

5
НБ МИФИ

53
С24

Ордена Трудового Красного Знамени
Инженерно-Физический Институт

В. В. Светозаров

**ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ
РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ**

МОСКВА 1980

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

В. В. Светозаров

ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ
РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Утверждено
редсоветом института
в качестве учебного пособия.

Москва 1980

Светозаров В.В. Основы обработки результатов измерений. Учебное пособие. — М.: Изд. МИФИ, 1980, 68 с.

Пособие является элементарным введением в проблемы анализа результатов эксперимента.

Приведены как простейшие способы определения погрешностей измерений, так и основы современных методов статистической обработки и графического анализа данных. Даются указания по анализу погрешностей и оформлению результатов работы. Изложение дополнено примерами и задачами.

Пособие предназначено для ознакомления студентов младших курсов вузов с методами обработки результатов измерений в объеме, достаточном для работы в лабораториях общефизического практикума, однако изложенный в нем материал полезен любому начинающему экспериментатору.

© Московский инженерно-физический институт, 1980 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Пособие может рассматриваться как вводная часть руководства к лабораторным работам по общей физике. Современные методы обработки экспериментальных данных базируются на широком использовании математической статистики, с которой первокурсник, пришедший в лабораторию, незнаком. В связи с этим отчетливо прослеживаются две тенденции в подходе к обработке данных в практикумах младших курсов. Первая — предельно упростить вычисление погрешностей, например, складывать погрешности по модулю, приводить запись $x = \bar{x} \pm \Delta x$ без расшифровки смысла величины Δx и т.д. В результате студент вовсе не получает правильного представления о современных методах обработки результатов.

Другая, не менее вредная тенденция, на наш взгляд, — с самого начала требовать использования студентом современных методов статистической обработки результатов (например, распределения Стьюдента, метода наименьших квадратов и т.д.). В настоящее время добиться этого нетрудно. Студент получает набор готовых формул (иногда довольно громоздких), подставляет в них свои данные и получает "строгий" результат. Вычислительные трудности сейчас легко преодолеваются в связи с широкой доступностью ЭВМ (микрокалькуляторы, студенческие вычислительные залы, дисплейные классы).

В чем же опасность такого подхода? Во-первых, получаемая "строгость" результата мнимая. Сложный математический аппарат, нацеленный, как правило, на получение точного соответствия между доверительным интервалом и доверительной вероятностью, эффективен лишь при весьма большом числе измерений. При типичном для учебного практикума числе измерений $n \lesssim 5$, когда погрешность в определении доверительного интервала сравнима с самим доверительным интервалом, ни о какой строгости речи быть не может. В то же время, начинающий экспериментатор, не знакомый с исходными предпосылками теории, склонен считать математическую сложность формул гарантией их строгости и безусловной применимости.

Во вторых, не так важно точно определить погрешность, как найти источник, дающий максимальный вклад в погрешность

окончательного результата, а для этого обычно достаточно грубой оценки погрешностей, даваемых различными источниками.

С учетом сказанного, в физпрактикуме МИФИ, на программе которого основан отбор и характер изложения материала данного пособия, методы обработки результатов опыта изучаются в два этапа. На первом этапе (в течение года) студенты должны осознать необходимость определения погрешностей результата, смысл понятий доверительный интервал, доверительная вероятность и научиться быстро оценивать их. В качестве простейшей оценки доверительного интервала мы, следуя Корнфельду [4], рекомендуем использовать размах значений экспериментальных данных. При всей своей простоте, этот метод дает соотношение между доверительным интервалом и доверительной вероятностью не менее строгое, чем любые другие методы. При вычислении погрешностей косвенных измерений особо обращается внимание студента на следующее: а) складываются не модули, а квадраты погрешностей, обусловленные различными независимыми источниками; б) погрешности, даваемые различными источниками, необходимо вычислять отдельно и обязательно выделять максимальный вклад в погрешность окончательного результата.

Однако вычисление погрешностей — не единственный и не главный из навыков в обработке результатов, получаемых на первом этапе работы в лаборатории. Необходимо научиться рационально оформлять лабораторный журнал, раз и навсегда привыкнуть записывать данные измерений в заранее подготовленные таблицы, грамотно строить графики, писать отчет о работе.

На втором этапе студенты знакомятся с основами статистической обработки данных и переходят к вычислению погрешностей современными методами. К этому времени студенты уже знакомы с основами математической статистики (хотя бы в рамках курса молекулярной физики) и легче воспринимают смысл формул теории погрешностей. Кроме того, уже на первом курсе студенты обучены работе с вычислительной техникой (в условиях МИФИ — в студенческом вычислительном зале и в дисплейных классах), в результате вычислительные процедуры оказываются достаточно компактными и не заслоняют физической сущности проделанных опытов.

В качестве основной меры погрешности на этом этапе используется среднеквадратичная ошибка. Доверительные интервалы вычисляются с помощью распределения Гаусса или Пуассона, а при необходимости — с использованием коэффициентов Стьюдента.

На этом этапе студенты должны усвоить соотношение между числом измерений и погрешностью среднего значения результата, научиться вычислять доверительные интервалы для любой доверительной вероятности при произвольном числе измерений, самостоятельно выбирать оптимальное число измерений с учетом соотношения между статистическими и приборными погрешностями, свободно и обоснованно пользоваться нелинейными (в первую очередь — логарифмическими) шкалами при построении графиков, изучить простейшие применения метода наименьших квадратов (вычисление среднего и построение наилучшей прямой).

Значительная часть работ общефизического практикума МИФИ обрабатывается на ЭВМ. В дисплейном классе студент вызывает программу обработки данной лабораторной работы, вводит результаты измерений в представленные на экране дисплея таблицы и через некоторое время получает результаты эксперимента с указанием погрешностей. Затраты времени на вычислительную работу сокращаются, и кроме того студенты закрепляют навыки работы с современной вычислительной техникой. Однако возникает опасность того, что студент, не работая непосредственно с собственными экспериментальными результатами, упустит из виду ряд физических тонкостей эксперимента и прежде всего его узкие места, т.е. источники максимальных ошибок. Поэтому, прежде, чем приступить к машинной обработке данных, следует провести хотя бы грубые оценки результатов и погрешностей. Такие оценки полезно делать не только по окончании, но и в ходе работы. При защите работы студент должен отчетливо сознавать основные алгоритмы, по которым проводилась машинная обработка данных.

В связи с поэтапным изучением методов обработки результатов измерений, первокурсники при первом чтении пособия могут опустить пп. 3, 5, 8 и разделы пп. 4, 6, относящиеся к статистической обработке данных, с тем, чтобы изучить их в начале второго курса.

Начинающему экспериментатору полезно ознакомиться с литературой [1 - 5], в первую очередь — с замечательной книгой Дж. Сквайрса [1]. Подготовленному читателю, желающему получить более глубокие сведения о современных методах обработки результатов и планирования эксперимента, рекомендуем [6 - 10].

Автор благодарен рецензентам — доценту С. Н. Соколову (МАИ) и старшему преподавателю Г. И. Пантюхову (МИФИ), а также профессору И. В. Савельеву, профессору И. Е. Иродову,

доценту Э. А. Нерсесову и другим преподавателям кафедры общей физики МИФИ за ряд полезных замечаний и советов.

1. ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРЕНИЙ

Основная задача физического эксперимента — измерение физических величин. Измерением называется операция, с помощью которой устанавливается во сколько раз измеряемая величина больше или меньше соответственной величины, принятой за единицу. Измерения бывают прямые и косвенные. В прямых измерениях физическая величина измеряется непосредственно: таковы, например, измерения времени секундомером, напряжения — вольтметром. При косвенных измерениях искомая величина не измеряется, а вычисляется по результатам измерений других величин, связанных с искомой определенной математической зависимостью. Например, тепловую мощность, выделяющуюся в электроплитке, можно найти, умножив силу тока в плитке на напряжение на зажимах. Сила тока и напряжение измеряются непосредственно.

Всякое измерение дает лишь приближенный результат. Проведя эксперимент и измерив некоторую физическую величину, мы не можем утверждать, что получили ее истинное значение. Поэтому необходимо указать, насколько полученный результат может быть близким к истинному значению, иными словами, указать, какова точность измерения. Для этого вместе с полученным результатом указывают приближенную погрешность измерений. Например, запись

$$X = 25 \pm 2$$

означает, что истинное значение величины X лежит скорее всего в пределах от 23 до 27.

Оценивать и указывать точность полученного результата очень важно, без этого ценность результата часто оказывается равной нулю.

Пусть нас интересует зависимость сопротивления проводника от температуры. Проведя измерения, мы получили

$$\begin{aligned} R_1 &= 100 \text{ Ом} & \text{при} & \quad t_1 = 10^\circ\text{C}; \\ R_2 &= 101 \text{ Ом} & \text{при} & \quad t_2 = 20^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Спрашивается — зависит ли сопротивление проводника от температуры? Стоит ли придавать значение различию сопротивлений в 1 Ом?

На этот вопрос нельзя ответить, не зная погрешности измерения. Если погрешность составляет 0,1 Ом, то различие существенно и можно утверждать, что сопротивление растёт с повышением температуры. Если же погрешность составляет 2 Ом, то из приведенных результатов нельзя сделать никаких выводов относительно искомой зависимости, а различие результатов может быть обусловлено случайными причинами, например, погрешностями измерительных приборов.

Как мы убедились, не зная погрешностей измерений нельзя не только оценить точность результатов, но часто даже нельзя сказать, наблюдали мы ожидаемое явление или нет.

Оценка погрешности может влиять на методику самого эксперимента. В реальном эксперименте на погрешность конечного результата влияет множество факторов, и важно оценить какой из них дает наибольший вклад в погрешность результата. Только тогда мы сможем принять меры для уменьшения этой погрешности.

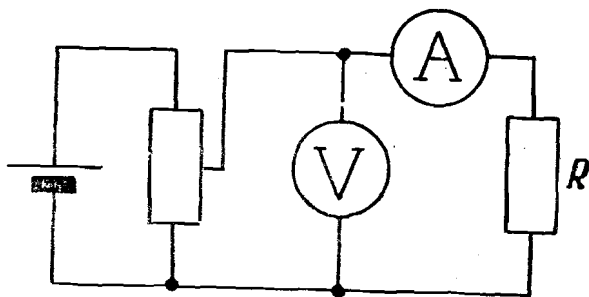


Рис. 1. Схема измерения сопротивления

Предположим, в приведенном выше примере для определения сопротивления была собрана схема, изображенная на рис. 1, в которой использовался вольтметр с точностью показания 2,5% и амперметр с точностью 0,1%. (Подумайте, можно ли при этом утверждать, что мы обнаружили зависимость сопротивления от температуры? Является ли измерение сопротивления прямым или косвенным?). Погрешность результата будет обусловлена, в основном, погрешностями вольтметра и для повышения точности измерения нужно заменить именно этот прибор, повышать же точность измерения силы тока не имеет смысла.

С другой стороны, если точность в 2,5% является достаточной, опытный экспериментатор вряд ли станет применять амперметр с точностью 0,1%; он использует менее точный прибор, который стоит в несколько раз дешевле.

Точность, которой следует добиваться в эксперименте, зависит от его цели, и вовсе не нужно проводить каждый эксперимент как можно более точно. Но во многих экспериментах, в частности, при измерениях фундаментальных величин (скорость света, заряд и масса электрона и др.) нам просто не известно, какая точность окажется достаточной. Тогда мы стараемся добиться максимальной точности. Точные измерения позволяют проверить наши теоретические представления, и, когда возникают расхождения, это приводит к новым теориям и открытиям.

Ошибки можно разделить на два типа — систематические и случайные.

Систематические обычно остаются постоянными на протяжении всей серии измерений, случайные же хаотически изменяются и в равной мере могут быть как положительными, так и отрицательными.

Случайные ошибки всегда присутствуют в эксперименте. При многократном повторении измерений они служат причиной разброса результатов отдельных измерений, благодаря чему их можно обнаружить путем повторных измерений. Имеются надежные способы уменьшения этих ошибок. Увеличивая число измерений и находя среднее арифметическое результатов, мы будем получать величину, которая будет все ближе и ближе к истинному значению.

Разновидность случайных ошибок — это грубые ошибки или промахи — обычно неправильные отсчеты по прибору, неправильная запись отсчета и т.п. В большинстве случаев промахи хорошо заметны, так как соответствующие им отсчеты резко отличаются от других. При обработке результатов измерений такие отсчеты следует отбрасывать. В сомнительных случаях вопрос о том, является ли данный результат промахом, решают с помощью специальной математической процедуры.

Подчеркнем — промах можно заметить только если проделано несколько измерений одной и той же величины. Поэтому, какую-бы величину вы ни измеряли, никогда не ограничивайтесь одним измерением, обязательно повторите его несколько раз.

Для предотвращения промаха необходимо работать четко и внимательно, аккуратно записывать отсчеты. Вероятность появления

ния промаха значительно снижается при записи отсчетов в заранее подготовленные таблицы.

Еще один способ избежать промахов — записывать в лабораторный журнал непосредственные отсчеты по шкале прибора без какого-либо пересчета.

Если, например, на шкале вольтметра, рассчитанного на 300 вольт, имеется 75 делений и стрелка остановилась на 56-м делении, нужно сначала записать показания в делениях шкалы, и лишь затем пересчитывать их в вольты. Если же цена деления шкалы равна единице измеряемой величины, то никакого пересчета не требуется и отсчет записывают сразу в единицах измеряемой величины.

Систематические ошибки возникают вследствие погрешностей измерительной аппаратуры (спешит или отстаёт секундомер, неверная линейка), а также из-за того, что условия эксперимента отличаются от предполагаемых теорией, а поправка на это несоответствие не делают (например, не учитывается сопротивление амперметра в схеме на рис. 1). Систематические ошибки опаснее случайных, поскольку их труднее обнаружить. Общих рецептов на этот счет не существует, нужно в каждом конкретном случае тщательно продумывать методику эксперимента и придирчиво выбирать аппаратуру.

2. ДОВЕРИТЕЛЬНЫЙ ИНТЕРВАЛ И ДОВЕРИТЕЛЬНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ

Предположим, мы провели серию измерений некоторой физической величины X . Результат отдельного измерения обозначим x_i , общее число измерений n . Если систематическая ошибка отсутствует, разумно предположить, что значения x_i расположатся вблизи неизвестного нам истинного значения X измеряемой величины, причем, отклонения в сторону больших и меньших значений будут равновероятными. Опыт показывает, что в подавляющем большинстве случаев такое предположение справедливо. Тогда в качестве наилучшего приближения к истинному значению следует взять среднее арифметическое \bar{x} отдельных измерений:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i. \quad (1)$$

Для упрощения вычислений в качестве приближенного значения измеряемой величины можно взять среднее между максимальным и минимальным значениями, полученными при измерениях:

$$\bar{x} \approx \frac{x_{\text{макс}} + x_{\text{мин}}}{2}. \quad (2)$$

Точность соответствия среднего значения истинному зависит от ряда факторов, в первую очередь от точности каждого отдельного измерения и от числа этих измерений. Рассмотрим, результаты двух серий измерений, которые приведены на рис. 2.

Разброс значений x_i на рис. 2,а значительно меньше, чем на рис. 2,б, поэтому мы не удивимся, если среднее значение измерений первой серии почти совпадает с истинным значением, а во второй серии будет заметно от него отличаться.

Выполнив измерения, нужно указать результат эксперимента так, чтобы им могли пользоваться другие. Необходимо не только привести полученный результат, но и дать информацию о его точности. Принято указывать интервал значений измеряемой величины $\bar{x} \pm \Delta x$, в пределах которого с определенной вероятностью может оказаться истинное значение измеряемой величины. Величина Δx называется погрешностью или ошибкой результата, интервал от $\bar{x} - \Delta x$ до $\bar{x} + \Delta x$ — доверительным интервалом.

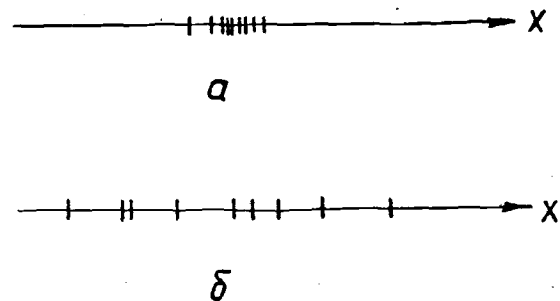


Рис. 2. Распределение результатов измерений

Доверительный интервал не является исчерпывающей характеристикой точности результата. Для того, чтобы приведенный доверительный интервал имел конкретный смысл, нужна количественная характеристика его достоверности, показывающая, насколько можно быть уверенным в том, что истинное:

значение измеряемой величины окажется в пределах доверительного интервала. Такая характеристика — вероятность того, что среднее значение \bar{x} отличается от истинного не более, чем на Δx — называется доверительной вероятностью. Она равна доле результатов однотипных серий измерений, попадающих в пределы доверительного интервала, т.е. отличающихся от истинного значения не более, чем на Δx . Обозначим ее α . Поясним смысл этой величины примером.

Пусть результат серии измерений записан в виде $X = 25 \pm 2$ и сказано, что приведенный доверительный интервал (от 23 до 27) соответствует доверительной вероятности $\alpha = 0,95$. Что это означает?

Повторим серию измерений большое число раз, например, сделаем $N = 1000$ однотипных серий измерений. Результаты серий будут отличаться друг от друга, причем примерно в $\alpha N = 950$ сериях результаты будут отличаться от истинного значения измеряемой величины не более, чем на $\Delta x = 2$, а результаты остальных серий выйдут за пределы доверительного интервала.

Известно несколько способов определения доверительного интервала по результатам серии измерений. Один из простейших — метод Корнфельда — заключается в выборе доверительного интервала в пределах от минимального до максимального результата измерений:

$$\bar{x} - \Delta x = x_{\text{мин}}; \quad \bar{x} + \Delta x = x_{\text{макс}}.$$

Для \bar{x} отсюда получаем формулу (2), а для Δx выражение

$$\Delta x = \frac{x_{\text{макс}} - x_{\text{мин}}}{2}. \quad (3)$$

Как доказывается в теории, такому доверительному интервалу соответствует доверительная вероятность:

$$\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad (4)$$

где n — число измерений в данной серии.

Неудобство метода в том, что при заданном числе измерений мы не можем произвольно выбрать доверительную вероятность. Скажем, при $n = 5$ нам не удастся найти доверительный интервал, соответствующий $\alpha = 0,99$. В следующих параграфах рассмотрены методы, свободные от этого недостатка, но требующие более сложных вычислений.

После вычисления погрешности Δx следует найти относительную погрешность:

$$E = \frac{\Delta x}{\bar{x}}, \quad (5)$$

которая может быть выражена в процентах:

$$E = \frac{\Delta x}{\bar{x}} \cdot 100\%.$$

Окончательный результат приводится с указанием абсолютной и относительной погрешностей и доверительной вероятности.

Величины Δx , полученные в разных однотипных сериях измерений, несколько отличаются друг от друга. Разброс их тем больше, чем меньше измерений в серии. Определяя доверительный интервал по одной серии измерений, мы допускаем некоторую неточность. Другими словами, погрешность нашего результата сама вычисляется с некоторой погрешностью.

Зависимость относительной погрешности в величине погрешности от числа измерений в серии представлена на графике (рис. 3), который показывает, что нет смысла проводить вычисление погрешностей с большой точностью. Промежуточные вычисления погрешностей проводят не более, чем с двумя значащими цифрами. При записи результата достаточно ограничиться одной цифрой в погрешности, но если это цифра 1 или 2, можно оставить две цифры.

Пример 1. В результате $n = 5$ измерений получено $x_{\text{мин}} = 30,5$; $x_{\text{макс}} = 36,8$. Требуется указать результат измерений по методу Корнфельда. Вычисляем:

$$\bar{x} = \frac{x_{\text{мин}} + x_{\text{макс}}}{2} = 33,65;$$

$$\Delta x = \frac{x_{\text{макс}} - x_{\text{мин}}}{2} = 3,2;$$

$$\alpha = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 = 0,94.$$

Теперь, казалось бы, можно записать результат в виде

$$X = 33,65 \pm 3,2.$$

Однако такая запись неверна. Точность соответствия истинного значения X и экспериментального \bar{x} определяется величиной погрешности Δx . В приведенном примере X может отличаться от указанного на несколько единиц, поэтому бессмы-

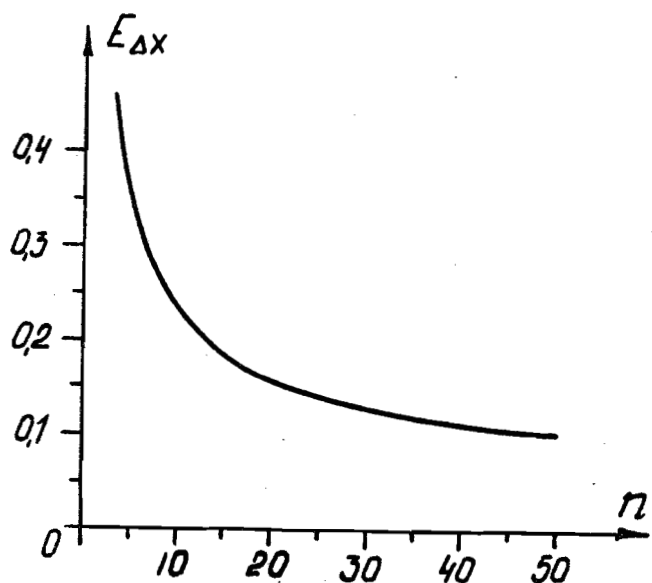


Рис. 3. Погрешность в величине погрешности

сленно приводить в результате десятые и сотые доли. Для правильной записи результата следует вначале округлить погрешность до одной значащей цифры, а затем округлить результат \bar{x} так, чтобы его последняя значащая цифра соответствовала значащей цифре ошибки. Тогда получим:

$$X = 34 \pm 3; \quad E = 0,1; \quad \alpha = 0,94.$$

3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

В этом разделе мы приведем некоторые результаты математической статистики, на которых основаны современные методы обработки результатов эксперимента. Большинство формул дается без выводов.

3.1. Параметры статистических распределений

Величина x , представляющая собой результат опыта, является как правило случайной величиной, т.е. заранее непредсказуема и меняется от опыта к опыту. Случайная величина может быть дискретной, т.е. принимать определенных, конечный или бесконечный набор фиксированных значений, или непрерывной, т.е. принимать произвольные значения. Например, результат бросания игральной кости – дискретная случайная величина, а результат измерения диаметра провода – непрерывная.

Проведя опыт бесконечно большое число раз мы получим генеральную совокупность – полный набор всех значений, которые может принимать случайная величина. В реальных условиях опыт проводится конечное число раз и мы получаем выборку, состоящую из конечного числа значений случайной величины. Это число называется объемом выборки. Генеральная совокупность – предельный случай выборки с бесконечно большим объемом.

Между параметрами выборки и параметрами генеральной совокупности имеется принципиальное различие. Если взять несколько выборок одного и того же объема n , т.е. произвести несколько серий опытов или измерений по n опытов в каждой серии, то в силу случайного характера измеряемых величин, параметры выборок будут отличаться друг от друга. Другими словами, параметры серий измерений (например, средние значения результатов измерений в серии) являются случайными величинами даже при неизменных условиях опыта. Параметры же генеральной совокупности при заданных условиях опыта неизменны.

Рассмотрим сначала параметры генеральной совокупности, которые математически описываются проще, чем параметры выборки.

Важнейшими параметрами генеральной совокупности являются среднее значение (или математическое ожидание) $\langle x \rangle$ и среднеквадратичное (стандартное) отклонение σ , характеризующее разброс случайных величин. Величину σ называют также среднеквадратичной ошибкой или стандартом данного распределения. Часто вместо σ более удобно использовать дисперсию

$$D = \sigma^2,$$

представляющую собой средний квадрат отклонения случайной величины от среднего значения.

Среднее значение, соответствующее бесконечному числу измерений, будем обозначать $\langle x \rangle$, чтобы отличить его от \bar{x} , соответствующего серии из n измерений. В отсутствие систематических ошибок $\langle x \rangle$ совпадает с истинным значением измеряемой величины. Параметры, характеризующие разброс измерений, будем снабжать индексом, указывающим случайную величину, к которой эти параметры относятся.

Определения введенных величин:

$$\langle x \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad (6)$$

$$D_x = \sigma_x^2 = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2. \quad (7)$$

Если измеряется несколько величин, среднее значение их суммы равно сумме средних значений, например

$$\langle x + y \rangle = \langle x \rangle + \langle y \rangle. \quad (8)$$

Докажите это утверждение, используя определение среднего.

Если величины x и y независимы, т.е. значение одной из них никак не сказывается на возможных значениях другой, то, как доказывается в теории вероятностей, среднее значение произведения случайных величин равно произведению их средних значений:

$$\langle xy \rangle = \langle x \rangle \langle y \rangle. \quad (9)$$

Используя это соотношение, докажем замечательное свойство дисперсий независимых случайных величин. Пусть x и y такие величины. Обозначим

$$\xi_x = x - \langle x \rangle; \quad \xi_y = y - \langle y \rangle.$$

Очевидно,

$$\langle \xi_x^2 \rangle = \sigma_x^2; \quad \langle \xi_y^2 \rangle = \sigma_y^2.$$

Вычислим дисперсию суммы $x + y$:

$$\sigma_{x+y}^2 = \langle (x+y - \langle x+y \rangle)^2 \rangle = \langle (\xi_x + \xi_y)^2 \rangle = \langle \xi_x^2 \rangle + \langle \xi_y^2 \rangle + 2 \langle \xi_x \xi_y \rangle.$$

Поскольку ξ_x и ξ_y независимы, причем $\langle \xi_x \rangle = \langle \xi_y \rangle = 0$, получаем $\langle \xi_x \xi_y \rangle = \langle \xi_x \rangle \langle \xi_y \rangle = 0$.

В результате

$$\sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2. \quad (10)$$

Этот закон сложения дисперсий широко используется при обработке результатов эксперимента, когда нужно определить погрешность результата, обусловленную совокупностью различных независимых факторов.

Распределение дискретных случайных величин характеризуют вероятностью их появления. Если было произведено n опытов (измерений) и из них в n_k опытах случайная величина x приняла одно из возможных значений x_k , то вероятностью появления значения x_k называется величина

$$P(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_k}{n}. \quad (11)$$

Очевидно,

$$\sum_{k=1}^N n_k = n,$$

где N — число возможных значений случайной величины x . Отсюда следует условие нормировки

$$\sum_{k=1}^N P(x_k) = 1 \quad (12)$$

смысл которого в том, что вероятность появления хотя бы какого-нибудь значения x равна единице.

В случае непрерывного распределения вводится вероятность того, что случайная величина заключена в интервале от x до $x + dx$. Эта вероятность пропорциональна dx и записывается в виде произведения $f(x) dx$. Функция $f(x)$ называется функцией распределения. С учетом (11), определение этой функции можно записать в виде

$$f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{dn}{n}, \quad (13)$$

где dn — число опытов, в которых величина x оказалась в интервале от x до $x+dx$.

Чтобы сделать понятие функции распределения более наглядным, изобразим результаты серии измерений графически. Значения измерений x_i будем откладывать на горизонтальной оси x , которую разобьем на одинаковые интервалы Δx . Число измерений, результаты которых попали в интервал Δx , обозначим Δn . По вертикальной оси будем откладывать долю измерений $\frac{\Delta n}{n}$, деленную на величину интервала Δx . В результате получим ступенчатый график (рис. 4), называемый гистограммой. График наглядно показывает, где и как группируются результаты измерений.

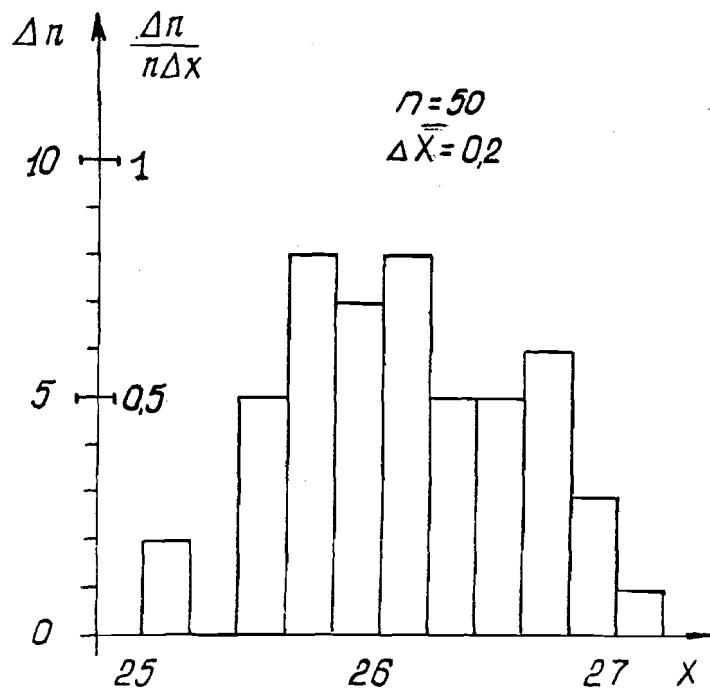


Рис. 4. Гистограмма

Если число измерений велико ($n \rightarrow \infty$), интервалы Δx можно взять весьма малыми. Тогда ступенчатый график превратится в гладкую кривую, называемую кривой распределения,

которая и представляет собой график функции распределения $f(x)$. Типичный вид кривой распределения приведен на рис. 5.

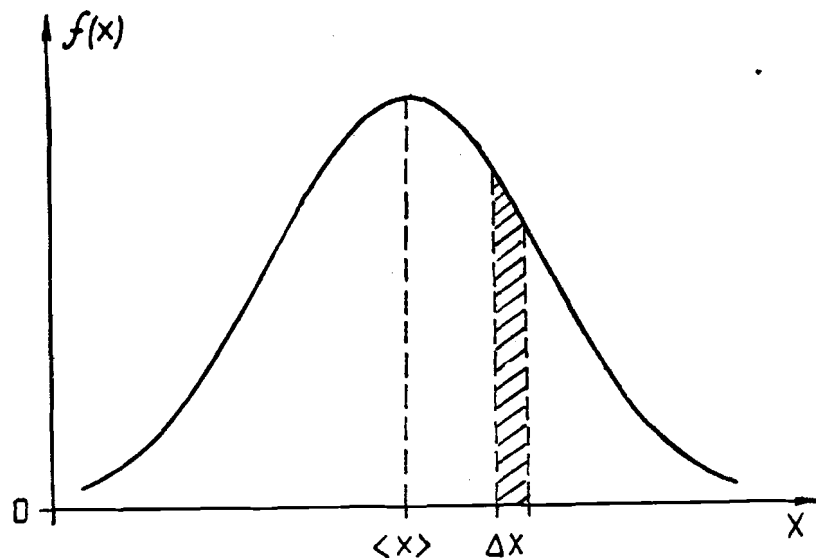


Рис. 5. Функция распределения

Для малых интервалов Δx произведение $f(x)\Delta x = \frac{\Delta n}{n}$ дает долю полного числа отсчетов, попадающих в малый интервал от x до $x+\Delta x$. Это произведение равно площади заштрихованного участка. Площадь под всей кривой дает долю отсчетов, результаты которых попадают в интервал $-\infty < x < \infty$. Эта доля равна, очевидно, единице. Математически это записывается как условие нормировки функции распределения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1. \quad (14)$$

Для вычисления доверительных вероятностей обратимся к рис. 6, где представлен график функции распределения и доверительный интервал $\langle x \rangle \pm \Delta x$. Доля результатов, попадающих в этот интервал, т.е. доверительная вероятность, равна площади заштрихованной фигуры. Эта площадь определяется интегралом

$$\alpha = \int_{\langle x \rangle - \Delta x}^{\langle x \rangle + \Delta x} f(x) dx, \quad (15)$$

для вычисления которого нужен явный вид функции $f(x)$.

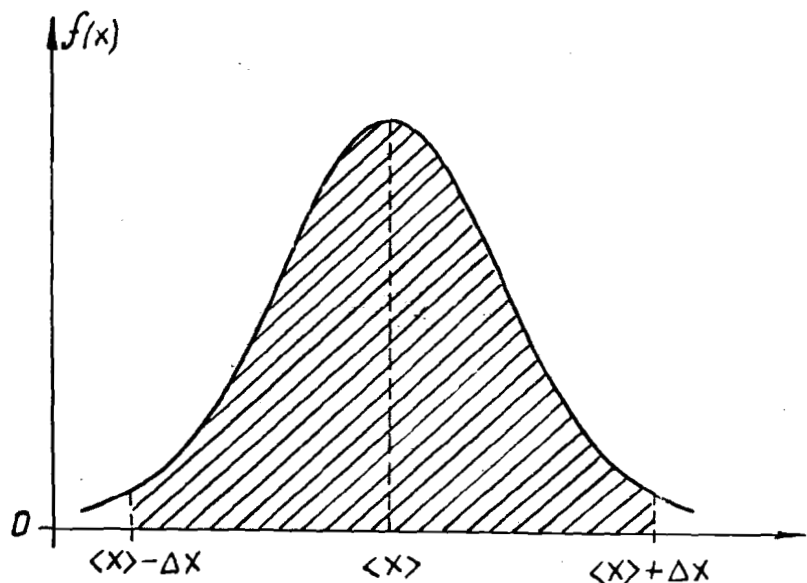


Рис. 6. Доверительный интервал и доверительная вероятность

Если известно распределение вероятностей $P(x_k)$ дискретной случайной величины или функция распределения $f(x)$ непрерывной величины, среднее значение произвольной функции $U(x)$ вычисляется по формулам:

$$\langle U(x) \rangle = \sum_{k=1}^N U(x_k) P(x_k) \quad (16)$$

или

$$\langle U(x) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} U(x) f(x) dx. \quad (17)$$

В частности, среднее значение самой случайной величины и ее дисперсия равны

$$\langle x \rangle = \sum_{k=1}^N x_k P(x_k); \quad (18)$$

$$\sigma_x^2 = \sum_{k=1}^N (x_k - \langle x \rangle)^2 P(x_k) \quad (19)$$

или

$$\langle x \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx; \quad (20)$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \langle x \rangle)^2 f(x) dx. \quad (21)$$

Пример 2. При бросании игральной кости вероятности выпадения любого из очков от 1 до 6 одинаковы, а сумма вероятностей равна 1, поэтому $P(x_k) = 1/6$. Среднее значение, дисперсия и среднеквадратичная ошибка количества очков:

$$\langle x \rangle = \sum_{k=1}^6 x_k P(x_k) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3,5;$$

$$\sigma^2 = \sum_{k=1}^6 (x_k - 3,5)^2 P(x_k) = 2,9;$$

$$\sigma = 1,7.$$

Пример 3. Вычислим σ для непрерывного равномерного распределения шириной d , причем $-d/2 \leq x \leq d/2$.

При равномерном распределении $f(x) = \text{const}$. Из условия нормировки находим $f(x) = 1/d$. Очевидно, $\langle x \rangle = 0$, тогда

$$\sigma^2 = \int_{-d/2}^{d/2} x^2 f(x) dx = \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{d/2} x^2 dx = \frac{d^2}{12};$$

$$\sigma = \frac{d}{\sqrt{12}}$$

3.2. Распределение Гаусса и распределение Пуассона

Распределение Гаусса (или нормальное распределение) является непрерывным с функцией распределения

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}} \quad (22)$$

Здесь σ — среднеквадратичная ошибка для данного распределения. Множитель перед экспонентой обеспечивает нормировку на единицу. На рис. 7 приведены графики функции (22) для различных σ при $\langle x \rangle = 0$. При малых σ графики получаются узкими и высокими, что соответствует тесной группировке результатов измерений вблизи среднего значения. Площади под всеми графиками одинаковы и равны 1.

Для нахождения доверительных вероятностей удобно выразить погрешность Δx в единицах σ :

$$\Delta x = u \sigma_x \quad (23)$$

Интеграл (15) после подстановки (22) и (23) выразит α как функцию u :

$$\alpha = \Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-u}^u e^{-\xi^2/2} d\xi; \quad u = \frac{\Delta x}{\sigma_x} \quad (24)$$

Результаты вычисления функции $\Phi(u)$, называемой функцией Лапласа, приведены в табл. 1.

Таблица 1

Значения функции Лапласа

$u = \frac{\Delta x}{\sigma_x}$	$\alpha = \Phi(u)$	u	$\Phi(u)$
0	0		
0,5	0,383	2,5	0,988
1,0	0,683	3,0	0,997
1,5	0,866	3,5	0,9995
2,0	0,954	4,0	0,99994

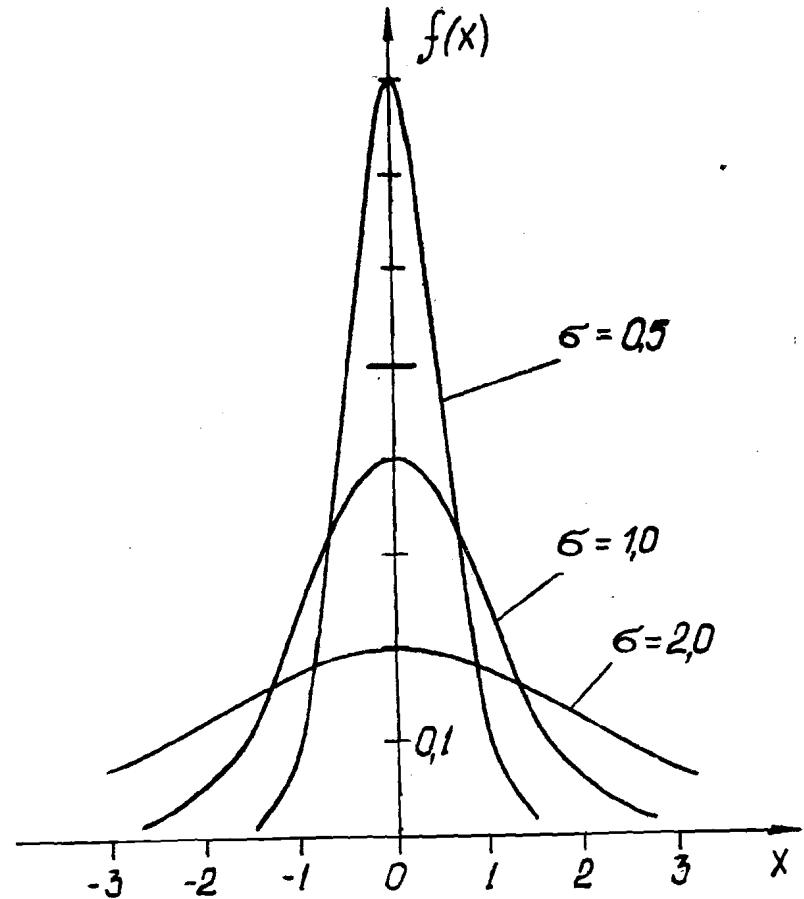


Рис. 7. Распределение Гаусса

При $u = 3$ ($\Delta x = 3\sigma_x$) практически все значения измеряемой величины окажутся внутри доверительного интервала ($\alpha = 0,997$), поэтому погрешность $\Delta x = 3\sigma_x$ часто рассматривают как максимально возможную или предельную ("правило 3σ ").

В математической статистике и в экспериментальной практике распределение Гаусса занимает особое место. Доказывается, что оно наблюдается всякий раз, когда значения случайной величины определяются большим числом независимых слу-

чайных параметров. В реальном эксперименте на результаты измерений влияют многие причины, поэтому результаты отдельных измерений непрерывных физических величин имеют обычно нормальное (гауссово) распределение. С другой стороны, результатом эксперимента могут быть случайные величины,

получаемые путем большого числа отдельных измерений, например, средние значения серий измерений. Такие величины будут распределены по нормальному закону независимо от вида распределения исходных отдельных измерений.

Распределение Пуассона является дискретным распределением, описывающим вероятности появления случайных взаимно независимых событий. Распределению Пуассона подчиняется, например, число броуновских частиц в поле зрения микроскопа, количество частиц, испускаемых источником постоянной активности в течение определенного интервала времени.

Случайными величинами являются целые числа — количество событий в определенном интервале времени, области пространства и т.п. Вероятность того, что в данном интервале будет зарегистрировано N событий

$$P(N) = e^{-\langle N \rangle} \frac{\langle N \rangle^N}{N!}, \quad (25)$$

где $\langle N \rangle$ — среднее число событий, регистрируемых в данном интервале. Дисперсия и среднеквадратичная ошибка:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \langle N \rangle; \\ \sigma &= \sqrt{\langle N \rangle}. \end{aligned} \quad (26)$$

Графики на рис. 8 иллюстрируют распределение Пуассона при различных $\langle N \rangle$. При больших $\langle N \rangle$ дискретное распределение можно приблизительно считать непрерывным (сравните эту ситуацию с переходом от гистограммы к функции распределения), а поскольку каждый из результатов, расположенных вблизи $\langle N \rangle$, получается путем большого числа измерений (регистрируется большое число событий N), распреде-

ление Пуассона при $\langle N \rangle \gg 1$ превращается в распределение Гаусса, и для него применимы соотношения между доверительным интервалом и доверительной вероятностью, приведенные в табл. 1.

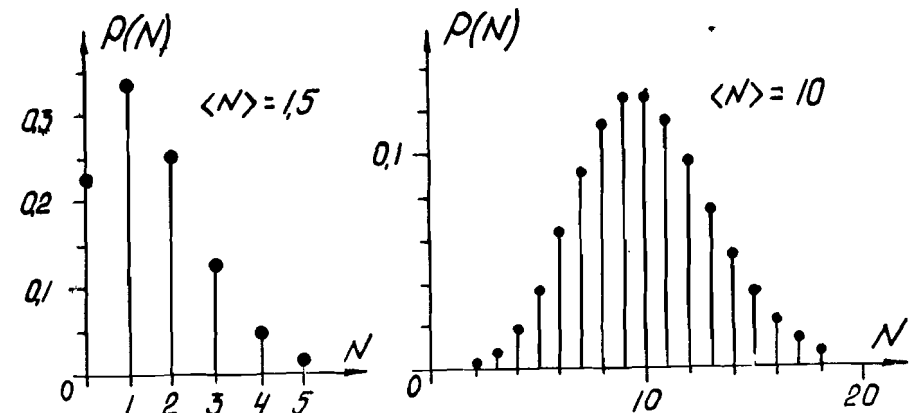


Рис. 8. Распределение Пуассона

Пример 4. Какова вероятность того, что счетчик не зарегистрирует ни одного γ -кванта за 2 секунды при средней скорости счета 5 квантов в секунду?

Среднее число квантов, регистрируемых в заданном интервале времени $\langle N \rangle = 10$. Подставляя это значение в (25) и учитывая $0! = 1$, находим

$$P(0) = e^{-10} = 4,5 \cdot 10^{-5}.$$

Пример 5. Сколько времени нужно затратить на регистрацию частиц при средней скорости счета $\nu = 5$ квантов в секунду, чтобы относительная погрешность не превышала $E = 10\%$ при доверительной вероятности $\alpha = 0,95$?

Требуемая погрешность невелика и может быть обеспечена лишь при больших N , поэтому можно пользоваться табл. 1, с помощью которой находим

$$\begin{aligned} \Delta N &= 2\sigma = 2\sqrt{\langle N \rangle}; \\ E &= \frac{\Delta N}{\langle N \rangle} = \frac{2}{\sqrt{\langle N \rangle}}; \end{aligned}$$

$$\langle N \rangle = \left(\frac{2}{E} \right)^2 = 400;$$

$$\tau = \frac{\langle N \rangle}{\gamma} = 80 \text{ с.}$$

3.3. Параметры выборки. Распределение средних значений

В эксперименте мы получаем не генеральные совокупности, параметры которых обсуждались в пп. 3.1 - 3.2, а выборки конечного объема n . При этом возникают следующие вопросы:

1. Как по параметрам выборки оценить параметры генеральной совокупности?
2. Какую величину взять в качестве меры точности результата?
3. Каково соотношение между доверительными интервалами и доверительными вероятностями?

Основные параметры выборки - выборочное среднее \bar{x} :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

и выборочная дисперсия s_x^2 :

$$s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2. \quad (27)$$

Очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x} = \langle x \rangle;$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_x^2 = \sigma_x^2.$$

Для различных выборок (серий измерений) одного и того же объема n мы будем получать различные значения как \bar{x} , так и s_x^2 . Усреднив \bar{x} по большому (в пределе - бесконечному) числу выборок, мы получим $\langle x \rangle$. Усредняя s_x^2 найдем [1, 6]:

$$\langle s_x^2 \rangle = \sigma_x^2. \quad (28)$$

Эти результаты подсказывают, что, имея в распоряжении одну выборку, в качестве наилучшего приближения к $\langle x \rangle$ следует взять \bar{x} , а наилучшей оценкой σ_x будет s_x .

Значение \bar{x} - случайная величина. Взяв \bar{x} как наилучшую оценку измеряемой величины, мы должны выяснить, как ведет себя отклонение величины \bar{x} от истинного значения, поскольку именно это отклонение, а не разброс отдельных измерений, определит погрешность окончательного результата эксперимента.

Теория и опыт показывают, что разброс значений \bar{x} зависит от числа измерений в каждой серии. Чем больше измерений в сериях, тем меньшим оказывается разброс средних значений, иными словами, тем точнее среднее значение соответствует истинному.

Разброс средних значений будем характеризовать такими же параметрами, что и разброс отдельных результатов.

Введем среднеквадратичную ошибку среднего $\sigma_{\bar{x}}$. Независимо от вида распределения отдельных измерений и числа измерений n в выборках, между величинами, характеризующими разброс отдельных измерений и разброс средних значений, существует простая связь:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}}. \quad (29)$$

Это соотношение является фундаментальным в теории погрешностей и поясняется на рис. 9, где приведены: распределение результатов (гистограмма) одной выборки объемом $n = 10$ и соответствующие этой выборке значения \bar{x} и s_x ; распределение результатов отдельных измерений при $n \rightarrow \infty$ (функция распределения $f(x)$); распределение средних значений большого числа выборок, объемом $n = 10$ каждая (функция $f(\bar{x})$). Распределение средних значений уже распределения отдельных измерений.

Вывод (29) можно, используя (10), проделать самостоятельно или найти в [1, 6]. Важнее понять смысл этого соотношения: оно показывает как точность результата серии измерений зависит от числа измерений в серии и указывает пути повышения этой точности.

Пусть требуется уменьшить ошибку результата эксперимента в 10 раз. Эта ошибка определяется величиной $\sigma_{\bar{x}}$ и для ее уменьшения нужно изменить методику эксперимента так, чтобы разброс отдельных измерений уменьшился в 10 раз, либо при сохранении прежней методики увеличить в 100 раз число измерений. На практике используют оба пути, но в учебной

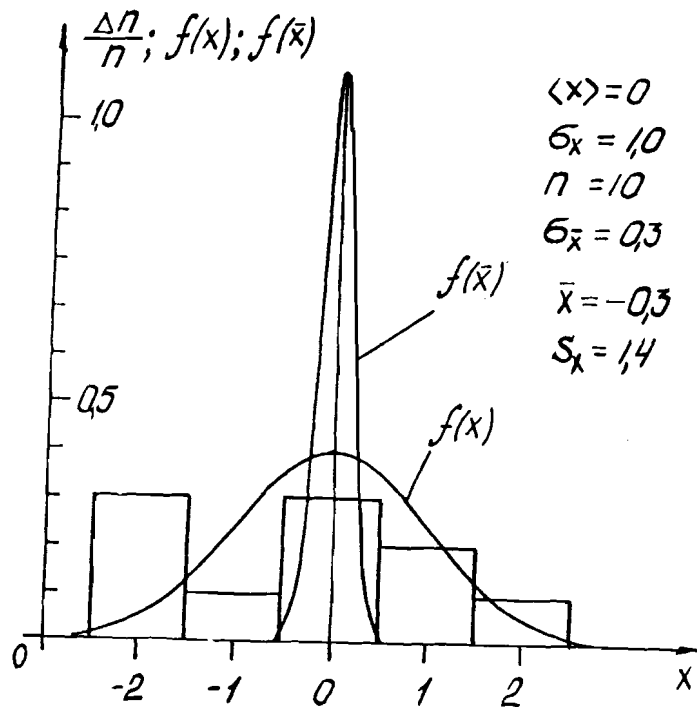


Рис. 9. Распределение результатов отдельных измерений и распределение средних значений

лаборатории методика эксперимента обычно жестко задана и повышать точность измерений приходится лишь увеличением числа измерений.

Для определения ошибки σ_x нужно проделать бесконечно много измерений, что нереально. На практике вычисляют среднеквадратичное отклонение S_x для серии из n измерений или величину

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}, \quad (30)$$

называемую выборочным среднеквадратичным отклонением среднего. При большом числе измерений (практически при $n > 5$)

$$S_x \approx \sigma_x; \quad S_{\bar{x}} \approx \sigma_{\bar{x}}. \quad (31)$$

Распределение средних значений выборок большого объема будет нормальным (гауссовым) независимо от вида распределения отдельных измерений. Это утверждение иллюстрируется на рис. 10, где приведены распределения $P_n(\bar{x})$ средних значений \bar{x} выпавших очков при n бросаниях игральной кости. При $n = 1$ имеем равномерное дискретное распределение результатов отдельных бросаний. Средние значения могут меняться дискретно с интервалом $\Delta\bar{x} = 1/n$. Точками обозначены значения $P_n(\bar{x})/\Delta\bar{x} = nP_n(\bar{x})$, дающие единичную площадь построенной по этим точкам гистограммы. При больших n распределение средних становится почти непрерывным. Для сравнения на рис. 10, в, г приведены графики функции распределения Гаусса $f_0(\bar{x})$ с той же дисперсией, что и соответствующие распределения $P_n(\bar{x})$. При $n = 4$ распределение средних значений мало отличается от нормального, а при $n = 8$ эти распределения в пределах графической точности неразличимы.

При гауссовом распределении соотношение между доверительным интервалом и доверительной вероятностью определяется функцией Лапласа $\Phi(u)$. Если n достаточно велико, можно считать $\sigma_{\bar{x}} \approx S_{\bar{x}}$, тогда

$$\Delta x = u \sigma_{\bar{x}} \approx u S_{\bar{x}}, \quad (32)$$

где u находится по заданному значению доверительной вероятности с помощью функции Лапласа (см. табл. 1).

Различие S_x и σ_x (соответственно, $S_{\bar{x}}$ и $\sigma_{\bar{x}}$) определяет погрешность в величине доверительного интервала. Эта погрешность связана с разбросом S_x в разных сериях измерений. Мерой ошибки в величине ошибки служит среднеквадратичная ошибка σ_{S_x} . Относительное значение ошибки [1]:

$$E_{S_x} = \frac{\sigma_{S_x}}{S_x} \approx \frac{1}{\sqrt{2(n-1)}}.$$

График этой величины приведен на рис. 3.

Если число измерений невелико ($n < 5$), величина $\sigma_{\bar{x}}$ является весьма грубой оценкой $\sigma_{\bar{x}}$, и для обеспечения заданной доверительной вероятности α приходится брать более широкие доверительные интервалы, чем определяемые соотношением (32). Поправки особенно заметны при α близких к единице.

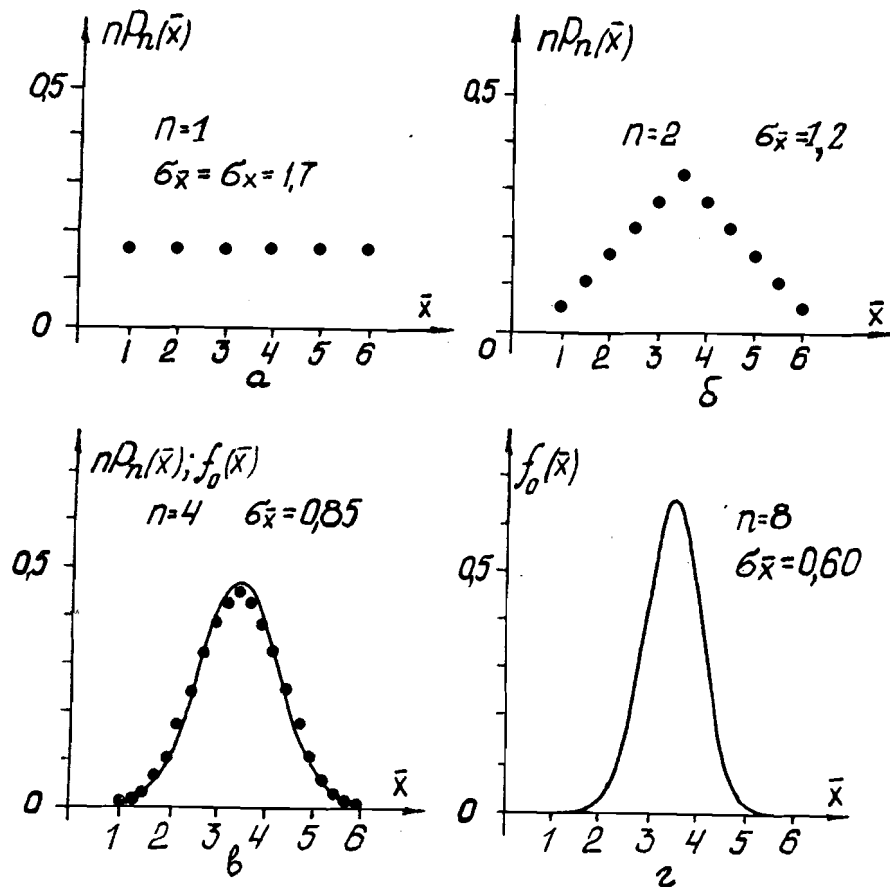


Рис. 10. Распределение средних значений выпавших очков при бросаниях игральной кости

Погрешность Δx определяется по формуле

$$\Delta x = t_{\alpha n} S_{\bar{x}}, \quad (33)$$

где $t_{\alpha n}$ — коэффициенты Стьюдента, значения которых приведены в табл. 2. При $n \rightarrow \infty$ эти коэффициенты совпадают с аргументами функции Лапласа (табл. 1 эквивалентна нижней строке табл. 2).

Использование коэффициентов Стьюдента оправдано в случаях, когда различие $t_{\alpha n}$ и t_{∞} превышает допускаемую нами ошибку в величине ошибки, составляющую обычно несколько десятков процентов. Если α близко к единице, приходится использовать их и при больших n .

Таблица 2
Коэффициенты Стьюдента $t_{\alpha n}$

$n \backslash \alpha$	0,2	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99	0,999
2	0,33	0,73	1,00	1,38	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7	636,6
3	0,29	0,62	0,82	1,06	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9	31,6
4	0,28	0,58	0,77	0,98	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8	12,9
5	0,27	0,57	0,74	0,94	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6	8,6
6	0,27	0,56	0,73	0,92	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0	6,9
7	0,27	0,55	0,72	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7	6,0
8	0,26	0,55	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5	5,4
9	0,26	0,54	0,71	0,90	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4	5,0
10	0,26	0,54	0,70	0,88	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3	4,8
15	0,26	0,54	0,69	0,87	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0	4,1
20	0,26	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,9
25	0,26	0,53	0,69	0,86	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,8	3,7
30	0,26	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,5	2,8	3,7
40	0,26	0,53	0,68	0,85	1,1	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
60	0,25	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,7	3,6
120	0,25	0,53	0,68	0,85	1,0	1,3	1,7	2,0	2,4	2,6	3,4
∞	0,25	0,52	0,67	0,84	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6	3,3

4. ПРИБОРНЫЕ ПОГРЕШНОСТИ

Показания прибора обычно округляют до ближайшего деления шкалы (иногда до половины деления), поскольку отсчитывать на глаз доли деления неудобно и ненадежно. Если случайные ошибки невелики, все измерения после округления дадут один и тот же результат. В этом случае достаточно ограничиться двумя-тремя измерениями (но не одним!) и не нужно проводить статистическую обработку результатов. Однако следует учесть приборную погрешность.

Будем различать погрешность отсчета по шкале и погрешность показаний прибора.

Погрешность отсчета, связанную с округлением, примем равной половине деления шкалы или половине той доли деления, до которой производится округление. Приближенно можно считать, что такая погрешность соответствует доверительной вероятности $\alpha = 0,9$.

Погрешность показаний, т.е. несоответствие показаний прибора истинному значению измеряемой величины, можно определить при сравнении показаний данного прибора и более точного эталонного прибора. Эта погрешность может быть как систематической (например, неверная градуировка), так и случайной. В паспортных данных приводят максимальное значение суммарной погрешности (систематическая плюс случайная), которое называют предельной приборной погрешностью. Может быть указана относительная или абсолютная предельная погрешность.

Доверительная вероятность, соответствующая предельной погрешности, близка к единице. Обычно принимают $\alpha = 0,997$.

Вместо предельной погрешности h может быть указан класс точности прибора γ , который для различных приборов означает разное. В некоторых случаях (например, для магазинов сопротивлений, емкостей) класс точности означает выраженную в процентах относительную предельную погрешность:

$$\gamma = \frac{h}{x} \cdot 100\%, \quad (34)$$

где x — показания прибора.

Абсолютную погрешность в этом случае находят по формуле

$$h = x \frac{\gamma}{100}. \quad (35)$$

В других случаях, например, для стрелочных электроизмерительных приборов, класс точности означает отношение предельной абсолютной погрешности к предельному значению измеряемой величины, т.е. к наибольшему ее значению $x_{\text{макс}}$, которое может быть измерено по шкале прибора:

$$\gamma = \frac{h}{x_{\text{макс}}} \cdot 100\%. \quad (36)$$

Абсолютная погрешность показаний определяется по формуле

$$h = x_{\text{макс}} \frac{\gamma}{100}. \quad (37)$$

Класс точности может быть указан на шкале прибора, но это не всегда возможно. Часто используются многопредельные приборы, в которых одна и та же шкала при различных режимах работы или способах включения прибора соответствует различным пределам измерений $x_{\text{макс}}$ или даже различным измеряемым величинам. В таких случаях в паспортных данных указывают погрешности для каждого из допускаемых вариантов использования прибора. Формулы для вычисления погрешностей могут быть более сложными, чем (35) или (37). Их также приводят в паспортных данных прибора.

Электроизмерительные приборы выпускают следующих классов точности: 0,05; 0,1; 0,2; 0,5 (прецизионные), и 1; 1,5; 2,5; 4,0 (технические). Для электронных приборов класс точности 0,05 не устанавливается, но введен дополнительно класс 6,0.

Если класс точности неизвестен и нет паспортных данных прибора, можно использовать обычно применяемое правило градуировки: предельная погрешность равна цене деления шкалы прибора.

Пример 6. Милливольтметр класса 1,5 со шкалой на 300 мА дает в любом месте шкалы абсолютную предельную погрешность

$$h = 300 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} = 4,5 \text{ мА.}$$

Пример 7. В табл. 3 приведена выдержка из паспортных данных электронного милливольтметра ВЗ-38. Указаны предельные погрешности в процентах от предела измерения.

Таблица 3
Погрешности милливольтметра ВЗ-38

Диапазон частот, МГц	Погрешность измерения напряжения, %, на пределах измерения	
	1 - 300 мВ	1 - 300 В
$(20 - 45) \cdot 10^{-6}$	± 4	± 4
$45 \cdot 10^{-6} - 1$	$\pm 2,5$	± 4
1 - 3	± 4	± 6
3 - 5	± 6	± 6

При грубой оценке погрешностей будем учитывать лишь ту из приборных погрешностей (отсчета или показаний), которая больше. Если, в свою очередь, случайная (т.е. определяемая разбросом результатов) и приборная погрешности заметно различаются, в записи окончательного результата измерений будем указывать большую из них. Если эти погрешности примерно одинаковы, можно указать любую из них.

Для проведения статистической обработки результатов нужно знать среднеквадратичную приборную ошибку σ_{η} , учитывая ошибку отсчета и показаний.

Ошибки округления распределены равномерно в пределах $\pm d/2$ от значения, до которого производится округление. Здесь d — цена деления или доли деления, до которой производится округление. В этом случае (см. п. 3.1, пример 3)

$$\sigma_{отсч} = \frac{d}{\sqrt{12}} \quad (38)$$

Распределение ошибок показаний обычно неизвестно. Для оценки σ воспользуемся "правилом 3σ ", справедливым при наличии нормального (гауссова) распределения, и выразим σ через предельную погрешность h . При гауссовом распределении практически все отсчеты заключены в интервале $\pm 3\sigma$, а по данным прибора — в интервале $\pm h$, поэтому

$$\sigma_{показ} \approx \frac{h}{3}. \quad (39)$$

Отличие реального распределения ошибок от гауссова не приводит к большим неточностям при определении погрешностей.

Знание приборных погрешностей позволяет выбрать оптимальное число измерений. Предположим, случайная погрешность получилась больше приборной. Спрашивается — на сколько нужно увеличить число измерений, чтобы получить результат с максимальной точностью? На первый взгляд кажется, что чем больше сделаем измерений, тем точнее результат, и, обладая достаточным усердием и временем, можно добиться любой желаемой точности. На деле это не совсем так. Увеличивать число измерений n рационально лишь до определенного предела. С ростом n уменьшается случайная погрешность в определении среднего значения результатов отдельных измерений. После того, как она станет меньше приборных, определяющую роль станут играть приборные погрешности, не зависящие от числа измерений. Дальнейшее увеличение числа измерений уже не будет повышать точность результата. Отсюда

34

следует, что оптимальное число измерений такое, при котором случайная погрешность результата опыта одного порядка с приборными или несколько меньше приборных. Не следует, однако, забывать, что сверху число измерений ограничено временем или средствами, которыми Вы располагаете, а снизу — требованием сделать не менее двух-трех измерений, чтобы убедиться в отсутствии промаха и малости случайных погрешностей.

Пример 8. При $n = 10$ измерениях получена случайная погрешность $\Delta x_{сл} = 15$. Нужно найти оптимальное число измерений n_0 , если приборная погрешность $\Delta x_{\eta} = 5$.

При оптимальном числе измерений случайная погрешность должна быть равна приборной, а для этого должна стать в 3 раза меньше, чем при $n = 10$, так как

$$\frac{\Delta x_{сл}}{\Delta x_{\eta}} = 3.$$

Поскольку случайная погрешность результата обратно пропорциональна \sqrt{n} (формула 29), число измерений нужно увеличить в

$$\left(\frac{\Delta x_{сл}}{\Delta x_{\eta}} \right)^2 \sim 10$$

раз. Следовательно, оптимальное число измерений

$$n_0 = n \left(\frac{\Delta x_{сл}}{\Delta x_{\eta}} \right)^2 \approx 100.$$

5. СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ ПРЯМЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

5.1. Усреднение неравноточных измерений

Возможны случаи, когда в нашем распоряжении имеется несколько экспериментальных значений $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_m$ одной и той же измеряемой величины x , полученных в разное время либо различными экспериментаторами или методами. Известны также среднеквадратичные ошибки $\sigma_{\bar{x}k}$ этих результатов. Требуется найти наиболее вероятное значение \bar{x} измеряемой величины и его ошибку $\sigma_{\bar{x}}$.

Если ошибки $G_{\bar{x}k}$ заметно различаются, то неразумно в качестве \bar{x} брать просто среднее арифметическое имеющихся результатов. Более точно измеренные значения \bar{x} лучше соответствует истинному и при усреднении должны в большей степени влиять на результат. Поэтому будем вычислять не среднее арифметическое, а среднее взвешенное, считая более точный результат как бы измеренным большее число раз, чем менее точный.

Если \bar{x}_k получено в результате n_k измерений, причем все измерения проводились в одинаковых условиях, то общее среднее \bar{x} можно получить, усреднив всю совокупность измерений:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^m n_k \bar{x}_k}{\sum_{k=1}^m n_k}, \quad (40)$$

Если различие $G_{\bar{x}k}$ обусловлено различием чисел n_k , то в соответствии с (29) имеем

$$G_{\bar{x}k} \propto \frac{1}{\sqrt{n_k}}; \quad n_k \propto \frac{1}{G_{\bar{x}k}^2}. \quad (41)$$

Поскольку числитель и знаменатель дроби (40) можно домножить на произвольное число, важны не сами n_k , а соотношения между ними. Коэффициенты перед \bar{x}_k , называемые веса W_k этих величин, и показывающие, сколько раз нужно учесть величины \bar{x}_k при усреднении, могут оказаться произвольными. Однако соотношение между весами изменяться не может и должно определяться в соответствии с (41). Среднее взвешенное определяется по формуле

$$\bar{x} = \frac{\sum_{k=1}^m W_k \bar{x}_k}{\sum_{k=1}^m W_k}, \quad (42)$$

в которой веса W_k удовлетворяют условию

$$W_k \propto \frac{1}{G_{\bar{x}k}^2} \quad (43)$$

или

$$\frac{W_i}{W_k} = \frac{G_{\bar{x}k}^2}{G_{\bar{x}i}^2}. \quad (44)$$

На практике одну из величин W_k выбирают произвольно, а остальные находят из (43) или (44).

Ошибка $G_{\bar{x}}$ величины \bar{x} меньше, чем любой из величин \bar{x}_k и находится из соотношения

$$\frac{1}{G_{\bar{x}}^2} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{G_{\bar{x}k}^2}. \quad (45)$$

Пример 9. Покажите, что при определении \bar{x} и соответствующей погрешности безразлично, проделаем ли мы m серий по n измерений в каждой и затем усредним результаты этих серий, или проделаем одну серию из mn измерений.

Пример 10. Получите соотношение (45), используя прием, приведший к формуле (43), т.е. считая \bar{x} результатом совокупной серии из $n = \sum_{k=1}^m n_k$ измерений.

5.2. Погрешности результатов прямых измерений

Исходными данными для расчета погрешности Δx являются оценки среднеквадратичной ошибки $G_{\bar{x} \text{ разб.}}$, вызванной разбросом экспериментальных данных

$$G_{\bar{x} \text{ разб.}}^2 \approx S_{\bar{x}}^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (46)$$

и приборной ошибки $G_{x \text{ п.}}$:

$$G_{x \text{ п.}}^2 = G_{\text{отсч.}}^2 + G_{\text{показ.}}^2. \quad (47)$$

Эти величины находятся в соответствии с рекомендациями, приведенными в пп. 3 - 4.

Если одна из величин $S_{\bar{x}}$ или $G_{x \text{ п.}}$ превышает другую в три и более раз (соответственно, $S_{\bar{x}}^2$ и $G_{x \text{ п.}}^2$ различаются на порядок и более), для дальнейших расчетов используют лишь большую из них. Если же $G_{x \text{ п.}} \approx S_{\bar{x}}$, находим полную дисперсию и среднеквадратичную ошибку:

$$\begin{aligned} G_{\bar{x}}^2 &= G_{x \text{ п.}}^2 + S_{\bar{x}}^2; \\ G_{\bar{x}} &= \sqrt{G_{x \text{ п.}}^2 + S_{\bar{x}}^2}. \end{aligned} \quad (48)$$

При использовании величины \bar{x} для дальнейших расчетов косвенно измеряемых величин, обработка результатов прямых

измерений на этом заканчивается. Если же \bar{x} есть окончательный результат эксперимента, нужно найти погрешность Δx , соответствующую заданной доверительной вероятности α .

В научных статьях, как правило, приводят доверительный интервал "плюс-минус одна среднеквадратичная ошибка"

$$\Delta x = G_{\bar{x}},$$

соответствующий значению $\alpha = 0,68$. Такой интервал называют стандартным и при указании погрешности часто не приводят значение доверительной вероятности.

В лабораторной практике употребительны значения α , равные 0,90; 0,95 или 0,99. Способ вычисления погрешности зависит от соотношения между случайной и приборной ошибками и от числа измерений величины x . Рассмотрим типичные ситуации.

1. В большинстве случаев для вычисления погрешности можно пользоваться распределением Гаусса и находить Δx с помощью функции Лапласа (табл. 1) по следующей схеме:

$$\alpha = \Phi(u) \rightarrow u \rightarrow \Delta x = u G_{\bar{x}}.$$

Действительно, условием применимости распределения Гаусса является достаточно большое число факторов, влияющих на ошибку результата. Это условие заведомо выполняется, если преобладают случайные ошибки ($S_{\bar{x}} \gg G_{\text{ин}}$) и число измерений велико ($n > 5$). Если случайные и приборные ошибки одного порядка, то даже при малом числе измерений ($n \leq 5$) количество факторов, влияющих на формирование $G_{\bar{x}}$, оказывается достаточно большим (разброс результатов отдельных измерений плюс приборные погрешности). Если преобладают приборные погрешности, часть их не обязательно распределена по нормальному (гауссову) закону. Ошибки округления, например, имеют равномерное распределение. Однако предположение о нормальном распределении совокупной приборной ошибки (47) не приводит к существенным ошибкам при вычислении погрешности.

2. Если преобладают случайные ошибки ($S_{\bar{x}} \gg G_{\text{ин}}$) и число измерений невелико ($n < 5$), погрешность Δx определяют с помощью коэффициентов Стьюдента (табл. 2)

$$\Delta x = t_{\alpha n} S_{\bar{x}}.$$

3. Если приборная погрешность превышает остальные, можно в записи результата не указывать доверительную вероятность, но необходимо указать характер погрешности. Напри-

мер:

$$U = 25,6 \pm 0,8 \text{ В (погрешность - предельная приборная)}.$$

5.3. Погрешности счета случайных событий

Счет случайных событий производится в самых разных отраслях науки и техники: статистика отказов оборудования, дорожно-транспортных происшествий, значительная часть экспериментов атомной и ядерной физики и т.д.

Как правило определяют среднее число событий $\langle N \rangle$ (например, количество частиц, попавших в счетчик) в течение определенного интервала времени τ или среднюю скорость счета $\langle N \rangle / \tau$. Если события независимы и средняя скорость счета постоянна, фактическое число событий N в течение интервала τ является случайной величиной, распределенной по закону Пуассона (25) с дисперсией

$$G^2 = \langle N \rangle.$$

При $\langle N \rangle \gg 1$ распределение Пуассона близко к распределению Гаусса и стандартному доверительному интервалу ($\alpha = 0,68$) соответствует погрешность:

$$\Delta N = G = \sqrt{\langle N \rangle} \approx \sqrt{N}.$$

Относительная погрешность

$$\frac{\Delta N}{N} \approx \frac{1}{\sqrt{N}}$$

убывает с ростом N , поэтому в эксперименте стараются получить N как можно больше (как говорят, набирают статистику). Часто единственным способом увеличения N является увеличение длительности эксперимента τ , поэтому нередки эксперименты, длящиеся месяцами, а то и годами (например, при регистрации космического излучения).

В ряде экспериментов ядерной физики помимо интересующих экспериментатора "полезных" событий числом N_0 (например, испускание данным источником частиц данного сорта) счетчик регистрирует и другие, "посторонние" события, называемые фоном (например, частицы другого сорта или от другого источника). Число "посторонних" событий обозначим N_{ϕ} . Нередко $N_{\phi} \gg N_0$, как говорят, фон "забивает" полезный эффект. Можно ли в таких условиях определить N_0 ? Оказывается, можно. Для этого эксперимент проводят дважды: один раз с исследуемым источником считают в течение интервала времени τ , величину $N_1 = N_0 + N_{\phi}$, а второй раз - без исследуемого источ-

ника, при этом в течение того же интервала времени считают $N_2 \approx N_\phi$. Затем из результатов первого эксперимента вычитают результат второго:

$$N_0 = N_1 - N_2. \quad (49)$$

Найдем погрешность N_0 , полагая $N_0 \gg 1$ и $N_\phi \gg 1$. Закон сложения дисперсий (10) дает

$$\sigma_{N_0}^2 = \sigma_{N_1}^2 + \sigma_{N_2}^2 \approx N_1 + N_2 \approx N_0 + 2N_\phi. \quad (50)$$

Относительная погрешность для стандартного доверительного интервала:

$$E_{N_0} = \frac{\sigma_{N_0}}{N_0} = \frac{\sqrt{N_1 + N_2}}{N_1 - N_2}; \quad \alpha = 0,68. \quad (51)$$

Пример 11. Определим минимальные затраты времени на экспериментальное определение активности источника, испускающего в среднем $\nu_0 = \frac{\langle N_0 \rangle}{\tau} = 10 \gamma$ -квантов в секунду при наличии фоновой активности $\nu_\phi = \frac{\langle N_\phi \rangle}{\tau} = 100$ частиц в секунду. Погрешность результата должна быть не более $E_{N_0} = 0,1$ при доверительной вероятности $\alpha = 0,95$.

По табл. 1 находим, что $\alpha = 0,95$ соответствует

$$\Delta N_0 = 2\sigma_{N_0} = 2\sqrt{N_0 + 2N_\phi}.$$

По условию $N_\phi = 10N_0$, поэтому относительная ошибка

$$E_{N_0} = \frac{\Delta N_0}{N_0} = \frac{2\sqrt{N_0 + 2N_\phi}}{N_0} = \frac{2\sqrt{21N_0}}{N_0} = \sqrt{\frac{84}{N_0}}.$$

Отсюда число "полезных" частиц, зарегистрированных в первой части эксперимента

$$N_0 = \frac{84}{E_{N_0}^2} = 8,4 \cdot 10^3$$

и затраты времени

$$\tau_1 = \frac{N_0}{\nu_0} = 8,4 \cdot 10^2 \text{ с} = 14 \text{ мин.}$$

Столько же времени потребуется на подсчет N_ϕ , так что полное время эксперимента

$$\tau = 2\tau_1 = 28 \text{ мин.}$$

В отсутствие фона эксперимент занял бы всего 40 с.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ПОГРЕШНОСТЕЙ ПРИ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

В большинстве экспериментов интересующая нас величина непосредственно не измеряется. Вместо этого мы измеряем другие величины a, b, c и т.д., а затем вычисляем искомую величину Z , которая является известной функцией указанных первичных величин:

$$Z = Z(a, b, \dots).$$

Допустим, для каждой первичной величины мы нашли средние значения \bar{a}, \bar{b}, \dots , и погрешности $\Delta a, \Delta b, \dots$. В качестве наилучшего приближения для величины Z возьмем значение, получающееся при подстановке вместо истинных значений A, B, \dots средних экспериментальных значений:

$$Z = Z(\bar{a}, \bar{b}, \dots).$$

Для определения погрешности ΔZ поступим следующим образом. Изменим одну из первичных величин, например a , на величину ее погрешности и найдем, на сколько при этом изменится величина Z . В результате найдем погрешность ΔZ_a , обусловленную погрешностью одной из первичных величин:

$$\Delta Z_a = |Z(\bar{a} + \Delta a, \bar{b}, \dots) - Z(\bar{a}, \bar{b}, \dots)|.$$

Если погрешность Δa невелика, величина ΔZ_a вычисляется по формуле

$$\Delta Z_a = \left| \frac{\partial Z}{\partial a} \right| \Delta a. \quad (52)$$

При вычислении производной все величины кроме a в формуле для Z считаются постоянными — это частная производная. Значение производной находим как и значение Z , подставляя вместо истинных величин их средние экспериментальные значения.

Аналогичным образом найдем погрешности величины Z , обусловленные погрешностями других первичных величин, например

$$\Delta Z_b = \left| \frac{\partial Z}{\partial b} \right| \Delta b.$$

Если все первичные величины получают малые приращения $\delta a, \delta b$ и т.д., приращение величины Z будет равно

$$\delta Z = \frac{\partial Z}{\partial a} \delta a + \frac{\partial Z}{\partial b} \delta b + \dots \quad (53)$$

Для определения результирующей погрешности ΔZ казалось бы достаточно просто сложить погрешности, обусловленные отдельными первичными величинами. Однако при этом для ΔZ мы обязательно получим завышенный результат. Действительно, чтобы величина ΔZ равнялась упомянутой сумме погрешностей, все первичные величины должны одновременно отклониться на величину своих погрешностей так, чтобы обусловленные этими отклонениями изменения величины Z были одного знака, а это маловероятно. Скорее всего отклонения величины Z , вызванные различными независимыми факторами, будут частично компенсировать друг друга, и погрешность величины Z будет меньше упомянутой суммы. Анализ, основанный на законе сложения дисперсий (10), приводит к результату:

$$\Delta Z = \sqrt{(\Delta Z_a)^2 + (\Delta Z_b)^2 + \dots} \quad (54)$$

Как ни странно, пользоваться этой формулой легче, чем просто складывать отдельные ошибки. Дело в том, что при вычислении ΔZ по формуле (54) можно значительно сократить число ошибок, принимаемых во внимание. Пусть, например

$$\Delta Z_a = 1;$$

$$\Delta Z_b = 0,3.$$

По формуле (54) находим

$$\Delta Z = \sqrt{1,0 + 0,09} = 1,04.$$

Поскольку нет смысла оставлять в погрешности три значащих цифры, мы полагаем

$$\Delta Z = 1,$$

другими словами, погрешность величины Z не дает практически никакого вклада в ΔZ , и при вычислении ΔZ ее не нужно учитывать. Вообще, при вычислении ΔZ смело можно отбрасывать ошибки, не превышающие $\frac{1}{3}$ (или даже $\frac{1}{2}$) от максимальной. Часто бывает, что одна из погрешностей, например ΔZ_a значительно превосходит любую другую. Тогда вообще не требуется вычислять ΔZ , т.к.

$$\Delta Z \approx \Delta Z_a.$$

Подчеркнем — прежде, чем вычислить ΔZ необходимо получить численные значения всех составляющих этой величины ΔZ_a , ΔZ_b и т.д. Только тогда мы сможем упростить вычисление ΔZ , пренебрегая некоторыми из погрешностей ΔZ_a , $\Delta Z_b, \dots$

Но главное — становится ясным, какое измерение дает наибольший вклад в погрешность результата. Это необходимо знать при поиске путей повышения точности эксперимента.

Если величина Z является произведением нескольких функций первичных величин, например

$$Z = F_1(\alpha) F_2(\beta) \dots,$$

удобнее вначале вычислить относительную ошибку по формулам

$$\frac{\Delta Z_a}{Z} = \frac{\Delta F_1}{F_1} = \frac{1}{F_1} \frac{dF_1}{d\alpha} \Delta \alpha;$$

$$\frac{\Delta Z_b}{Z} = \frac{\Delta F_2}{F_2} = \frac{1}{F_2} \frac{dF_2}{d\beta} \Delta \beta;$$

$$E_Z = \frac{\Delta Z}{Z} = \sqrt{\left(\frac{\Delta Z_a}{Z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta Z_b}{Z}\right)^2 + \dots} \quad (55)$$

и лишь затем абсолютную погрешность

$$\Delta Z = Z E_Z. \quad (56)$$

Пример 12. Пусть $Z = a^2 \cos b$ и в итоге обработки результатов прямых измерений величин a и b получено

$$A = 126 \pm 2 \text{ см}; \quad B = 23 \pm 1 \text{ град.}$$

Требуется определить Z и погрешность ΔZ , а также выяснить, какую из величин a и b следует измерять точнее для уменьшения погрешности результата эксперимента.

Вычисляем производные и находим

$$Z = \bar{a}^2 \cos \bar{b} = 146 \cdot 10^2 \text{ см}^2;$$

$$\frac{\Delta Z_a}{Z} = 2 \frac{\Delta a}{a} = 3,2 \cdot 10^{-2};$$

$$\frac{\Delta Z_b}{Z} = \operatorname{tg} \bar{b} \cdot \Delta b = 7,4 \cdot 10^{-3}.$$

Поскольку ΔZ_a значительно больше ΔZ_b полагаем

$$E_Z = \frac{\Delta Z_a}{Z} = 3 \cdot 10^{-2};$$

$$\Delta Z = Z E_Z = 5 \cdot 10^2 \text{ см}^2;$$

$$Z = (1,46 \pm 0,05) \cdot 10^4 \text{ см}^2.$$

При вычислении ΔZ можно было бы сначала подставить выражения для ΔZ_a и ΔZ_b в формулу (55):

$$\frac{\Delta Z}{Z} = \sqrt{\left(2 \frac{\Delta a}{a}\right)^2 + (tg \bar{\beta} \Delta b)^2}$$

и лишь затем производить вычисления. Такой путь нерационален. Вычисления получаются более сложными и труднее заметить измерение, дающее определяющий вклад в ΔZ .

В сравнительно редких случаях, когда ошибки первичных величин связаны между собой (например Δa и Δb есть приборные погрешности, причем a и b измерялись одним и тем же прибором), величину ΔZ можно оценить по формуле

$$\Delta Z = \Delta Z_a + \Delta Z_b \quad (57)$$

которая, как правило, дает завышенный результат, поскольку в ней не учитывается возможность взаимной компенсации ошибок.

Если для нахождения погрешностей первичных величин использовались простейшие методы (например, некоторые погрешности определены по методу Корнфельда, другие являются предельными приборными погрешностями), величине ΔZ , полученной по формулам (52) - (56), трудно поставить в соответствие точное значение доверительной вероятности. Во-первых, погрешности $\Delta a, \Delta b, \dots$ могут соответствовать различным доверительным вероятностям. Но даже, если эти вероятности одинаковы, ΔZ не обязательно соответствует той же доверительной вероятности. Дело в том, что закон сложения дисперсий, на который мы ссылались при написании (54), можно применять не к произвольным погрешностям, а только к среднеквадратичным ошибкам, которые при простейших способах обработки результатов не вычисляются.

В таком случае для вычисления ΔZ будем использовать формулы (52) - (56), подставляя в них имеющиеся в нашем распоряжении погрешности $\Delta a, \Delta b, \dots$, независимо от того, каким доверительным вероятностям они соответствуют. Полученному значению ΔZ поставим в соответствие наименьшую из доверительных вероятностей, соответствующих погрешностям первичных величин, давшим заметный вклад в ΔZ . Доверительная вероятность для данного ΔZ получится несколько заниженной и не может быть выбрана нами произвольно.

Для нахождения доверительного интервала при произвольной доверительной вероятности необходима статистическая обработка результатов прямых измерений, которая дает оценки

среднеквадратичных ошибок $\sigma_{\bar{a}}, \sigma_{\bar{b}}$ и т.д. Применяя закон сложения дисперсий к (53), можем записать

$$\sigma_Z = \sqrt{\sigma_{Za}^2 + \sigma_{Zb}^2 + \dots}, \quad (58)$$

где

$$\sigma_{Za} = \left| \frac{\partial Z}{\partial a} \right| \sigma_{\bar{a}}; \quad \sigma_{Zb} = \left| \frac{\partial Z}{\partial b} \right| \sigma_{\bar{b}} \dots \quad (59)$$

Если после вычисления $\sigma_{Za}, \sigma_{Zb}, \dots$ окажется, что лишь одна (наибольшая) из этих величин определяет ошибку σ_Z , например, $\sigma_Z \approx \sigma_{Za}$, то погрешность ΔZ определяется через σ_Z и доверительную вероятность так же, как и в случае прямых измерений, т.е. с помощью функции Лапласа или коэффициентов Стьюдента - в зависимости от числа параметров, сформировавших ошибку $\sigma_{\bar{a}}$ соответствующей первичной величины (см. п. 5.2). При этом погрешности ΔZ и Δa , соответствующие заданной доверительной вероятности, связаны соотношением (54).

Если же две и более из величин $\sigma_{Za}, \sigma_{Zb}, \dots$ дают сравнимые вклады в σ_Z , то общее число измерений величин a, b, \dots , определяющих ΔZ , оказывается достаточно большим, и поправки, даваемые коэффициентами Стьюдента, несущественны. Соотношение между ΔZ и полученной оценкой σ_Z определяется нормальным распределением и находится с помощью функции Лапласа (табл. 1).

Получив окончательный результат эксперимента, проведите анализ погрешностей. Нужно осветить следующие вопросы.

Какое измерение дает наибольший вклад в погрешность результата?

Какие погрешности (случайные или приборные) преобладают в эксперименте?

Согласуется ли результат опыта с теорией или с табличными данными? Если нет, то каковы причины расхождения? Расхождение будем считать незначительным, если доверительные интервалы сравниваемых величин перекрываются.

Попробуйте также указать возможные источники систематических ошибок и пути повышения точности эксперимента.

7. ГРАФИКИ

Графики являются одним из наиболее важных методов, имеющихся в распоряжении экспериментатора для анализа дан-

ных. Как правило, графики строят при изучении функциональной зависимости одной величины от другой: $y = f(x)$.

Графики представляют результаты измерений в наиболее наглядной форме при минимальной их обработке, выдавая максимум информации на минимальном пространстве. Построив график, мы сразу выявляем характерные особенности изучаемых зависимостей: области возрастания или убывания, максимумы и минимумы, области наибольшей и наименьшей скорости изменения, периодичность и т.п. Получить эти сведения, пользуясь только таблицами экспериментальных данных, можно лишь после их трудоемкой обработки. Графики позволяют быстро проверить соответствие теории и экспериментальных данных, а также спланировать дальнейшие эксперименты, например, выявить области изменения переменных, требующих более подробного экспериментального исследования.

Наглядность — не единственное достоинство графиков. Они помогают решать и более серьезные задачи.

Обработка графиков позволяет вывести эмпирические соотношения между изучаемыми величинами, т.е. найти вид функции $y = f(x)$ и определить ее параметры, что часто и является конечной целью эксперимента. Графики позволяют найти области, в которых существует та или иная зависимость между величинами, и на основании этого сделать выводы о характере физических процессов (см. пример 16).

Графический метод эффективен лишь при грамотном применении. Необходимо пользоваться определенными правилами построения графиков, выбирать откладываемые по осям величины так, чтобы получилась наиболее показательная зависимость, и владеть хотя бы элементарными способами обработки графического материала.

7.1. Построение и оформление графиков

Выбор бумаги и координатных осей. График выполняется на миллиметровой (или специальной) бумаге, на которую наносятся координатные оси. По оси абсцисс, как правило, откладывается переменная, принятая за независимую (аргумент), по оси ординат — функция. Размер листа выбирается достаточно большим, чтобы было удобно строить график и пользоваться им. Удобны листы миллиметровки в 1 или 2 стандартных формата писчей бумаги (210 x 297 мм), выпускаемые в виде планшетов.

При нанесении осей оставьте место для заголовка и поясняющих подписей, а также поля для вклейки или подшивки графика в лабораторный журнал.

Графические зависимости, снимаемые с экрана осциллографа, выполняются на кальке, которая затем наклеивается на лист более плотной бумаги. При необходимости количественной обработки графика, на кальку наносят координатную сетку, либо переносят график на миллиметровку.

Выбор интервалов. Интервалы изменения переменных по обеим осям выбираются независимо друг от друга так, чтобы была представлена лишь экспериментально исследованная область изменения измеренных величин, а сам график занимал бы практически все поле чертежа. При этом начало координат (точку 0, 0) не обязательно помещать на графике. Это разумно лишь в том случае, когда не потребуется значительного увеличения размеров графика, или, когда точка 0, 0 есть наиболее надежный результат измерения (например, при измерении сопротивления точка $U = 0, I = 0$).

Выбор масштабов и нанесение шкал по осям. Ценность графика во многом зависит от удачного выбора масштаба. За единицу масштаба выбирают отрезки, кратные 5, 10, 50, 100 мм, позволяющие легко отсчитывать на миллиметровой бумаге доли делений координатной сетки.

Шкала должна легко читаться, поэтому расстояние между соседними делениями шкалы (единица масштаба) должно соответствовать "круглому" числу единиц измеряемой величины (1, 2, 5, реже — 4, или те же цифры, умноженные на $10^{\pm n}$). Число делений с цифрами на каждой оси должно быть минимально необходимым для ясного понимания шкалы и составляет обычно от 4 до 10. Рядом с осью или в конце оси указывается откладываемая величина и ее размерность. Множитель $10^{\pm n}$, определяющий порядок величины, включается в единицы измерения, например: " U , мкВ" или " U , 10^{-6} В". Пример обозначения безразмерных величин: " η , отн.ед.", " N , 10^3 ед".

Выбрав масштаб и разметив шкалы, проверьте себя: найдите координаты 2 — 3 произвольно взятых на листе точек. Если на определение двух координат каждой точки затрачивается более 10 секунд или возникают ошибки — шкалы размечены неудачно.

При изменении величин в широком диапазоне значений (на несколько порядков) и при исследовании функциональных зависимостей широко применяют логарифмические координатные сет-

ки. Они бывают двух типов: полулогарифмическая, когда логарифмический масштаб взят только для одной координатной оси, и двойная логарифмическая (или просто логарифмическая), когда логарифмические шкалы строят на обеих осях. Выпускается бумага с логарифмической или полулогарифмической сеткой.

Логарифмическая шкала неравномерна. На оси откладывают отрезки, пропорциональные логарифму измеряемой величины, однако цифры проставляют в соответствии со значениями самой измеряемой величины, а не ее логарифма. Примером могут служить шкалы логарифмической линейки: шкала "x" — логарифмическая неравномерная, а шкала "lgx" — равномерная (рис. 11, а, б). На координатной оси графика полезно давать разметку обеих шкал.

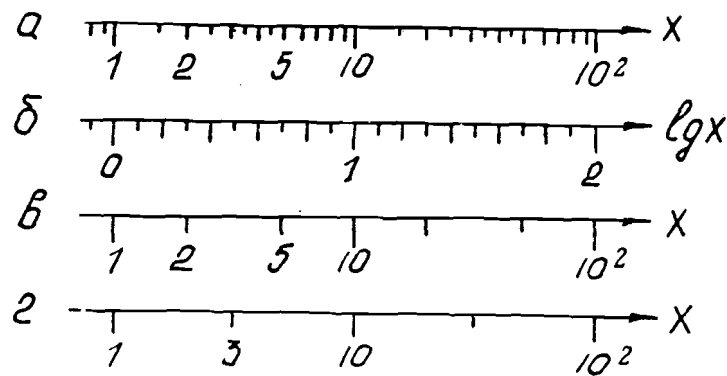


Рис. 11. Логарифмические шкалы

Если нет логарифмической бумаги, несложно разметить логарифмическую шкалу на миллиметровке с достаточной для большинства применений точностью. Полезно запомнить:

$$\lg 2 \approx 0,3; \quad \lg 3 \approx 0,5; \quad \lg 5 \approx 0,7.$$

Поэтому на логарифмической шкале интервалы от 1 до 2, от 2 до 5 и от 5 до 10 составят 0,3; 0,4 и 0,3 интервала, соответствующего изменению величины "на декаду", т.е. в 10 раз. Эти отрезки будут расположены примерно посередине между 1 и 10. Подобные же логарифмические шкалы представлены на рис. 11, в, г.

Масштаб выбирается так, чтобы на декаду приходился отрезок, который удобно делить на части, например, 50 или 100 мм.

Физические величины обладают размерностью, поэтому вычисляют логарифмы не самих величин, а их отношения к единице измерения, общей для всех экспериментальных точек, по которым строится график.

Нанесение точек и погрешностей. Точки на график нужно наносить точно и тщательно, обводя их кружком или другим знаком. Если на одном листе представляются результаты нескольких экспериментов, точки, относящиеся к различным группам опытов, обозначают разными знаками (кружки, треугольники и т.д.).

Погрешности указывают для одной или для обеих измеряемых величин в виде отрезков длиной в доверительный интервал, в центре которых расположены экспериментальные точки, или в виде прямоугольника, стороны которого равны доверительным интервалам (рис. 12).

Поскольку указание погрешностей загромождает график, делайте это лишь тогда, когда информация об ошибках действительно нужна: при построении кривой по экспериментальным точкам, при определении ошибок с помощью графика, при сравнении экспериментальных данных с теоретической кривой, а также в случаях, когда погрешность сильно меняется в пределах графика. Часто достаточно указать погрешность для одной или нескольких точек.

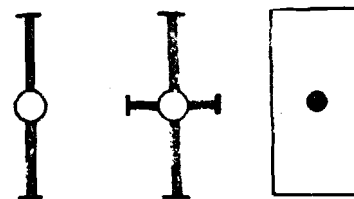


Рис. 12. Указание погрешностей

При точных измерениях погрешность может быть "не видна" на графике. Такой график годится для наглядного представления результатов эксперимента, но для графического анализа данных без потери точности, нужно построить дополнительный график, выбрав масштаб и откладываемые по осям величины так, чтобы погрешность измерений или разброс экспериментальных точек составили несколько мелких делений шкалы.

Проведение кривой по экспериментальным точкам. Если нанесенные на график экспериментальные точки недостаточно наглядно отражают результаты эксперимента, то проводят "наилучшую" кривую, проходящую через доверительные интервалы

возможно ближе к экспериментальным точкам. Не следует соединять точки ломаной линией. Обычно физические зависимости соответствуют гладким, плавно меняющимся функциям, поэтому старайтесь проводить кривые без резких изломов и перегибов. На каждом участке графика точки должны располагаться примерно поровну по обеим сторонам кривой.

Если большое количество точек указывает на излом или скачок графика, которые не объясняются погрешностями измерений или изменением условий опыта (например, переходом на другую шкалу, заменой или подстройкой прибора в процессе опыта, изменением напряжения сети), то эти особенности следует отразить на графике и попытаться объяснить их теоретически, а также более тщательно исследовать экспериментально область изменения переменных вблизи особенностей. Как правило, в этих областях происходят качественные изменения в поведении изучаемой физической системы, проявляются новые эффекты, т.е. эти области наиболее интересны для исследователя.

В ряде случаев линии проводят лишь для части экспериментальных точек, например, для области, где просматривается линейная зависимость между переменными.

Кривая не должна заслонять экспериментальных точек, поскольку именно точки являются результатом опыта, а кривая — лишь толкование результата.

При построении кривой необходимо учитывать погрешности измерений. Например, на рис. 13,а данные эксперимента можно интерпретировать как $y = const$, объяснив разброс точек случайными ошибками, а на рис. 13,б такая интерпретация вряд ли возможна.

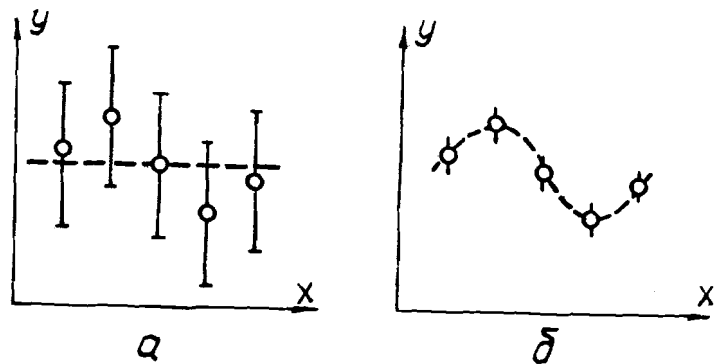


Рис. 13. Интерпретация данных при различных погрешностях

Оформление графиков. Графики снабжаются заголовками и пояснениями, содержащими точное и краткое описание того, что показывает график. Обязательно указываются откладываемые по осям величины и их размерности.

Если на одном графике представлены результаты нескольких экспериментов, расшифровываются обозначения экспериментальных точек. При наличии нескольких кривых, эти кривые обозначаются цифрами, поясняемыми в подписи к графику. Заголовков и пояснения располагают под графиком либо на свободном от кривых и экспериментальных точек месте на самом графике.

7.2. Графический анализ данных

Сравнение с теорией. Для проверки теоретической зависимости на график наносят экспериментальные точки с указанием погрешностей, а также строят теоретическую кривую.

Экспериментальные точки должны быть хорошо видны на графике, а точки, по которым строилась теоретическая кривая — не видны. Вследствие погрешностей измерения экспериментальные точки не лягут точно на кривую. В зависимости от того, пройдет ли теоретическая кривая через доверительные интервалы экспериментальных точек, результаты эксперимента признают согласующимися (рис. 14,а) либо несогласующимися (рис. 14,б) с теорией. В последнем случае следует проверить отсутствие систематических ошибок в измерениях, правильность расчетов и, возможно, пересмотреть теорию. Теория является упрощенным, идеализированным описанием реального мира. Поэтому часто согласие теории с экспериментом наблюдается лишь в ограниченной области изменения переменных, а в других областях существенны явления, которые данной теорией не учитываются.

Выбор наиболее показательной зависимости. При точных измерениях на графике могут оказаться неразличимыми погрешности измерений или отклонения экспериментальных точек от теоретической кривой. Такой график не позволит сравнить теорию с экспериментом или сделать заключение о характере изучаемой зависимости. В этом случае строится дополнительный график для величины, которая в отсутствие погрешностей была бы постоянной или равнялась нулю, например, график для разностей между теоретическими и экспериментальными значениями. Масштаб такого графика всегда можно выбрать так, чтобы погрешности или отклонения от теории стали хорошо заметными.

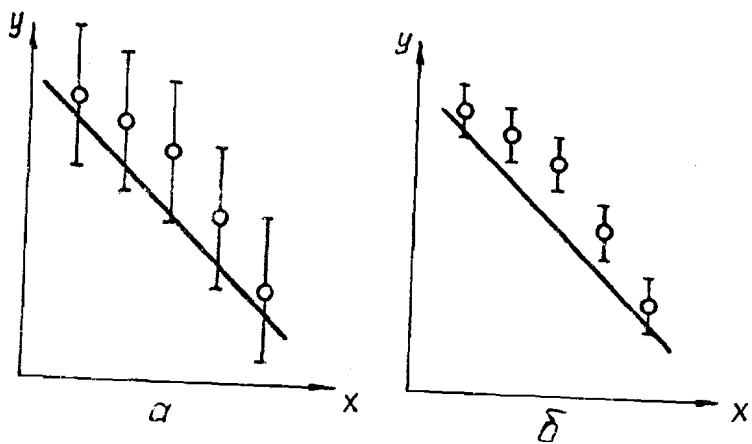


Рис. 14. Сравнение экспериментальных данных с теорией

При проверке линейной зависимости полезен график не самой функции $y(x)$, а ее экспериментально определяемой производной:

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{\text{эксп}} = \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}.$$

При проверке прямой пропорциональной зависимости $y=kx$ полезны также графики величин y/x или $y - k_{\text{эксп}}x$, где $k_{\text{эксп}}$ определяется по каким-либо двум экспериментальным точкам.

Подбор параметров. Функциональная зависимость $y(x)$ может определяться одним или несколькими параметрами, значения которых нужно найти из опыта:

$$y = f(x, a_1, \dots, a_m),$$

Если вид функции известен, строят несколько графиков $y(x)$ для разных значений параметров и выбирают наиболее близкий к экспериментальным точкам. Это громоздкая процедура, и для нелинейной зависимости параметры обычно подбирают с помощью ЭВМ методом наименьших квадратов (п. 8). В случае линейной зависимости есть более простые приемы нахождения параметров.

Простые приемы построения "наилучшей" прямой: Пусть между измеряемыми величинами x_i и y_i ($i = 1, \dots, n$) предполагается существование линейной зависимости:

$$y = kx + b$$

и требуется определить параметры этой зависимости k и b , наиболее соответствующие результатам измерений.

График этой зависимости есть прямая, коэффициент k определяет наклон прямой, величина b определяет отрезок, отсекаемый прямой на оси y .

Для приближенного определения параметров нужно нанести экспериментальные точки на график и провести прямую на глаз так, чтобы по обе стороны от нее оказалось одинаковое количество точек, и отклонения точек от прямой были бы минимальны. Угловой коэффициент k определяется из графика или вычисляется через координаты крайних экспериментальных точек:

$$k = \frac{y_n - y_1}{x_n - x_1}.$$

Погрешность находим по формуле

$$\Delta k = \frac{\Delta y}{x_n - x_1},$$

где Δy — погрешность в определении y . Если погрешность измерения y неизвестна или отклонения точек от проведенной прямой больше этой погрешности, в качестве Δy следует взять наибольшее из этих отклонений.

Для более точного определения k воспользуемся методом парных точек. Пронумеруем экспериментальные точки (рис. 15), возьмем две из них, например, 1 и 4 проведем через них прямую. Эта прямая имеет угловой коэффициент

$$k_1 = \frac{y_4 - y_1}{x_4 - x_1}.$$

Возьмем затем другую пару точек — 2 и 5, снова построим прямую и определим ее угловой коэффициент. Проведя таким образом еще несколько прямых, мы получим набор значений угловых коэффициентов. Их среднее даст угловой коэффициент k искомой прямой.

Погрешность углового коэффициента Δk определяется так же, как и погрешность среднего значения серии измерений.

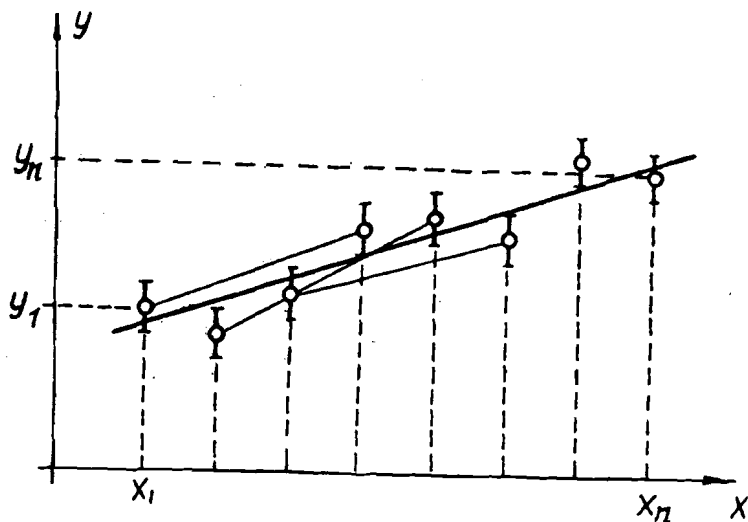


Рис. 15. Построение прямой методом парных точек

Точки для проведения вспомогательных прямых следует выбирать так, чтобы расстояния между координатами x_i этих точек были для всех прямых одинаковыми и немного превышали половину всего интервала значений величины x . При этом точность определения k будет наибольшей и лишь немного хуже, чем при использовании метода наименьших квадратов.

Вспомогательные прямые не обязательно проводить на графике, достаточно ограничиться лишь вычислением угловых коэффициентов этих прямых, а на графике построить только наилучшую прямую.

Для нахождения \bar{y} нужно учесть, что наилучшая прямая должна проходить через центр тяжести экспериментальных точек, т.е. через точку с координатами

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i; \quad \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i.$$

Это условие мы докажем в п. 8. Из уравнения прямой находим

$$y = \bar{y} - k \bar{x}. \quad (60)$$

При построении наилучшей прямой измеренные значения x_i обычно считают точными. Тогда погрешность определения \bar{y}

$$\Delta \bar{y} = \sqrt{(\Delta \bar{y})^2 + (\bar{x} \Delta k)^2}. \quad (61)$$

В качестве грубой оценки $\Delta \bar{y}$ используем максимальное отклонение точек от проведенной прямой. Если прямая пересекается с осью в пределах экспериментально исследованной области (от x_1 до x_n), то основной вклад в $\Delta \bar{y}$ дает $\Delta \bar{y}$, если за пределами этой области — погрешность $\Delta \bar{y}$ определяется погрешностью Δk .

Интерполяция и экстраполяция. При экспериментальном изучении зависимости $y(x)$ мы получаем значения y_i лишь для конечного числа значений аргумента x_i . Процедура нахождения значений $y(x)$ в произвольных точках x в пределах экспериментально изученной области называется интерполяцией, за пределами этой области — экстраполяцией. Та и другая могут быть графической или аналитической (расчетной).

При графической интерполяции по экспериментальным точкам строят плавную кривую и находят значения $y(x)$ по графику. Если зависимость $y(x)$ линейная, таким графиком является "наилучшая" прямая. При расчетном методе подбирают аналитическую зависимость $y(x)$ по методу наименьших квадратов (МНК) (п. 8).

Более простой, но менее точной является линейная интерполяция: полагая, что между соседними экспериментальными точками зависимость $y(x)$ линейная, соединяют эти точки отрезками прямых.

Пример 13. Покажите, что при линейной интерполяции

$$y = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i} (x - x_i); \quad x_i \leq x \leq x_{i+1}.$$

График, предназначенный для линейной интерполяции (но не для представления результатов опыта!) имеет вид ломаной линии, проходящей через экспериментальные точки.

Не путайте линейную интерполяцию с интерполяцией при помощи наилучшей прямой.

Интерполяцией широко пользуются при градуировке шкал приборов. Сначала находят показания прибора для нескольких эталонных (заранее известных) значений измеряемой величины, затем строят градуировочный график, определяющий измеряемую величину как функцию показаний прибора. Примеры: граду-

ировка шкалы монохроматора (спектрометра) по известным длинам волн спектра излучения ртути; градуировка шкалы амперметра по показаниям другого, "эталонного" амперметра; градуировка шкалы генератора с помощью частотомера и т.д.

Экстраполяцию стараются применять лишь в случаях, когда результаты опыта ясно указывают на линейный характер зависимости $y(x)$. По данным опыта находят "наилучшую" прямую и используют ее график или уравнение. Для экстраполяции или интерполяции это уравнение пишут в виде

$$y = \bar{y} + k(x - \bar{x}), \quad (62)$$

но не в виде

$$y = kx + b,$$

поскольку величина b сама определяется через \bar{x} , \bar{y} , k , т.е. является результатом интерполяции или экстраполяции с помощью прямой, проведенной через наиболее достоверную точку (\bar{x}, \bar{y}) .

При интерполяции с помощью наилучшей прямой, основной вклад в погрешность Δy вносит погрешность нахождения \bar{y} , при экстраполяции — погрешность углового коэффициента Δk . Особое внимание на точность определения k обращается при экстраполяции на расстояния, значительно превышающие размер экспериментально исследованной области.

При нелинейной зависимости $y(x)$ графическая экстраполяция невозможна, а аналитическая требует применения ЭВМ.

Пример 14. Считая измерения x_i точными, получите из (62) выражение для погрешности Δy .

Использование функциональных шкал. Линейная зависимость легко обнаруживается и проверяется на графике (достаточно приложить линейку к экспериментальным точкам) и очень удобна для анализа. Поэтому, при обработке результатов измерений к ней стараются привести нелинейные зависимости, для чего строят графики, откладывая по осям не сами измеряемые величины, а функции этих величин.

Часто встречающиеся в физике степенные и показательные зависимости преобразуются в линейные с помощью логарифмических шкал. Если

$$y = ax^p, \\ \lg y = \lg a + p \lg x \quad (63)$$

то

и график получится линейным в логарифмических координатах. Если же

$$y = a e^{kx},$$

то

$$\lg y = \lg a + kx \quad (64)$$

и график будет линейным в полулогарифмическом масштабе (по оси x откладывается сама измеряемая величина, а по оси y логарифм измеряемой величины). Проведя наилучшую прямую и определив ее угловой коэффициент (например, методом парных точек), найдем величины p или k и их погрешности. Для графического определения величины a нужно провести прямую с уже известным угловым коэффициентом через центр тяжести экспериментальных точек и найти точку пересечения этой прямой с осью ординат. Эта точка даст значение $\lg a$, но лишь в том случае, когда ось ординат проходит через начало отсчета на оси абсцисс. Более надежным является определение a из уравнений (63) или (64).

Поскольку работа с функциональными шкалами требует определенных навыков, а применять их приходится довольно часто, рассмотрим несколько примеров.

Пример 15. Диэлектрическая проницаемость сегнетоэлектрика при температуре T выше некоторой характерной для данного материала "температуры Кюри" T_K меняется по закону $\epsilon = A/(T - T_K)$. Для экспериментального определения T_K измеряют зависимость от температуры емкости конденсатора с данным сегнетоэлектриком между обкладками. Поскольку емкость $C \propto \epsilon$, то $C^{-1} \propto T - T_K$ и для графического анализа данных нужно строить зависимость C^{-1} от температуры. Если экспериментальные точки лягут на прямую линию, то точка пересечения этой линии с осью абсцисс даст значение T_K .

Пример 16. Требуется выяснить характер обтекания жидкостью колеблющегося в ней маятника. Теория предсказывает, что при ламинарном обтекании амплитуда колебаний убывает по экспоненциальному закону, $a \propto e^{-\beta t}$, за счет сил вязкого трения. Результаты опытов, проведенных при различных начальных значениях амплитуды, представлены в табл. 4, погрешность всех измерений амплитуды $\Delta a = 1$ мм.

Таблица 4
Амплитуда колебаний маятника, мм

t с	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
Опыт 1	280	152	98	68	50	37	29	22	18	14	11	9
Опыт 2	43	33	25	20	16	12	10	8	6	-	-	-

С учетом предсказаний теории строим график в полулогарифмическом масштабе (рис. 16) и убеждаемся, что точки ложатся на прямую лишь при $a < 50$ мм. Отсюда делаем вывод, что ламинарное обтекание имеет место лишь при малых амплитудах.

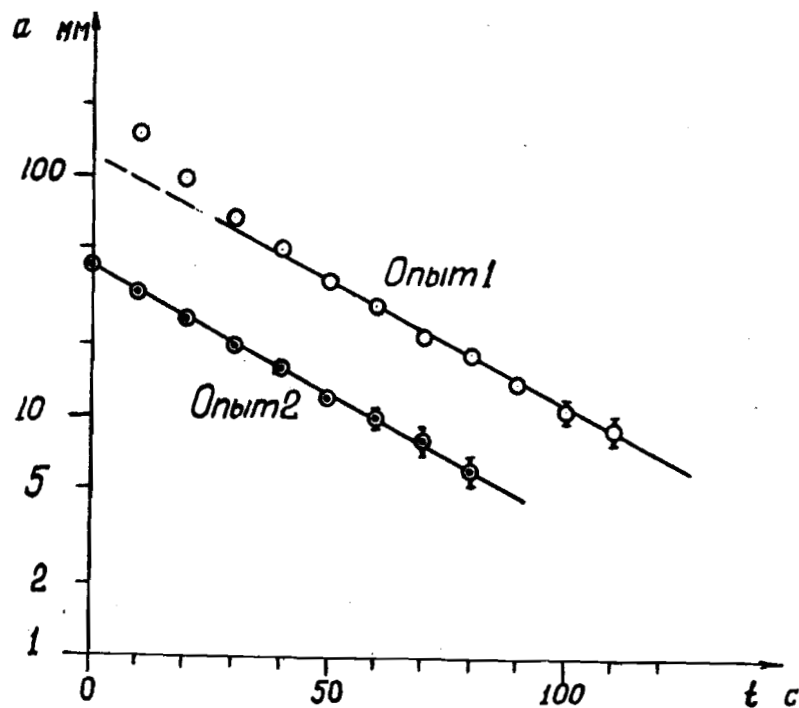


Рис. 16. Зависимость амплитуды колебаний маятника от времени

Обратите внимание на указание погрешностей (см. рис. 16). Абсолютная погрешность Δa для всех точек одинакова, но на логарифмической шкале отрезки пропорциональны относительной погрешности $\Delta a/a$, поэтому погрешность видна на графике лишь для малых значений a .

Пример 17. Теоретическая зависимость тока I через полупроводниковый диод от приложенного к нему напряжения U имеет вид

$$I = I_0 (e^{U/U_0} - 1),$$

где I_0 и U_0 — константы, причем U_0 составляет несколько десятков милливольт. Требуется проверить теоретическую зависимость и найти эти константы. Была снята вольтамперная характеристика диода Д 223 (табл. 5), причем ток и напряжение измерялись с погрешностью менее 1%.

Таблица 5
Вольтамперная характеристика диода Д 223

№ изм.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U мВ	413	450	468	495	527	552	581	620	651	683
I мкА	20,0	50,0	100	200	500	$100 \cdot 10$	$200 \cdot 10$	$300 \cdot 10$	$100 \cdot 10^2$	$200 \cdot 10^2$

По данным таблицы $U \gg U_0$, поэтому

$$I \approx I_0 e^{U/U_0}.$$

и график должен быть линейным в полулогарифмическом масштабе:

$$\lg I = \lg I_0 + \frac{\lg e}{U_0} U. \quad (65)$$

При вычислении логарифмов, значения I берем все время в одних и тех же единицах ($I_{до} = 1$ мкА). Построив точки на графике (рис. 17), видим, что только первые 6 точек хо-

рошо ложатся на прямую, т.е. зависимость (65) выполняется при $I < 1$ мА, и параметры ее надо искать по точкам 1-6.

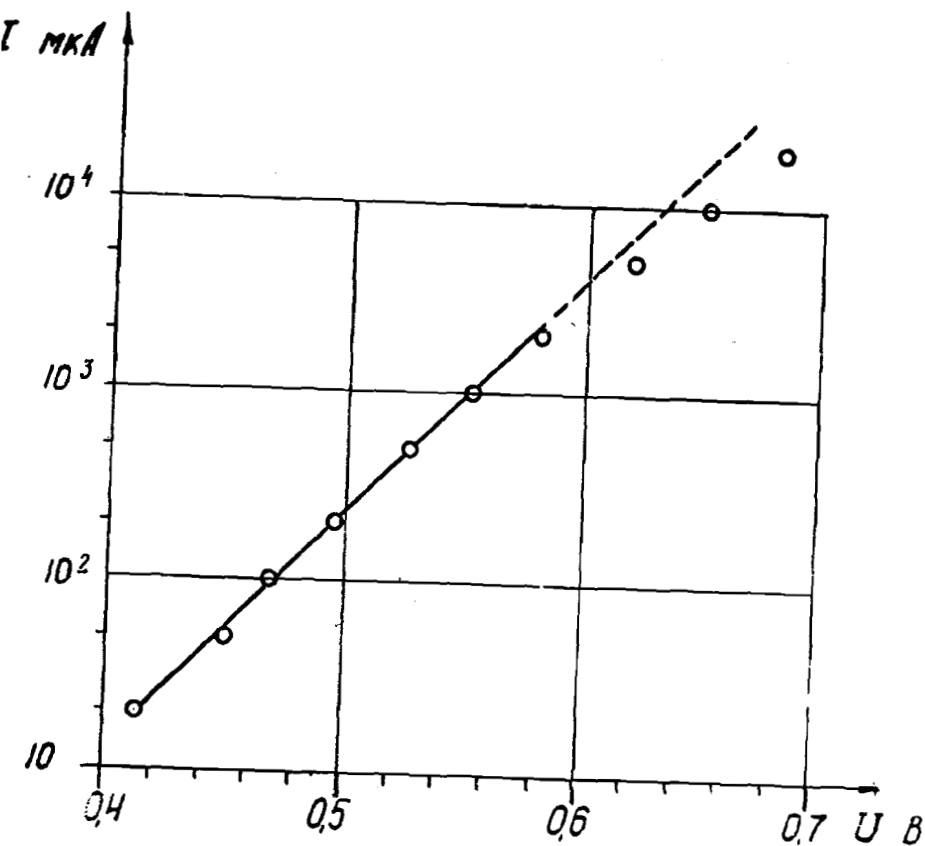


Рис. 17. Вольтамперная характеристика диода

Для определения угла этого коэффициента прямой, равного $\lg e / U_0$, вычислим приращения $\delta \lg I$ и δU для нескольких пар точек и затем соответствующие значения U_0 :

$$\frac{\lg e}{U_0} = \frac{\delta \lg I}{\delta U}; \quad U_0 = \frac{\delta U}{\delta \lg I} \lg e.$$

Результаты вычислений приведены в табл. 6

Таблица 6

Пары точек	δU мВ	$\delta \lg I$	U_0 мВ
1 - 4	82	1,00	35,6
2 - 5	77	1,00	33,4
3 - 6	84	1,00	36,5

Учитывая разброс U_0 по Корнфельду, находим

$$U_0 = 35 \pm 2 \text{ мВ}; \quad \alpha = 0,75.$$

Для определения I_0 запишем, согласно (65)

$$\lg I_0 = \lg I - \frac{\lg e}{U_0} U. \quad (66)$$

Так как прямая проходит через центр тяжести экспериментальных точек, вычисляем средние значения $\lg I$ и напряжения U для точек 1-6, затем находим I_0 :

$$\overline{\lg I} = 2,17; \quad \bar{U} = 484 \text{ мВ}; \quad I_0 = 1,5 \cdot 10^{-4} \text{ мкА}.$$

Основной вклад в погрешность дает разброс значений U_0 , и из (66) находим

$$\frac{\Delta I_0}{I_0} = \frac{U}{U_0} \cdot \frac{\Delta U_0}{U_0} = 0,8; \quad \Delta I_0 = 1 \cdot 10^{-4} \text{ мкА}.$$

Окончательно

$$I_0 = (1,5 \pm 1) \cdot 10^{-10} \text{ А}.$$

При работе с показательными и другими быстро меняющимися функциями нужно особо тщательно следить за точностью измерений, поскольку даже небольшие погрешности прямых измерений могут привести к большим ошибкам в определении параметров этих функций. В нашем примере колебания значений δU в табл. 6 меньше 1% величины U , однако относительная погрешность U_0 составила 5%, а величины I_0 — целых 80%. Большая погрешность I_0 обусловлена также экстраполяцией на большое расстояние.

Пример 18. Для определения постоянной времени $\tau = RC$ изображенной на рис. 18.а RC - цепочки, на ее вход подают переменное напряжение $U_{вх}$ неизменной амплитуды U_0 , но с изменяющейся частотой ν , и изучают зависимость амплитуды выходного напряжения U_1 от частоты входного. Полученные результаты приведены в табл. 7.

Таблица 7

Определение постоянной времени

ν кГц	0,10	0,20	0,50	1,00	2,00	5,0	10	20	50	100
U_1 мВ	422	416	419	400	353	216	123	59	28	15

Теоретическая зависимость (рис. 18,а)

$$U_1 = \frac{U_0}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}$$

на первый взгляд не указывает простых рецептов нахождения τ по экспериментальным данным. Учитывая, однако, что частота ν (и вместе с ней $\omega = 2\pi\nu$) меняется в широких пределах, рассмотрим предельные случаи:

$$U_1 \approx U_0 \quad \text{при } \omega\tau \ll 1; \quad (67)$$

$$U_1 \approx \frac{U_0}{\omega\tau} \quad \text{при } \omega\tau \gg 1. \quad (68)$$

Экстраполируя высокочастотную зависимость (68) в области низких частот до частоты ω_0 , при которой окажется $U_0/\omega_0\tau = U_0$, мы найдем характерную частоту $\omega_0 = 1/\tau$ и тем самым определим τ (см. рис. 18,а). Но экстраполяция нелинейной зависимости очень сложна (без ЭВМ ее проделать практически невозможно). Воспользуемся тем, что обе зависимости (67) и (68) будут линейными в логарифмических координатах. Построив график (рис. 18,б), убеждаемся, что данные опыта на низких и на высоких частотах ложатся на две прямые, точка пересечения которых определяет частоту $\nu_0 = 2,8$ кГц. Искомая постоянная времени

$$\tau = \frac{1}{2\pi\nu_0} = 5,7 \cdot 10^{-5} \text{ с.}$$

Подумайте сами, как определить погрешность τ .

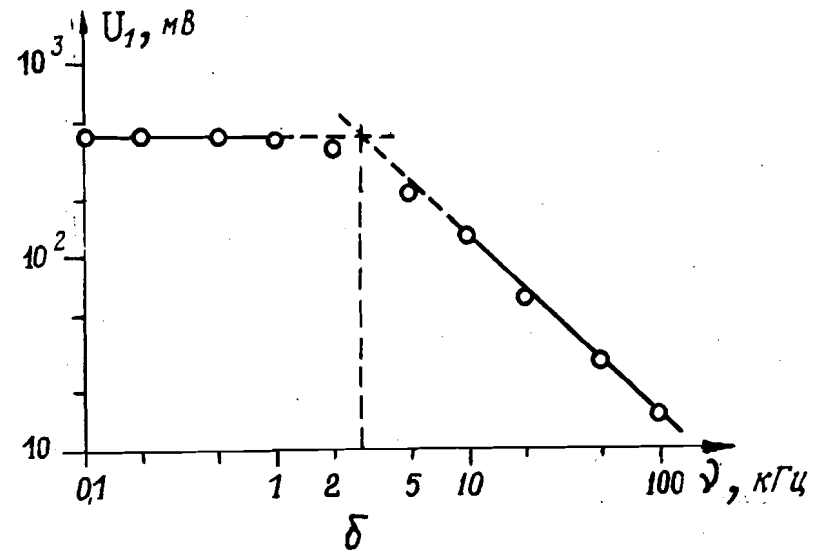
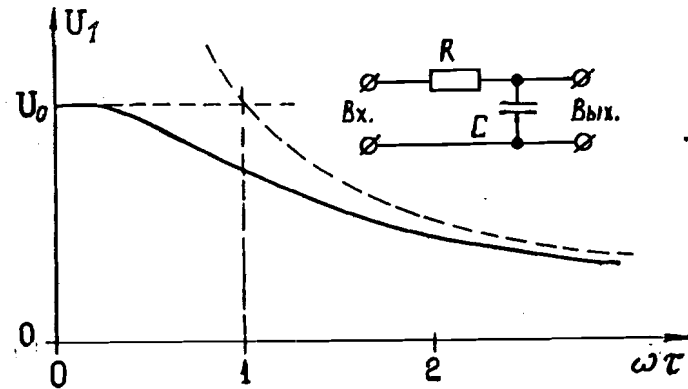


Рис. 18. Определение постоянной времени

8. МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Между совместно измеряемыми величинами (например, x_i и y_i , где i — номер измерения) часто существует функциональная зависимость (сила тока зависит от напряжения, время падения зависит от высоты и т.д.). Пусть вид этой зависимости известен с точностью до значений некоторых параметров

$$a_1, \dots, a_m, \\ y = f(x, a_1, \dots, a_m),$$

и нужно подобрать значения параметров так, чтобы расхождение расчетной кривой с результатами эксперимента было минимальным.

Критерием получения "наилучшей" комбинации параметров служит минимальность суммы квадратов отклонений или среднеквадратичного отклонения экспериментальных точек от расчетной кривой. Подбор параметров по такому принципу называется методом наименьших квадратов (МНК).

МНК не дает вида зависимости $y(x)$. Вид зависимости выбирается либо из теоретических предположений, либо как наиболее соответствующий экспериментальным данным.

МНК является мощным, но слепым орудием, позволяющим найти наилучшие параметры любой зависимости, которая приписывается какому угодно набору данных. Можно, например, на рис. 18,б строить не две прямые для отдельных групп точек, а провести одну "наилучшую" прямую для всей совокупности точек, или построить по МНК "наилучшую" синусоиду или, наконец, соединить экспериментальные точки ломаной линией, которая заведомо удовлетворит критерию МНК, но такие построения никому не нужны, поскольку неверно интерпретируют результаты опыта.

Поэтому перед применением МНК необходимо убедиться, что результаты опыта действительно соответствуют предполагаемой зависимости. Прежде всего нужно представить результаты графически. Часто предполагаемая зависимость выполняется в ограниченной области изменения переменных. Эту область легко выделить на графике и тем самым избежать грубой ошибки.

При интерпретации опытных данных значения x_i будем считать точными. Погрешности в определении x_i приводят к дополнительному разбросу y_i и тем самым учитываются в отклонениях y_i от расчетной кривой.

Критерий МНК требует минимальности суммы

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i, a_1, \dots, a_m)]^2.$$

Условия минимума

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0, \text{ при } j = 1, \dots, m$$

содержат m уравнений, т.е. столько, сколько неизвестных параметров a_j .

Применим МНК к линейной зависимости

$$y = kx + b. \quad (69)$$

Сумма

$$S = \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - b)^2$$

минимальна при условии:

$$\frac{\partial S}{\partial k} = -2 \sum_{i=1}^n x_i (y_i - kx_i - b) = 0;$$

$$\frac{\partial S}{\partial b} = -2 \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - b) = 0.$$

Отсюда приходим к уравнениям

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = k \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i;$$

$$\sum_{i=1}^n y_i = k \sum_{i=1}^n x_i + nb.$$

Разделив обе части уравнений на n , получим

$$\bar{x}y = k\bar{x}^2 + b\bar{x}; \quad (70)$$

$$\bar{y} = k\bar{x} + b. \quad (71)$$

Из последнего уравнения следует, что наилучшая прямая проходит через центр тяжести экспериментальных точек, т.е. через точку с координатами \bar{x} , \bar{y} .

Решение уравнений (70) и (71) запишем в виде

$$k = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}; \quad (72)$$

$$b = \bar{y} - k\bar{x}. \quad (73)$$

Выражения для ошибок приведем без вывода:

$$\sigma_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-2)} \sum_{i=1}^n (y_i - kx_i - b)^2}; \quad (74)$$

$$\sigma_k = \sigma_{\bar{y}} \sqrt{\frac{1}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}}; \quad (75)$$

$$\sigma_b = \sigma_{\bar{y}} \sqrt{\frac{\bar{x}^2}{\overline{x^2} - \bar{x}^2}}. \quad (76)$$

Если экспериментальные точки группируются вдали от начала координат, то вычисления должны проводиться с большой точностью, без округлений, поскольку в (72) – (76) – появятся малые разности больших величин, и ошибки округления могут быть сравнимы с этими разностями. Удобен для расчетов портативный калькулятор с ячейкой памяти, в которой накапливаются члены сумм при вычислении средних значений. При небольшом навыке вычисление k , b и их погрешностей для 6 – 10 экспериментальных точек занимает 20 – 30 минут. Если точные вычисления проводить не на чем, нужно перенести начало координат в точку \bar{x} и вычислить новые значения $x'_i = x_i - \bar{x}$. В новой системе координат будет $\bar{x}' = 0$ и выражения (72), (73), (75), (76) существенно упростятся, а для расчетов хватит точности логарифмической линейки.

Пример 19. Применим МНК к зависимости, рассмотренной в примере 17 (см. рис. 17). Обозначим в соответствии с (65):

$$x = U; \quad y = \lg I; \quad b = \lg I_0; \quad k = \frac{\lg e}{U_0}.$$

Пересчитывая данные табл. 5 для первых шести точек, получим

Таблица 8

№ изм.	1	2	3	4	5	6
x	413	450	468	495	527	552
y	1,301	1,699	2,000	2,301	2,699	3,000

Отсюда находим

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 484,2; & \bar{y} &= 2,167; & \overline{x^2} &= 2,366 \cdot 10^5; \\ \overline{xy} &= 1076; & k &= 1,24 \cdot 10^2; & b &= -3,84; \\ \sigma_{\bar{y}} &= 1,2 \cdot 10^{-2}; & \sigma_k &= 2,6 \cdot 10^{-4}; & \sigma_b &= 0,13. \end{aligned}$$

Количество знаков в первых четырех результатах оставлено "с запасом", чтобы избежать ошибок округления. Окончательные результаты

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{\lg e}{k} = 35 \text{ мВ}; & \frac{\Delta U_0}{U_0} &= \frac{\sigma_k}{k} = 2 \cdot 10^{-2}; \\ I_0 &= 10^b = 1,4 \cdot 10^{-4} \text{ мкА}; & \Delta I / I_0 &= \sigma_b / \lg e = 0,3 \end{aligned}$$

близки к полученным ранее методом парных точек.

Сказанное выше относилось к равноточным измерениям. Если же погрешности отдельных измерений величины y существенно различаются, критерий МНК требует минимальности взвешенного среднеквадратичного отклонения экспериментальных точек от расчетной кривой. При построении наилучшей прямой остаются справедливыми выражения (72) и (73) для k и b , но входящие в них средние значения должны быть взвешенными средними (п. 5.1).

Вычисления по МНК обычно проводят на ЭВМ, используя стандартные программы.

Пример 20. Покажите, что при измерении одной величины x значение $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ удовлетворяет критерию МНК, т.е. среднеквадратичное отклонение экспериментальных точек от этого значения минимально.

Пример 21. Покажите, что величины (75) и (76) удовлетворяют соотношению (61), приведенному в п. 7.2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Скрайос Дж. Практическая физика. — М.: Мир, 1971.
2. Зайдель А.Н. Ошибки измерений физических величин. — Л.: Наука, 1974.
3. Кассандрова О.Н., Лебедев В.В. Обработка результатов наблюдений. — М.: Наука, 1970.
4. Корнфельд М.И. Погрешность и надежность простейших экспериментов. УФН, т. 85, с. 533, 1965.
5. Шенк Х. Теория инженерного эксперимента. — М.: Мир, 1972.
6. Худсон Д. Статистика для физиков. — М.: Мир, 1970.
7. Смирнов Н.В., Дунин-Барковский И.В. Курс теории вероятностей и математической статистики для технических приложений. — М.: Наука, 1969.
8. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. — М.: Наука, 1969.
9. Линник Ю.В. Метод наименьших квадратов и основы теории обработки наблюдений. — М.: Физматгиз, 1968.
10. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров, гл. 19, 20. — М.: Наука, 1970.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие.....	3
1. Погрешности измерений.....	7
2. Доверительный интервал и доверительная вероятность	10
3. Статистические распределения.....	14
3.1. Параметры статистических распределений.....	15
3.2. Распределение Гаусса и распределение Пуассона..	22
3.3. Параметры выборки. Распределение средних значений.....	26
4. Приборные погрешности.....	31
5. Статистическая обработка результатов прямых измерений.....	35
5.1. Усреднение неравноточных измерений.....	35
5.2. Погрешности результатов прямых измерений.....	37
5.3. Погрешности счета случайных событий.....	39
6. Вычисление погрешностей при косвенных измерениях	41
7. Графики.....	45
7.1. Построение и оформление графиков.....	46
7.2. Графический анализ данных.....	51
8. Метод наименьших квадратов.....	64
Список литературы.....	68

Светозаров Владимир Владимирович

ОСНОВЫ ОБРАБОТКИ
РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Редактор И. А. Астаховская
Технический редактор О. И. Скробнева
Корректор Е. А. Жадан

Л-65807	Подписано в печать 30/УП-1980 г.
Формат 60x84 1/16	Объем 4,5 п.л. Уч.-изд.л. 4,0
Цена 18 коп.	Тираж 1500 экз. Изд. № 058-1
	Заказ 196

Типография МИФИ, Каширское шоссе, 1