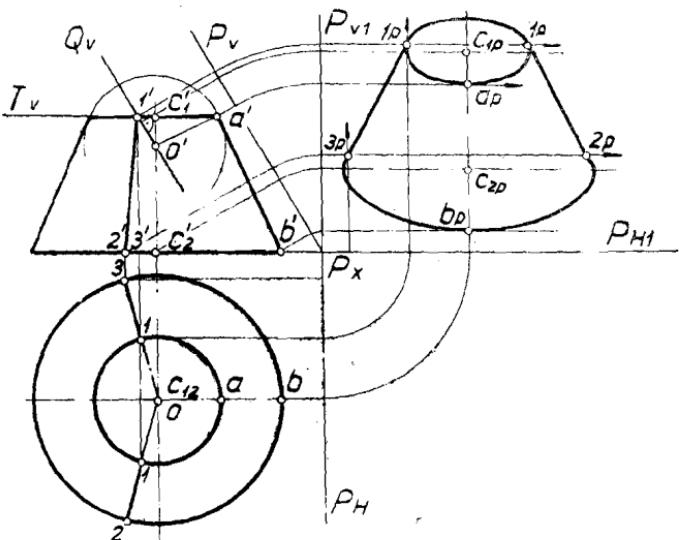


Рис. 5

кость которой Q будет перпендикулярна к направлению проектирования и будет, следовательно, фронтально проектирующей, поэтому фронтальная проекция контура видимости сферы совпадает с фронтальным следом Q_V плоскости Q , а пересечение последней с контуром сечения конуса дает хорду 1.1 , через концы которой проходят образующие 1.2 и 1.3 . Именно эти образующие проектируются на плоскость P очерковыми образующими $1_P 2_P$ и $1_P 3_P$ конической поверхности.

Эллипсы — аксонометрические проекции сечения и основания конуса — определяются, как и при проектировании цилиндра, их осями, для чего нужно спроектировать на плоскость P центры сечения и основания и точки A и B (или одну из них); построенные ранее точки 1_P , 2_P , 3_P также будут принадлежать этим эллипсам.

В случае косоугольного проектирования усеченного конуса на горизонтально проектирующую плоскость P (рис. 6) вписывание в конус сферы ограничивается определением ее центра O . Затем через O проводится фронталь OK плоскости контура видимости, перпендикулярная к направлению проектирования; точка K пересечения этой фронтали с плоскостью

Основания конуса позволяет провести прямую пересечения плоскости основания конуса с плоскостью контура видимости вспомогательной сферы. Эта прямая, также перпендикулярная к направлению проектирования, пересекает основание конуса в точках 1 и 2, позволяющих спределить образующие 1.3 и 2.4, которые проектируются на плоскость P очерковыми образующими конической поверхности.

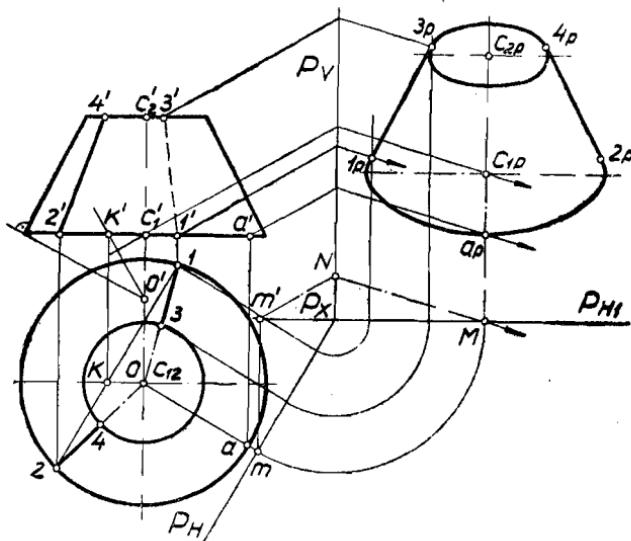


Рис. 6

Показанные на рис. 6 построения, остающиеся неизменными и для прямоугольной аксонометрии конуса, легли в основу способа вычерчивания очерков аксонометрических проекций поверхностей вращения; этот способ изложен в упоминавшейся выше книге «Преобразование ортогональных проекций». Дальнейшая доработка способа позволила распространить его применение на другие поверхности второго порядка и, в частности, на эллиптический конус.

Чтобы получить возможность определять точки контура видимости с помощью вписанных сфер, нужно эллиптический конус преобразовать в конус вращения. Такое преобразование можно выполнить проектированием заданного конуса по направлению его оси на некоторую плоскость R , проходящую через большую ось эллипса — основания (рис. 7) и наклоненную к этому основанию так, что малая ось эллипса проектируется на плоскость R в отрезок, равный длине большой оси. После совмещения плоскости R с плоскостью чертежа новая «горизонтальная» проекция конуса изобразится окружностью

с центром в s , а новая фронтальная проекция — равнобедренным треугольником с вершиной s' и основанием, равным большой оси эллипса.

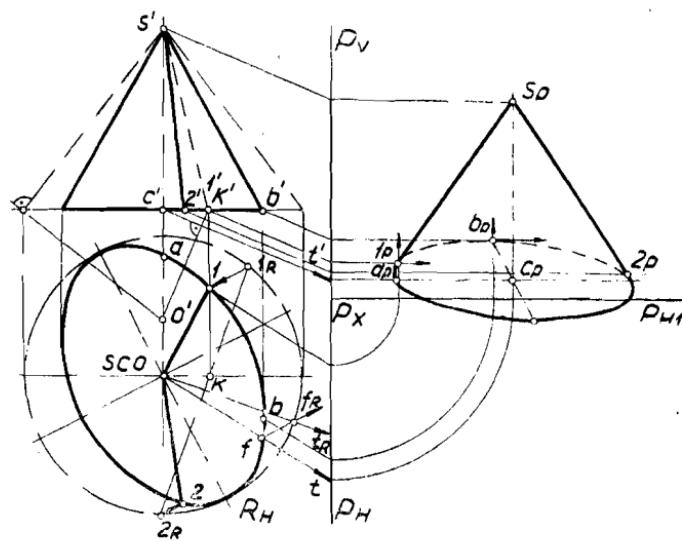


Рис. 7

Выполненное преобразование можно трактовать как растяжение эллипса — основания по направлению его малой оси; поэтому, определив, как и на рис. 6, концы 1_R и 2_R образующих конуса вращения, которые будут очерковыми для его аксонометрической проекции, возвращаем эти точки на эллипс — основание заданного конуса соответственно в точки 1 и 2 ; последние вместе с вершиной S определяют образующие $S1$ и $S2$, проектирующиеся на плоскость P в очерковые образующие S_1P_P и S_2P_P аксонометрического изображения эллиптического конуса.

Отметим, что эллипс — аксонометрическая проекция основания конуса — вычерчивается по сопряженным полудиаметрам caP_P и cbP_P , а для этого достаточно спроектировать на плоскость P сопряженные полудиаметры ca и cb ; при этом $caP_P = ca$, так как $ca \parallel P_H$, и, следовательно, $CA \parallel \text{пл. } P$.

От построения очерка аксонометрической проекции эллиптического конуса нетрудно перейти к построению очерков поверхностей не только второго, но и более высокого порядка, образованных движением определенным образом деформирующихся эллипсов, например эллиптических колец и торов.

Построение очерка шара

Независимо от направления проектирования проектирующей поверхностью, обертывающей шар, будет поверхность

цилиндра вращения. Контуром видимости шара является окружность, расположенная в плоскости, перпендикулярной к направлению проектирования и проходящей через центр шара. Поэтому очерком прямоугольной аксонометрической проекции шара является окружность с диаметром, равным диаметру шара, а очерком косоугольной аксонометрической проекции шара будет эллипс, малая ось которого равна диаметру шара; проекция центра шара для любого вида аксонометрии служит центром очерка.

Построение очерка прямоугольной аксонометрической проекции шара в виде окружности не вызывает затруднений при любом способе вычерчивания аксонометрии. Но построение очерка шара в косоугольной аксонометрии при координатном методе ее вычерчивания оказывается громоздким и достаточно сложным *. Если же эту задачу решать непосредственным проектированием на аксонометрическую плоскость, то все построения упрощаются.

На рис. 8 шар проектируется косоугольно на плоскость P , совмещенные и повернутые следы которой обозначены P_{H1} и P_{V1} . Параллельность направления проектирования CS плоскости V позволяет непосредственно на эпюре определить фронтальную проекцию контура видимости шара в виде диаметра $b'd'$ главного меридиана шара. Отрезок BD в пространстве является тем диаметром окружности (контура видимости шара), который проектируется на плоскость P в большую ось эллипса — очерка косоугольной аксонометрии шара; в малую ось этого эллипса проектируется диаметр шара AE , являющийся также и диаметром окружности контура видимости.

Таким образом, для построения очерка косоугольной аксонометрической проекции шара достаточно спроектировать на плоскость P три точки: центр C шара в центр C_P эллипса, точки A и B соответственно в a_P и b_P — концы осей этого эллипса.

Если аксонометрическая плоскость P будет касательной к шару в точке F (как это сделано на рис. 8), то точка F спроектируется на плоскость P фокусом эллипса — очерка шара. Это можно доказать непосредственно по рис. 8 или на основании теоремы Данделена, утверждающей, что точка касания сферы, вписанной в цилиндр, к плоскости сечения цилиндра является фокусом эллипса-сечения. Поэтому построения, показанные на рис. 8, можно еще более упростить, ограничив их в любых случаях проектированием только центра шара и определением совмещенного положения точки касания аксонометрической плоскости к поверхности шара.

* См. рис. 243, 244 в книге Е. А. Глазунова и Н. Ф. Четверухина «Аксонометрия».

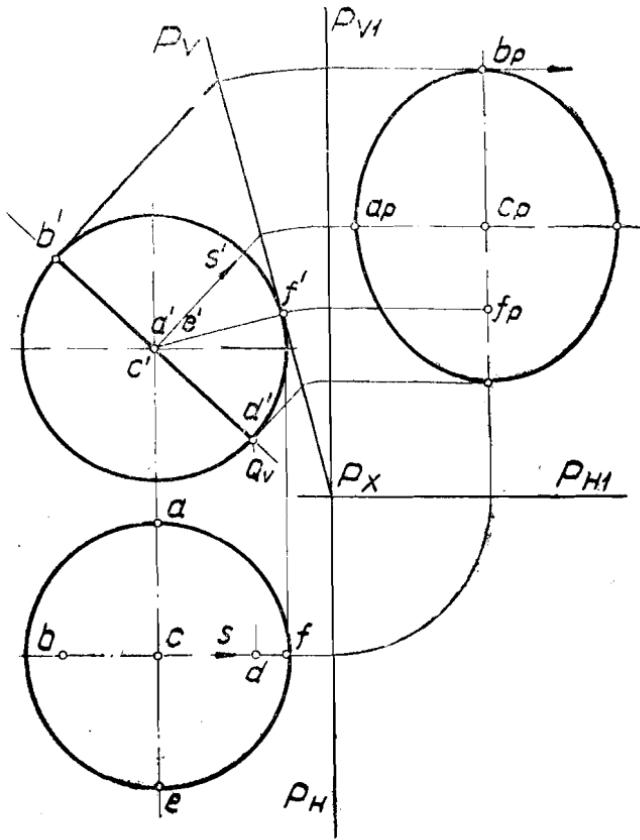


Рис. 8

Действительно, если шар (рис. 9) проектируется косоугольно по направлению проектирования CS на плоскость P , касательную к шару в точке F , то после совмещения плоскости P с плоскостью чертежа получим совмещенную точку f_P — фокус

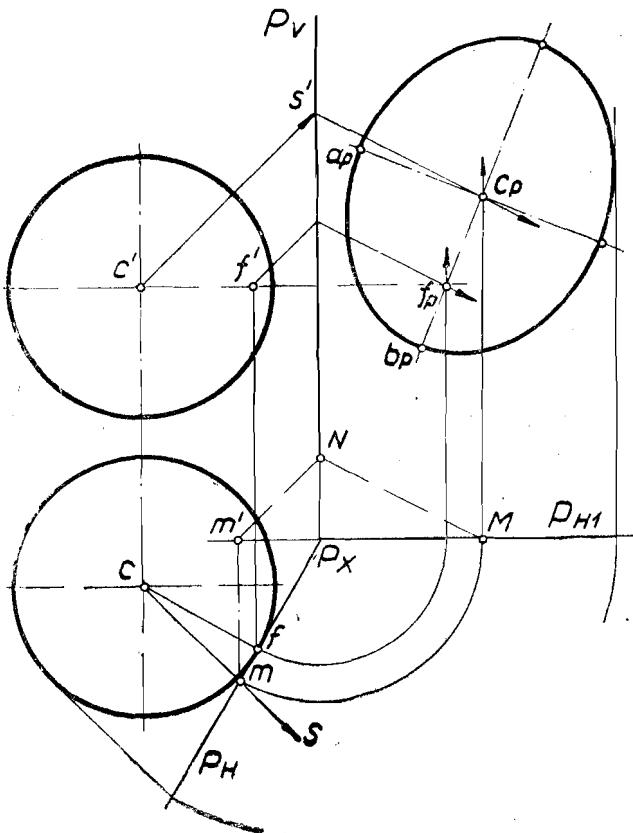


Рис. 9

очеркового эллипса и построим точку c_P — центр этого эллипса; прямая c_Pf_P определит направление большой оси эллипса, $a_Pc_P \perp c_Pf_P$ дает направление его малой оси, половина длины которой равна радиусу проектируемого шара, а расстояние a_Pf_P определит длину большой полуоси c_Pb_P . Очертание эллипса — очерка косоугольной аксонометрической проекции шара по найденным полуосям c_Pa_P и c_Pb_P строится известным способом.

Аналогичным образом можно построить очерк косоугольной аксонометрической проекции шара на картинной плоскости общего положения.

Построение очерка эллипсоида

Рассматривая эллипсоид, как поверхность, аффинно соответствующую шару, можно заключить, что контуром видимости эллипсоида будет эллипс, а поэтому и очерком аксонометрической проекции эллипсоида будет также эллипс. Так как плоскость контура видимости шара проходит через центр шара и перпендикулярна образующим проектирующего цилиндра, то плоскость контура видимости эллипсоида проходит через центр эллипса и сопряжена с образующими проекти-

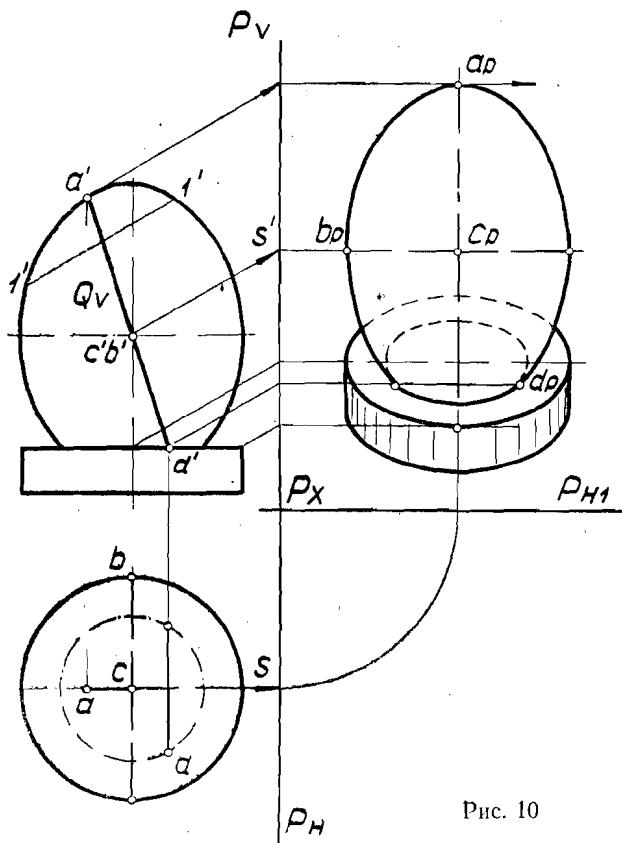


Рис. 10

рующим цилиндром, обертывающим эллипсоид. Указанную плоскость целесообразно определять на эпюре осями или сопряженными диаметрами эллипса — контура видимости эллипсоида с тем, чтобы по этим осям или сопряженным диаметрам после их проектирования на картинную плоскость строить эллипс — очерк аксонометрической проекции эллипсоида.

Если направление проектирования параллельно одной из плоскостей проекций, например плоскости V (рис. 10), то непо-

средственno на эпюре можно определить оси эллипса — контура видимости эллипсоида. В этом случае плоскость Q контура видимости эллипса оказывается фронтально проектирующей и проходит через полудиаметры CB и CA : фронтальный след этой плоскости, совпадающей с $c'a'$, проводится через c' и середину хорды $I'I'$, параллельной $c's'$.

Полудиаметры CA и CB эллипса вращения являются одновременно полуосями эллипса — контура видимости этого эллипса для избранного направления проектирования. В общем случае эти полуоси проектируются на аксонометрическую плоскость в виде сопряженных полудиаметров очеркового эллипса, но если проектирующие лучевые плоскости перпендикулярны к аксонометрической плоскости, как это имеет место на рис. 10, то полуоси CA и CB эллипса — контура видимости эллипса проектируются соответственно в полуоси $c_p a_p$ и $c_p b_p$ эллипса — очерка аксонометрической проекции эллипса. При этом размер полуоси $c_p b_p$ равен длине полуоси CB и, следовательно, для построения очеркового эллипса достаточно проектированием на плоскость P определить только аксонометрические проекции c_p и a_p точек C и A . Очерковому эллипсу принадлежат также точки, в которых плоские сечения эллипса касаются контура его видимости. Такие точки, например точку D , целесообразно сначала определить на эпюре, а затем спроектировать на аксонометрическую плоскость P , что обеспечивает простоту и точность построения очеркового эллипса.

Если направление проектирования задано прямой общего положения, то оси эллипса — контура видимости эллипса вращения можно определить, повернув проектирующий луч CS (рис. 11) до положения, параллельного плоскости V . После определения точки A , в которой проектирующий луч касается контура сечения эллипса средней лучевой плоскостью, все построения сводятся к проектированию точек C и A на аксонометрическую плоскость P и вычерчиванию очеркового эллипса по его осям $c_p a_p$ и $c_p b_p$.

Для построения очерка аксонометрической проекции трехосного эллипса (рис. 12) непосредственно на эпюре определяется диаметр AB эллипса — контура видимости эллипса и направление горизонтальной проекции de второго диаметра этого эллипса, сопряженного с AB : в точках A и B крайние лучевые проектирующие плоскости касаются поверхности эллипса, а направление de совпадает с горизонтальной проекцией ds направления проектирования.

Таким образом, неизвестной остается лишь одна точка F — конец диаметра эллипса, сопряженного с диаметром AB ; в этой точке верхний проектирующий луч коснется поверхности эллипса. Чтобы определить точку F , заданный эллипс спроектируем по направлению его диаметра AB на гори-

зонтально проектирующую плоскость R , выбрав последнюю с расчетом получения очерка новой проекции эллипсоида в виде окружности. Для этого на направлении ba берем произвольную точку c_R и считаем ее новой проекцией центра C на плоскость R ; из c_R , как из центра, радиусом $c'k'$, равным боль-

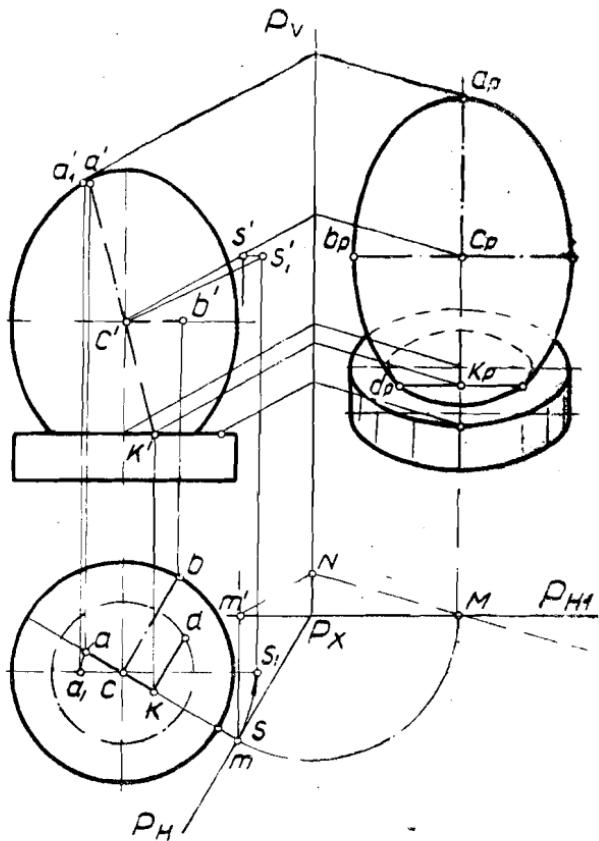


Рис. 11

шой полуоси эллипсоида, описываем дугу — очерк новой проекции эллипсоида — до пересечения с прямой $dd_R \parallel ba$ в точке d_R . Прямая cRd_R будет горизонтальным следом R_{H_1} плоскости R при условии, что горизонтальная плоскость H_1 проходит через центр эллипсоида.

На плоскость R спроектируем по направлению BA один из лучей, например DS : новая проекция d_R точки D уже имеется, а новую проекцию s_R точки S получим, если от c_R по перпендикуляру к R_{H_1} отложим отрезок $c's'$ (так как при проектировании на горизонтально проектирующую плоскость R вертикальные размеры оригинала не искажаются). Затем через c_R

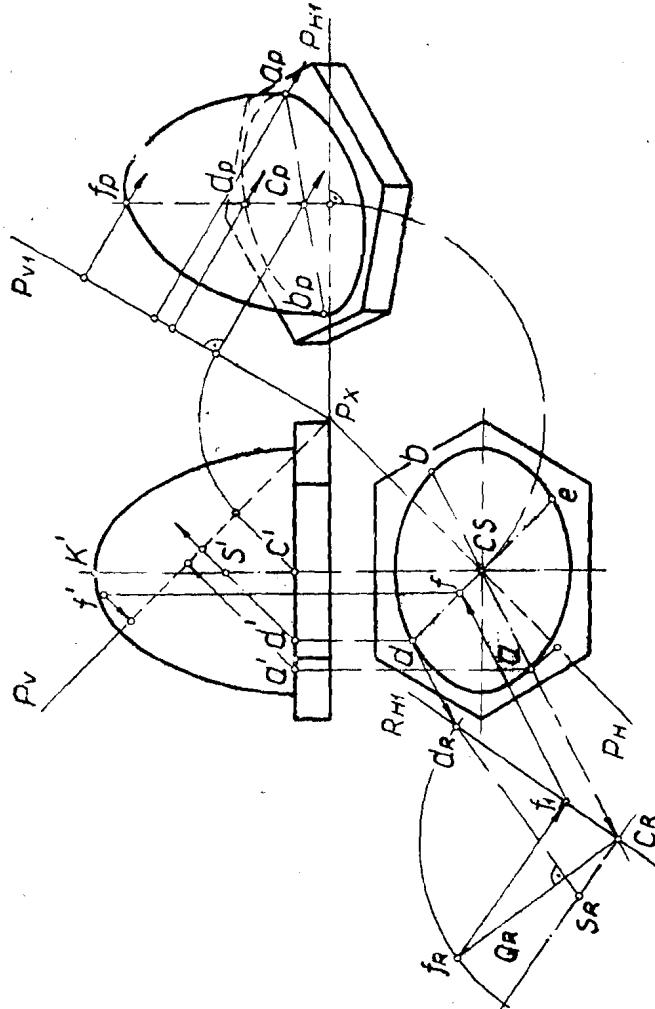


FIG. 12

проводим след Q_R плоскости контура видимости эллипсоида, перпендикулярный к направлению $d_R s_R$ и пересекающий окружность — очерк новой проекции эллипсоида в точке f_R , в которой прямая, параллельная $d_R s_R$, коснется этого очерка. Обратными лучами находим точки f_1 , f и f' , имея в виду, что отрезок $f_R f_1$ является координатой z точки F относительно плоскости H_1 , совпадающей на рис. 12 с плоскостью верхнего основания шестигранной плиты.

Полученные сопряженные полудиаметры CA и CF эллипса — контура видимости трехосного эллипсоида проектируются по принятому направлению DS на аксонометрическую плоскость P соответственно в сопряженные полудиаметры $c_r a_p$ и $c_r f_p$, позволяющие построить эллипс — очерк аксонометрической проекции данного эллипсоида. Сопряженные полудиаметры CB и CD после проектирования на плоскость P определяют сопряженные полудиаметры $c_r b_p$ и $c_r d_p$, по которым вычерчивается эллипс — аксонометрическая проекция сечения эллипсоида плоскостью верхнего основания шестигранной плиты.

Заметим, что на рис. 12 построена точная прямоугольная изометрическая проекция эллипсоида и плиты, но таким же образом можно построить любую диметрическую или триметрическую прямоугольную или косоугольную проекцию трехосного эллипсоида.

Построение очерка параболоида

Предварительно выясним характер кривой — контура видимости параболоида, взяв для простоты параболоид вращения (рис. 13) и задавшись направлением проектирования TS , параллельным фронтальной плоскости проекций.

В этом случае средняя лучевая плоскость Q пересекает параболоид по параболе — очерку фронтальной проекции параболоида, а верхний проектирующий луч, касательный к поверхности параболоида, коснется этого очерка в точке 1 : фронтальную проекцию $1'$ точки 1 получим, если через фокус f' параболы проведем прямую, перпендикулярную $t's'$, до пересечения с директрисой $t'm'$ в точке n' , а через точку n' проведем прямую, параллельную оси параболы, до пересечения с параболой в точке $1'$.

Для определения других точек контура видимости пересечем параболоид плоскостями, перпендикулярными к его оси, и полученные круговые сечения будем рассматривать как сечения сфер, вписанных в параболоид. Одно из таких сечений совпадает на фронтальной проекции с прямой $o'_2 2'$; если в точке $2'$ провести нормаль к параболе (эта нормаль будет параллельно прямой $f'k'$) до пересечения с осью $o'a'$ в точке c'_2 , то, очевидно, точка c'_2 будет фронтальной проекцией центра

сферы, вписанной в параболоид и касающейся его поверхности по окружности с центром в o'_2 и радиусом $o'_2 2'$.

Проектирующие лучи направления TS коснутся сферы по окружности, плоскость которой перпендикулярна TS ; поэтому фронтальная проекция указанной окружности изобразится

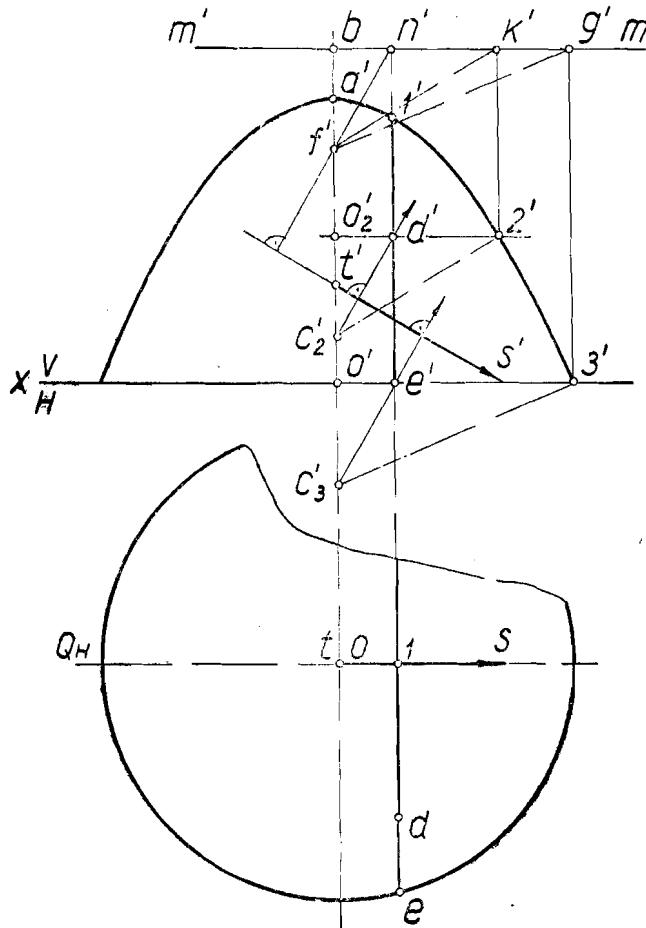


Рис. 13

на плоскости V прямой линией, проходящей через c'_2 , перпендикулярной $t's'$ и пересекающей $o'_2 2'$ в d' — фронтальной проекции точки D , принадлежащей поверхностям параболоида и сферы и являющейся, следовательно, точкой контура видимости параболоида.

Аналогичным образом можно построить любое количество точек контура видимости параболоида: на рис. 13 определена

еще точка E , ортогональные проекции которой расположились на одной прямой с проекциями точек I и D . Закономерность такого расположения может быть доказана равенством прямоугольных треугольников: $\triangle f'b'n' = \triangle c'_2o'_2d' = \triangle c'_3o'_3e'$, которое в свою очередь следует из равенств других прямоугольных треугольников: $\triangle f'b'k' = \triangle c'_2o'_22'$ и $\triangle c'_3o'_33' = \triangle f'b'g'$; последние два равенства вытекают из условий построения нормалей к параболе в различных ее точках.

Таким образом, полученные на рис. 13 точки I , D и E определили плоскость, параллельную оси параболоида вращения и перпендикулярную к лучевой плоскости, проходящей через эту ось. Следовательно, 1) плоскость контура видимости параболоида вращения можно определить после нахождения одной ее точки; 2) контуром видимости и очерком аксонометрической проекции параболоида являются параболы.

Теперь рассмотрим два примера построения очерка аксонометрической проекции параболоида.

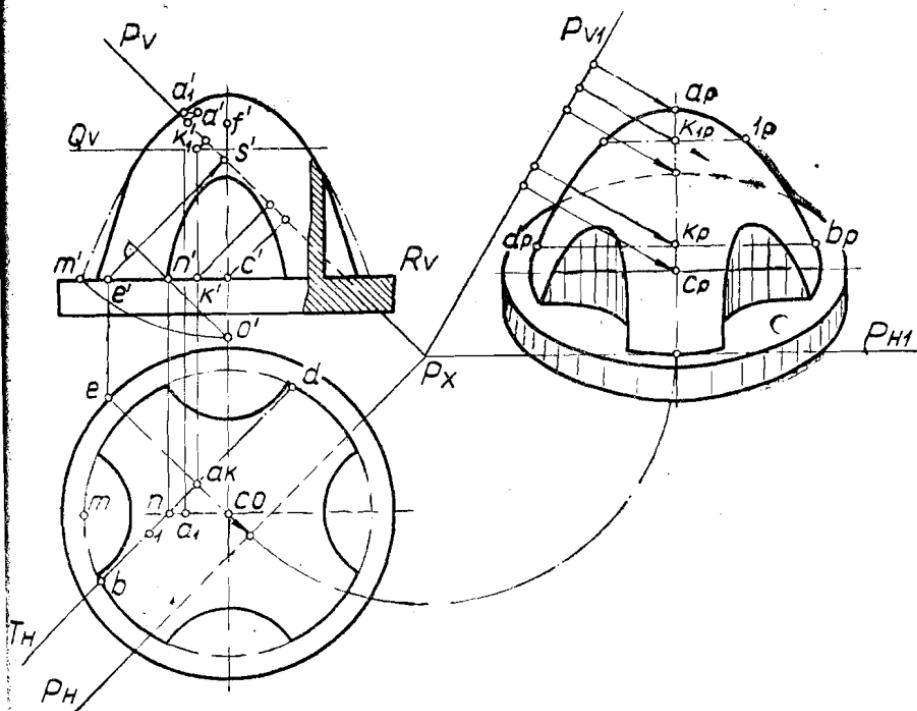


Рис. 14

На рис. 14 заготовка колпака имеет форму параболоида вращения, опирающегося на цилиндрический фланец; требуется построить точную прямоугольную изометрию, что достигается прямоугольным проектированием оригинала на

плоскость P , следы которой P_V и P_H наклонены к вертикальной оси параболоида под углом 45° .

Для определения положения плоскости контура видимости параболоида его круговое сечение горизонтальной плоскостью R примем за сечение шара, центр которого получим в пересечении нормали к параболоиду, проведенной через точку M , с осью параболоида CF . Эта нормаль будет фронталью; ее фронтальная проекция, являющаяся нормалью к параболе — очерку фронтальной проекции параболоида, пересечет фронтальную проекцию $c'f'$ оси параболоида в точке o' , которую при наличии фокуса f' получим, проведя из f' , как из центра, дугу радиусом $f'm'$. (Заметим, что нормаль можно провести и не имея на чертеже фокуса параболы.)

Через полученную точку O будет проходить плоскость контура видимости вспомогательного шара, перпендикулярная направлению проектирования ES ; эта плоскость пересекается с плоскостью R по прямой BD , перпендикулярной ES и проходящей через точку N , в которой фронталь ON , перпендикулярная ES , пересекает плоскость R . Нетрудно видеть, что точки B и D будут очерковыми для аксонометрических проекций вспомогательного шара и данного параболоида. Поэтому через прямую BD будет проходить плоскость T контура видимости параболоида, а эта плоскость, как было доказано на рис. 13, параллельна оси параболоида, следовательно, bd совпадает с горизонтальным следом T_H плоскости контура видимости параболоида и является горизонтальной проекцией параболы — контура видимости параболоида.

Вершина A указанной параболы определяется на горизонтальной проекции непосредственно в пересечении bd с es , а на фронтальной проекции — после поворота точки A вокруг оси FS до выхода на очерковую параболу.

Точки A , B , D и K проектируются на плоскость P соответственно в a_P , b_P , d_P и k_P , определяя вершину a_P , ось a_Pk_P и хорду b_Pd_P параболы — аксонометрического очерка заданного параболоида. Промежуточные точки очерковой параболы могут быть получены теперь непосредственно в аксонометрии или проектированием точек параболы — контура видимости параболоида, как это сделано на рис. 14 для точки I_P .

Аксонометрическую проекцию цилиндрического фланца строим, как на рис. 3; аксонометрические проекции линий перехода обводятся по отдельным точкам, полученным после проектирования их из системы V/N на плоскость P .

На рис. 15 дан пример построения косоугольной аксонометрии эллиптического параболоида. Проектированием на плоскость R , как и на рис. 7, горизонтальный след параболоида из эллипса преобразуется в окружность; соответственно преобразуется и направление проектирования: вместо CS получим C_RS_R .

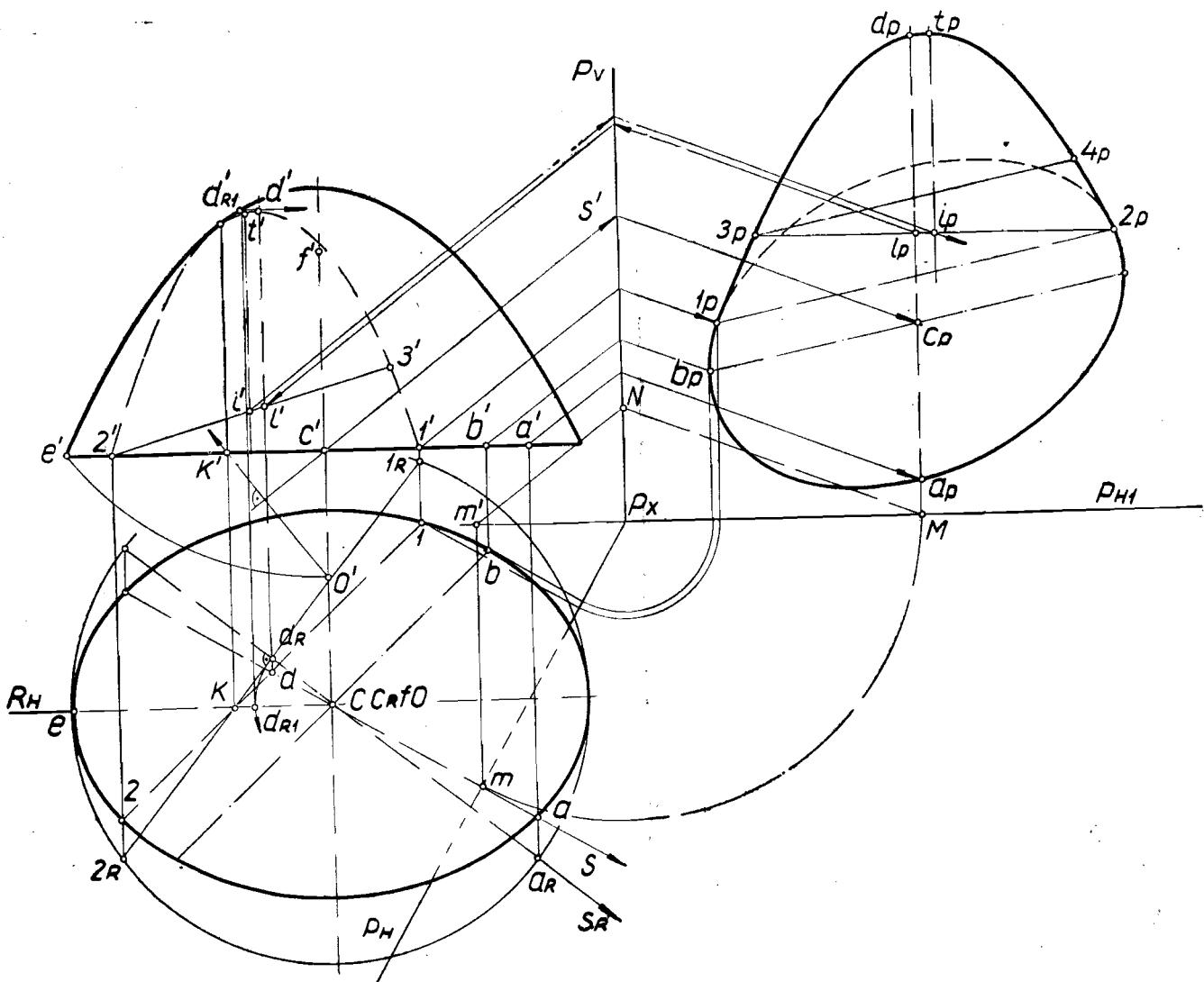


Рис .15

Затем, как и для параболоида вращения, определим плоскость контура видимости, след которой на плоскости R изобразится прямой $1_R 2_R$, а на плоскости H — прямой 1.2 .

Отрезок 1.2 является одновременно хордой эллипса — горизонтального следа параболоида и горизонтальной проекцией параболы — контура видимости параболоида; точки d_R и d — средние на отрезках $1_R 2_R$ и 1.2 определяют проекции вершины этой параболы соответственно на плоскостях R и H . После поворота точки D_R вокруг оси параболоида в положение, при котором горизонтальная проекция d_R оказывается на прямой ce , параллельной оси X , фронтальная проекция d_R расположится на очерковой параболе — фронтальной проекции параболоида; вращением точки D в первоначальное положение определяется фронтальная проекция d' вершины параболы — контура видимости параболоида.

Вершина D , ось DL и хорда 1.2 , перпендикулярная оси DL , определяют параболу — контур видимости эллиптического параболоида. Проектируя эту параболу на плоскость P по направлению CS , получим очерк аксонометрической проекции параболоида в виде параболы $1_P d_P 2_P$. При этом ось DL и перпендикулярная к оси хорда 1.2 проектируются соответственно в диаметр d_{plP} и сопряженную с ним хорду $1_P 2_P$. Чтобы определить ось и вершину параболы — очерка аксонометрической проекции параболоида, через точку 2_P можно провести хорду этой параболы, перпендикулярную диаметру d_{plP} , по аксонометрической проекции l_P с помощью обратных лучей нетрудно найти фронтальную проекцию l' точки L , после чего через $2' l'$ проводится хорда $2' 3'$, через середину которой i' пройдет фронтальная проекция $i't'$ диаметра параболы — контура видимости параболоида, проектирующегося на плоскость P в ось $i_P t_P$ параболы — очерка аксонометрической проекции параболоида. Очевидно, что точка T будет проектироваться в вершину t_P очерковой параболы.

Полученные проектированием на плоскость P ось $t_P i_P$ и перпендикулярная к этой оси хорда $2_P 3_P$ позволяют вычеркнуть очерковую параболу любым из известных способов. В частности, можно воспользоваться наличием аксонометрических проекций диаметра d_{plP} и сопряженной с ним хорды $1_P 2_P$. В этом случае построение промежуточных точек очерковой параболы выполняется следующим образом: точка 3_P отмечается на направлении $2_P i_P$ как точка, симметричная точке 2_P относительно оси $i_P t_P$; затем через 3_P проводится хорда, параллельная хорде $1_P 2_P$; на этой хорде отмечается точка 4_P , кососимметричная точке 3_P относительно диаметра d_{plP} ; далее все построения повторяются в том же порядке.

Эллипс — аксонометрическая проекция сечения параболоида горизонтальной плоскостью вычерчивается по сопряженным полудиаметрам cp_{ap} и cp_{bp} .

Построение очерка гиперболоида

На рис. 16 однополостный гиперболоид вращения проектируется на картинную плоскость P . Окружности — верхнее и

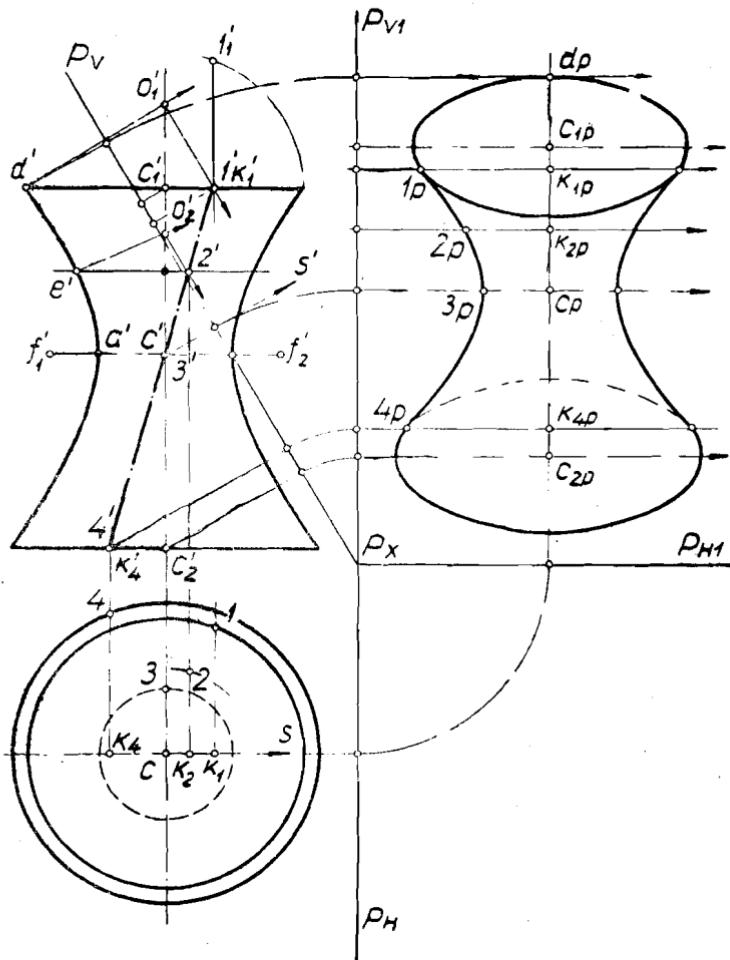


Рис. 16

нижнее сечения гиперболоида горизонтальными плоскостями проектируются на плоскость P в эллипсы с центрами в C_{1p} и C_{2p} ; оси этих эллипсов определяются, как на рис. 4.

Очерк аксонометрической проекции поверхности гиперболоида вращения может быть построен как очерк любой по-

верхности вращения. Ортогональные проекции точек контура видимости гиперболоида определяются для отдельных сечений его поверхности плоскостями, перпендикулярными оси гиперболоида. Каждое круговое сечение гиперболоида рассматривается как сечение шара, вписанного в гиперболоид; центры этих шаров располагаются в пересечении нормалей к гиперболе — очерку фронтальной проекции гиперболоида с осью гиперболоида. Именно таким образом на рис. 16 получены точки o'_1 и o'_2 — фронтальные проекции центров двух вспомогательных шаров, касающихся поверхности гиперболоида изнутри по окружностям, проектирующимся на плоскость V в отрезки прямых, проходящих соответственно через точки d'' и e' . Очерковыми окружностями указанных шаров будут их диаметральные сечения плоскостями, перпендикулярными к направлению проектирования. Если направление проектирования параллельно плоскости V (как на рис. 16), то фронтальные проекции контуров видимости вспомогательных шаров будут изображаться прямыми линиями, проходящими через o'_1 и o'_2 и перпендикулярными к фронтальной проекции $c's'$ направления проектирования CS .

Взаимное пересечение этих линий с линиями соответствующих горизонтальных сечений гиперболоида в точках $1'$ и $2'$ дает фронтальные проекции точек 1 и 2 , которые будут очерковыми для аксонометрической проекции гиперболоида на любую плоскость. Таких точек контура видимости гиперболоида можно получить сколько угодно, и в процессе их построения нетрудно увидеть, что фронтальные проекции этих точек закономерно располагаются на одной прямой, проходящей через центр c' гиперболы — очерка фронтальной проекции гиперболоида. Так как каждая из полученных точек ($1'$, $2'$, $3'$) может принадлежать не только передней, но и задней половине поверхности гиперболоида, можно утверждать, что прямая $1'-3'$ является фронтальным следом плоскости контура видимости гиперболоида вращения и что эта плоскость, проходящая через центр гиперболоида, пересекает его поверхность по гиперболе. Следовательно, очерком аксонометрической проекции гиперболоида будет гипербола, центром которой будет точка c_P — проекция центра C гиперболоида на плоскость P , а вершинами — точки 3_P и ей симметричная относительно мнимой оси гиперболы — очерка аксонометрической проекции гиперболоида. Для построения очерковой гиперболы кроме точек c_P и 3_P достаточно проектированием на плоскость P получить еще лишь одну точку, например 1_P , а затем, имея вершину 3_P , действительную ось c_P3_P и перпендикулярную к этой оси хорду, проходящую через точку 1_P , можно построить известным образом любое число промежуточных точек очерковой гиперболы; эти точки могут быть построены также проектированием на плоскость P промежуточ-

ных точек контура видимости гиперболоида, как это сделано на рис. 16 для точки 2_P .

Отметим, что в рассмотренном примере точки очерковой гиперболы в аксонометрической проекции можно получить, пользуясь только фронтальной проекцией заданного гиперболоида: расстояния от мнимой оси очерковой гиперболы до ее точек равны полухордам круговых сечений гиперболоида, проведенным через точки, принадлежащие контуру видимости гиперболоида, например $k_{1P}I_P = k'_1 I'_1$.

Результат построений, полученный на рис. 16 для прямоугольного проектирования гиперболоида вращения может быть распространен на любой другой случай вплоть до общего случая косоугольного проектирования эллиптического гиперболоида на аксонометрическую плоскость любого заданного или произвольно взятого положения: после преобразования эллиптического сечения (следа) в окружность, как это делалось на рис. 7 для конуса и рис. 15 для эллиптического параболоида, эллиптический гиперболоид преобразуется в гиперболоид вращения, а все дальнейшие построения будут сведены к предыдущему примеру.

ЛИТЕРАТУРА

1. Глазунов Е. А., Четверухин Н. Ф. Аксонометрия. М., Гостехиздат, 1953.
2. Четверухин Н. Ф. Введение в высшую геометрию. М., Учпедгиз, 1934.
3. Чувиков Н. Т. Преобразование ортогональных проекций. М., Изд-во «Советская наука», 1957.

Н. Т. Чувиков

НОВЫЙ СПОСОБ ПОСТРОЕНИЯ ОСЕЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ АКСОНОМЕТРИИ ПО ЗАДАННЫМ ПОКАЗАТЕЛЯМ ИСКАЖЕНИЯ

Теоретическое обоснование

Между показателями искажения по осям прямоугольной аксонометрии и углами наклона следов аксонометрической плоскости к соответствующим осям натуральной координатной системы существует определенная зависимость, которую можно получить, используя рис. 1.

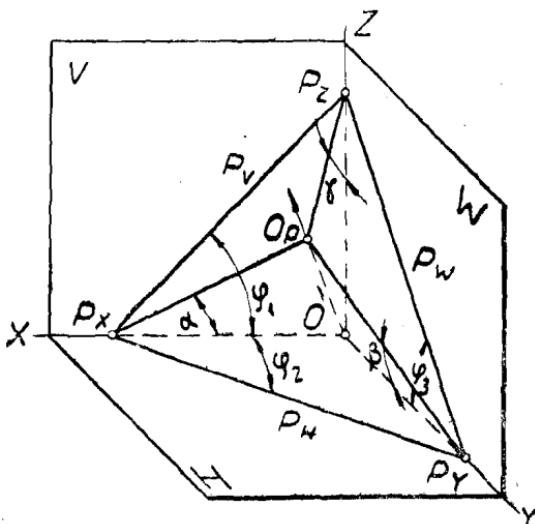


Рис. 1

В случае прямоугольного проектирования луч OO_P перпендикулярен плоскости P , а треугольники $OO_P P_X$, $OO_P P_Y$ и $OO_P P_Z$ будут прямоугольными с углом 90° при вершине O_P .

и с общим катетом OO_P . Из указанных треугольников получим показатели искажения по аксонометрическим осям:

$$k = \frac{O_P P_X}{OP_X} = \cos \alpha; \quad m = \frac{O_P P_Y}{OP_Y} = \cos \beta; \quad n = \frac{O_P P_Z}{OP_Z} = \cos \gamma.$$

Синусы углов α , β и γ соответственно равны:

$$\sin \alpha = \sqrt{1 - k^2}; \quad \sin \beta = \sqrt{1 - m^2}; \quad \sin \gamma = \sqrt{1 - n^2}.$$

Из прямоугольного треугольника $P_X O P_Z$ $\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{OP_Z}{OP_X}$,
но $OP_Z = \frac{OO_P}{\sin \gamma}$, а $OP_X = \frac{OO_P}{\sin \alpha}$.

Поэтому

$$\operatorname{tg} \varphi_1 = \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} = \sqrt{\frac{1 - k^2}{1 - n^2}}. \quad (1)$$

Из прямоугольного треугольника $P_X O P_Y$ $\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{OP_Y}{OP_X}$,
но $OP_Y = \frac{OO_P}{\sin \beta}$ и, следовательно,

$$\operatorname{tg} \varphi_2 = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \sqrt{\frac{1 - k^2}{1 - m^2}}. \quad (2)$$

Из прямоугольного треугольника $P_Z O P_Y$

$$\operatorname{tg} \varphi_3 = \frac{OP_Z}{OP_Y} = \frac{\operatorname{tg} \varphi_1}{\operatorname{tg} \varphi_2} = \sqrt{\frac{1 - m^2}{1 - n^2}}. \quad (3)$$

Построение

Любая из полученных формул позволяет по двум заданным показателям искажения построить угол наклона одного из следов аксонометрической плоскости к соответствующей координатной оси.

Воспользуемся показателями искажения k и m и построим угол φ_2 наклона горизонтального следа аксонометрической плоскости к оси OX ; при горизонтальном расположении этого следа (P_{H1}) аксонометрическая ось $O_P Z_P$ оказывается вертикальной линией, как это и принято в прямоугольных аксонометрических проекциях.

Из произвольной точки P_{x1} , взятой на следе P_{H1} аксонометрической плоскости P (рис. 2), описывается дуга окружности, радиус которой R принимается за единицу натурального масштаба; очевидно, что величина этого радиуса может быть взята произвольно, но для простоты построений выби-

рается такая величина, от которой легко брать сотую часть, например 100 м.м. Затем по следу P_{H1} от точки P_{x1} откладывается отрезок $P_{x1}A = k \cdot R$, а через точку A проводится перпендикуляр к P_{H1} , пересекающий окружность в точке B ; очевидно, что отрезок $AB = R \sqrt{1 - k^2}$.

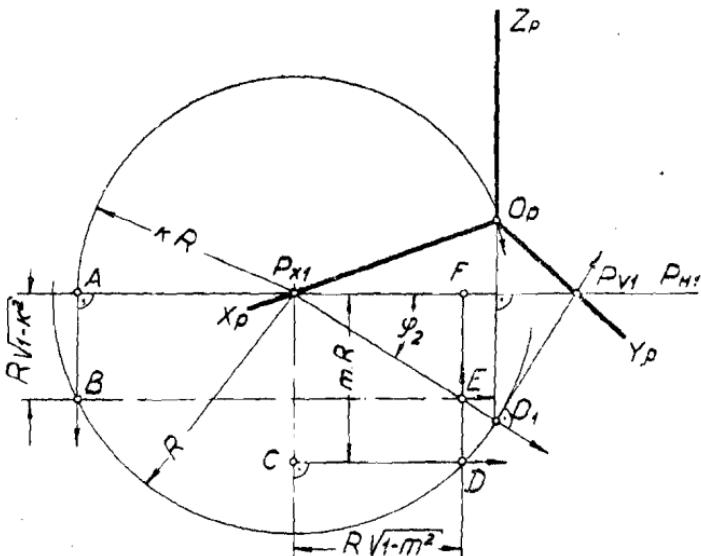


Рис. 2

Аналогичным образом определяется отрезок CD , перпендикулярный AB и равный $R \sqrt{1 - m^2}$.

Проведя через точку B прямую, параллельную P_{H1} , а через точку D прямую, перпендикулярную P_{H1} , в их взаимном пересечении получим точку E ; прямая $P_{x1}E$ образует с P_{H1} угол φ_2 и, следовательно, определяет направление координатной оси OX , совмещенной с аксонометрической плоскостью P , лежащей в плоскости чертежа. Совмещенное положение начала натуральной системы координатных осей на прямой $P_{x1}E$ удобно взять в точке O_1 пересечения $P_{x1}E$ с окружностью радиуса R . В этом случае, проведя через O_1 прямую, перпендикулярную к P_{H1} , получим направление аксонометрической оси O_PZ_P , на которой дугой радиуса $k \cdot R$, описанной из P_{x1} , как из центра, засекаем точку O_P — начало осей прямоугольной аксонометрической системы. Прямая $O_P P_{x1}$ определяет направление аксонометрической оси $O_P X_P$, при этом отношение длины отрезка $O_P O_1 = R$ непосредственно дает заданный показатель искажения k .

Третья аксонометрическая ось $O_P Y_P$ определяется точками O_P и P_{y1} ; последняя лежит в пересечении с P_{H1} прямой,

проходящей через O_1 и перпендикулярной к $P_{X1}O_1$. Отношение длин отрезков $O_pP_{Y1}:O_1P_{Y1}$ будет равно заданному показателю искажения m по аксонометрической оси O_pY_p .

Анализ

Из построений, выполненных на рис. 2, следует, что в отличие от известных способов построения осей прямоугольной аксонометрии по заданным показателям искажения в предложенном варианте решения этой задачи нет надобности определять из уравнения ($k^2 + m^2 + n^2 = 2$) и использовать третий показатель искажения; это обеспечивает простоту и большую точность построений.

Оказывается также, что по рис. 2 третий показатель искажения определяется графически, а для всех трех показателей искажения уточняются пределы выбора их относительных величин.

Действительно, в прямоугольном треугольнике $P_{X1}FE$ сторона $P_{X1}E$ является гипotenузой. Поэтому $(P_{X1}E)^2 = (P_{X1}F)^2 + (FE)^2$, но $P_{X1}F = R\sqrt{1 - m^2}$, а $FE = R\sqrt{1 - k^2}$ и, следовательно $P_{X1}E = R\sqrt{2 - m^2 - k^2} = R \cdot n$,

Таким образом, отрезок $P_{X1}E$, как часть отрезка $P_{X1}O$, равного единице натурального масштаба R , есть графическая величина показателя искажения n по аксонометрической оси O_pZ_p .

Из условия $n < 1$ заключаем, что точка E (см. рис. 2) не должна выходить за пределы масштабной окружности. Это возможно только при условии $m > \sqrt{1 - k^2}$ ($P_{X1}C > AB$), причем если $m > \sqrt{1 - k^2}$, точка E оказывается внутри масштабной окружности, а если $m = \sqrt{1 - k^2}$, точка E будет на самой окружности.

Следовательно, величины показателей искажения для построения прямоугольной аксонометрической системы могут выбираться в пределах: $\sqrt{1 - k^2} < m \leq 1$; $\sqrt{1 - k^2} \leq n \leq 1$; $\sqrt{1 - m^2} \leq k \leq 1$.

Равенство отрезка $P_{X1}E$ показателю искажения n (при радиусе масштабной окружности R , принятом за единицу) позволяет не только определять графически величину любого из показателей искажения, когда два других показателя заданы (или выбраны в указанных выше пределах), но и строить аксонометрические оси, начиная с проведения горизонтального следа P_{H1} и в тех случаях, когда известны показатели k и n или n и m .

В первом случае по k определяется величина отрезка $AB = R\sqrt{1 - k^2}$, через B проводится $BE \parallel P_{H1}$, а из точки P_{X1} , как из центра, дугой радиуса $n \cdot R$ на BE засекается точка E .

Затем все построения будут такими же, как при задании показателей искажения k и m .

Во втором случае (заданы показатели m и n) по показателю искажения m определяется отрезок $CD = R \sqrt{1-m^2}$, через D проводится прямая $DF \perp P_{H1}$ и на DF из центра P_{x1} засекается точка E так, что радиус $P_{x1}E = n \cdot R$. Затем проводится прямая $BE \parallel P_{H1}$, а через полученную точку B — прямая $AB \perp P_{H1}$; отрезок AP_{x1} будет, очевидно, равен $k \cdot R$ и позволит получить точку O_P — начало осей прямоугольной аксонометрической системы.

E. A. Раевская

К ВОПРОСУ О ВЫБОРЕ РАЦИОНАЛЬНОГО ВИДА ПРОЕКЦИЙ МНОГОГРАННИКОВ В НЕКОТОРЫХ ОБЛАСТЯХ НАУКИ

Учение о многогранниках представляет не только теоретический интерес, но и имеет все возрастающее практическое значение для ряда прикладных дисциплин. Богатство, заключенное в математической теории многогранников и ее геометрических методах, дает широкие выходы в общую теорию поверхностей, в многомерные пространства Лобачевского и т. д., раскрывает геометрическую основу более общих результатов. Достижения в области учения о многогранниках практически используются в таких дисциплинах, как кристаллография, минералогия, петрография, металлография, рентгеноструктурный анализ, химия, физика, теория упругости, статика сооружений, картография, геодезия и др.

Геометрия вообще и начертательная геометрия с ее методом получения плоских изображений пространственных фигур являются существенным подспорьем для исследования. Очень часто бывает удобно сводить решение различных задач к рассмотрению геометрических фигур. Решение многих задач о многогранниках приобретает особую наглядность благодаря геометрическим построениям.

Так, например, Е. С. Федоров, будучи выдающимся геометром, разработал векторный метод изображения точек четырехмерного пространства на плоскости, заложив тем самым основы начертательной геометрии многомерного пространства, приобретающей в последнее время все большее значение.

Созданные трудами выдающихся советских геометров новые теории — теория полноты Н. Ф. Четверухина, теория моногенных фигур О. А. Вольберга и др. — открывают широкие возможности для практических приложений их к решению современных задач по трехмерному пространству.

Для техника важна не только адекватность плоского изображения, но и его наглядность. Однако важнейшими требованиями, предъявляемыми техниками к плоскому изображе-

нию, являются **легкость построения** и **легкая измеримость**; ради выполнения этих двух основных требований они всегда готовы поступиться известной долей наглядности образа прообразу. Это ставит вопрос о необходимости рационального выбора вида проекций при графических изображениях многогранников.

Может быть по крайней мере столько же различных видов проекций многогранников, сколько мыслимо видов систем координат. Но лишь немногие из них находят практическое применение. Такими видами являются проектирование из **собственного** центра, связанное с полярной системой координат, и проектирование из **несобственного** центра проекций, связанное с прямолинейной системой координат.

Степень сложности пользования различными видами проекций для решения метрических задач находится в таком же соотношении, как и степень сложности пользования соответствующими системами координат. Так, например, основным инвариантом центрального проектирования является **сложное** (ангармоническое) **отношение** для отрезков между четырьмя точками, тогда как для параллельного проектирования основным инвариантом будет уже **простое отношение** отрезков между тремя точками. Поэтому определение длин отрезков и углов в параллельных проекциях не требует такого громоздкого аппарата, который необходим для решения даже простых задач этого вида в центральной перспективе. Простейшая метрика присуща ортогональному проектированию.

Степень искажения проектируемого тела, связанная с относительным искажением, зависит от ряда факторов. При проектировании многогранника разные грани его претерпевают различные искажения, так как несмотря на наличие у них общего центра гомологии оси гомологии у них разные. Как правило, чем сложнее вид проекций, тем сильнее искажение (при прочих равных условиях), зависящее и от характера гомологии. При центральном проектировании, когда и центр и ось гомологии собственные, инвариантные свойства гомологий беднее, чем при параллельном проектировании, обеспечивающем **родственное**, аффинно-перспективное соответствие. Это способствует более легкому установлению адекватности параллельной (особенно ортогональной) проекции оригиналу, чем в случае центрального проектирования.

Наглядность изображения нередко находится в обратном отношении к степени искажения прообраза. Так, из всех проекций наиболее наглядна перспективная проекция многогранника, преследующая цель произвести на глаз наблюдателя то же впечатление, какое производит и сама фигура. Однако и она не дает достаточного представления о форме проектируемой фигуры и нередко требует почти такой же работы воображения, как и параллельная проекция, для того

чтобы восстановить по ней форму и положение тела в пространстве.

Наилучшим изображением многогранника, сочетающим в себе требования возможно малого искажения, возможно большей наглядности и обеспечения метрики, является аксонометрия, как перспективная, так и параллельная или ортогональная. При этом ортогональная аксонометрия, простейшая в построении, обладает лишь незначительной зрительной неправильностью и наименьшей искаженностью.

В международной научной литературе принято изображать многогранники в ортогональной аксонометрии, а именно в триметрии.

Каковы бы ни были виды проектирования, наиболее ценными для практических целей будут те из них, которые дают **плоские** изображения, адекватные оригиналу и, следовательно, обеспечивающие **полное** определение всей внутренней метрики прообраза.

Адекватность оригиналу может быть достигнута либо методом двух следов, либо методом двух проекций. Первый метод, менее разработанный и реже применяемый, имеет в общем случае значительные преимущества перед вторым для решения метрических задач. Основная метрическая задача — нахождение истинного вида плоской фигуры по ее проекциям — проще всего решается методом Монжа (методом двух ортогональных проекций).

В ряде случаев, когда метрика многогранника не имеет значения или нужна лишь его определенная частная метрика, пользуются **монопроекциями** многогранника. Как бы ни был прост многогранник, какой бы подробный ни была «легенда», он не определяется **любой** своей монопроекцией. Однако рациональным выбором вида монопроекций можно добиться, чтобы она была **эквиареальной** (эквивалентной), **эквиугольной**, **эквидистантной** (в данном направлении) или **конформной**. При выборе определенного вида проекции может выполняться только одно из перечисленных условий.

Выберем в качестве прообраза особый притупленный октаэдр (рис. 1), являющийся координационным полиэдром объемноцентрированной кубической решетки. На рис. 1 он показан в общепринятой ортогональной триметрии.

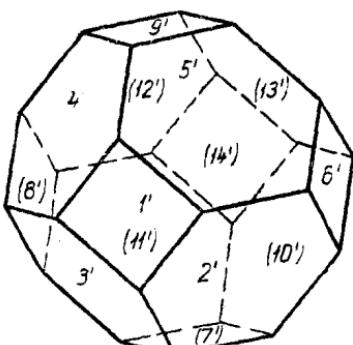


Рис. 1. Ортогональная аксонометрия особого притупленного октаэдра в триметрии. Поворот вокруг оси X на 10° против часовой стрелки, вокруг оси Z на 20° .

Обычная центральная перспектива на плоскость дает различные варианты так называемой линейной проекции многогранников. Наглядность линейной проекции и степень сложности ее математической и графической обработки различны в зависимости от положения картинной плоскости по отношению к проектируемому многограннику.

На рис. 2 показана внутренняя проекция на картинную плоскость, совпадающую с одной из граней многогранника, а на рис. 3 — на картинную плоскость, инцидентную одной из его вершин и перпендикулярную к проектирующему лучу, проходящему через эту вершину.

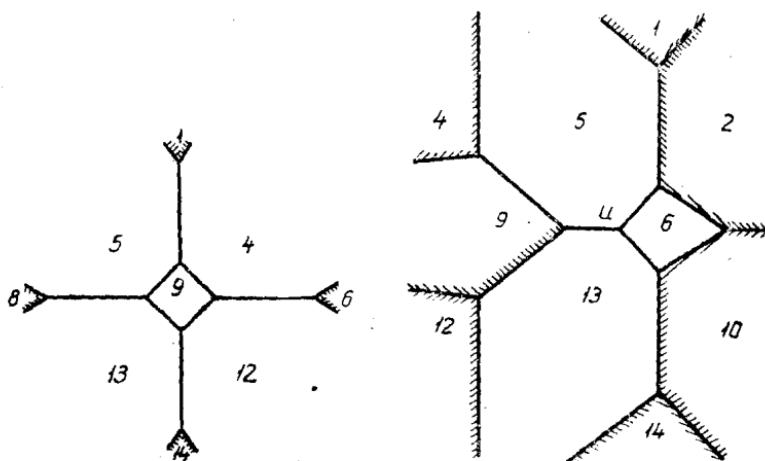


Рис. 2. Внутренняя линейная проекция. Точка зрения в центре многогранника; картинная плоскость — в плоскости грани 9.

Рис. 3. Внутренняя линейная проекция. Точка зрения в центре многогранника; картинная плоскость инцидентна вершине и перпендикулярна проектирующему лучу, проходящему через эту вершину.

Внутренние проекции характеризуются наибольшим искажением. Все они простираются в бесконечность, где бы ни была выбрана картинная плоскость, изменение положения которой ведет лишь к пропорциональному изменению масштаба проекций.

Границные линейные проекции характеризуются меньшим искажением, чем внутренние, и во всех случаях охватывают более половины проектируемого многогранника. Если точка зрения лежит в одной из граней, проекция простирается в бесконечность (рис. 4). Если точка зрения лежит в одной из вершин — проекция многогранника конечна (рис. 5).

Проекция многогранника по рис. 5 хотя и конечна, но несколько более сложна в построении, чем по рис. 4, и главное

в общем случае не дает ни одной проекции грани, равной или подобной соответственной грани оригинала. Этот недостаток

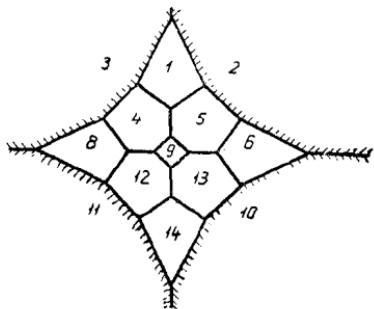


Рис. 4. Граничная линейная проекция. Точка зрения в грани 7; картина плоскость проходит через центр многогранника.

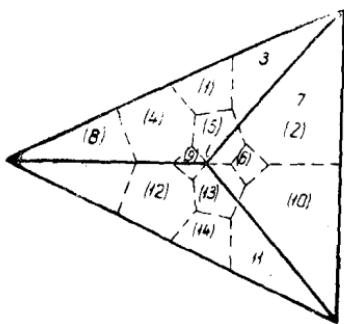


Рис. 5. Граничная линейная проекция. Точка зрения в вершине 1; картина плоскость проходит через центр многогранника перпендикулярно к главному лучу зрения.

устраняется внешней линейной проекцией (рис. 6). Точку зрения выносят на конечное, обычно небольшое, расстояние вне поверхности оригинала. Незначительное изменение положения точки зрения заметно изменяет облик проекции (рис. 7).

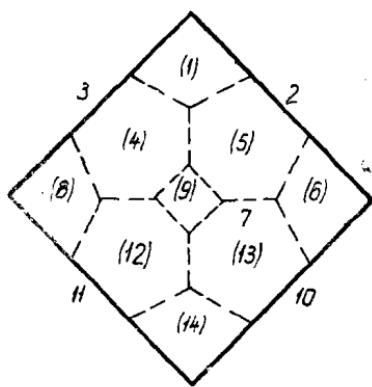


Рис. 6. Внешняя линейная проекция. Точка зрения в вершине образующего октаэдра под гранью 7; картина плоскость — в экваториальной плоскости.

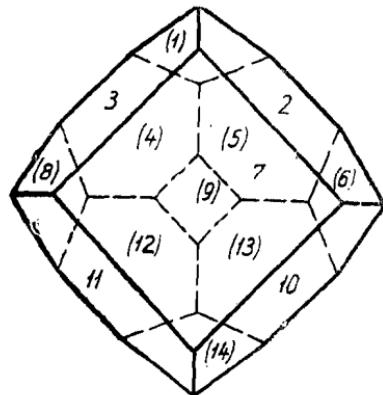


Рис. 7. Внешняя линейная проекция. Точка зрения в двойном расстоянии от грани 7 (по сравнению с рис. 6); картина плоскость — в экваториальной плоскости.

Перечисленные виды линейных проекций не эквивалентны, не конформны и не эквидистанты. Графическое определение частичной метрики таких монопроекций с использованием их азимутальности производят с помощью соответственной проекции географической сетки сферы с радиусом, равным опор-

кому числу проекции. Центр сферы совмещают с точкой зрения.

Для практических целей все эти проекции применяются очень редко, граничные же — почти никогда. Они применяются лишь в том случае, когда ставится требование устранить недостаток проектирования из несобственного центра, т. е. частичное перекрытие друг друга проекциями граней. Для устранения этого недостатка особенно удобна внешняя проекция, например именно ее используют в топологии для построения типовых сеток Штейница.

Как внешние, так и внутренние линейные проекции используются для отображения n -ячеек четырехмерного евклидова пространства в виде тел трехмерного пространства, которые затем могут быть спроектированы на плоскость. Таким образом, они представляют особый интерес для физико-химического анализа многокомпонентных химических систем. Внешние проекции и здесь обеспечивают более четкое отображение, чем внутренние.

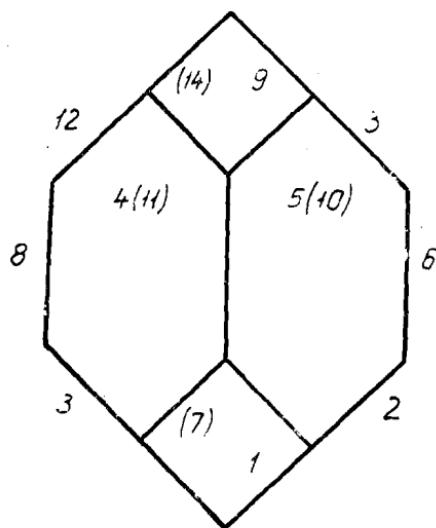


Рис. 8. Косоугольная горизонтальная монопроекция, $\alpha = 45^\circ$.

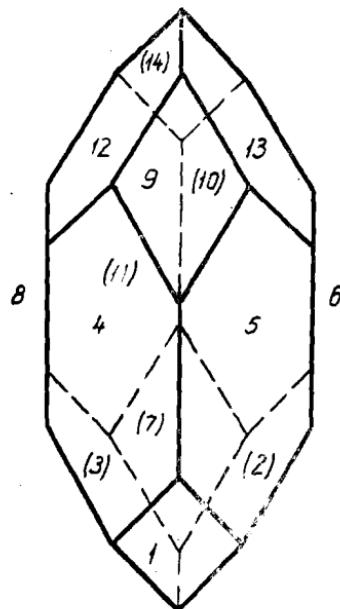


Рис. 9. Косоугольная вертикальная монопроекция, $\alpha = 30^\circ$.

При непосредственном проектировании на плоскость из несобственного центра проекций характеристикой вида проекций является α — угол наклона проектирующего луча к плоскости проекций. Наиболее употребительными косоугольными монопроекциями являются: на горизонтальную пло-

скость — «военная», $\alpha = 45^\circ$, вид сверху (рис. 8), или «лягушечья», $\alpha = 45^\circ$, вид снизу; на вертикальную плоскость — $\alpha = 30^\circ$ (рис. 9), $\alpha = 45^\circ$ (кавальерная) и $\alpha = 60^\circ$ (рис. 10)..

Особое место занимает ортогональная ($\alpha = 90^\circ$) горизонтальная монопроекция (рис. 11), простейшая из всех монопроекций и наиболее практическая, так как дает наибольшие возможности построения с ее помощью второй проекции оригинала.

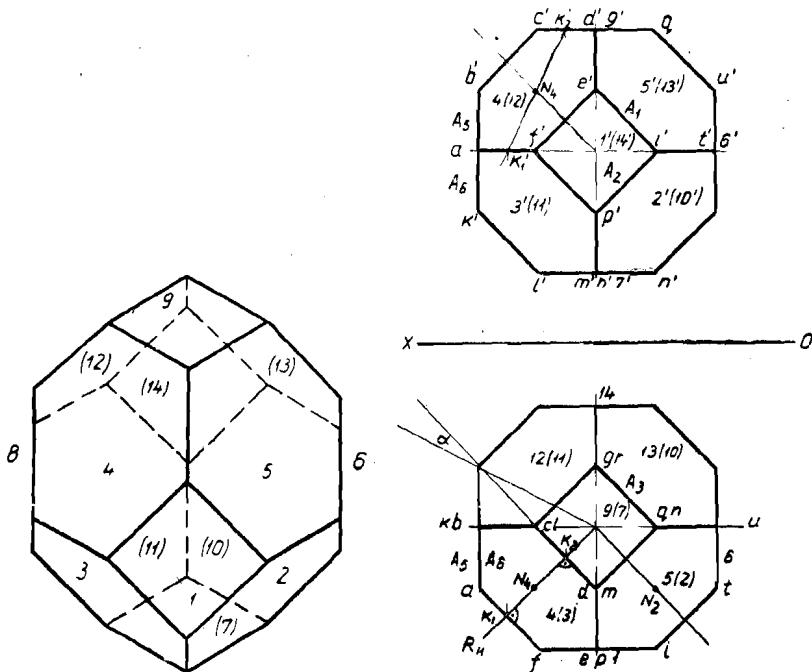


Рис. 10. Косоугольная вертикальная монопроекция, $\alpha = 60^\circ$.

Рис. 11. Ортогональная горизонтальная монопроекция, $\alpha = 90^\circ$.

Приведенные рисунки иллюстрируют как инвариантные свойства, так и совокупности конкурирующих элементов (точек и линий) этих монопроекций. При фиксированных положениях прообраза и плоскости проекций стремятся выбрать угол α , обеспечивающий минимум конкурирующих элементов монопроекции. Там, где отсутствие их является заданным, например при проектировании n -ячеек четырехмерного пространства, параллельное проектирование вовсе неприменимо.

Иногда бывает удобным заменить прообраз каким-либо его условным **символом**, характеризующим те или другие свойства или параметры прообраза, и затем проектировать уже не сам прообраз, а лишь этот его условный символ.

В некоторых дисциплинах преимущественно пользуются лишь такими условными проекциями и условными изображениями многогранников, употребляя в качестве условных сим-

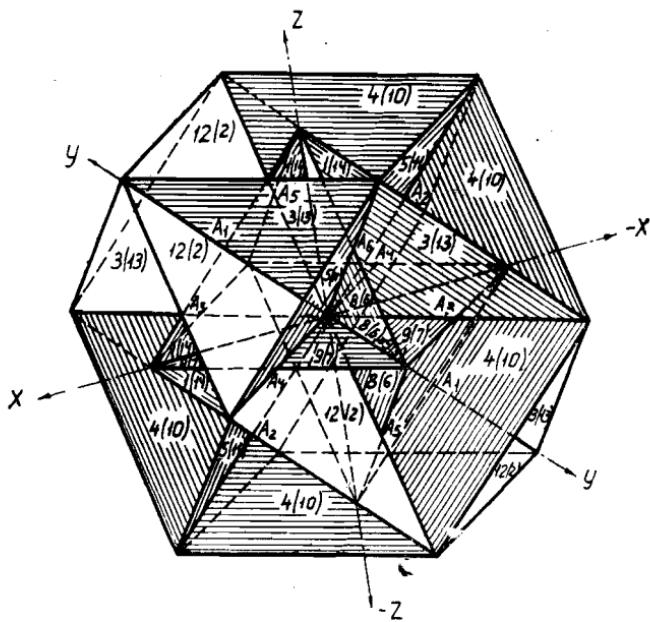


Рис. 12. Комплекс особого притупленного октаэдра.

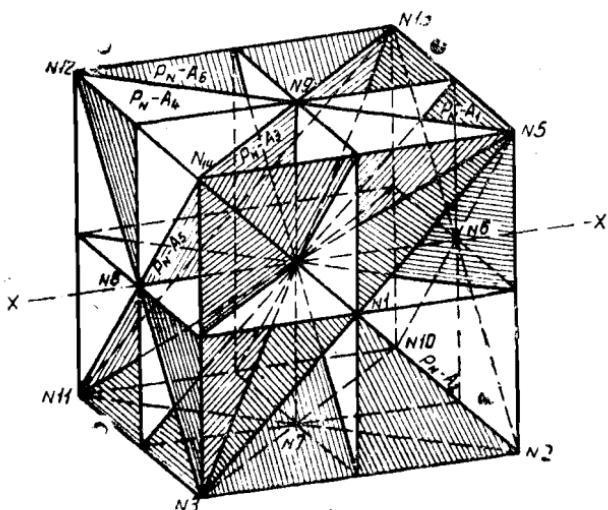


Рис. 13. Полярный комплекс особого притупленного октаэдра.

волов так называемый **комплекс** (рис. 12) и **полярный комплекс** (рис. 13) многогранника.

Комплекс многогранника — это связка прямых и плоскостей, в которой прямые параллельны ребрам, а плоскости параллельны граням многогранника; центр связки выбирается произвольно.

Полярный комплекс — связка, в которой прямые комплекса заменены перпендикулярными к ним плоскостями, а плоскости комплекса — перпендикулярными к ним прямыми; центр этой связки также берется произвольно.

Оба эти комплекса ограничиваются характеристикой лишь **углового** положения элементов многогранника в пространстве.

На рис. 14 показана непосредственная линейная проекция комплекса, а на рис. 15 — гномоническая проекция, т. е. линейная проекция полярного комплекса на картинную плоскость. Точка

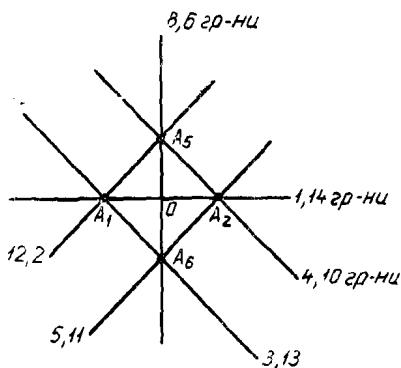


Рис. 14. Линейная проекция комплекса. Точка зрения в центре комплекса.

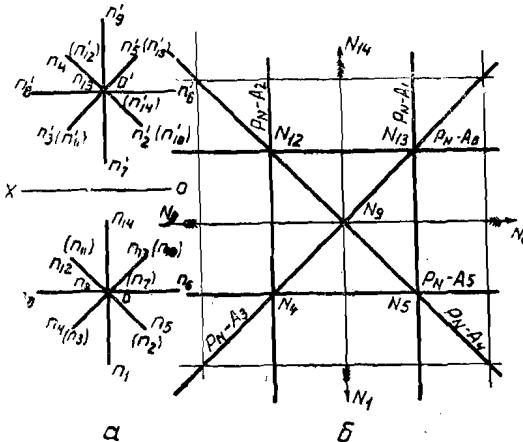


Рис. 15. Изображение нормалей к граням многогранника:
а — ортогональные проекции, б — гномоническая проекция (т. е. линейная проекция полярного комплекса).

а — ортогональные проекции, б — гномоническая проекция (т. е. линейная проекция полярного комплекса).

зрения находится в центре комплексов. Очевидно, что здесь уже нельзя говорить об искажении многогранника в его проекциях в общепринятом смысле этого термина,

так как такая проекция является лишь проекцией некоторой, хотя и закономерной, но все же условной **схемы многогранника**.

Линейная проекция комплекса ныне употребляется редко. Введение в практику полярного комплекса, соответствующего измерению многогранников современными оптическими отражательными гониометрами, обусловило довольно распространенное пользование гномонической проекцией.

Проектирование многогранников на внутреннюю поверхность цилиндра или конуса с последующей их разверткой на плоскость весьма сложно и не находит применения на практике, так как не может дать изображения **всего** многогранника. Оно может быть применено в том случае, когда надо получить эквивалентное или эквидистантное изображение какой-либо грани многогранника, но ту же задачу проще решать в ортогональных проекциях, найдя истинную величину грани.

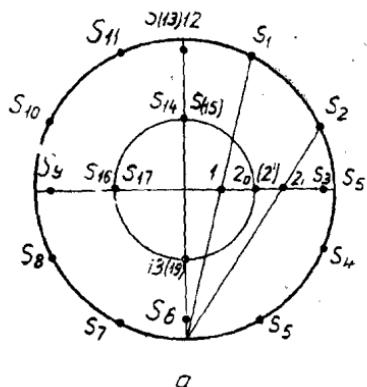
Гораздо более интересным представляется проектирование многогранника на эллипсоид с последующим, вторичным проектированием полученной центральной эллиптической проекции на плоскость. Сложность применения этого приема может быть оправдана решением задач, связанных со свойствами различных специфических эллипсоидов.

Простейшей и практически важной цепью является проектирование замкнутого выпуклого многогранника на внутреннюю поверхность сферы с последующим проектированием полученной на ней проекции на плоскость, так как гомеоморфность такого многогранника сфере дает возможность получить его полное изображение.

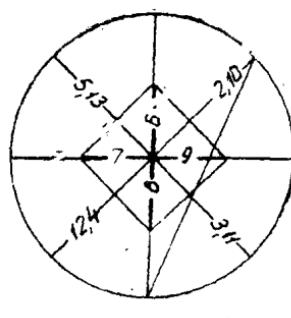
Первичное проектирование многогранника на внутреннюю поверхность сферы ведется центральной линейной проекцией. Естественно, что вторичное центральное проектирование этой **сферической проекции** оригинала или его комплексов на любую плоскость явилось бы их линейной или гномонической (в случае полярного комплекса) проекцией. Новые стереографические изображения получают, применяя проектирование и антипроектирование из обоих полюсов на диаметральную плоскость. Если на плоскость проектируется сферическая проекция самого оригинала, результат называют **граммастереографическим изображением оригинала** (рис. 16). Результат той же операции с комплексом называют **граммастереографическим изображением комплекса** (рис. 17), а с полярным комплексом — **гномостереографическим изображением** (рис. 18). Очень часто эти изображения называют просто **стереографическими проекциями**, что вносит немалую путаницу. Нередко грани дают в гномостереографическом изображении, а линии и характерные плоскости — в граммостереограф-

фическом и наносят на такой чертеж еще граммастереографическое изображение элементов симметрии (рис. 19).

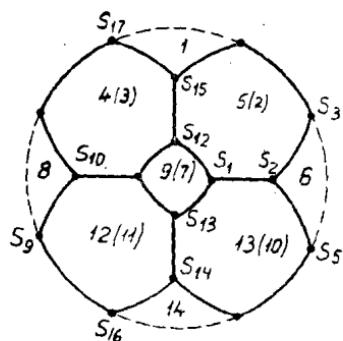
Не следует смешивать граммастереографические изображения многогранника (см. рис. 16) и его комплекса



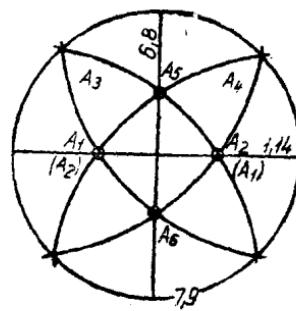
a



b



a



b

Рис. 16. Изображение оригинала:
a — сферическое, *b* — граммастереографическое.

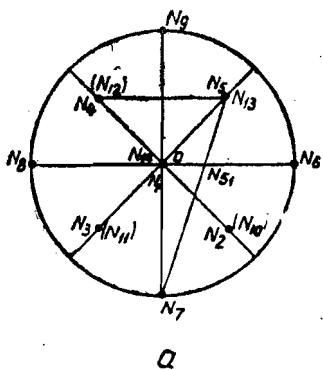
Рис. 17. Изображение комплекса:
a — сферическое, *b* — граммастереографическое.

(см. рис. 17). Первое изображает оригинал с точностью до подобия, причем коэффициенты подобия и гомологии его граней различны. Второе, как и гномостереографическое изображение, является условной схемой оригинала.

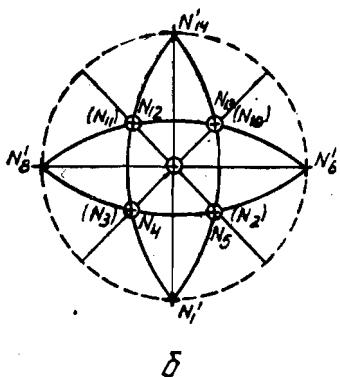
Итак, из всех видов отображения на плоскость наиболее пригодными для изображения многогранников представляются стереографические изображения и ортогональные проекции. Однако как наиболее простой системой координат являются прямоугольные декартовы координаты, так и наиболее простым видом графических отображений многогранников яв-

ляются ортогональные проекции. Они просты, адекватны, достаточно наглядны и не искажают многогранник в угловую схему, как это имеет место в случае пользования стереографическими изображениями.

В современной литературе и практике дисциплин, изучающих макро- и микроструктуру кристаллического строения вещества, доминирует гномостереографическое изображение многогранников, являющееся весьма удобным для получения некоторых, практически важных для этих дисциплин угловых соотношений, главным образом углов между ребрами и гранями. Это объясняется тем, что стереографические изображения **сохраняют окружности** и являются **конформными**. Поэтому углы между дугами стереографиче-



a



b

Рис. 18. Изображение полярного комплекса:
a — сферическое, *b* — гномостереографическое.

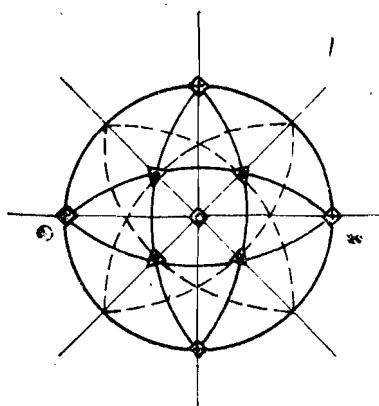


Рис. 19. Гномостереографическое изображение с граммостереографическим нанесением элементов симметрии и характерных плоскостей.

ского изображения, изображающими большие круги сферы, равны истинным углам между плоскостями этих кругов.

В результате гониометрического измерения многогранника получают либо углы между всеми его гранями, либо сферические координаты полюсов всех граней. Построение гномостереографического изображения многогранника состоит лишь в нанесении на бумагу (или готовую сетку) полюсов его граней по их сферическим координатам. Нанесение выполняют

с помощью сетки Вульфа (рис. 20) или, что проще, сеток Болдырева (рис. 21) или Флинта (рис. 22).

Стереографические изображения позволяют просто и быстро с помощью сеток Вульфа или Флинта «вычислить» многогранник, т. е. измерить углы между осями, гранями и

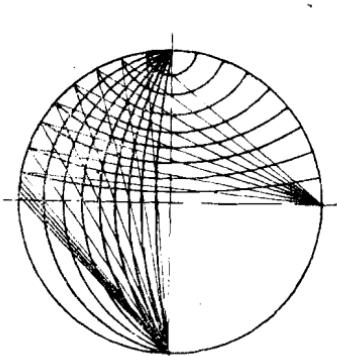


Рис. 20. Сетка Вульфа.

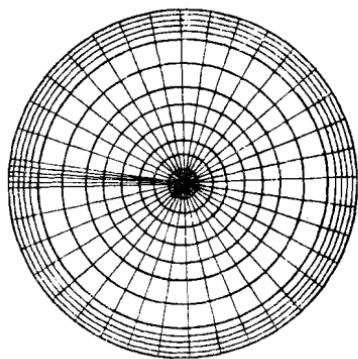


Рис. 21. Сетка Болдырева.

ребрами, а также найти символы граней и установить его сингонию. Вычисление многогранника по формулам сферической тригонометрии дает гораздо более точные результаты, но весьма трудоемко; графический способ вычисления (с помощью готовых сеток) дает хотя и меньшую, но очень часто вполне достаточную точность.

Однако стереографические изображения многогранников имеют и недостатки. Они не позволяют непосредственно графически определить некоторые угловые величины и совсем не определяют линейные параметры многогранников. Недостаточность наглядного представления граней и гоноэдротов вызывает необходимость введения системы специальных искусственных обозначений для характеристики их положения и симметрии изображаемого многогранника. Эта система не является составным органическим элементом самого изображения, а накладывается на уже готовое изображение.

Все это заставляет не ограничиваться такими изображениями, а давать дополнительное отчетливое представление о внешнем виде многогранника так называемым рельефным

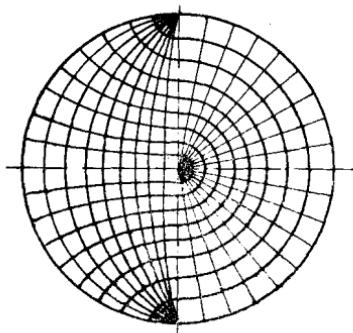


Рис. 22. Сетка Флинта.

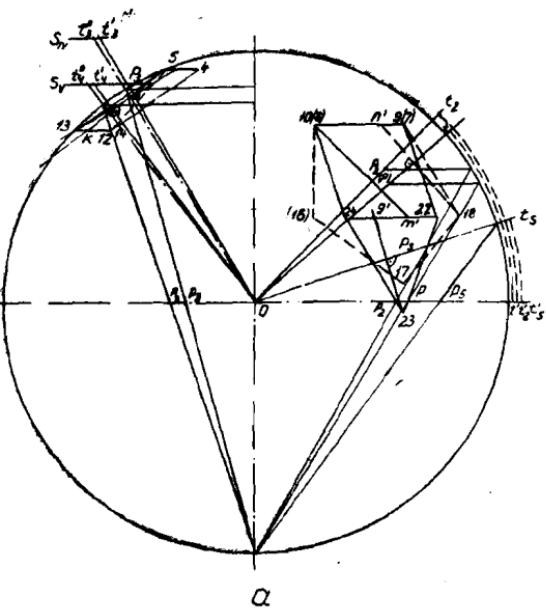
изображением. Для этого, однако, недостаточно гномонического или гномостереографического изображения, необходим еще и эскиз многогранника, т. е. те же ортогональные (реже параллельные) проекции (или хотя бы его рисунки). Операция построения рельефного изображения, несмотря на пользование сетками Вульфа или Флинта, крайне неудобна и громоздка, так как направление ребер приходится брать из имеющегося стереографического изображения, а их взаимное расположение и величину — из эскизов. В более сложных случаях не ограничиваются эскизом, а строят по стереографическому изображению ортогональную монопроекцию (вид сверху) до поворота, которая сразу определяет взаимное расположение ребер многогранника и после поворота.

При построении рельефного изображения можно исходить и из гномонической проекции, также точно передающей угловые соотношения между гранями многогранника. В СССР и США кристаллографы пользуются преимущественно гномостереографическим изображением; в Германской демократической республике предпочитают гномоническую проекцию.

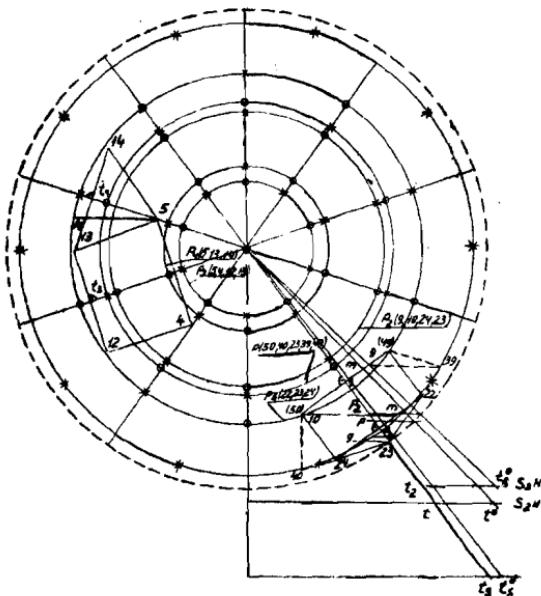
Итак, графическое определение линейных параметров и построение аксонометрии и развертки возможно лишь с помощью промежуточного перехода от стереографических изображений и гномонической проекции к ортогональному виду проекций. Поэтому многие отказываются даже от применения к этим изображениям термина «проекция» и называют их лишь «полюсными фигурами», так как их построение сводится **не к операции проектирования**, а к простому нанесению координат на готовую сетку.

Методы стереографических изображений и гномонической проекции не являются общезвестными, в то время как метод Монжа широко известен. Это мешает использованию достижений в одной области науки работниками других областей. Поэтому представляется целесообразным включение в ряде высших технических учебных заведений в общий курс «Начертательной геометрии» 6—8-часового раздела «Стерографические изображения».

В некоторых дисциплинах нельзя пренебречь линейными размерами и ограничиться лишь угловыми величинами и рельефным изображением многогранников, для них необходима строгая адекватность, которой обладают ортогональные проекции. Этот вид проекций не только допускает наиболее простую математическую обработку, но и позволяет графически, просто и достаточно точно определить истинные величины всех без исключения параметров многогранника. При этом практически важные и в то же время наиболее трудоемкие в вычислении параметры находятся с минимальной затратой времени, причем угловые величины при графическом определении получаются не менее точно, чем при помощи

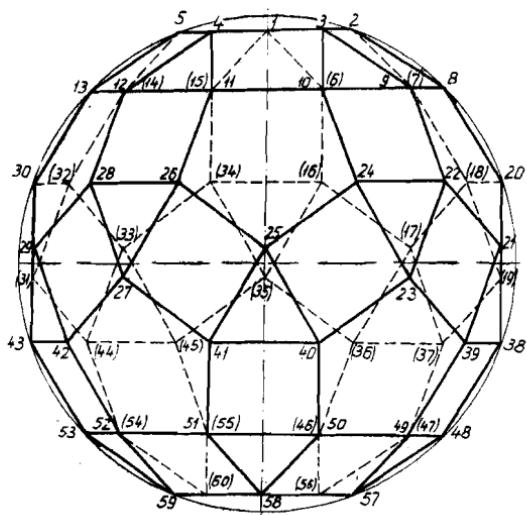


a



b

Рис. 23. Особый тетраональный притупленный додекаэдр-иксаздр:
a — вспомогательные построения, *б* — гномостереографическое изображение.



б

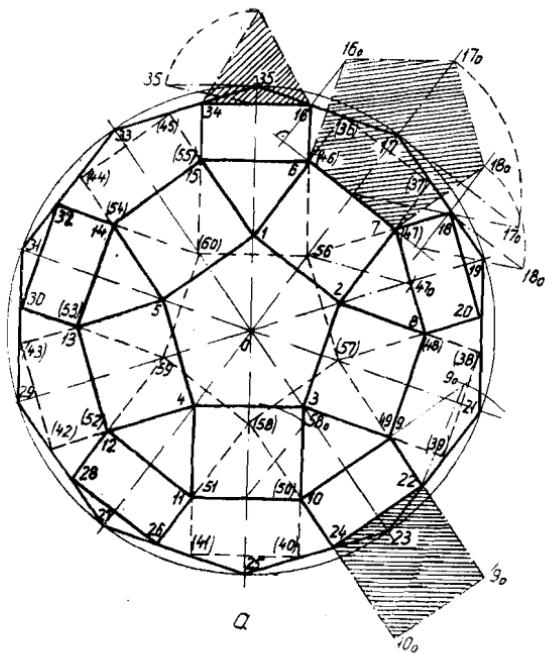


Рис. 24. Ортогональные проекции особого тетра-
гонального притупленного додекаэдра-икосаэдра:
а — горизонтальная, *б* — вертикальная.

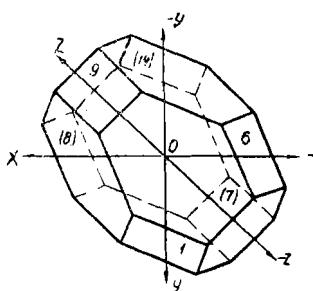


Рис. 25. Косоугольная изометрия оригинала. «Военная» проекция (вид сверху, $\alpha = 45^\circ$).

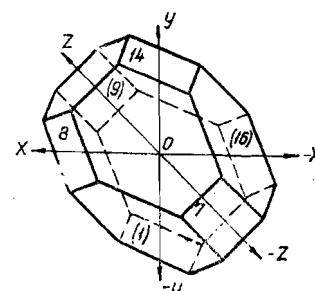


Рис. 26. Косоугольная изометрия оригинала. «Лягушечья» проекция ($\alpha = 45^\circ$).

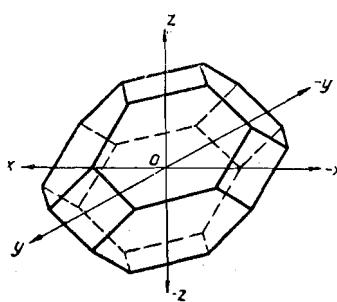


Рис. 27. Косоугольная изометрия оригинала. «Кавалерийская» проекция ($\alpha = 30^\circ$).

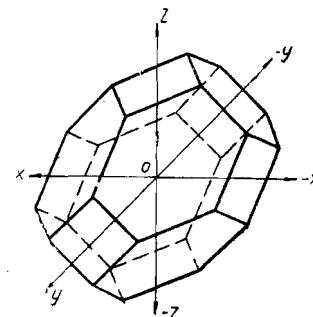


Рис. 28. Косоугольная изометрия оригинала. «Кавалерийская» проекция ($\alpha = 45^\circ$).

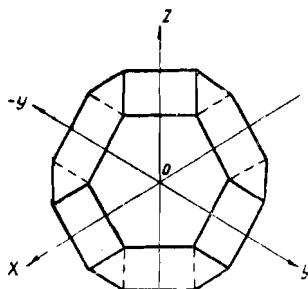


Рис. 29. Ортогональная изометрия оригинала.

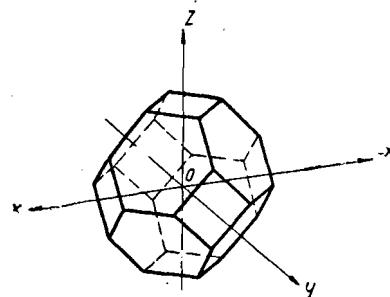


Рис. 30. Ортогональная диметрия оригинала.

стереографических изображений. Степень наглядности изображения в ортогональных проекциях выше, чем в стереографических изображениях, а система симметрии многогранников четко усматривается, не требуя для этого никаких дополнительных обозначений, никаких «легенд» (рис. 23 и 24). Изометрия, как косоугольная (рис. 25—28), так и ортогональная

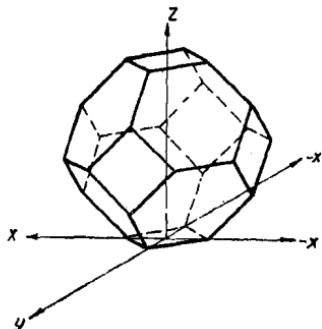


Рис. 31. Косоугольная диметрия оригинала. «Кабинетная» проекция ($\alpha = 30^\circ$).

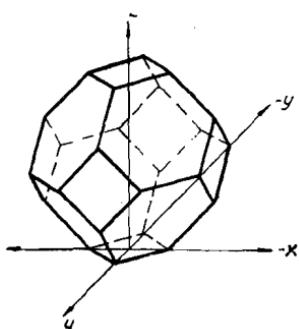


Рис. 32. Косоугольная диметрия оригинала. «Кабинетная» проекция ($\alpha = 45^\circ$).

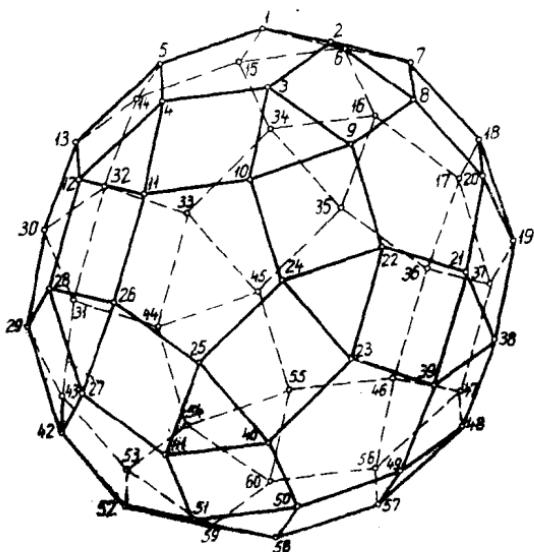


Рис. 33. Косоугольная диметрия особого тетраонального притупленного додекаэдра-икосаэдра. «Кабинетная» проекция ($\alpha = 45^\circ$).

(рис. 29), не дает достаточно наглядного изображения многогранника. Ортогональная (рис. 30) и косоугольная (рис. 31—33) диметрия (кабинетная) по рельефности изобра-

жения не уступают общепринятой ортогональной триметрии, будучи в то же время проще в построении; при этом метрика наиболее проста при угле 45° .

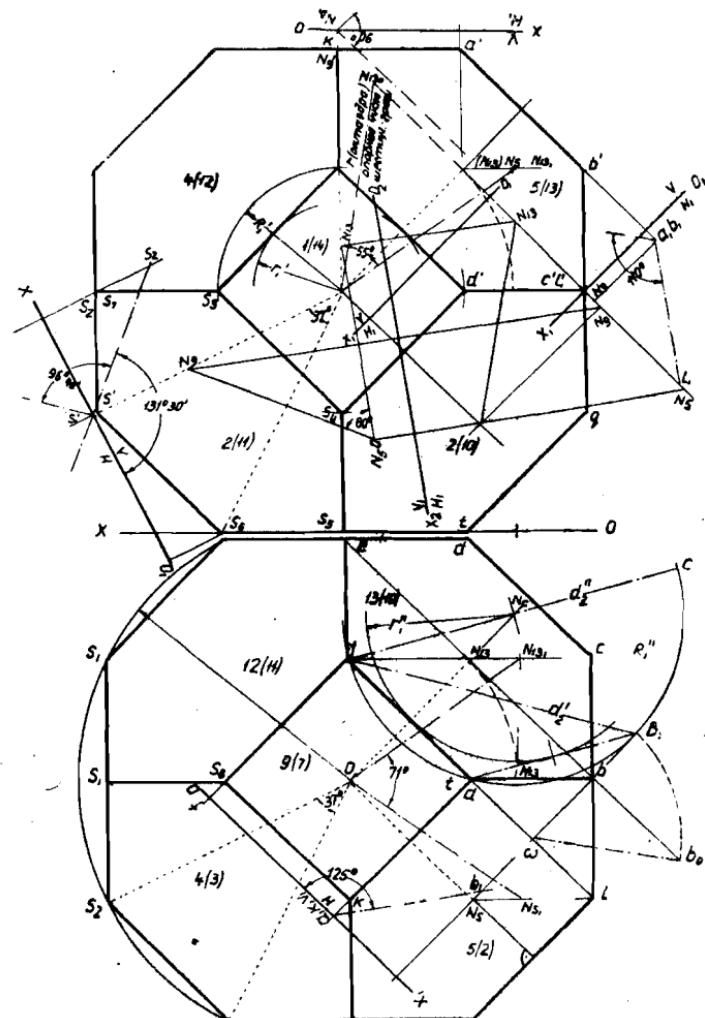


Рис. 34. Графическое определение метрики оригинала (особого притупленного октаэдра).

В настоящее время, когда многогранники приобретают все большее значение во многих областях науки, становится очевидной актуальность разработки единой методики построения ортогональных проекций типовых многогранников для каждой из таких областей науки. Необходимо создать атласы таких проекций, изучить степени точности графических построений для определения параметров по различным видам изображе-

**Сопоставление расчетных и графических данных по метрике
особого притупленного октаэдра**

Наименование величин	Обозна- чение	Значения		Ошибка. %
		расчетное	измеренное	
Плоский угол гоноэдра G (в квадрате)	p_1	90°	90°	—
Плоский угол гоноэдра G (в шестиугольнике)	p_2	120°	120°	—
Двугранный угол между шестиугольными гранями	B'	109° 28' 16"	110°	0,486
Двугранный угол между шестиугольной и квадратной гранями	B''	125° 15' 52"	125°	0,211
Плоский угол центрального дополнительного гоноэдра $G_{од}$	$\begin{cases} p_{од}' \\ p_{од}'' \end{cases}$	$\begin{cases} 70^{\circ} 31' 44'' \\ 54^{\circ} 44' 08'' \end{cases}$	$\begin{cases} 71^{\circ} \\ 55^{\circ} \end{cases}$	$\begin{cases} 0,662 \\ 0,487 \end{cases}$
Двугранный угол центрального дополнительного гоноэдра $G_{од}$	$\begin{cases} B_{од}' \\ B_{од}'' \end{cases}$	$\begin{cases} 90^{\circ} \\ 60^{\circ} \end{cases}$	$\begin{cases} 90^{\circ} \\ 60^{\circ} \end{cases}$	$\begin{cases} — \\ — \end{cases}$
Плоский угол центрального гоноэдра G_0	p_0	36° 52' 12"	37°	0,377
Двугранный угол центрального гоноэдра G_0 (в квадрате)	B_0'	96° 22' 48"	96° 40'	0,295
Двугранный угол центрального гоноэдра G_0 (в шестиугольнике)	B_0''	131° 48' 10"	131° 30'	0,227
Ребро особого притупленного октаэдра	a	100 <i>мм</i>	100 <i>мм</i>	—
Радиус круга, вписанного в квадрат	r'_1	50,0 <i>мм</i>	50,0 <i>мм</i>	—
Радиус круга, вписанного в шестиугольник	r''_1	86,6 <i>мм</i>	86,5 <i>мм</i>	0,115
Радиус круга, описанного около квадрата	R'_1	70,7 <i>мм</i>	71,0 <i>мм</i>	0,426
Радиус круга, описанного около шестиугольника	R''_1	100,0 <i>мм</i>	100,3 <i>мм</i>	0,300
Диагональ квадрата	d_1	141,4 <i>мм</i>	142,5 <i>мм</i>	0,781
Малая диагональ шестиугольника	d'_2	173,2 <i>мм</i>	175,0 <i>мм</i>	1,033
Большая диагональ шестиугольника	d''_2	200,0 <i>мм</i>	200,0 <i>мм</i>	0,000
Радиус вписанного шара	r	122,5 <i>мм</i>	124,0 <i>мм</i>	1,226
Радиус описанного шара	R	158,1 <i>мм</i>	160,0 <i>мм</i>	1,201
Малая плоская диагональ особого притупленного октаэдра	D_1	223,6 <i>мм</i>	225,5 <i>мм</i>	0,847
Большая плоская диагональ особого притупленного октаэдра	D_2	282,8 <i>мм</i>	284,0 <i>мм</i>	0,422

ний путем сравнения их с расчетными параметрами многогранников и т. д. Естественно, такие атласы должны включать также развертки, аксонометрию типовых многогранников и таблицы их параметров, полученных графическим или расчетным путем. Эти атласы, несомненно, могли бы представлять интерес при создании различных нестандартных строительных сооружений, например атомиума, «крытого моря», вымпела космической ракеты СССР и др.

Автором данной статьи ведется работа по созданию атласа для правильных и полуправильных многогранников и подготовлен материал для систематизации других типов характерных многогранников (кристаллографические простые формы, различные симметричные ряды, характерные изогоны и изоэдры и т. п.). Предварительные результаты позволяют судить о полигенности взятых многогранников и выявить условия построения их горизонтальных монопроекций, допускающих непосредственное построение по ним вертикальных проекций этих многогранников. Сопоставление результатов пользования стереографическими изображениями и ортогональными проекциями говорит в пользу последних, когда требуется не только угловая, но и линейная метрики.

Сопоставление расчетных и графически найденных параметров указывает на достаточную точность пользования графическими приемами (рис. 34 и таблица) для особого притупленного октаэдра. Точность угловых измерений не ниже точности измерений по сетке Вульфа, где цена деления 2° . Максимальная угловая ошибка $\sim 32'$, которая могла быть уменьшена еще за счет большей тщательности построений. Максимальная относительная угловая ошибка $\sim 0,662\%$. Средняя арифметическая угловой относительной ошибки $0,25\%$. Максимальная абсолютная линейная ошибка 2 мм , а относительная — $1,226\%$, которая также могла быть снижена. Средняя арифметическая линейной относительной ошибки равна $0,612\%$, т. е. сравнительно легко может быть доведена до $0,5\%$.