ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

М.В. СУЧКОВ, А.П. ГОРЯЧЕВ

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Рекомендовано УМО "Ядерные физика и технологии"
в качестве учебно-методического пособия
для студентов вузов

Москва 2008

УДК 517.852(07)
ББК 22.18я7
С 91

Сучков М.В., Горячев А.П. Линейное программирование.
М.: МИФИ, 2008. – 68 с.

Данное учебно-методическое пособие предназначено для студентов третьего курса факультета Д при изучении линейного программирования. Здесь изложены все необходимые студентам теоретические сведения по этой дисциплине. Изложение сопровождается рассмотрением примеров решения всех классов возникающих при этом задач.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент: профессор Ю.Г. Древс

ISBN 978–5–7262–0924–1

Оглавление

Введение

Линейное программирование – часть более общей науки, называемой *математическим программированием*. Слово "программирование" здесь не предполагает написания какой-нибудь программы для компьютера (ЭВМ) на машинном либо алгоритмическом языке, а означает *выбор* из некоторого числа возможных действий или стратегий таких, которые приводят к оптимальному результату, то есть выбор программы действий, приводящей к поставленной цели. Цель или общая задача математического программирования состоит, как правило, в нахождении экстремума (максимума либо минимума) функции конечного числа (n) переменных на множестве $D \in \mathbb{R}_n$ и точки (точек), где этот экстремум достигается.

Например, найти

$$\min_D f(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

При этом функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *целевой* функцией, а множество D – *допустимым* множеством, которое задаётся в виде ограничений на переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, записанных в форме равенств или неравенств:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0; & h_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \\ g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0; & h_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geqslant 0; & h_p(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{cases}$$

Если функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$; $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $i = 1$, 2, …, m; $h_j(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $j = 1$, 2, …, p – *линейны*, то полученную задачу называют *общей задачей линейного про-*

граммирования, которую мы и будем рассматривать. В этом случае:

$$f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = (\vec{c}, \vec{x}\,)\,;$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m;$$

– ограничения в виде неравенств;

$$d_{j1}x_1 + d_{j2}x_2 + \cdots + d_{jn}x_n = v_j, \quad j = 1, 2, \ldots, p;$$

– ограничения в виде равенств.

Если ограничения в задаче линейного программирования имеются только в виде равенств (кроме элементарных неравенств, показывающих неотрицательность переменных), то задача называется *канонической*, а если только в виде неравенств, то она называется *стандартной*. При этом в той и другой задачах переменные x_i предполагаются неотрицательными ($x_i \geqslant 0$). Ограничения в виде неравенств всегда можно свести к ограничениям в виде равенств с помощью введения новых переменных. Они называются *балансовыми*, *дополнительными*, *слабыми*, *переменными невязки*. Например, ограничение

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n \geqslant b_i$$

переходит в равенство, если ввести новую переменную

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n - b_i$$

с условием, выраженным элементарным неравенством

$$y_i \geqslant 0.$$

Если некоторая переменная x_i не является неотрицательной, то её можно заменить двумя неотрицательными переменными x_i^+ и x_i^-:

$$x_i = x_i^+ - x_i^-, \quad x_i^+ \geqslant 0, \quad x_i^- \geqslant 0.$$

Поскольку первоначально задачи линейного программирования возникли из экономической практики, рассмотрим в качестве *примеров* несколько несложных задач, имеющих экономическое содержание.

Пример 1. Задача о банке.

Пусть средства банка составляют 100 млн долларов. Одна часть этих средств, но не менее 35 млн долларов, должна быть размещена в *кредитах*. Другая часть средств должна быть размещена в *ценных бумагах*. Кредиты являются *неликвидными* активами банка, так как в случае непредвиденной потребности в денежных средствах обратить кредиты в деньги без существенных потерь невозможно. Другое дело – ценные бумаги. Их можно продать в любой момент, получив некоторую прибыль, или уж во всяком случае без большого убытка. Поэтому существует правило, согласно которому коммерческие банки должны покупать в определённой пропорции *ликвидные* активы – ценные бумаги, чтобы компенсировать неликвидность кредитов. Пусть, например, ликвидное ограничение таково: ценные бумаги должны составлять не менее 30% средств, размещённых в кредитах и ценных бумагах. Пусть доход от кредитов составляет 8%, а от ценных бумаг, соответственно, 3%. Цель банка – получить максимальную прибыль от кредитов и ценных бумаг.

Поставим задачу линейного программирования. Пусть
x(млн долл.) – средства, размещённые в кредитах;
y(млн долл.) – средства, размещённые в ценных бумагах.

Нужно найти $\max(0.08x + 0.03y)$ при условиях

$$\begin{cases} x + y \leqslant 100, \\ x \geqslant 35, \\ y \geqslant 0.3(x+y); \end{cases} \qquad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$

П р и м е р 2. Транспортная задача.

На двух шахтах добывается руда: на первой 300 т в день, а на второй 150 т в день. Вся руда ежедневно перерабатывается на двух заводах, причём первый завод может перерабатывать в день не более 350 т руды, а второй – не более 250 т. Стоимость перевозки 1 т руды от каждой шахты до каждого завода определяется из прилагаемой таблицы. Сколько руды нужно возить с каждой шахты на каждый завод, чтобы общая стоимость перевозок была наименьшей? Найти эту стоимость.

	I завод	II завод
I шахта	25	28
II шахта	27	31

Поставим задачу линейного программирования. Пусть

x(т) руды перевозится с I-й шахты на I-й завод;
y(т) руды перевозится со II-й шахты на I-й завод.

Тогда

$300 - x$(т) руды перевозится с I-й шахты на II-й завод;
$150 - y$(т) руды перевозится со II-й шахты на II-й завод.

Нужно найти

$$\min_D \big[25x + 28(300 - x) + 27y + 31(150 - y)\big] = \\ = \min_D[-3x - 4y + 13050],$$

где множество D задаётся условиями:

$$\begin{cases} x+y \leqslant 350, \\ 300-x+150-y \leqslant 250, \\ 0 \leqslant x \leqslant 300, \\ 0 \leqslant y \leqslant 150, \end{cases} \iff \begin{cases} 200 \leqslant x+y \leqslant 350, \\ 0 \leqslant x \leqslant 300, \\ 0 \leqslant y \leqslant 150. \end{cases}$$

Пример 3. Распределение ресурсов.

Имеется два вида сырья S_1 и S_2 в количествах 800 и 1400 единиц соответственно. Из этого сырья можно изготовить три вида продукции: P_1, P_2 и P_3. Затраты сырья на изготовление одной единицы продукции даны в таблице:

сырьё \ продукция	P_1	P_2	P_3
S_1	4	2	5
S_2	2	6	5

Цена реализации готовых изделий P_1, P_2 и P_3 равна соответственно 8, 14 и 10 условных единиц. Требуется найти план производства продукции, приносящий максимальную прибыль.

Поставим задачу линейного программирования. Пусть x, y, z – количество производимых изделий вида P_1, P_2, P_3 соответственно. Нужно найти

$$\max_D (8x+14y+10z),$$

где множество D задаётся условиями:

$$\begin{cases} 4x+2y+5z \leqslant 800, \\ 2x+6y+5z \leqslant 1400; \end{cases} \quad x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0.$$

Пример 4. Планирование производства.

Завод корпорации “Дженерал Моторс” получает прибыль в размере 100 долларов за каждый собранный “шевроле”, 200 долларов за каждый “бьюик”, 400 долларов за каждый “кадиллак”. Эти машины проходят соответственно по 20, 17 и 14 миль на одном галлоне бензина. Конгресс США постановил, что в автомобильных корпорациях произведённый автомобиль должен проходить в среднем не менее 18 миль на одном галлоне бензина. Завод может собрать “шевроле” за 1 минуту, “бьюик” за 2 минуты, “кадиллак” за 3 минуты. Требуется найти максимальную прибыль завода за восьмичасовой рабочий день.

Поставим задачу линейного программирования. Пусть x, y, z – количество собранных “шевроле”, “бьюиков”, “кадиллаков” соответственно. Тогда:

$20x + 17y + 14z$ – количество миль, проходимых всеми собранными автомобилями на одном галлоне бензина;

$x + 2y + 3z$ – время в минутах, затраченное на производство всех автомобилей.

Нужно найти

$$\max_D (100x + 200y + 400z),$$

где множество D задаётся условиями:

$$\begin{cases} 20x + 17y + 14z \geqslant 18(x + y + z), \\ x + 2y + 3z \leqslant 480, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0; \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + y + 4z \leqslant 0, \\ x + 2y + 3z \leqslant 480, \\ x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0. \end{cases}$$

Решения задач, поставленных в этих примерах, будут описаны позже, а сейчас обратимся к геометрии задач линейного программирования.

Система ограничений, записанных в виде равенств или неравенств, в задаче линейного программирования определяет некоторое *выпуклое* многогранное тело в $\mathbb{R}_n$. (Множество называется *выпуклым*, если вместе с любыми двумя точками содержит соединяющий их отрезок.) Это и есть допустимое множество D. Как правило, выпуклое многогранное тело D содержит вершины или угловые точки, в которых сходятся рёбра тела D. Целевая функция в задаче линейного программирования – это гиперплоскость в $\mathbb{R}_n$. Говорят, что целевая функция *ограничена* на множестве D, если в задаче на максимум она ограничена на D сверху, а в задаче на минимум она ограничена на D снизу. Справедлива следующая теорема.

Т е о р е м а. Если в задаче линейного программирования множество D непусто и целевая функция ограничена на D, то существует хотя бы одно *оптимальное* решение, то есть решение, определяемое точкой, принадлежащей D, в которой достигается искомый экстремум целевой функции. При этом, если множество D содержит хотя бы одну угловую точку, то существует угловая точка множества D, определяющая оптимальное решение задачи. Такая точка может быть не одна, и оптимальными могут быть решения, определяемые точками, лежащими на всём ребре или всей грани многогранника D.

Из этой теоремы, в частности, вытекает один из способов решения задачи линейного программирования. Можно найти все угловые точки множества D, найти значения целевой функции в каждой угловой точке и выбрать из них экстремальное. На практике такой способ обычно не применяется, так как в реальных задачах угловых точек может очень много (порядка нескольких миллионов), и объём вычислений оказывается слишком большим.

Перейдём теперь к описанию некоторых способов, которыми решаются задачи линейного программирования.

1. Графический метод решения задач линейного программирования

Если в задаче линейного программирования только две переменные, то наиболее простой и наглядный способ её решения – это *графический* способ.

Пусть требуется найти экстремум целевой функции

$$f(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$$

при ограничениях, задающих допустимое множество D:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leqslant b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leqslant b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leqslant b_m; \end{cases} \qquad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Будем предполагать, что множество D непусто. Тогда D – это выпуклая многоугольная фигура на плоскости Ox_1x_2 (плоский выпуклый многоугольник). Рассмотрим *линии уровня* целевой функции, то есть прямые вида

$$c_1x_1 + c_2x_2 = d.$$

Построим на плоскости Ox_1x_2 линию уровня (это – прямая), отвечающую некоторому значению d (линию уровня d). Найдём градиент целевой функции:

$$\operatorname{grad} f(x_1, x_2) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1}; \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\} = \{c_1; c_2\} = \vec{c}.$$

Нетрудно показать, что значения целевой функции, одинаковые во всех точках линии уровня (равные d), станут *больше*, если линию уровня переместить параллельно самой себе в направлении вектора $\vec{c}$, и станут *меньше*, если перемещение производить в противоположном направлении. Таким образом, при решении задачи линейного программирования на максимум (минимум), линии уровня целевой функции перемещаются параллельно себе в направлении градиента (антиградиента) целевой функции до тех пор, пока они целиком не выйдут из допустимого множества D. Крайняя точка (точка "выхода") и даёт оптимальное решение задачи линейного программирования. В зависимости от вида целевой функции и допустимого множества D эта задача может

- иметь единственное решение (вершина множества D),
- иметь бесконечно много решений (целая сторона множества D),
- не иметь ни одного решения (нет выхода линий уровня из множества D или D – пустое множество).

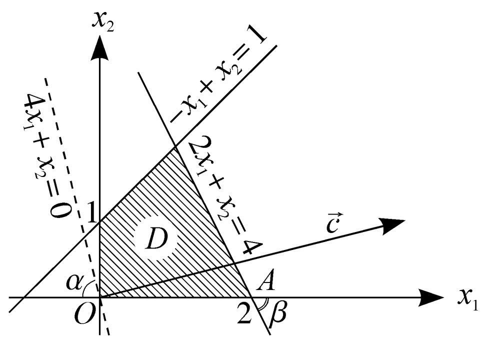
Проиллюстрируем вышесказанное примерами.

Пример 1. Найти $\max\limits_{D}(4x_1 + x_2)$, если множество D задаётся условиями:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 1; \end{cases} \qquad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Сначала построим допустимое множество D на плоскости переменных Ox_1x_2. Прямая $2x_1 + x_2 = 4$ разбивает эту плоскость на две части (полуплоскости), в одной из которых $2x_1 + x_2 > 4$, а в другой, разумеется, $2x_1 + x_2 < 4$. С помощью произвольной точки, не лежащей на прямой $2x_1 + x_2 = 4$ (например, с помощью точки $(0; 0)$ – начала координат), выбираем нужную полуплоскость и отмечаем её. Так же поступаем и с остальными ограничениями. Пересечение отмеченных множеств – это и есть множество D.

Построим вектор $\vec{c} = \operatorname{grad}(4x_1 + x_2) = \{4; 1\}$ и одну из линий уровня целевой функции (линию нулевого уровня $4x_1+x_2 = 0$). Из аналитической геометрии известно, что



$$\operatorname{tg}\alpha = 4, \ \operatorname{tg}\beta = 2.$$

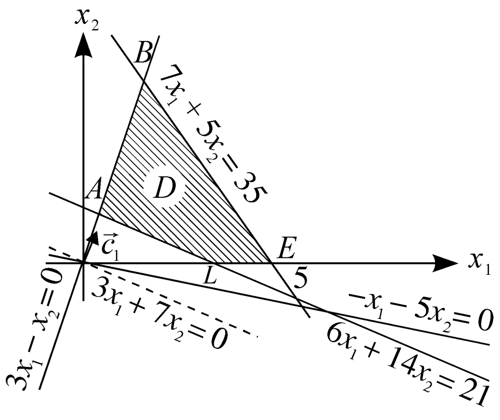
Так как $\operatorname{tg}\alpha > \operatorname{tg}\beta$, то выход из множества D линий уровня при движении их в сторону вектора $\vec{c}$ будет осуществляться в точке $A(2; 0)$. Координаты этой точки: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$ и дают оптимальное решение поставленной задачи. Поэтому

$$\max_D(4x_1 + x_2) = 4 \cdot 2 + 0 = 8.$$

П р и м е р 2. Найти $\min\limits_D(3x_1 + 7x_2)$, если множество D задаётся условиями:

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 \leqslant 0, \\ 3x_1 - x_2 \geqslant 0, \\ 7x_1 + 5x_2 \leqslant 35, \\ 6x_1 + 14x_2 \geqslant 21; \end{cases} \qquad x_1 \geqslant 0, \ x_2 \geqslant 0.$$

Здесь множество D – четырёхугольник $ABEL$. Линия нулевого уровня: $3x_1 + 7x_2 = 0$. Вектор $\vec{c} = \operatorname{grad}(3x_1 + 7x_2) = \{3; 7\} \upuparrows \left\{\dfrac{3}{7}; 1\right\} = \vec{c}_1$ (вектор $\vec{c}_1$, коллинеарный и сонаправленный вектору $\vec{c}$, изображён на чертеже). Линии уровня параллельны стороне AL четырёхугольника D. Так как



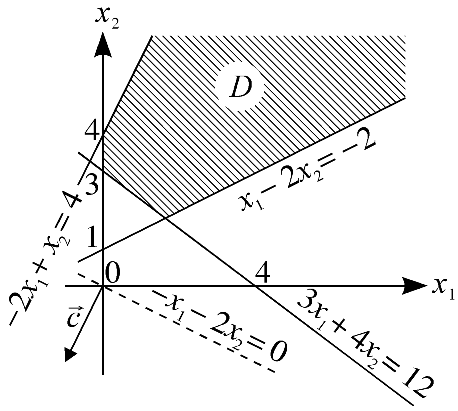
решается задача на минимум, то линии уровня будут перемещаться в сторону, противоположную направлению вектора $\vec{c}_1$. Поэтому при таком перемещении выход линий уровня из множества D будет осуществляться на стороне AL. Следовательно, у этой задачи бесконечно много оптимальных решений: это решения, соответствующие всем точкам отрезка AL. Так как $A\left(\dfrac{7}{16};\dfrac{21}{16}\right)$, $L\left(\dfrac{7}{2};0\right)$ (координаты точек A и L легко получить как координаты точек пересечения соответствующих прямых), то любое оптимальное решение задачи можно записать в виде:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{7}{16} + \dfrac{49}{16}\,t, \\ x_2 = \dfrac{21}{16} - \dfrac{21}{16}\,t, \end{cases} \qquad \text{при этом} \qquad \min_D(3x_1 + 7x_2) = \frac{21}{2}\,.$$
$$(t \in [0,1]);$$

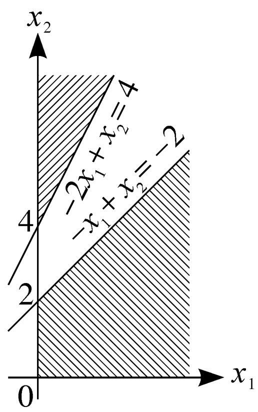
П р и м е р 3. Найти $\min\limits_D(-x_1 - 2x_2)$, если множество D:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \leqslant 4, \\ x_1 - 2x_2 \leqslant -2, \\ 3x_1 + 4x_2 \geqslant 12; \end{cases} \qquad x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

В отличие от двух предыдущих примеров, здесь множество D не является многоугольником. Граница D – незамкнутая ломаная линия, множество D – неограниченное.



Линия нулевого уровня: $-x_1 - 2x_2 = 0$. Вектор $\vec{c} = \operatorname{grad}(-x_1 - 2x_2) = \{-1;-2\}$. Линии уровня перемещаются в направлении, противоположном вектору $\vec{c}$, и при таком движении выхода из множества D нет. Поэтому оптимального решения задача не имеет, и $\min\limits_D(-x_1 - 2x_2) = -\infty$ (целевая функция не ограничена на допустимом множестве).



П р и м е р 4. Найти

$$\max_D(2x_1 - 3x_2),$$

если D:

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ -x_1 + x_2 \leqslant -2; \end{cases}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Задача решений не имеет, так как допустимое множество D является *пустым*.

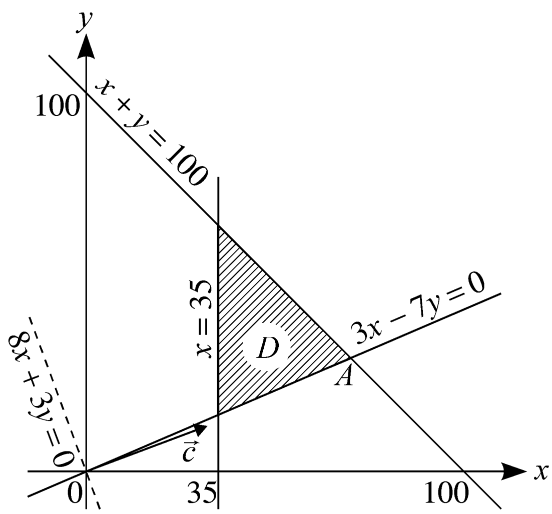
Теперь найдём решения двух ранее поставленных задач с двумя переменными. При этом, вычислив вектор $\vec{c}$, будем на чертеже изображать вместо него более подходящий по масштабу какой-либо коллинеарный и сонаправленный вектор, сохранив для него по-прежнему обозначение $\vec{c}$ (а не $\vec{c}_1$, как во втором примере).

Задача о банке. Здесь нужно найти $\max(0.08x + 0.03y)$ при условиях

$$D : \begin{cases} x + y \leqslant 100, \\ x \geqslant 35, \\ y \geqslant 0.3(x + y); \end{cases} \qquad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0;$$

то есть

$$D : \begin{cases} x + y \leqslant 100, \\ x \geqslant 35, \\ 3x - 7y \leqslant 0; \end{cases} \qquad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0.$$



Линия нулевого уровня: $0.08x+0.03y = 0$, то есть $8x+3y = 0$. Вектор градиента $\vec{c} = \mathrm{grad}(0.08x + 0.03y) = \{0.08; 0.03\}$. Так как тангенс угла, образованного вектором $\vec{c}$ с положительным направлением оси Ox, равен $\dfrac{3}{8} < \dfrac{3}{7}$, а $\dfrac{3}{7}$ – тангенс угла, образованного прямой $3x-7y = 0$ с положительным направлением оси Ox (уравнение этой прямой $y = \dfrac{3}{7}x$), то вектор $\vec{c}$ имеет более пологое направление, чем прямая $3x - 7y = 0$.

Перемещая линию уровня $8x+3y=0$ в направлении вектора $\vec{c}$, нетрудно заметить, что оптимальное решение поставленной задачи даёт точка A пересечения прямых $x+y=100$ и $3x-7y=0$. Решая систему

$$\begin{cases} x+y=100, \\ 3x-7y=0, \end{cases}$$

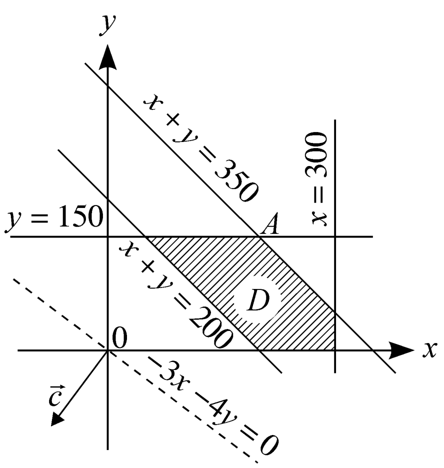
находим, что $x=70$, $y=30$, то есть $A(70;30)$. Поэтому

$$\max_D(0.08x+0.03y)=5.6+0.9=6.5.$$

Этот ответ согласуется и с такими рассуждениями: так как кредиты дают банку бóльшую прибыль, чем ценные бумаги, то общая прибыль банка будет наибольшей при максимально возможном (по условию задачи) количестве кредитов.

Транспортная задача. Найти $\min_D(-3x-4y+13050)$, если

$$D: \begin{cases} 200 \leqslant x+y \leqslant 350, \\ 0 \leqslant x \leqslant 300, \\ 0 \leqslant y \leqslant 150. \end{cases}$$



Достаточно найти $\min_D g(x,y)$, где $g(x,y)=-3x-4y$, так как константа не влияет на координаты точки, задающей оптимальное решение, а влияет лишь на само значение минимума. Линия нулевого уровня функции $g(x,y)$ (то есть линия уровня 13050 исходной целевой функции): $-3x-4y=0$. Вектор $\vec{c}=\operatorname{grad} g(x,y)=\operatorname{grad}(-3x-4y)=$ $=\operatorname{grad}(-3x-4y+13050)=\{-3;-4\}$. Так как линии уровня расположены более полого, чем прямые $x + y = \text{const}$, то при перемещении линий уровня в сторону, противоположную вектору $\vec{c}$ (задача на *минимум*), выход из множества D осуществляется в точке A, координаты которой удовлетворяют системе

$$\begin{cases} x + y = 350, \\ \quad\; y = 150, \end{cases}$$

то есть $A(200; 150)$. Следовательно, $x = 200$, $300 - x = 100$, $y = 150$, $150 - y = 0$. При этом

$$\min_D(-3x - 4y + 13050) = 11850.$$

Это и есть оптимальное решение задачи.

Контрольные вопросы

1. Как строится множество допустимых решений задачи линейного программирования с двумя переменными?

2. Может ли задача линейного программирования иметь два и только два оптимальных решения?

3. В каком случае задача линейного программирования с двумя переменными не имеет решений?

2. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Если в задаче линейного программирования переменных больше, чем две, то геометрический метод решения теряет свою наглядность и простоту. В этом случае существуют другие способы решения такой задачи, один из которых – *симплекс-метод*. Перейдём к его описанию.

Напомним, что если оптимальное решение задачи линейного программирования существует и допустимое множество D содержит хотя бы одну угловую точку, то существует угловая точка D, определяющая оптимальное решение задачи. Перебрать *все* угловые точки множества D и сравнить в них значения целевой функции на практике часто не представляется возможным из-за очень большого объёма вычислений. Симплекс-метод позволяет вести целенаправленный перебор таких угловых точек, который, как правило, оказывается сравнительно небольшим. На первом этапе каким-либо образом (например, подбором) находится одна из угловых точек множества D[1]. Эта угловая точка называется допустимым базисным решением. В этой точке вычисляется значение целевой функции. Предположим, что решается задача на минимум. Тогда на втором этапе будет осуществляться перемещение из найденной угловой точки вдоль такого ребра симплекса (множества) D, выходящего из этой угловой точки и ведущего в другую угловую точку, чтобы значение целевой функции в этой новой угловой точке симплекса D было меньше первоначального. Следовательно, это ребро приводит к угловой точке с меньшим значением целевой функции. Процесс продолжается далее. Постепенно можно достичь такой угловой точки множества D, из которой все рёбра (направления движения) становятся недопустимыми, то есть приводят к угловым точкам, в которых значения целевой функции увеличиваются. Это в свою очередь значит, что найдена нужная угловая точка множества D, соответствующая оптимальному решению задачи: в

[1]Об алгоритме нахождения такой точки будет рассказано в следующем разделе, при рассмотрении *искусственного базиса*.

этой угловой точке целевая функция достигает своего минимума.

Перейдём к алгебраической реализации этой идеи.

Во-первых, симплекс-метод применяется для таких задач линейного программирования, которые записаны в *канонической* (см. с. 5) форме. Если некоторые ограничения в исходной задаче линейного программирования имеют вид неравенств, то вводятся балансовые переменные, приводящие задачу к каноническому виду. Во-вторых, будем всегда искать *минимум* целевой функции $f(x)$. Если нужно найти максимум, то вводится вспомогательная целевая функция $g(x) = -f(x)$. Тогда точки минимума $g(x)$ совпадают с точками максимума $f(x)$ и $\max\limits_D f(x) = -\min\limits_D g(x)$.

Итак, мы будем рассматривать следующую задачу линейного программирования: найти

$$\min f(x) = \min(\vec{c}, \vec{x}\,) = \min(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$$

при выполнении условий

$$A\vec{x} = \vec{b}; \quad x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, \ldots x_n \geqslant 0. \tag{1}$$

Пусть матрица A имеет размеры $m \times n$ и $m < n$. Будем считать, что ранг матрицы A максимально возможный, то есть $\operatorname{rang} A = m$. Тогда в системе (1) имеется m базисных переменных и $n - m$ свободных. Решение системы (1) называется *базисным допустимым решением*, если все свободные переменные равны нулю, а базисные переменные неотрицательны. Базисное допустимое решение соответствует угловой точке (или грани) выпуклой многогранной области D. Если существует оптимальное решение задачи линейного программирования, то существует и базисное оптимальное решение этой задачи. Пусть нам известно какое-либо базисное допустимое решение задачи (1). В сложных задачах существуют специальные алгоритмы для его нахождения, один из которых мы рассмотрим в следующем разделе.

Составим матрицу F размером $(m+1)\times(n+1)$:

$$F = \left(\begin{array}{c|c} A & b\downarrow \\ \hline \vec{c} & 0 \end{array}\right)$$

($\vec{c}$ – вектор-строка, $b\downarrow$ – вектор-столбец). Предположим, что первые m переменных x_1, x_2, …, x_m – базисные. (Если это не так, то переставим столбцы матрицы F, чтобы первые m переменных, отвечающие этим столбцам, были базисными.) Разобьём матрицу A на две части: $A = B|P$, где B – это первые m строк и m столбцов, а P – это всё остальное. Аналогично первые m компонент вектора $\vec{c}$ обозначим $\vec{c}_B$, а $\vec{c}_P$ – оставшиеся компоненты. Тогда матрица F имеет вид:

$$F = \left(\begin{array}{c|c|c} B & P & b\downarrow \\ \hline \vec{c}_B & \vec{c}_P & 0 \end{array}\right).$$

Теперь к первым m строкам матрицы F применяем метод исключения Гаусса–Жордана, чтобы на месте матрицы B получить единичную матрицу $I_{m\times m} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, состоящую из m строк и m столбцов. После этого матрица F переходит в матрицу F_1:

$$F_1 = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{m\times m} & B^{-1}P & B^{-1}(b\downarrow) \\ \hline \vec{c}_B & \vec{c}_P & 0 \end{array}\right).$$

Затем, добавляя к последней строке матрицы F_1 линейную комбинацию первых m строк этой матрицы, добиваемся того, чтобы на месте вектора $\vec{c}_B$ стояли одни нули. Получаем матрицу F_2:

$$F_2 = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{m\times m} & B^{-1}P & B^{-1}(b\downarrow) \\ \hline \vec{0} & \vec{c}_P - \vec{c}_B B^{-1}P & -\vec{c}_B B^{-1}(b\downarrow) \end{array}\right).$$

После этого проводится анализ матрицы F_2. Сначала смотрим на среднюю часть *последней* строки матрицы F_2, то есть на вектор

$$\vec{a} = \vec{c}_P - \vec{c}_B B^{-1}P.$$

Если *все* компоненты вектора $\vec{a}$ *неотрицательны* – это критерий останова симплекс-метода, и оптимальное базисное решение уже получено. *Значения базисных переменных* находятся в верхней части последнего столбца матрицы F_2 $\big($это координаты вектора $B^{-1}(b\downarrow)\big)$, *свободные переменные* равны нулю, а *минимальное значение целевой функции*, взятое со знаком "минус", находится в правом нижнем углу матрицы F_2, то есть равно $\vec{c}_B B^{-1}(b\downarrow)$. Если при этом среди компонент вектора $\vec{a}$ есть *нулевые*, то оптимальное решение может быть *неединственным*.

Теперь предположим, что среди компонент вектора $\vec{a}$ есть *отрицательные*. Тогда значение целевой функции может быть уменьшено. Выбираем наибольшую по абсолютной величине отрицательную компоненту вектора $\vec{a}$ (если среди них есть одинаковые, то выбираем любую). Пусть она находится в $(m+k)$-м столбце матрицы F_2 (отвечает k-й свободной переменной). Значит, эту переменную нужно сделать базисной, то есть поменять соответствующие столбцы местами. Чтобы узнать, какой именно столбец из первых m столбцов матрицы F_2 нужно менять, то есть какую из старых базисных переменных нужно сделать свободной, осуществим следующую процедуру. Пусть $u_k\downarrow$ – это k-й столбец матрицы $B^{-1}P$, входящей в матрицу F_2. Найдём

$$\min_{1\leqslant i\leqslant m} \frac{\bigl(B^{-1}(b\downarrow)\bigr)_i}{(u_k\downarrow)_i} = \frac{\bigl(B^{-1}(b\downarrow)\bigr)_r}{(u_k\downarrow)_r}, \quad (1\leqslant r\leqslant m),$$

где индекс i (индекс r) означает i-ю (r-ю) компоненту соответствующего вектора. При этом рассматриваются только такие номера i ($1\leqslant i\leqslant m$), для которых соответствующие отношения *положительны*. Если положительных отношений нет, то задача линейного программирования *не имеет* оптимального решения, и минимум целевой функции равен $-\infty$. Если же положительные отношения имеются, то исключается старая базисная переменная под номером r, то есть она делается свободной. Тем самым мы меняем r-й и $(m+k)$-й столбцы матрицы F_2 местами и затем осуществляем следующую итерацию симплекс-метода.

Описанный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнен критерий останова симплекс-метода.

Замечание. Если в ходе реализации симплекс-метода в последнем столбце матрицы F_2 появляются нули, то это означает, что в допустимом базисном решении кроме свободных переменных равны нулю и некоторые базисные. Тогда при неудачном выборе нового базиса можно остаться в старой угловой точке (она будет выражена через другой набор базисных переменных) и не перейти в новую. Происходит "зацикливание" симплекс-метода ("слипание" угловых точек симплекса в одну). Существуют алгоритмы, препятствующие возможности зацикливания симплекс-метода, но такие ситуации на практике возникают не так часто, и рассматривать их не будем.

Обратимся к примерам.

П р и м е р 1. Найти $\min(5x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4)$, если

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + \ \ x_4 \ = \ \ 7, & x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \ = \ 11; & x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Сначала находим базисное допустимое решение. Ясно, что ранг матрицы системы равен двум, поэтому здесь две базисные переменные и две свободные. Положим $x_2 = 0$, $x_4 = 0$. Тогда система переходит в систему

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 \ = \ \ 7, \\ 5x_1 + x_3 \ = \ 11; \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x_1 &= 2, \\ x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Поэтому получено допустимое базисное решение, в котором переменные x_1 и x_3 – базисные, а x_2 и x_4 – свободные (если бы при $x_2 = 0$, $x_4 = 0$ мы получили хотя бы одну отрицательную переменную x_1 или x_3, то такой выбор свободных и базисных переменных был бы *невозможен* и надо было бы искать *другое* решение, являющееся допустимым базисным). Составим симплекс-матрицу и будем её преобразовывать согласно изложенному алгоритму.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 3 & 1 & 2 & 1 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 11 \\ \hline 5 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 6 & 2 & 4 & 2 & 14 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 11 \\ \hline 5 & -3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} \text{Прежде, чем получить 1 в левом верхнем углу,} \\ \text{удобно сразу получить 0 в левом нижнем углу.} \end{array} \right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 6 & 2 & 4 & 2 & 14 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 11 \\ \hline 0 & -4 & -2 & 0 & -11 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 2 & 11 \\ \hline 0 & -4 & -2 & 0 & -11 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -4 \\ \hline 0 & -4 & -2 & 0 & -11 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -4 & -2 & 2 & -4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & -7 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & -7 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -2 & -7 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$\sim$ [Так как в последней строке $(-2) < 0$, то нужно делать следующую итерцию симплекс-метода. Среди отношений $2 : (1/2)$ и $1 : (-1/2)$ только первое положительно, поэтому первую переменную, то есть x_1, надо делать свободной.] $\sim$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 2 \\ -1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 1 \\ \hline -2 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1/2 & 0 & 1/2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline -2 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline -2 & 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_4 & x_3 & x_2 & x_1 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 4 & 1 \end{array}\right) \end{array}.$$

Так как в последней строке $2 > 0$ и $4 > 0$, то выполнен критерий останова симплекс-метода. При этом получены оптимальное базисное решение и минимум целевой функции:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 4; \quad \min(5x_1+x_2-3x_3+2x_4) = -1.$$

П р и м е р 2. Найти $\max(2x_1 + x_3 - x_4)$, если

$$\begin{cases} x_1 - \ x_2 - x_3 + x_4 = \ 0, & x_1 \geqslant 0, \ \ x_2 \geqslant 0, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 12; & x_3 \geqslant 0, \ \ x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен двум, поэтому здесь две базисные переменные и две свободные. В качестве допустимого базисного решения можно взять

$$x_1 = 2,\ \ x_2 = 2,\ \ x_3 = 0,\ \ x_4 = 0.$$

Поэтому x_1, x_2 – первоначальные базисные переменные, а x_3, x_4 – первоначальные свободные переменные. Будем искать $\min(-2x_1 - x_3 + x_4)$ вместо $\max(2x_1 + x_3 - x_4)$. Составим симплекс-матрицу и будем её преобразовывать.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 1 & 1 & 12 \\ \hline -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1/3 & 1/3 & 4 \\ \hline -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4/3 & -2/3 & 4 \\ \hline -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 2 \\ \hline -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 2 \\ \hline -2 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & -1/3 & 2/3 & 2 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -5/3 & 7/3 & 4 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l} \text{Так как в последней строке } (-5/3) < 0 \text{ и в этом} \\ \text{столбце только одно положительное отношение} \\ 2 : (2/3) \text{, то меняем местами переменные } x_3 \text{ и } x_2. \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{lr|lr|r} 1 & -1/3 & 0 & 2/3 & 2 \\ 0 & 2/3 & 1 & -1/3 & 2 \\ \hline 0 & -5/3 & 0 & 7/3 & 4 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{lr|cr|r} 1 & -1/3 & 0 & 2/3 & 2 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & 3 \\ \hline 0 & -5/3 & 0 & 7/3 & 4 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{lr|lr|r} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 3 \\ 0 & 1 & 3/2 & -1/2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 5/2 & 3 & 9 \end{array}\right) \end{array}.$$

Так как в последней строке $5/2 > 0$ и $3 > 0$, то выполнен критерий останова симплекс-метода. При этом получены оптимальное базисное решение и максимум целевой функции:

$$x_1 = 3, x_2 = 0, x_3 = 3, x_4 = 0; \quad \max(2x_1 + x_3 - x_4) = 9.$$

Пример 3. Найти $\max(4x_1 + x_2)$, если

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leqslant 4, & x_1 \geqslant 0, \\ -x_1 + x_2 \leqslant 1; & x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

Так как переменных только две, то можно было бы воспользоваться графическим способом решения. Но на этом простом примере мы продемонстрируем, как работает симплекс-метод, если задача линейного программирования задана не в канонической, а в стандартной форме. Сначала мы приведём эту задачу к каноническому виду, введя две балансовые переменные x_3 и x_4 по формулам:

$$\begin{aligned} x_3 &= 4 - 2x_1 - x_2, \\ x_4 &= 1 + x_1 - x_2. \end{aligned}$$

Тогда система ограничений, задающих допустимое множество, имеет вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, & x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \\ x_1 - x_2 - x_4 = -1; & x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен двум, поэтому здесь две базисные переменные и две свободные. Возьмём в качестве первоначальных свободных переменных балансовые переменные x_3 и x_4. Тогда допустимое базисное решение таково:

$$x_1 = 1, \;\; x_2 = 2, \;\; x_3 = 0, \;\; x_4 = 0.$$

Так же, как и в предыдущем примере, вместо $\max(4x_1+x_2)$ будем искать минимум противоположной по знаку функции. Преобразования симплекс-матрицы имеют вид:

$$
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ \hline -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ \hline -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim
$$

$$
\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 6 \\ \hline -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 2 \\ \hline -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim
$$

$$
\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 2 \\ \hline -4 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 2 \\ \hline 0 & -1 & 4/3 & -4/3 & 4 \end{array}\right) \end{array} \sim
$$

$$
\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & 1/3 & -1/3 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 2/3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 5/3 & -2/3 & 6 \end{array}\right) \end{array} \sim
$$

[Так как в последней строке $(-2/3) < 0$ и в этом столбце только одно положительное отношение $2 : (2/3)$, то меняем местами переменные x_2 и x_4.] $\sim$

$$
\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 1 & 2 \\ \hline 0 & -2/3 & 5/3 & 0 & 6 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 2/3 & 1/3 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right) \end{array} \sim
$$

$$
\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & -1/3 & 1/3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_4 & x_3 & x_2 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & 1/2 & 1/2 & 2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 2 & 1 & 8 \end{array}\right) \end{array}.
$$

Так как в последней строке $2 > 0$ и $1 > 0$, то выполнен критерий останова симплекс-метода. Оптимальное базисное решение:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 3;$$

а так как x_3 и x_4 – вспомогательные переменные, то окончательный ответ имеет вид:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0; \quad \max(4x_1 + x_2) = 8.$$

В следующем примере мы увидим, как показывает симплекс-метод тот факт, что задача линейного программирования не имеет оптимального решения.

Пример 4. Найти $\min(-x_1 - x_2)$, если

$$\begin{cases} -x_1 + \ x_2 + x_3 \qquad = 1, & x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \\ \ \ x_1 - 2x_2 \qquad + x_4 = 2; & x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен двум, поэтому две базисные переменные и две свободные. Пусть x_1 и x_2 – свободные переменные, а x_3 и x_4 – базисные. Тогда допустимое базисное решение таково:

$$x_1 = 0,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 1,\ \ x_4 = 2.$$

Рассмотрим симплекс-матрицу и её преобразования.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_4 & x_1 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \left[\begin{array}{l} \text{Меняем места-} \\ \text{ми переменные} \\ x_1 \text{ и } x_4 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_1 & x_4 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ \hline 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_3 & x_1 & x_4 & x_2 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 0 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \end{array}\right) \end{array}.$$

Так как в последней строке $(-3) < 0$, то переменную x_2 надо делать базисной. Однако оба отношения (как $3 : (-1)$, так и $2 : (-2)$) *отрицательны*. Это означает, что данная задача линейного программирования *не имеет* оптимального решения и $\min(-x_1 - x_2) = -\infty$.

Рассмотрим ещё два примера на применение симплекс-метода с бо́льшим количеством ограничений.

Пример 5. Найти $\min(-x_4 + x_5)$, если

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 7, \\ x_3 - x_4 - 3x_5 = 2; \\ x_1 + x_4 + x_5 = 2; \end{cases} \qquad \begin{matrix} x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \\ x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0. \end{matrix}$$

Сначала найдём ранг матрицы системы ограничений:

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\left(\begin{array}{|ccc|cc} \hline 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ \hline \end{array}\right) = 3$$

(в матрице осуществлена циклическая перестановка строк, не меняющая ранга, и в новой матрице обведён минор третьего порядка, очевидно, не равный нулю). Поскольку ранг равен трём, то имеются две свободные переменные и три базисные. Пусть x_4 и x_5 – свободные переменные. Если $x_4 = x_5 = 0$, то $x_1 = 2 > 0$, $x_2 = 7 > 0$, $x_3 = 2 > 0$. Все значения переменных неотрицательны, значит, x_1, x_2, x_3 можно взять базисными и допустимое базисное решение таково:

$$x_1 = 2, \;\; x_2 = 7, \;\; x_3 = 2, \;\; x_4 = 0, \;\; x_5 = 0.$$

Составим симплекс-матрицу и будем её преобразовывать.

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|rr|c} 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \left[\begin{array}{l}\text{Производим ту же цик-}\\ \text{лическую перестановку}\\ \text{первых трёх строк}\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|rr|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -3 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \left[\begin{array}{l}\text{Так как в последней}\\ \text{строке } (-1) < 0, \text{ то пе-}\\ \text{ременную } x_4 \text{ надо сде-}\\ \text{лать базисной}\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l}\text{Из двух положительных отношений } 2:1 \text{ и } 7:2\\ \text{первое меньше второго, следовательно исклю-}\\ \text{чать из базисных надо первую по порядку ста-}\\ \text{рую базисную переменную, то есть } x_1, \text{ и делать}\\ \text{её свободной.}\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & x_5 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rcc|lr|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -3 & 2 \\ \hline -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_4 & x_2 & x_3 & x_1 & x_5 & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|rr|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{array}\right) \end{array}.$$

Так как в последней строке $1 > 0$ и $2 > 0$, то выполнен критерий останова симплекс-метода. При этом получены оптимальное базисное решение и минимум целевой функции:

$$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 4, x_4 = 2, x_5 = 0; \quad \min(-x_4 + x_5) = -2.$$

П р и м е р 6. Найти $\max(3x_1 + x_2)$, если

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geqslant 4, \\ 4x_1 - 5x_2 \leqslant 10, \\ x_1 + x_2 \leqslant 7; \end{cases} \quad \begin{array}{l} x_1 \geqslant 0, \\ x_2 \geqslant 0. \end{array}$$

Переменных только две и можно воспользоваться геометрическим способом решения. Это будет сделано позже, а сейчас рассмотрим, как в такой ситуации работает симплекс-метод. Сначала приведём задачу к каноническому виду, введя балансовые переменные x_3, x_4 и x_5 по формулам:

$$\begin{aligned} x_3 &= -4 + 2x_1 + \ x_2, \\ x_4 &= 10 - 4x_1 + 5x_2, \\ x_5 &= \ \ 7 - \ x_1 - \ x_2. \end{aligned}$$

Тогда система ограничений принимает вид:

$$\begin{cases} 2x_1 + \ x_2 - x_3 = \ 4, \\ 4x_1 - 5x_2 + x_4 = 10, \\ \ x_1 + \ x_2 + x_5 = \ 7; \end{cases} \qquad \begin{aligned} &x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0, \\ &x_4 \geqslant 0, \quad x_5 \geqslant 0. \end{aligned}$$

Вычислим ранг матрицы этой системы. Ясно, что

$$\operatorname{rang} \left(\begin{array}{cc|ccc|} 2 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -5 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) = 3.$$

Поэтому здесь три базисные переменные и две свободные. Возьмём в качестве свободных переменных x_2 и x_3, а в качестве базисных x_1, x_4 и x_5. Тогда допустимое базисное решение имеет вид:

$$x_1 = 2, \ \ x_2 = 0, \ \ x_3 = 0, \ \ x_4 = 2, \ \ x_5 = 5.$$

Как всегда, вместо $\max(3x_1 + x_2)$ будем искать $\min(-3x_1 - -x_2)$. Преобразования симплекс-матрицы имеют вид:

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4\\ 4 & 1 & 0 & -5 & 0 & 10\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 7\\ \hline -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)\end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 2 & 0 & 0 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -7 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 5\\ \hline -3 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_1 & x_4 & x_5 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 2\\ 0 & 1 & 0 & -7 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 5\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/2 & -3/2 & 6 \end{array}\right)\end{array} \sim \left[\begin{array}{l}(-3/2) < 0 \implies x_3 \text{ де-}\\ \text{лаем базисной; } (2:2) <\\ < (5:1/2) \implies x_4 \text{ ис-}\\ \text{ключаем из базисных.}\end{array}\right] \sim$$

$$\sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_5 & x_2 & x_4 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 0 & -7 & 1 & 2\\ 0 & 1/2 & 1 & 1/2 & 0 & 5\\ \hline 0 & -3/2 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \end{array}\right)\end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_5 & x_2 & x_4 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 2 & 0 & -7 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 10\\ \hline 0 & -3/2 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \end{array}\right)\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_5 & x_2 & x_4 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4\\ 0 & 1 & 0 & -7/2 & 1/2 & 1\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 10\\ \hline 0 & -3/2 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \end{array}\right)\end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_5 & x_2 & x_4 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 2 & 0 & 0 & -5/2 & 1/2 & 5\\ 0 & 1 & 0 & -7/2 & 1/2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 9/2 & -1/2 & 9\\ \hline 0 & -3/2 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \end{array}\right)\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_5 & x_2 & x_4 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & -5/4 & 1/4 & 5/2\\ 0 & 1 & 0 & -7/2 & 1/2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 9/4 & -1/4 & 9/2\\ \hline 0 & -3/2 & 0 & 1/2 & 0 & 6 \end{array}\right)\end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_5 & x_2 & x_4 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & -5/4 & 1/4 & 5/2\\ 0 & 1 & 0 & -7/2 & 1/2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 9/4 & -1/4 & 9/2\\ \hline 0 & 0 & 0 & -19/4 & 3/4 & 15/2 \end{array}\right)\end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l}\text{Теперь переменную}\\ x_2 \text{ делаем базисной,}\\ \text{а исключаем пере-}\\ \text{менную } x_5.\end{array}\right] \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_5 & x_4 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & -5/4 & 0 & 1/4 & 5/2\\ 0 & 1 & -7/2 & 0 & 1/2 & 1\\ 0 & 0 & 9/4 & 1 & -1/4 & 9/2\\ \hline 0 & 0 & -19/4 & 0 & 3/4 & 15/2 \end{array}\right)\end{array} \sim$$

$$
\sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_5 & x_4 & \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|cc|c}
1 & 0 & -5/4 & 0 & 1/4 & 5/2\\
0 & 1 & -7/2 & 0 & 1/2 & 1\\
0 & 0 & 1 & 4/9 & -1/9 & 2\\
\hline
0 & 0 & -19/4 & 0 & 3/4 & 15/2
\end{array}\right)
\end{array}
\sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_5 & x_4 & \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|cc|c}
1 & 0 & -5/4 & 0 & 1/4 & 5/2\\
0 & 1 & -7/2 & 0 & 1/2 & 1\\
0 & 0 & 1 & 4/9 & -1/9 & 2\\
\hline
0 & 0 & 0 & 19/9 & 2/9 & 17
\end{array}\right)
\end{array}
\sim
$$

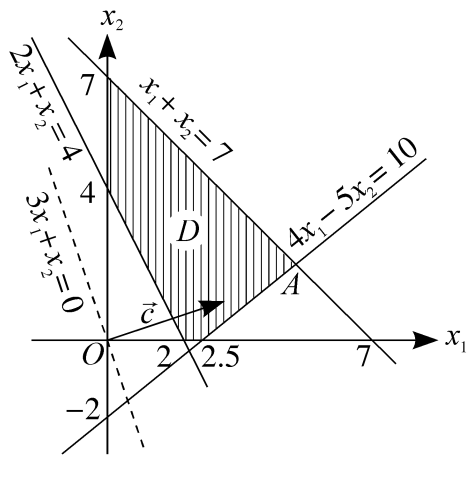
$$
\sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_1 & x_3 & x_2 & x_5 & x_4 & \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|cc|c}
1 & 0 & 0 & 5/9 & 1/9 & 5\\
0 & 1 & 0 & 14/9 & 1/9 & 8\\
0 & 0 & 1 & 4/9 & -1/9 & 2\\
\hline
0 & 0 & 0 & 19/9 & 2/9 & 17
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

Теперь выполнен критерий останова симплекс-метода и при этом получены оптимальное базисное решение и максимум целевой функции:

$$x_1 = 5, \;\; x_2 = 2; \quad \max(3x_1 + x_2) = 17.$$

Так как первоначально допустимое базисное решение находилось далеко от оптимального, пришлось делать *три* итерации симплекс-метода.

Рассмотрим теперь геометрическое решение этой задачи. Напомним, что в ней нужно найти $\max(3x_1+x_2)$, если



$$
D: \begin{cases} 2x_1 + \;\; x_2 \geqslant \;\; 4,\\ 4x_1 - 5x_2 \leqslant 10,\\ \;\; x_1 + \;\; x_2 \leqslant \;\; 7; \end{cases}
\quad
\begin{array}{l} x_1 \geqslant 0,\\ x_2 \geqslant 0. \end{array}
$$

Линия нулевого уровня: $3x_1 + x_2 = 0$. Вектор $\vec{c} =$

$= \operatorname{grad}(3x_1 + x_2) = \{3; 1\}$. Перемещая линию уровня параллельно самой себе в направлении вектора $\vec{c}$ и учитывая наклон всех линий, изображённых на рисунке, убеждаемся, что точка A даёт оптимальное решение задачи. Координаты точки A находятся из решения следующей системы:

$$\begin{cases} 4x_1 - 5x_2 = 10, \\ x_1 + x_2 = 7; \end{cases} \implies \begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 2. \end{cases}$$

Следовательно (как уже было получено ранее с помощью симплекс-метода),

$$x_1 = 5,\ x_2 = 2; \quad \max(3x_1 + x_2) = 17.$$

Теперь перейдём к решению задач, сформулированных во введении.

<ins>Распределение ресурсов</ins>. Надо найти $\max(8x+14y+10z)$, если

$$D: \begin{cases} 4x + 2y + 5z \leqslant 800, \\ 2x + 6y + 5z \leqslant 1400; \end{cases} \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0.$$

Сначала приведём задачу к каноническому виду. Для этого введём две балансовые переменные u и v:

$$\begin{aligned} u &= 800 - 4x - 2y - 5z, \\ v &= 1400 - 2x - 6y - 5z. \end{aligned}$$

Тогда система ограничений приобретает следующий вид:

$$\begin{cases} 4x + 2y + 5z + u = 800, & x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0,\ \ z \geqslant 0, \\ 2x + 6y + 5z + v = 1400; & u \geqslant 0,\ \ v \geqslant 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 4 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 5 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$. Поэтому здесь две базисные переменные и три свободные. Пусть свободные переменные z, u, v, а базисные x и y. Тогда

$$z = 0,\ u = 0,\ v = 0,\ x = 100,\ y = 200$$

– допустимое базисное решение. Вместо $\max(8x+14y+10z)$ ищем $\min(-8x-14y-10z)$. Составляем и преобразуем симплекс-матрицу:

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} x & y & z & u & v & & \end{array} \\
 & \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 4 & 2 & 5 & 1 & 0 & 800 \\ 2 & 6 & 5 & 0 & 1 & 1400 \\ \hline -8 & -14 & -10 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} x & y & z & u & v & & \end{array} \\
\sim & \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 & 1 & 1400 \\ 4 & 2 & 5 & 1 & 0 & 800 \\ \hline -8 & -14 & -10 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} x & y & z & u & v & & \end{array} \\
\sim & \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 2 & 6 & 5 & 0 & 1 & 1400 \\ 0 & -10 & -5 & 1 & -2 & -2000 \\ \hline -8 & -14 & -10 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} x & y & z & u & v & & \end{array} \\
\sim & \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 3 & 5/2 & 0 & 1/2 & 700 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/10 & 1/5 & 200 \\ \hline -8 & -14 & -10 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} x & y & z & u & v & & \end{array} \\
\sim & \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 100 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/10 & 1/5 & 200 \\ \hline -8 & -14 & -10 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccc} x & y & z & u & v & & \end{array} \\
\sim & \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 100 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/10 & 1/5 & 200 \\ \hline 0 & -14 & -2 & 12/5 & -4/5 & 800 \end{array}\right) \sim
\end{array}$$

$$\begin{array}{c} \\ \sim \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & u & v & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3/10 & -1/10 & 100 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/10 & 1/5 & 200 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 1 & 2 & 3600 \end{array}\right). \end{array}$$

Так как все элементы в средней части последней строки неотрицательны, то выполнен критерий останова симплекс-метода. Следовательно, найдено оптимальное базисное решение и максимум целевой функции:

$$x = 100,\ \ y = 200,\ \ z = 0; \quad \max(8x + 14y + 10z) = 3600.$$

<u>Планирование производства</u>. Найти $\max(100x + 200y + {}$ ${}+400z)$, если

$$D : \begin{cases} -2x + \ \ y + 4z \leqslant \ \ 0, \\ \ \ \ x + 2y + 3z \leqslant 480; \end{cases} \quad x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ z \geqslant 0.$$

Приводим задачу к каноническому виду, вводя балансовые переменные u и v:

$$\begin{aligned} u &= \qquad 2x - \ \ y - 4z, \\ v &= 480 - x - 2y - 3z. \end{aligned}$$

Тогда исходная задача приобретает следующий вид: найти $\max(100x + 200y + 400z) = 100 \max(x + 2y + 4z)$, если

$$\begin{cases} 2x - y - 4z - u = \ \ 0, & x \geqslant 0,\ \ y \geqslant 0,\ \ z \geqslant 0, \\ x + 2y + 3z + v = 480; & u \geqslant 0,\ \ v \geqslant 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы $\operatorname{rang} \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$. Поэтому – две базисные переменные и три свободные. Пусть свободные переменные z, u, v, а базисные x и y. Тогда

$$z = 0,\ u = 0,\ v = 0,\ x = 96,\ y = 192$$

– допустимое базисное решение. Вместо $\max(x + 2y + 4z)$ ищем $\min(-x - 2y - 4z)$. Составляем симплекс-матрицу и преобразуем её:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & u & v & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rrr|r} 2 & -1 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 480 \\ \hline -1 & -2 & -4 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & u & v & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rrr|r} 2 & -1 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 480 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 480 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & u & v & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 480 \\ 2 & -1 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 480 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & u & v & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 480 \\ 0 & -5 & -10 & -1 & -2 & -960 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 480 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & u & v & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rrr|r} 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 480 \\ 0 & 1 & 2 & 1/5 & 2/5 & 192 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 480 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x & y & z & u & v & \end{array} \\ \left(\begin{array}{rr|rrr|r} 1 & 0 & -1 & -2/5 & 1/5 & 96 \\ 0 & 1 & 2 & 1/5 & 2/5 & 192 \\ \hline 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 480 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{l}\text{Анализ средней части последней строки показы-}\\ \text{вает, что переменную } z \text{ нужно сделать базисной.}\\ \text{Среди отношений } 96 : (-1) \text{ и } 192 : 2 \text{ только вто-}\\ \text{рое положительно, поэтому вторая базисная пе-}\\ \text{ременная, то есть } y\text{, делается свободной и начи-}\\ \text{нается следующая итерация симплекс-метода.}\end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & z & y & u & v \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2/5 & 1/5 & 96 \\ 0 & 2 & 1 & 1/5 & 2/5 & 192 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 480 \end{array}\right) \sim \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & z & y & u & v \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & -1 & 0 & -2/5 & 1/5 & 96 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/10 & 1/5 & 96 \\ \hline 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 480 \end{array}\right) \sim \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x & z & y & u & v \end{array} \\ \sim \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & 1/2 & -3/10 & 2/5 & 192 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/10 & 1/5 & 96 \\ \hline 0 & 0 & 1/2 & 1/10 & 6/5 & 576 \end{array}\right). \end{array}$$

Выполнен критерий останова симплекс-метода. Таким образом, найдены оптимальное базисное решение и максимум целевой функции:

$$x = 192,\ \ y = 0,\ \ z = 96; \quad \max(100x + 200y + 400z) = 57600.$$

Контрольные вопросы

1. В какой форме должна быть записана задача линейного программирования для применения симплекс-метода?

2. При каких условиях в симплекс-методе допустимое базисное решение является оптимальным?

3. Как симплекс-метод обнаруживает отсутствие оптимального решения вследствие неограниченности целевой функции?

4. Как симплекс-метод обнаруживает наличие бесконечного множества оптимальных решений?

3. Искусственный базис

При решении задач линейного программирования симплекс-методом всегда предполагается, что известно начальное допустимое базисное решение. Если же такое решение подобрать не удаётся, в силу громоздкости задачи или, возможно, потому, что его вообще не существует, то можно воспользоваться методом *искусственного базиса*.

Рассмотрим задачу линейного программирования, заданную в канонической форме: найти

$$\min f(x) = \min(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n)$$

при выполнении условий

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, & x_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, & x_2 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, & x_n \geqslant 0, \end{cases}$$

или, записывая систему равенств в векторной форме,

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

Пусть количество неизвестных n больше количества условий m и ранг матрицы A принимает максимально возможное в таком случае значение, равное m:

$$n > m, \quad \operatorname{rang} A = m.$$

Свободные члены b_i будем считать неотрицательными. Этого всегда можно добиться умножением соответствующего уравнения на (-1). Помимо уже существующих n переменных x_1, x_2, ..., x_n введём ещё m (неотрицательных) переменных x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m} по формулам

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, & x_1 \geqslant 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, & x_2 \geqslant 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, & x_{n+m} \geqslant 0, \end{cases} \tag{2}$$

и рассмотрим новую задачу линейного программирования с новой целевой функцией

$$F(x) = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m}.$$

В этой новой задаче нужно найти $\min F(x)$ при ограничениях (2). Здесь сразу есть допустимое базисное решение:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0,\ x_{n+1} = b_1, x_{n+2} = b_2, \dots, x_{n+m} = b_m,$$

то есть в качестве базисных взяты все вновь введённые переменные x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}. Для решения этой задачи воспользуемся симплекс-методом. При этом симплексные преобразования будем проводить одновременно для обеих целевых функций $f(x)$ и $F(x)$. Как только какая-то *искусственная* (то есть вновь введённая) базисная переменная выходит из базиса и становится свободной, то при проведении дальнейших симплексных преобразований её можно не учитывать, вычёркивая весь соответствующий ей столбец из симплекс-матрицы. При реализации этого алгоритма могут представиться две возможности.

1. Минимум новой целевой функции $\min F(x) > 0$, то есть по крайней мере одна из искусственных базисных переменных в полученном оптимальном решении положительна.

Тогда множество допустимых базисных решений исходной задачи пусто и первоначальная задача линейного программирования не имеет решений.

2. Минимум новой целевой функции $\min F(x) = 0$, то есть в полученном оптимальном решении все искусственные базисные переменные x_{n+1}, x_{n+2}, $\ldots$, x_{n+m} равны нулю. Тогда полученные значения переменных x_1, x_2, $\ldots$, x_n в оптимальном решении новой задачи дают допустимое базисное решение первоначальной задачи. Если мы захотим воспользоваться этим допустимым базисным решением для поиска оптимального решения исходной задачи, то при его нахождении могут возникнуть два случая.

А. При поиске оптимального решения новой задачи (найти $\min F(x)$ при ограничениях (2)) все искусственные базисные переменные выведены из базиса. Тогда вычёркивается строка из симплекс-матрицы, отвечающая новой целевой функции $F(x)$. Этим заканчивается первая фаза симплекс-метода. Затем начинается его вторая фаза с полученным допустимым базисным решением и преобразованной целевой функцией первоначальной задачи. Поэтому иногда этот метод называют *двухфазным* симплекс-методом.

Б. При поиске оптимального решения новой задачи некоторые из искусственных переменных остались в базисе. Цель дальнейших симплексных преобразований состоит в том, чтобы вывести их из базиса. При этом нет необходимости обращать внимание на значения элементов в средней части строки преобразованной новой целевой функции $F(x)$. Но здесь также могут возникнуть две ситуации:

а) при переводе свободной переменной в базисную вместо исключаемой искусственной базисной переменной (при этом любую свободную переменную можно выводить в базисную) соблюдается условие, при котором новое базисное решение также будет допустимым: имеется положительное отношение соответствующего элемента столбца свободных членов и элемента строки, отвечающей выводимой искусственной базисной переменной, как это регламентируется симплекс-методом. Тогда такую перестановку переменных можно осуществлять;

б) нет ни одного положительного отношения, то есть условие перевода хотя бы одной свободной переменной в базисную вместо исключаемой искусственной базисной переменной не выполнено. Тогда все переменные с ненулевыми коэффициентами, входящие в строку симплекс-матрицы, отвечающей исключаемой искусственной базисной переменной, должны быть равны нулю и в процессе дальнейшего решения их нужно не учитывать.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Найти $\min\limits_{D}(-2x_1 + x_2 - x_3)$, если

$$D:\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 4, & x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\\ x_1 - 2x_3 + x_4 = 5, & x_3 \geqslant 0,\quad x_4 \geqslant 0,\\ 2x_1 + 2x_2 - x_5 = 3; & x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Введём искусственные базисные переменные x_6, x_7, x_8, новую целевую функцию $F(x) = x_6+x_7+x_8$ и сведём исходную задачу к следующей: найти $\min\limits_{D_1} F(x) = \min\limits_{D_1}(x_6+x_7+x_8)$, если

$$D_1:\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + x_6 = 4, & x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0,\quad x_3 \geqslant 0,\\ x_1 - 2x_3 + x_4 + x_7 = 5, & x_4 \geqslant 0,\quad x_5 \geqslant 0,\quad x_6 \geqslant 0,\\ 2x_1 + 2x_2 - x_5 + x_8 = 3; & x_7 \geqslant 0,\quad x_8 \geqslant 0. \end{cases}$$

Тогда допустимое базисное решение имеет вид:

$$x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0,\ x_6 = 4, x_7 = 5, x_8 = 3.$$

Будем применять симплекс-метод сразу для обеих целевых функций:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} x_6 & x_7 & x_8 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 5\\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 3\\
\hline
0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}\sim
$$

$$
\sim\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} x_6 & x_7 & x_8 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4\\
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 5\\
0 & 0 & 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 3\\
\hline
0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & -5 & -3 & 1 & -1 & 1 & -12
\end{array}\right)
\end{array}\sim
$$

$\sim$ [Число (-5) в последней строке показывает, что переменную x_1 нужно сделать базисной. Из трёх положительных отношений: $4:2$, $5:1$ и $3:2$ меньше последнее, поэтому переменную x_8 нужно делать свободной и в дальнейшем её не учитывать.] $\sim$

$$
\sim\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_6 & x_7 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|cccc|c}
1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4\\
0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 5\\
0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & -1 & 3\\
\hline
0 & 0 & -2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & -5 & -3 & 1 & -1 & 1 & -12
\end{array}\right)
\end{array}\sim
$$

$$
\sim\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} x_6 & x_7 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|cccc|c}
1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 4\\
0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 & 0 & 5\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2\\
\hline
0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & 3\\
\hline
0 & 0 & -5 & -3 & 1 & -1 & 1 & -12
\end{array}\right)
\end{array}\sim
$$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc|cccc|c} x_6 & x_7 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1/2 & 7/2\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1/2 & 3/2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & -1 & 3\\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -3/2 & -9/2 \end{array}\right)\end{array}\sim$$

$\sim$ [Теперь число $(-3/2)$ в последней строке показывает, что переменную x_5 нужно вводить в базис. Из двух положительных отношений: $1:1$ и $7/2 : 1/2$ меньше первое. Поэтому исключаем переменную x_6.] $\sim$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc|ccc|c} x_5 & x_7 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 1/2 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 7/2\\ -1/2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 3/2\\ \hline -1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 0 & 3\\ \hline -3/2 & 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & -9/2 \end{array}\right)\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc|ccc|c} x_5 & x_7 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -5/2 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 0 & 2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4\\ \hline 0 & 0 & 0 & 1/2 & 5/2 & -1 & -3 \end{array}\right)\end{array}\sim$$

$\sim$ [Здесь нужно менять переменные x_4 и x_7 и исключать переменную x_7.] $\sim$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{array}{ccc|cc|c} x_5 & x_4 & x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\ \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & -5/2 & 3\\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 2\\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4\\ \hline 0 & -1 & 0 & 1/2 & 5/2 & -3 \end{array}\right)\end{array}\sim$$

$$
\sim \begin{array}{c}
\begin{array}{ccc|cc|c} x_5 & x_4 & x_1 & x_2 & x_3 & \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|cc|c}
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1\\
0 & 1 & 0 & -1/2 & -5/2 & 3\\
0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & 2\\
\hline
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4\\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

Выполнен критерий останова симплекс-метода. Мы видим, что $\min\limits_{D_1} F(x) = 0$ и все искусственные переменные выведены из базиса. Окончилась первая фаза. Получено допустимое базисное решение:

$$x_5 = 1,\ x_4 = 3,\ x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0.$$

Так как в средней части предпоследней строки (то есть строки, соответствующей *данной в задаче* целевой функции $f(x)$) нет отрицательных коэффициентов, то вторую фазу симплекс-метода проводить не нужно. Полученное допустимое базисное решение уже является оптимальным (или одним из оптимальных) и

$$\min_D(-2x_1 + x_2 - x_3) = -4.$$

З а м е ч а н и е. Ноль в пятом столбце (соответствующем переменной x_3) предпоследней строки (соответствующей исходной целевой функции) полученной симплекс-матрицы показывает, что полученное оптимальное базисное решение является неединственным. Организуем симплекс-метод по-другому. Из второго уравнения системы ограничений следует, что переменную x_4 можно сразу взять за базисную. Поэтому вместо трёх искусственных базисных переменных достаточно ввести только две: x_6 и x_8, отвечающие первому и третьему уравнениям исходной системы ограничений.

Тогда после применения симплекс-метода получим новое оптимальное базисное решение:

$$x_1 = \frac{3}{2}\,,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1,\ x_4 = \frac{11}{2}\,,\ x_5 = 0$$

(разумеется, с тем же значением величины минимума целевой функции). Значит, и все точки ребра, соединяющего найденные две вершины симплекса, тоже будут давать оптимальное базисное решение. Все эти оптимальные базисные решения можно записать в виде:

$$x_1 = 2 - t, x_2 = 0, x_3 = 2t, x_4 = 3 + 5t, x_5 = 1 - 2t;\ t \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Пример 2. Найти $\max\limits_D(-x_1 + x_2 + x_3 - x_4)$, если

$$D : \begin{cases} -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 \,=\, 5, & x_1 \geqslant 0,\quad x_2 \geqslant 0, \\ \ \ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \,=\, 1; & x_3 \geqslant 0,\quad x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

Как всегда, будем искать $\min\limits_D(x_1 - x_2 - x_3 + x_4)$. Введём искусственные базисные переменные x_5 и x_6, новую целевую функцию $F(x) = x_5 + x_6$ и тем самым сведём исходную задачу к следующей: найти $\min\limits_{D_1} F(x) = \min\limits_{D_1}(x_5 + x_6)$, если

$$D_1 : \begin{cases} -x_1 - 6x_2 + x_3 - x_4 + x_5 \,=\, 5, & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, \\ \ \ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + x_6 \,=\, 1; & x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0, x_6 \geqslant 0. \end{cases}$$

Симплекс-преобразования имеют вид:

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} \ \ x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cccc|c} 1 & 0 & -1 & -6 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} x_5 & x_6 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|cccc|c} 1 & 0 & -1 & -6 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & -2 & 8 & -2 & 2 & -6 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$\sim$ [Переменную x_1 делаем базисной (можно и переменную x_3), тогда переменную x_6 делаем свободной и отбрасываем её.] $\sim$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & -1 & -6 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & 1 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 8 & -2 & 2 & -6 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & -1 & -6 & 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ \hline 0 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & -2 & 8 & -2 & 2 & -6 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_5 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & -20/3 & 4/3 & -4/3 & 16/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \\ \hline 0 & 0 & -1/3 & -4/3 & 4/3 & -1/3 \\ \hline 0 & 0 & 20/3 & -4/3 & 4/3 & -16/3 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$\sim$ [Меняем местами переменные x_3 и x_1.] $\sim$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_5 & x_3 & x_2 & x_1 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 4/3 & -20/3 & 0 & -4/3 & 16/3 \\ 0 & 1/3 & -2/3 & 1 & -1/3 & 1/3 \\ \hline 0 & -4/3 & -1/3 & 0 & 4/3 & -1/3 \\ \hline 0 & -4/3 & 20/3 & 0 & 4/3 & -16/3 \end{array}\right) \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} x_5 & x_3 & x_2 & x_1 & x_4 & & \end{array} \\ \left(\begin{array}{cc|ccc|c} 1 & 0 & -4 & -4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & -1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & -3 & 4 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & -4 \end{array}\right) \end{array}.$$

В средней части последней строки полученной симплекс-матрицы нет отрицательных элементов, поэтому выполнен критерий останова. Получены оптимальное базисное решение и минимум вспомогательной целевой функции:

$$x_5 = 4, x_3 = 1, x_1 = 0, x_2 = 0, x_4 = 0, x_6 = 0; \quad \min_{D_1} F(x) = 4.$$

Так как $\min\limits_{D_1} F(x) > 0$, то это означает, что исходная задача линейного программирования не имеет решений (нет ни одного допустимого базисного решения).

Пример 3. Найти $\min\limits_{D}(x_1 + x_2 + x_4)$, если

$$D: \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 + 3x_5 \ = \ 2, & x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 + 4x_5 \ = \ 4, & x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0, \\ 2x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 \ = \ 4; & x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Введём искусственные базисные переменные x_6, x_7, x_8, вспомогательную целевую функцию $F(x) = x_6 + x_7 + x_8$ и сведём исходную задачу к следующей: найти

$$\min_{D_1} F(x) = \min_{D_1}(x_6 + x_7 + x_8),$$

если

$$D_1\colon \begin{cases} x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 + 3x_5 + x_6 \ = \ 2, & x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0, x_3 \geqslant 0, \\ 2x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 + 4x_5 + x_7 \ = \ 4, & x_4 \geqslant 0, x_5 \geqslant 0, x_6 \geqslant 0, \\ 2x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 + x_8 \ = \ 4; & x_7 \geqslant 0, x_8 \geqslant 0. \end{cases}$$

Симплекс-преобразования (для обеих целевых функций) дают:

$$
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} x_6 & x_7 & x_8 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2\\
0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 & 4\\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & -3 & 6 & 4\\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
\hline
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array} \sim
$$

$$
\sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} x_6 & x_7 & x_8 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|ccccc|c}
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 3 & 2\\
0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4 & 4\\
0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & -3 & 6 & 4\\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & -5 & -2 & -9 & 3 & -13 & -10
\end{array}\right)
\end{array} \sim
$$

$\sim$ [Переменную x_5 вводим в базис, а переменную x_6 выводим из базиса и вычёркиваем её (минимальное отношение $2:3=4:6$).] $\sim$

$$
\sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} x_5 & x_7 & x_8 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|cccc|c}
3 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2\\
4 & 1 & 0 & 2 & 1 & 3 & 0 & 4\\
6 & 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & -3 & 4\\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
\hline
-13 & 0 & 0 & -5 & -2 & -9 & 3 & -10
\end{array}\right)
\end{array} \sim
$$

$$
\sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} x_5 & x_7 & x_8 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|cccc|c}
1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 2/3 & 0 & 2/3\\
0 & 1 & 0 & 2/3 & -1/3 & 1/3 & 0 & 4/3\\
0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & -3 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & -2/3 & 7/3 & -1/3 & 3 & -4/3
\end{array}\right)
\end{array} \sim
$$

$\sim$ [Переменную x_1 нужно вводить в базис. Оба положительных отношения $2/3 : 1/3$ и $4/3 : 2/3$ одинаковы, поэтому любую из переменных x_5 и x_7 можно делать свободной. Совершенно ясно, что лучше свободной делать искусственную базисную переменную x_7, так как тогда от неё сразу же можно избавиться.] $\sim$

$$
\sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_5 & x_1 & x_8 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}
1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 2/3\\
0 & 2/3 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 & 4/3\\
0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -3 & 0\\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
\hline
0 & -2/3 & 0 & 7/3 & -1/3 & 3 & -4/3
\end{array}\right)
\end{array}
\sim
$$

$$
\sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_5 & x_1 & x_8 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}
1 & 1/3 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 2/3\\
0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 2\\
0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -3 & 0\\
\hline
0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
\sim
$$

$$
\sim
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_5 & x_1 & x_8 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array}\\
\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}
1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0\\
0 & 1 & 0 & -1/2 & 1/2 & 0 & 2\\
0 & 0 & 1 & -2 & 0 & -3 & 0\\
\hline
0 & 0 & 0 & 3/2 & -1/2 & 1 & -2\\
\hline
0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0
\end{array}\right)
\end{array}.
$$

Выполнен критерий останова. Вспомогательная целевая функция $F(x)$ приняла нулевое значение вместе с искусственной базисной переменной x_8, но эта переменная осталась в базисе. Мы не можем сразу же вывести переменную x_8 из базиса, то есть поменять её местами с какой-нибудь из оставшихся свободных переменных: x_2, x_3 или x_4, так как среди элементов средней части третьей строки (соответствующей переменной x_8) полученной симплекс-матрицы нет положительных. Это означает, что при любой такой замене не выполнено условие допустимости базисного решения. Поэтому, если мы хотим при дальнейшем решении задачи воспользоваться допустимым базисным решением

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0, \qquad (3)$$

полученным на первом этапе, то нам нужно исключить из рассмотрения переменные (обратив их в ноль), отвечающие отрицательным коэффициентам средней части третьей строки симплекс-матрицы, то есть переменные x_2 и x_4. Тогда исходная задача линейного программирования сведётся к следующей: найти $\min\limits_{D_2} x_1$, если

$$D_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_5 \ = \ 2, & x_1 \geqslant 0, \\ 2x_1 + 3x_3 + 4x_5 \ = \ 4, & x_3 \geqslant 0, \\ 2x_1 + 4x_3 + 6x_5 \ = \ 4; & x_5 \geqslant 0. \end{cases}$$

Третье уравнение получено из первого умножением на 2, поэтому вычёркиваем его и получаем

$$D_2 : \begin{cases} x_1 + 2x_3 + 3x_5 \ = \ 2, \\ 2x_1 + 3x_3 + 4x_5 \ = \ 4; \end{cases} \quad x_1 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_5 \geqslant 0.$$

Ранг матрицы системы $\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = 2$, следовательно, здесь две базисные переменные и одна свободная. Полученное ранее допустимое базисное решение (3) переходит в допустимое базисное решение

$$x_1 = 2,\ x_3 = 0,\ x_5 = 0.$$

Пусть x_1, x_3 – базисные переменные, а x_5 – свободная. Тогда преобразования симплекс-матрицы имеют вид:

$$\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_5 & \\ \end{array}\\ \left(\begin{array}{cc|c|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & 4 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_5 & \\ \end{array}\\ \left(\begin{array}{cr|r|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\end{array} \sim$$

$$\sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_5 & \\ \end{array}\\ \left(\begin{array}{cc|r|c} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\end{array} \sim \begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x_1 & x_3 & x_5 & \\ \end{array}\\ \left(\begin{array}{cc|r|r} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)\end{array}.$$

Выполнен критерий останова симплекс-метода, поэтому оптимальное решение текущей вспомогательной задачи:

$$x_1 = 2,\ x_3 = 0,\ x_5 = 0; \quad \min_{D_2} x_1 = 2.$$

Значит, оптимальное решение исходной задачи имеет вид:

$$x_1 = 2,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0,\ x_5 = 0;\ \min_{D}(x_1+x_2+x_4) = 2.$$

Контрольные вопросы

1. Как вводятся искусственные переменные задач линейного программирования, записанных в канонической форме?

2. Как вводится вспомогательная целевая функция в задачах линейного программирования при введении искусственных переменных?

3. Могут ли искусственные переменные при решении задач линейного программирования остаться базисными и что в этом случае с ними нужно делать?

4. Теория двойственности

В линейном программировании каждой задаче можно поставить в соответствие другую задачу, называемую *двойственной*; причём решения этих задач непосредственно связаны друг с другом. Так, минимум целевой функции в первой задаче (если ищется минимум) равен максимуму другой целевой функции в двойственной задаче и наоборот. Обычно прямая и двойственная задачи изучаются совместно, так как часто оказывается, что решение одной из этих задач оказывается проще решения другой. Кроме того, если прямая задача имеет экономический характер, то и двойственная к ней также имеет экономический смысл. Существуют простые математические правила, позволяющие построить двойственную задачу по исходной. Но прежде, чем их описывать, мы посмотрим на примерах, какое экономическое содержание может иметь двойственная задача.

Вернёмся к задаче о распределении ресурсов и построим двойственную к ней задачу. Предположим, что к руководителю фирмы, производящей три вида продукции P_1, P_2 и P_3 из двух видов сырья S_1 и S_2, приходит другой бизнесмен и говорит, что он хочет купить у первого бизнесмена всё имеющееся у него сырьё. Почему бы не продать, если это будет выгоднее, чем производить готовую продукцию. Но по каким ценам продавать сырьё? Ясно, что цены должны быть реальными, а не заоблачными (иначе такое сырьё никто не купит), но выгодными, чтобы прибыль от продажи сырья была бы не меньше прибыли от продажи готовой продукции. Вот для этих цен (которые в экономике часто называют *теневыми* ценами) и ставится двойственная задача.

Пусть u – цена единицы сырья S_1, v – цена единицы сырья S_2. Тогда из условий задачи о распределении ресурсов следует, что в единице готовой продукции P_1 содержится 4 единицы сырья S_1 и 2 единицы сырья S_2. Поэтому первое ограничение на цены u и v имеет вид: $4u + 2v \geqslant 8$, то есть стоимость сырья в единице готовой продукции P_1 должно быть не меньше цены готовой продукции, иначе может возникнуть ситуация, когда сырьё продавать невыгодно. Аналогично получаем: $2u+6v \geqslant 14$, $5u+5v \geqslant 10$, причём $u \geqslant 0$, $v \geqslant 0$. Общий доход от продажи сырья составит $800u+1400v$. Любая такая комбинация цен устроит производителя. Если он найдёт покупателя на таких условиях, то он хочет знать гарантированный (то есть *минимальный*) доход от продажи сырья при выполнении всех, устраивающих его, условий на цены. Поэтому двойственная задача ставится так: найти $\min(800u + 1400v)$, если

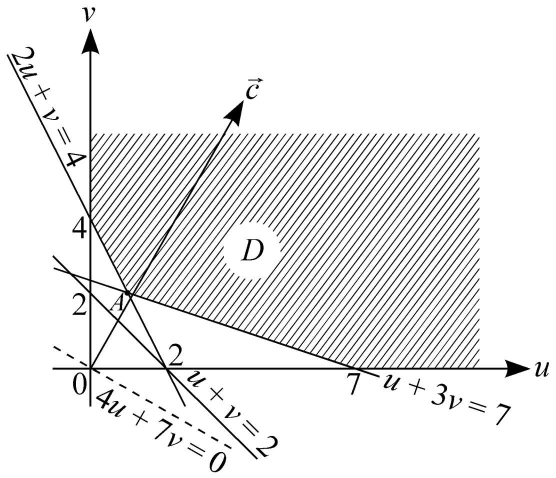
$$D: \begin{cases} 4u + 2v \geqslant 8, \\ 2u + 6v \geqslant 14, \qquad u \geqslant 0,\ v \geqslant 0; \\ 5u + 5v \geqslant 10; \end{cases}$$

или, что то же самое: найти $200\min(4u + 7v)$, если

$$D: \begin{cases} 2u + v \geqslant 4, \\ u + 3v \geqslant 7, \qquad u \geqslant 0,\ v \geqslant 0. \\ u + v \geqslant 2; \end{cases}$$

Эта задача содержит всего лишь две переменные и поэтому её можно легко решить графически, в отличие от прямой задачи, содержащей три переменные, и которую ранее мы решали с помощью симплекс-метода. Строим вектор градиента $\vec{c} = \operatorname{grad}(4u + 7v) = \{4; 7\}$. Линия нулевого уровня: $4u + 7v = 0$. Перемещая линии уровня в направлении, противоположном направлению вектора $\vec{c}$, легко убедиться, что их “выход” из области D произойдёт в точке A. Её координаты и дают нам оптимальное решение задачи:

$$\begin{cases} 2u + v = 4, \\ u + 3v = 7; \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = 1, \\ v = 2; \end{cases} \quad \text{при этом} \ \min_D(800u + 1400v) = 3600.$$



Таким образом, мы получили тот же самый результат, что и в прямой задаче о распределении ресурсов. Если прямая задача решается симплекс-методом, то кроме автоматического получения значения экстремальной функции двойственной задачи легко получается и само оптимальное решение этой задачи. Его компоненты (в обозначениях раздела 2) имеют вид: $\vec{c}_B \cdot B^{-1}$.

Рассмотрим ещё одну задачу: задачу о диете или о рациональном питании. Пусть диета состоит из двух продуктов и пусть в одной упаковке первого продукта содержится 3 единицы витамина A и 2 единицы витамина C. Соответственно, в одной упаковке второго продукта содержится 2 единицы витамина A и 1 единица витамина C. Далее, пусть диета должна содержать не менее 11 единиц витамина A и 6 единиц витамина C. Предположим, что одна упаковка первого продукта сто́ит 5 долларов, а одна упаковка второго продукта сто́ит 3 доллара. Нужно определить минимальную стоимость диеты. Обозначим через x количество упаковок первого продукта, которые нужно купить, а через y количество упаковок второго продукта. Нам необходимо найти $\min\limits_{D}(5x+3y)$, если

$$D:\begin{cases}3x+2y\geqslant 11, & x\geqslant 0,\\ 2x+\ \ y\geqslant\ \ 6; & y\geqslant 0.\end{cases}$$

Так как переменных только две, то полученная задача легко решается графически, однако для того, чтобы одновременно получить и оптимальное решение двойственной задачи, мы воспользуемся симплекс-методом. Для этого приведём задачу к каноническому виду, вводя две балансовые переменные u и v:

$$\begin{aligned}u &= 3x+2y-11,\\ v &= \ \ 2x+y-6.\end{aligned}$$

Тогда система ограничений приобретает следующий вид:

$$D:\begin{cases}3x+2y-u=11, & x\geqslant 0,\ \ y\geqslant 0,\\ 2x+\ \ y-v=\ \ 6; & u\geqslant 0,\ \ v\geqslant 0.\end{cases}$$

Ранг матрицы системы $\operatorname{rang}\begin{pmatrix}3 & 2 & -1 & 0\\ 2 & 1 & 0 & -1\end{pmatrix}=2$. Следовательно, здесь две базисные переменные и две свободные. Пусть свободные переменные u и v, а базисные x и y. Тогда

$$u=0,\ v=0,\ x=1,\ y=4$$

– допустимое базисное решение. Симплекс-преобразования имеют вид:

$$\begin{array}{cccc} x & y & u & v \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} x & y & u & v \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{rr|rr|r} 3 & 2 & -1 & 0 & 11 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ \hline 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & 1 & 0 & -1 & 6 \\ \hline 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & u & v \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} x & y & u & v \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -3 & -4 \\ \hline 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{cccc} x & y & u & v \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} x & y & u & v \end{array}$$
$$\sim \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 3 & -5 & 10 & -5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr|r} 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & -17 \end{array}\right).$$

Выполнен критерий останова симплекс-метода, поэтому оптимальное решение $x = 1$, $y = 4$, а минимальная стоимость диеты равна 17 долларам.

Двойственная задача стоит перед продавцом искусственных витаминов. Пусть u – стоимость единицы витамина A, а v – стоимость единицы витамина C. Но цена синтетических витаминов не может быть больше, чем цена аналогичных витаминов в натуральных продуктах, иначе покупатель не будет приобретать витамины в таблетках. Тогда $3u+2v$ – стоимость витаминов A и C в одной упаковке первого продукта, и, соответственно, $2u + v$ – стоимость витаминов A и C в одной упаковке второго продукта. Итак, двойственная задача имеет вид: найти $\max(11u + 6v)$, если

$$\begin{cases} 3u + 2v \leqslant 5, & u \geqslant 0, \\ 2u + v \leqslant 3; & v \geqslant 0. \end{cases}$$

Так как прямую задачу мы решали симплекс-методом, то сразу можем найти и решение двойственной задачи. Из теоремы теории двойственности следует, что $\max(11u + 6v)$ в двойственной задаче равен $\min(5x + 3y)$ в прямой задаче, то есть 17 долларам. Компоненты $\{u; v\}$ оптимального решения двойственной задачи имеют вид:[1] $\{u; v\} = \vec{c}_B \cdot B^{-1} =$

$$= \{5; 3\} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \{5; 3\} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = \{1; 1\}.$$

Таким образом, оптимальное решение двойственной задачи:

$$u = 1,\ v = 1.$$

Экономический вывод из решения двойственной задачи состоит в том, при оптимальной диете покупатель платит одни и те же деньги, что за натуральные продукты, что за синтетические витамины. То есть при таких условиях нет смысла покупать таблетки.

Рассмотрим теперь общие математические правила составления двойственных задач. Пусть

$$A = A_{m\times n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad \begin{aligned} \vec{c} &= \{c_1; c_2; \ldots; c_n\}, \\ \vec{b} &= \{b_1; b_2; \ldots; b_m\}, \\ \vec{x} &= \{x_1; x_2; \ldots; x_n\}, \\ \vec{y} &= \{y_1; y_2; \ldots; y_m\}. \end{aligned}$$

Если прямая задача задана в *стандартном* виде, то есть присутствуют лишь ограничения в виде неравенств, то двой-

[1] Обратную матрицу B^{-1} (точнее, $(-B)^{-1}$) мы уже нашли методом исключения Гаусса по схеме Жордана при использовании симплекс-метода в прямой задаче.

ственная задача по прямой строится следующим образом:

Прямая задача	Двойственная задача
$f(\vec{x}) = (\vec{c}, \vec{x}) \longrightarrow \max$ $A\vec{x} \leqslant \vec{b}$ $\vec{x} \geqslant \vec{0}$	$F(\vec{y}) = (\vec{b}, \vec{y}) \longrightarrow \min$ $A^T\vec{y} \geqslant \vec{c}$ $\vec{y} \geqslant \vec{0}$
$f(\vec{x}) = (\vec{c}, \vec{x}) \longrightarrow \min$ $A\vec{x} \geqslant \vec{b}$ $\vec{x} \geqslant \vec{0}$	$F(\vec{y}) = (\vec{b}, \vec{y}) \longrightarrow \max$ $A^T\vec{y} \leqslant \vec{c}$ $\vec{y} \geqslant \vec{0}$

Если прямая задача задана в *каноническом* виде, то есть присутствуют только ограничения в виде равенств (за исключением естественных неравенств, выражающих неотрицательность переменных), то в двойственной задаче теряется условие неотрицательности переменных:

Прямая задача	Двойственная задача
$f(\vec{x}) = (\vec{c}, \vec{x}) \longrightarrow \max$ $A\vec{x} = \vec{b}$ $\vec{x} \geqslant \vec{0}$	$F(\vec{y}) = (\vec{b}, \vec{y}) \longrightarrow \min$ $A^T\vec{y} \geqslant \vec{c}$
$f(\vec{x}) = (\vec{c}, \vec{x}) \longrightarrow \min$ $A\vec{x} = \vec{b}$ $\vec{x} \geqslant \vec{0}$	$F(\vec{y}) = (\vec{b}, \vec{y}) \longrightarrow \max$ $A^T\vec{y} \leqslant \vec{c}$

Если в прямой задаче присутствуют как ограничения в виде равенств, так и ограничения в виде неравенств или отсутствуют условия неотрицательности отдельных переменных, то можно с помощью введения балансовых переменных привести задачу к одной из рассмотренных выше. Если этого не делать, то нужно знать следующее. Каждому ограничению прямой задачи соответствует неизвестная двойственной задачи. Если в системе ограничений прямой задачи имеется равенство, то соответствующая переменная в двойственной задаче может быть произвольного знака; если на некоторую переменную прямой задачи не наложено условие неотрицательности, то соответствующее ей ограничение двойственной задачи является равенством. Рассмотрим в качестве примера следующее построение двойственной задачи:

Прямая задача	Двойственная задача
$f(\vec{x}\,) = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \longrightarrow \min$	$F(\vec{y}\,) = \sum\limits_{i=1}^{m} b_i y_i \longrightarrow \max$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geqslant b_i,\ i = 1, 2, \ldots, k$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji} y_i \leqslant c_j,\ j = 1, 2, \ldots, l$
$\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = k+1, \ldots, m$	$\sum\limits_{i=1}^{m} a_{ji} y_i = c_j,\ j = l+1, \ldots, n$
$x_j \geqslant 0,\ j = 1, 2, \ldots, l$	$y_i \geqslant 0,\ i = 1, 2, \ldots, k$

Учитывая всё вышесказанное, сформулируем последовательность действий при составлении двойственной задачи.

1. Во всех ограничениях прямой задачи члены с неизвестными должны находиться в левой части, а свободные члены – в правой.

2. Ограничения-неравенства как прямой, так и двойственной задачи должны быть записаны таким образом, чтобы в каждой задаче знаки неравенств у них были направлены только в одну, присущую этой задаче сторону. При этом, если прямая задача – задача на максимум (минимум), то система ограничений должна состоять из неравенств вида $\leqslant$ ($\geqslant$), а двойственная задача должна быть задана на минимум (максимум) и её система ограничений должна состоять из неравенств вида $\geqslant$ ($\leqslant$).

3. Каждому ограничению прямой задачи соответствует неизвестная двойственной задачи. При этом неизвестная,

отвечающая ограничению-неравенству, должна удовлетворять условию неотрицательности, а неизвестная, отвечающая ограничению-равенству, может быть любого знака.

4. Если на некоторую переменную прямой задачи не наложено условие неотрицательности, то соответствующее ей ограничение двойственной задачи является равенством.

5. Матрица системы ограничений двойственной задачи получается транспонированием матрицы системы ограничений прямой задачи.

6. Свободными членами системы ограничений двойственной задачи являются коэффициенты целевой функции прямой задачи.

7. Коэффициентами целевой функции двойственной задачи являются свободные члены системы ограничений прямой задачи.

Прямая и двойственная задачи образуют пару двойственных задач линейного программирования. Каждая из задач является двойственной к другой задаче рассматриваемой пары.

Для прямой и двойственной задач линейного программирования справедливы следующие утверждения.

Теорема 1. Если одна из пары двойственных задач линейного программирования имеет решение, то и другая задача имеет решение. При этом значения целевых функций обеих задач равны.

Теорема 2. Если целевая функция одной из пары двойственных задач не ограничена на допустимом множестве (нет оптимального решения), то система ограничений другой задачи этой пары несовместна.

Рассмотрим несколько примеров.

П р и м е р 1. Составить задачу, двойственную к данной: найти $\min(x_1 + 4x_2 + 3x_3)$, если

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 10, & x_1 \geqslant 0, \\ 2x_1 - x_2 \geqslant 6, & x_2 \geqslant 0, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \geqslant 12; & x_3 \geqslant 0; \end{cases}$$

или, записывая её с одним и тем же знаком ($\geqslant$): найти $\min(x_1 + 4x_2 + 3x_3)$, если

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 - x_3 & \geqslant & -10 & \longleftarrow y_1 \\ 2x_1 - x_2 & \geqslant & 6 & \longleftarrow y_2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 & \geqslant & 12 & \longleftarrow y_3 \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x_1 \geqslant 0 \\ x_2 \geqslant 0 \\ x_3 \geqslant 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{Bmatrix} -10 \\ 6 \\ 12 \end{Bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{Bmatrix}.$$

Поэтому двойственная задача имеет вид: найти $\max(-10y_1 + 6y_2 + 12y_3)$, если

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{Bmatrix} \leqslant \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{Bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \geqslant 0 \\ y_2 \geqslant 0 \\ y_3 \geqslant 0 \end{pmatrix},$$

или, умножая матрицу на вектор и записывая неравенства в привычной форме: найти $\max(-10y_1 + 6y_2 + 12y_3)$, если

$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + y_3 \leqslant 1, & y_1 \geqslant 0, \\ -y_1 - y_2 + 2y_3 \leqslant 4, & y_2 \geqslant 0, \\ -y_1 + 3y_3 \leqslant 3; & y_3 \geqslant 0. \end{cases}$$

Пример 2. Составить задачу, двойственную к данной: найти $\min(x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4)$, если

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7, & x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \\ 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 10; & x_3 \geqslant 0, \quad x_4 \geqslant 0. \end{cases}$$

В этом случае

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{Bmatrix} 7 \\ 10 \end{Bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{Bmatrix}.$$

Двум ограничениям исходной задачи отвечают две переменные y_1 и y_2 двойственной задачи. Поэтому двойственная задача имеет вид: найти $\max(7y_1 + 10y_2)$, если

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{Bmatrix} \leqslant \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 3 \end{Bmatrix},$$

или, что то же самое, найти $\max(7y_1 + 10y_2)$, если

$$\begin{cases} 3y_1 + 4y_2 \leqslant 1, \\ 2y_1 + 3y_2 \leqslant -1, \\ y_1 + 2y_2 \leqslant -2, \\ y_1 + y_2 \leqslant 3. \end{cases}$$

При этом переменные y_1 и y_2 могут быть как положительными, так и отрицательными.

П р и м е р 3. Составить задачу, двойственную к данной: найти $\min(x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4)$, если

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \\ -2x_1 - x_2 + 5x_3 - x_4 \leqslant -2, \\ \phantom{-2x_1 - {}} 3x_1 + x_2 - 2x_3 \leqslant -5; \end{cases} \quad \begin{matrix} x_1 \geqslant 0, \\ x_3 \geqslant 0; \end{matrix}$$

или, записывая задачу на минимум с помощью знаков ($\geqslant$) и ($=$): найти $\min(x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4)$, если

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 5, \longleftarrow y_1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 \geqslant 2, \longleftarrow y_2 \\ -3x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant -5; \longleftarrow y_3 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} x_1 \geqslant 0 \\ x_3 \geqslant 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку на этот раз

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 1 \\ -3 & -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{Bmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{Bmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \\ -5 \end{Bmatrix},$$

то двойственная задача в этом случае имеет вид:
найти $\max(5y_1 + 2y_2 + 5y_3)$, если

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - 3y_3 \leqslant 1, \\ 2y_1 + y_2 - y_3 = -2, \\ -y_1 - 5y_2 + 2y_3 \leqslant 3, \\ 2y_1 + y_2 = -5; \end{cases} \quad \begin{matrix} y_2 \geqslant 0, \\ y_3 \geqslant 0. \end{matrix}$$

Так как по условию в прямой задаче переменные x_2 и x_4 любого знака, то в двойственной задаче второе и четвёртое ограничения – равенства; а так как в прямой задаче первое ограничение – равенство, то в двойственной задаче переменная y_1 любого знака.

Контрольные вопросы

1. По каким правилам составляется двойственная задача линейного программирования?

2. Как связаны между собой решения пары двойственных задач линейного программирования?

3. Что можно сказать о решении прямой задачи линейного программирования, если целевая функция двойственной задачи не ограничена на допустимом множестве (то есть у двойственной задачи отсутствует оптимальное решение)?

Михаил Вадимович Сучков
Александр Петрович Горячев

Линейное программирование

Учебно-методическое пособие
для студентов вузов

Редактор Т.В. Волвенкова
Оригинал-макет изготовлен А.П. Горячевым

Подписано в печать . Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Уч.-изд. л. 4,25. Печ. л. 4,25. Тираж экз.
Изд. № 4/88. Заказ .

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет).
115409, Москва, Каширское ш., 31
Типография