МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С. В. Шведенко

ФАКУЛЬТЕТ
ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

ИЗБРАННЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Часть 2

Москва 1994

ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)

С. В. Шведенко

ИЗБРАННЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

Часть 2

Непрерывность и разрывы функций. Интеграл Римана функций действительного переменного

Утверждено редсоветом института в качестве учебного пособия

Москва 1994

УДК 517

Ш в е д е н к о С. В. **Избранные лекции по математическому анализу.** Часть 2: Непрерывность и разрывы функций. Интеграл Римана функций действительного переменного. М.: МИФИ, 1994.–212 с.

Дано изложение теории интеграла Римана функций одного действительного переменного с включением части материала, относящегося к понятиям непрерывности и разрывов функций.

Лекции адресованы студентам первого курса, а также всем тем, кто интересуется проблемами логически обоснованного изложения математического анализа.

ISBN 5-7262-0056-х

Редактор *И.Н. Маркина*
Техн. редактор *И.В. Печенкин*

Тем. план 1993 г.

Лицензия ЛР № 020676 от 09.12.92 Подписано в печать 03.04.95
Формат 60×84 1/16 Печ.л. 7,0 Уч.-изд.л. 10,0 Тираж 730 экз.
Изд. № 040-1 Заказ 1088

Московский государственный инженерно-физический институт
(технический университет). Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское шоссе, 31

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вторая часть "Избранных лекций по математическому анализу" охватывает тему "Интеграл Римана функций действительного переменного", а также примыкающие к ней вопросы непрерывности и разрывов функций, не вошедшие в первую часть (Избранные лекции по математическому анализу. Часть 1: Числа, последовательности, пределы, экспонента и элементарные функции. М.: МИФИ, 1992), далее обозначаемую ИЛМА-1.

При составлении лекций автор стремился дать сжатое, но исчерпывающее изложение *теории интеграла Римана* функций одного действительного переменного, соблюдая при этом требование, чтобы каждое формулируемое утверждение (за исключением входящих в § 27 и отдельные замечания) сопровождалось подробным доказательством, не содержащим ссылок на не установленные ранее факты и какие-либо внешние источники, кроме ИЛМА-1 (из раздела дифференциального исчисления используется лишь определение производной и теорема Лагранжа о конечных приращениях). Учитывая потребности смежных дисциплин и современные тенденции развития математического анализа, изложение охватывает случаи функций, принимающих на числовой оси как *действительные*, так и *комплексные* значения.

Характер лекций во многом определили следующие общие положения.

1. Роль математических курсов в образовательном процессе не сводится к сообщению определенного набора понятий, фактов и методов, усвоение которых считается необходимым для овладения выбранной специальностью и для осознания себя образованным человеком. Истинное значение этих курсов состоит в том, чтобы на четко очерченных и логически безупречных абстрактных схемах приблизиться к пониманию того, что является *доказательством* того или иного (не обязательно математического) положения, а

что – лишь ни к чему не обязывающим *разговором* по его поводу, что можно считать *аргументированными доводами* в пользу какого-то тезиса, а что – только призывами, уговорами и агитацией за него.

2. Непосредственная практическая польза от математических утверждений и формул в целом все же ничтожна по сравнению с тем влиянием на организацию мыслительной деятельности, которое оказывает *процесс обоснования* этих утверждений и формул. Распространенная, к сожалению, практика чтения математических курсов без доказательств (или лишь с имитацией доказательств) противоречит, таким образом, главному назначению этих курсов – развивать способности к познанию мира (*математика* – от греч. *μάθημα* – познание).

3. Выражения типа "хорошо известно", "легко видеть", "нетрудно показать", изобилующее в учебниках и лекционных курсах, по большей части утратили свой первоначальный смысл и превратились в ширму, скрывающую пробелы в рассуждениях, в указатели тех мест, которые по тем или иным причинам не поддаются внятному объяснению.

4. Главное и наиболее сложное при построении лекционного курса – выдержать от начала до конца заданный *уровень изложения* материала, следя за соответствием степени общности формулировок целесообразности и возможности их обоснования. Недостойно прибегать к "методическому приему", когда сравнительно простые и не самые важные утверждения и примеры разбираются с подчеркнутой тщательностью, а по-настоящему трудные и фундаментальные факты предлагаются для "самостоятельной проработки".

§ 1. Ограниченные и неограниченные функции на множестве. Точные грани функций

Ограниченность функции $f(x)$ *на множестве* X по определению означает *ограниченность множества значений* $Y=\{f(x)\colon x\in X\}$ (более корректная запись $Y=\{y\colon \exists x\in X\,(f(x)=y)\}$), принимаемых функцией $f(x)$ в точках множества X. Значения всех функций $f(x)$ предполагаются *действительными* или *комплексными*, так что Y является подмножеством либо числовой оси $\mathbb{R}$, либо комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Переменное x может быть *любым*, а в качестве X может выступать *любое* множество значений этого переменного, при этом необязательно предполагать (хотя это часто делается), что *все без исключения* точки $x\in X$ принадлежат *области определения* D_f функции $f(x)$. Сделанное допущение позволяет говорить, например, об ограниченности функций $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$ (рис. 1) и $f(x)=\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x)$ (рис. 2) *на числовой оси* (а не *на числовой оси за исключением точек, в которых эти функции не определены*); кроме того: а) упрощаются формулировки некоторых утверждений относительно ограниченности функций, что хоть немного способствует очищению языка от словосочетаний типа "проколотая окрестность"; б) каковы бы ни были функции $f(x)$ и множество X, всегда можно *однозначно* ответить на вопрос, является данная функция ограниченной на указанном множестве или нет.

Определение 1. Функция $f(x)$ (принимающая действительные или комплексные значения) называется *ограниченной на множестве* X, если истинно высказывание $\exists h\,\forall x\,(x\in X\wedge x\in D_f\to|f(x)|\le h)$ (или в более краткой записи $\exists h\,\forall x\in X\,(|f(x)|\le h)$, при условии, что функция $f(x)$ определена во всех точках $x\in X$, т.е. $X\subset D_f$).

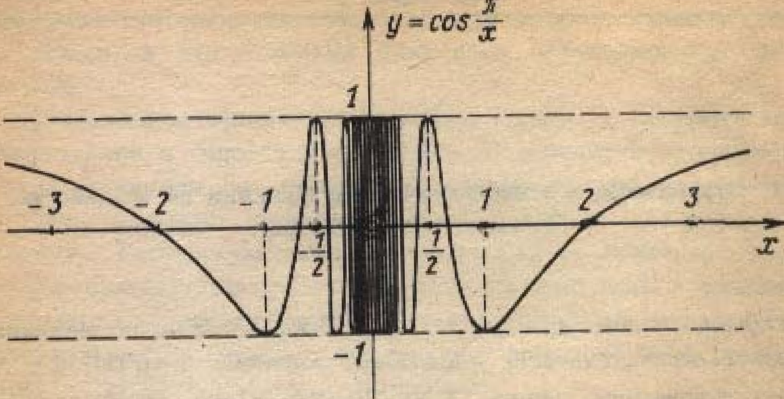


Рис. 1

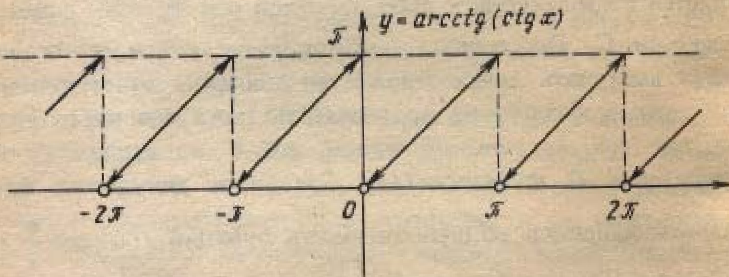


Рис. 2

Геометрически ограниченность *действительнозначной* функции $f(x)$ на множестве X означает существование *отрезка* $[-h, h]$ (а в случае *комплекснозначной* функции – *круга* $\{w \in \mathbf{C}: |w| \leq h\}$), содержащего значения $f(x)$ для *всех* точек $x \in X$ (в которых эта функция определена).

Для функций $f(x)$, принимающих на множестве X лишь *действительные* значения, отдельно вводятся понятия *ограниченности сверху* и *ограниченности снизу* на множестве X.

Определение 2. Действительнозначная функция $f(x)$ называется:

а) *ограниченной сверху на множестве* X, если истинно высказывание $\exists d \forall x (x \in X \wedge x \in D_f \to f(x) \le d)$, означающее, что все значения функции $f(x)$ на множестве X не больше некоторого числа d.

б) *ограниченной снизу на множестве* X, если истинно высказывание $\exists c \forall x (x \in X \wedge x \in D_f \to c \le f(x))$, означающее, что все значения функции $f(x)$ на множестве X не меньше некоторого числа c.

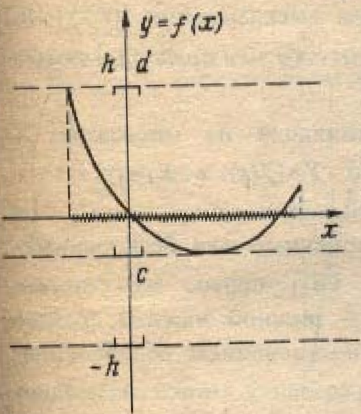


Рис. 3

З а м е ч а н и е. Ограниченность *действительнозначной* функции $f(x)$ на множестве X равносильна одновременной ограниченности этой функции сверху и снизу на множестве X (это вытекает из того, что для действительнозначной функции $f(x)$ справедливы утверждения: $|f(x)| \le h \to -h \le f(x) \le h$ и $c \le f(x) \le d \to |f(x)| \le \max\{|c|, |d|\}$; рис. 3); для комплекснозначных функций понятия *ограниченности сверху* и *ограниченности снизу* лишены смысла.

Определение 3. Функция $f(x)$ на множестве X называется: а) *неограниченной*, б) *неограниченной сверху*, в) *неограниченной снизу* – если истинны соответственно высказывания:

а) $\forall h \exists x \in X (|f(x)| > h)$,

б) $\forall d \exists x \in X (f(x) > d)$,

в) $\forall c \exists x \in X (f(x) < c)$

(таким образом, *неограниченность снизу* функции $f(x)$ на множестве X означает существование для любого действительного числа c такой точки $x \in X$, в которой значение функции $f(x)$ меньше числа c).

З а м е ч а н и е. Высказывания "а", "б", "в" определения 3 совпадают с *отрицаниями* высказываний о том, что функция $f(x)$

на множестве X является: а) *ограниченной*, б) *ограниченной сверху*, в) *ограниченной снизу*. Вот пример формального доказательства:

$$\neg \text{ "функция } f(x) \text{ ограничена на множестве } X\text{"} \leftrightarrow$$
$$\leftrightarrow \neg \exists h \forall x (x \in X \wedge x \in D_f \rightarrow |f(x)| \le h) =$$
$$= \forall h \exists x (x \in X \wedge x \in D_f \wedge \neg (|f(x)| \le h)) =$$
$$= \forall h \exists x (x \in X \wedge |f(x)| > h) = \forall h \exists x \in X (|f(x)| > h)$$

(было учтено правило $\neg(\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{B}) = \mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B}$, а также тот факт, что *при наличии условия* $x \in D_f$ отрицанием высказывания $(|f(x)| \le h)$ служит высказывание $(|f(x)| > h)$, *само по себе уже предполагающее* выполнение условия $x \in D_f$).

Для любой функции $f(x)$, принимающей на множестве X *действительные* значения, множество $Y = (f(x)\colon x \in X) = \{y\colon \exists x \in X\ (f(x) = y)\}$ является *множеством действительных чисел*, и следовательно для него определены (конечные или бесконечные) числа $\overline{y} = \sup Y$ и $\underline{y} = \inf Y$ (ИЛМА-1, §8), первое из которых называют *точной верхней*, а второе – *точной нижней гранью* функции $f(x)$ на множестве X, с использованием обозначений: $\overline{y} = \sup\limits_X f(x)$, $\underline{y} = \inf\limits_X f(x)$. Формальные определения даются следующим образом.

Определение 4. Конечное или бесконечное число $\overline{y}$ называется *точной верхней гранью* действительнозначной функции $f(x)$ на множестве X (обозначение $\overline{y} = \sup\limits_X f(x)$), если истинно высказывание

$$\forall x (x \in X \wedge x \in D_f \rightarrow f(x) \le \overline{y}) \wedge$$
$$\wedge \forall y\ (y < \overline{y} \rightarrow \exists x \in X\ (f(x) > y)),$$

другими словами, $\overline{y} = \sup\limits_X f(x)$ – это *наименьшее* число (из расширенной системы действительных чисел), обладающее тем свойством, что $f(x) \le \overline{y}$ для всех точек $x \in X$, в которых определена функция $f(x)$ (рис. 4).

Определение 5. Конечное или бесконечное число $\underline{y}$ называется *точной нижней гранью* действительнозначной функции $f(x)$ на множестве x (обозначение $\underline{y}=\inf\limits_{X} f(x)$), если истинно высказывание

$$\forall x(x\in X\wedge x\in D_f\to \underline{y}\le f(x))\wedge$$
$$\wedge\forall y\ (y>\underline{y}\to\exists x\in X\ (y>f(x))).$$

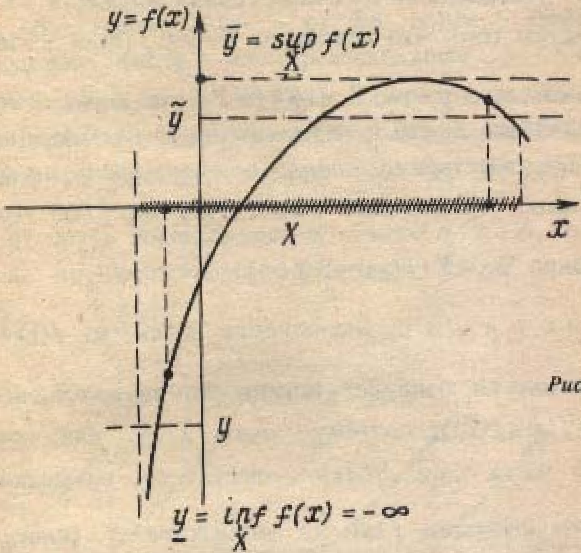


Рис. 4

другими словами, $\underline{y}=\inf\limits_{X} f(x)$ – это *наибольшее* число (из расширенной системы действительных чисел), обладающее тем свойством, что $\underline{y}\le f(x)$ для всех точек $x\in X$, в которых определена функция $f(x)$ (рис. 4).

З а м е ч а н и е. Согласно данным определениям, если $X\cap D_f=\varnothing$ (т.е. если функция $f(x)$ не определена *ни в одной* точке множества X), то (чисто формально!) $\sup\limits_{X} f(x)=-\infty$, $\inf\limits_{X} f(x)=+\infty$.

Предложение. *Величины* $\bar{y}=\sup\limits_{X} f(x)$ и $\underline{y}=\inf\limits_{X} f(x)$ *определены для любой функции* $f(x)$, *принимающей на множестве* X *действительные значения, при этом соотношения: а)* $\sup\limits_{X} f(x)<+\infty$, *б)* $\sup\limits_X f(x)=+\infty$, *в)* $\inf\limits_X f(x)=-\infty$, *г)* $\inf\limits_X f(x)=-\infty$ *равносильны соответственно тому, что функция* $f(x)$ *на множестве является: а) ограниченной сверху, б) неограниченной сверху, в) ограниченной снизу, г) неограниченной снизу.*

Сформулированное предложение является следствием соответствующих утверждений о точных гранях множеств $Y\subset\mathbb{R}$ (ИЛМА-1, § 8) с учетом того, что величины $\overline{y}=\sup\limits_X f(x)$ и $\underline{y}=\inf\limits_X f(x)$ – это то же самое, что $\overline{y}=\sup Y$ и $\underline{y}=\inf Y$, где $Y=\{y\colon \exists x\in X\,(f(x)=y)\}$.

Определение 6. Говорят, что функция $f(x)$ *достигает точной верхней* (соответственно *точной нижней*) *грани на множестве* X, если истинно утверждение $\exists\overline{x}\in X\,(f(\overline{x})=\sup\limits_X f(x))$ (соответственно утверждение $\exists\underline{x}\in X\,(f(\underline{x})=\inf\limits_X f(x))$).

З а м е ч а н и е. Выполнение равенства $f(\overline{x})=\sup\limits_X f(x)$ для $\overline{x}\in X$ фактически означает истинность высказывания $\forall x\,(x\in X\wedge \wedge x\in D_f\Rightarrow f(x)\le f(\overline{x}))$, поэтому точки $\overline{x}\in X$, для которых $f(\overline{x})= =\sup\limits_X f(x)$ (если такие точки существуют), называются *точками максимума* функции $f(x)$ на множестве X (иногда уточняют: *абсолютного*, или *глобального*, максимума – в отличие от так называемых точек *локального* максимума). Аналогично точки $\underline{x}\in X$, для которых $f(\underline{x})=\inf\limits_X f(x)$ (если такие точки существуют), называются *точками минимума* функции $f(x)$ на множестве X.

Примеры. **1.** Для функции $f(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}$ (рис. 1) $\sup\limits_{\mathbb{R}} f(x)=1$, $\inf\limits_{\mathbb{R}} f(x)=-1$, при этом точная верхняя грань достигается в точках $\dfrac{1}{2n}$, $n=\pm1,\pm2,\dots$, а точная нижняя грань – в точках $\dfrac{1}{2n+1}$, $n\in\mathbb{Z}$.

2. Для функции $f(x)=\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ (рис. 2) $\sup\limits_{\mathbb{R}} f(x)=\pi$, $\inf\limits_{\mathbb{R}} f(x)=0$, при этом ни точная верхняя, ни точная нижняя грани *не достигаются* функцией ни в одной точке числовой оси.

3. Пусть $f(x)=x-[x]$, где $[x]$ обозначает *целую часть* числа $x\in\mathbb{R}$ (другое обозначение $E(x)$ – от фр. entier – целый), т.е. наибольшее целое число, не превосходящее x. Поскольку $f(x+n)=x$ для любой точки $x\in[0,1)$ и любого целого числа n (иначе говоря, функция $f(x)$ является 1-периодической; график ее представлен на рис. 5), $\sup\limits_{\mathbb{R}} f(x)=\sup\limits_{[0,1)} x=1$, $\inf\limits_{\mathbb{R}} f(x)=\inf\limits_{[0,1)} x=0$; точная нижняя грань *достигается* в точках n, $n\in\mathbb{Z}$, точная же верхняя грань *не достигается* функцией ни в одной точке числовой оси.

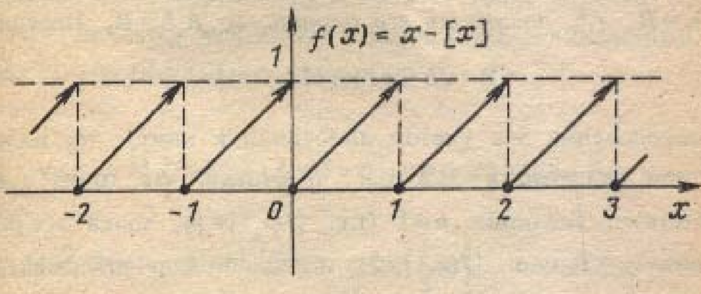


Рис. 5

§ 2. Теоремы Вейерштрасса о непрерывных функциях на отрезке

Теоремы 1 и 2 этого параграфа традиционно называются *теоремами Вейерштрасса о непрерывных функциях на отрезке*, хотя фактически они справедливы для непрерывных функций на любом так называемом *компактном* множестве (о чем говорится ниже в замечании 2). Формулировка и доказательство теоремы 1 в равной степени относятся к непрерывным функциям, принимающим действительные и комплексные значения; напротив, теорема 2, как и понятия точной верхней и точной нижней граней, имеет смысл только для *действительнозначных* функций.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она ограничена на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть **A** обозначает высказывание: "функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$", что на символическом языке можно выразить формулой

$$\mathbf{A} = \forall x_0 \in [a, b] \forall \{x_n\} \left(\{x_n\} \to x_0 \wedge \forall n (x_n \in [a, b]) \to \right.$$
$$\left. \to \{f(x_n)\} \to f(x_0) \right)$$

(ИЛМА-1, § 30), а **B** – высказывание: "функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$"; требуется установить *истинность высказывания* $\mathbf{A} \to \mathbf{B}$, т.е. *ложность его отрицания* $\mathbf{A} \wedge \neg \mathbf{B}$. Поскольку

$$\neg \mathbf{B} = \forall h \exists x \in [a, b] \ (|f(x)| > h)$$

(§ 1, определение 3 с учетом замечания к нему), то, полагая в последней формуле $h = 1, 2, 3, \ldots$, и считая, что точка $x_1 \in [a, b]$ соответствует значению $h = 1$ (т.е. $|f(x_1)| > 1$), точка $x_2 \in [a, b]$ – значению $h = 2$ (т.е. $|f(x_2)| > 2$) и т.д., можно утверждать, что истинность высказывания $\neg \mathbf{B}$ обеспечивает существование такой последовательности $\{x_n\}$ точек отрезка $[a, b]$, что $|f(x_n)| > n$, $n = 1, 2, \ldots$. Ввиду неравенств $a \le x_n \le b$, $n = 1, 2, \ldots$, последовательность $\{x_n\}$ является *ограниченной*, а следовательно по теореме Больцано–Вейерштрасса (ИЛМА-1, § 19) содержит *сходящуюся подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$, пределом которой (в силу тех же неравенств) будет некоторая точка x_0 *того же отрезка* $[a, b]$. Если предположить, что истинно также высказывание **A**, то ввиду выполнения условий

$$x_0 \in [a, b], \quad x_{n_k} \in [a, b], \quad k = 1, 2, \ldots, \quad \{x_{n_k}\} \to x_0$$

соответствующая последовательность значений $\{f(x_{n_k})\}$ должна сходиться к значению $f(x_0)$, хотя по построению $|f(x_{n_k})| > n_k$, $k = 1, 2, \ldots$, т.е. последовательность $\{f(x_{n_k})\}$ одновременно является *сходящейся* и *неограниченной*, что невозможно (ИЛМА-1, § 13, теорема 1). Этим установлена *несовместность* высказываний **A** и $\neg$ **B**, т.е. истинность высказывания **A** $\to$ **B**.

Теорема 2. *Функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем точной верхней и точной нижней граней.*

Доказательство. Пусть действительнозначная функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$; по теореме 1 эта функция *ограничена* (сверху и снизу) на отрезке $[a, b]$, так что обе величины $\bar{y} = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ и $\underline{y} = \inf\limits_{[a,b]} f(x)$ являются *конечными* действительными числами. Согласно определению 4 (с учетом того, что функция $f(x)$ определена в *каждой* точке отрезка $[a, b]$, и число $\bar{y}$ является *конечным*), логическим эквивалентом соотношения $\bar{y} = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$ служит формула

$$\forall x \in [a, b]\ (f(x) \le \bar{y}) \wedge \forall \varepsilon > 0\ \exists x \in [a, b]\ (f(x) > \bar{y} - \varepsilon).$$

Беря в этой формуле значения $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$, можно утверждать существование последовательности $\{x_n\}$ точек отрезка $[a, b]$, такой, что $\bar{y} - \frac{1}{n} < f(x_n) \le \bar{y}$, $n = 1, 2, \ldots$. Так как $a \le x_n \le b$ для любого натурального n, последовательность $\{x_n\}$ является ограниченной и по теореме Больцано–Вейерштрасса содержит сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, пределом которой, что существенно, является некоторая точка $\bar{x} \in [a, b]$. Ввиду непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, $\{f(x_{n_k})\} \to f(\bar{x})$, в то время как по построению $\{f(x_n)\} \to \bar{y}$, и таким образом $f(\bar{x}) = \bar{y} = \sup\limits_{[a,b]} f(x)$.

Существование точки $\underline{x} \in [a, b]$, для которой $f(\underline{x}) = \underline{y} = \inf\limits_{[a, b]} f(x)$, доказывается аналогично.

З а м е ч а н и е 1. Пример функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$, рассматриваемой на *интервале* $(0, 1)$ (рис. 6), показывает, что функция, непрерывная на промежутке, *не являющемся отрезком*, может оказаться неограниченной и не достигать на этом промежутке своих точных граней.

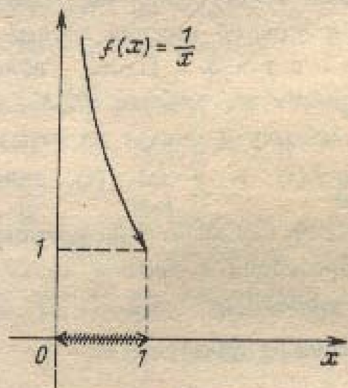


Рис. 6

З а м е ч а н и е 2. Анализ приведенных доказательств показывает, что в формулировках теорем 1, 2 *отрезок* может быть заменен любым множеством X (даже необязательно *множеством действительных чисел*), для элементов x которого имеется понятие *окрестностей* точек x (а следовательно и понятие *сходящихся последовательностей* точек множества X) и которое обладает следующим свойством: какова бы ни была последовательность $\{x_n\}$ точек множества X, из нее можно выделить подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке $x_0 \in X$. Множества X с указанным свойством играют важную роль в математике и называются *компактными* (или *компактами*). Компактные множества конечномерного координатного пространства $\mathbf{R}^n$ — это в точности множества $X \subset \mathbf{R}^n$, являющиеся одновременно *ограниченными* и *замкнутыми. Ограниченность* множества $X \subset \mathbb{R}^n$ означает, что оно целиком помещается в некотором *шаре* с центром в начале координат пространства $\mathbb{R}^n$, свойство же *замкнутости* множества $X \subset \mathbb{R}^n$ состоит в следующем: какова бы ни была точка $x \in \mathbb{R}^n$, если в любой ее окрестности (т.е. в любом шаре с центром в этой точке) есть точки множества X, то точка x также принадлежит множеству X. Среди *промежутков* $I \subset \mathbb{R}$ компактными множествами являются лишь *отрезки:* интервалы и полуинтервалы не являются замкнутыми множествами, а лучи – ограниченными.

§ 3. Теорема о промежуточных значениях непрерывных функций на отрезке

Формулируемые ниже теорема об обращении непрерывной функции в нуль и следствие из нее в совокупности составляют так называемую *теорему о промежуточных значениях* непрерывных действительнозначных функций на промежутках числовой оси.

Теорема (об обращении непрерывной функции в нуль). *Действительнозначная функция, непрерывная на отрезке* $I \subset \mathbb{R}$ *и принимающая на его концах значения противоположных знаков, обращается в нуль в некоторой внутренней точке этого отрезка.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $I=[a_1, b_1]$ и пусть $f(a_1)f(b_1)<0$. Если в точке $x_1 = \frac{a_1+b_1}{2}$ (середине отрезка $[a_1, b_1]$) функция $f(x)$ обращается в нуль, то искомая точка отрезка I найдена; в противном случае (если $f(x_1) \neq 0$) пусть $[a_2, b_2]$ – тот из отрезков $[a_1, x_1]$, $[x_1, b_1]$, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения противоположных знаков (рис. 7). Если в точке $x_2 = \frac{a_2+b_2}{2}$ (середине отрезка $[a_2, b_2]$) функция $f(x)$ обращается в нуль, то искомая точка отрезка I найдена; в противном случае (если

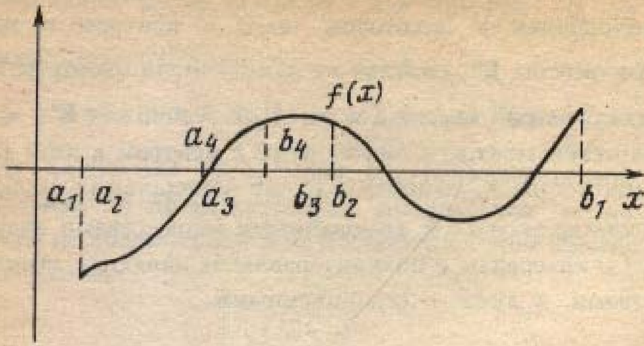


Рис. 7

$f(x_2) \neq 0$) пусть $[a_3, b_3]$ – тот из отрезков $[a_2, x_2]$, $[x_2, b_2]$, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения противоположных знаков (рис. 7) и т.д. Описанный процесс либо закончится через какое-то *конечное* число k шагов (если на k-м шаге окажется, что $f(x_k)=0$, где x_k – середина отрезка $[a_k, b_k]$), и в этом случае искомая точка отрезка I будет найдена, либо в результате этого процесса будет построена *последовательность вложенных отрезков* $\{[a_n, b_n]\}$, обладающих тем свойством, что на концах каждого из этих отрезков функция $f(x)$ принимает значения противоположных знаков (т.е. $f(a_n)\, f(b_n)<0$, $n=1, 2,\dots$).

В силу *принципа вложенных отрезков* (ИЛМА-1, § 15, предложение 3) существует точка $x_0 \in \mathbf{R}$, принадлежащая *всем* отрезкам последовательности $\{[a_n, b_n]\}$, а так как с ростом n длины этих отрезков стремятся к нулю, любая (сколь угодно малая) окрестность точки x_0 содержит целиком все отрезки последовательности $\{[a_n, b_n]\}$ с достаточно большими номерами, так что в любой окрестности точки x_0 функция принимает как положительные, так и отрицательные значения, что в случае $f(x_0) \neq 0$ противоречило бы свойству локального сохранения знака непрерывной функции

(ИЛМА-1, § 31, предложение 3); таким образом $f(x_0)=0$, причем x_0 – *внутренняя* точка отрезка I, т.к. $f(a_1)\,f(b_1)<0$.

Следствие. *Множество значений действительнозначной функции, непрерывной на промежутке, также является промежутком.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке I и пусть $J=\{y:\exists x\in I\,(f(x)=y)\}$ – множество ее значений. Требуется доказать, что если y_1, $y_2\in J$, т.е. $y_1=f(x_1)$, $y_2=f(x_2)$, где x_1, $x_2\in I$, то любая точка $y_0\in\mathbf{R}$, промежуточная между y_1 и y_2, также принадлежит множеству J, т.е. $y_0=f(x_0)$ для некоторого $x_0\in I$. Поскольку I – *промежуток*, отрезок с концевыми точками x_1, x_2 целиком принадлежит множеству I; следовательно на отрезке с концевыми точками x_1, x_2 функция $g(x)=f(x)-y_0$ является *непрерывной*, причем

$$g(x_1)\,g(x_2)=(f(x_1)-y_0)(f(x_2)-y_0)=(y_1-y_0)(y_2-y_0)<0.$$

В силу доказанной выше теоремы существует точка x_0, лежащая между точками x_1, x_2 (а следовательно принадлежащая промежутку I), такая, что $g(x_0)=0$, т.е. $f(x_0)=y_0$.

Замечание 1. С учетом теоремы 2 из § 2 установленное следствие позволяет утверждать, что множеством значений действительнозначной функции, непрерывной на *отрезке*, является *отрезок*; множеством значений действительнозначной функции, непрерывной на *интервале*, может оказаться промежуток любого вида (например, множеством значений функции $f(x)=\sin x$ на интервале $(0,\,2\pi)$ является *отрезок* $[-1,1]$, на интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\,\frac{3\pi}{2}\right)$ – *полуинтервал* $(-1,1]$, на интервале $\left(-\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}\right)$ – интервал $(-1,\,1)$).

Замечание 2. На непрерывные *комплекснозначные* функции установленные в этом параграфе утверждения распространения не имеют, например, функция $f(x)=e^{ix}=\cos x+i\sin x$, непрерывная на всей числовой оси (ИЛМА-1, § 24), обладает свойствами: $f(0)=1$, $f(\pi)=-1$ и $|f(x)|=1$ для любого $x\in\mathbb{R}$ (ИЛМА-1, § 25).

§ 4. Равномерная непрерывность функции на множестве. Теорема Кантора

Определение. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной на множестве* X, если истинно высказывание

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x'\in X\ \forall x''\in X\ (|x'-x''|<\delta \to |f(x')-f(x'')|<\varepsilon),$$

т.е. если для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε существует такое (зависящее от ε) положительное число δ, что каковы бы ни были две точки множества X, удаленные друг от друга меньше, чем на δ, значения функции $f(x)$ в этих точках различаются между собой меньше, чем на ε.

З а м е ч а н и е 1. Прямым следствием определения является тот факт, что функция, равномерно непрерывная на множестве X, обладает этим же свойством на любом подмножестве $X_0\subset X$. Обратное утверждение неверно: функция Дирихле $\chi(x)$ (ИЛМА-1, § 35), принимающая значение 1 для любого *рационального* x и значение 0 для любого *иррационального* x, является равномерно непрерывной как на множестве $\mathbb{Q}$ рациональных чисел, так и на множестве $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ иррациональных чисел (поскольку она *постоянна* на обоих этих множествах), тем не менее она не обладает свойством равномерной непрерывности ни на каком промежутке $I\subset\mathbb{R}$: истинность утверждения

$$\exists\varepsilon>0\ \forall\delta>0\ \exists x'\in I\ \exists x''\in I\ (|x'-x''|<\delta \wedge |\chi(x')-\chi(x'')|\geq\varepsilon)$$

(*отрицания* утверждения о равномерной непрерывности функции $\chi(x)$ на промежутке I) вытекает из того, что для любого рационального числа $x'\in I$ существует сколь угодно близкое к нему иррациональное число $x''\in I$, а для любого иррационального $x'\in I$ –

сколь угодно близкое к нему рациональное $x'' \in I$ (ИЛМА-1, § 5, предложения 4, 5), в обоих случаях $|\chi(x') - \chi(x'')| = 1$.

З а м е ч а н и е 2. Хотя в данном определении функция $f(x)$ предполагается действительнозначной или комплекснозначной, а множество X — множеством действительных (или комплексных) чисел, само понятие *равномерной непрерывности функции $f(x)$ на множестве X* имеет распространение на случай *любого* переменного x и *любых* значений $f(x)$ при условии, что для любых точек x', $x'' \in X$ и соответствующих им значений $f(x')$, $f(x'')$ введены понятия *расстояний* $\rho_X(x', x'')$ и $\rho_Y(f(x'), f(x''))$; для этого достаточно в кванторной формуле определения заменить $|x' - x''|$ на $\rho_X(x', x'')$, а $|f(x') - f(x'')|$ — на $\rho_Y(f(x'), f(x''))$.

З а м е ч а н и е 3. Геометрически условие равномерной непрерывности действительнозначной функции $f(x)$ на множестве действительных чисел X означает существование для любого числа $\varepsilon > 0$ такого числа $\delta > 0$, что прямоугольники $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x - x_0| < \delta \wedge \wedge |y - f(x_0)| < \varepsilon\}$, $x_0 \in X$ (имеющие фиксированные размеры и переменный центр, перемещающийся вдоль *графика* функции $f(x)$, $x \in X$) обладают свойством: ни *над*, ни *под* каким-либо из этих прямоугольников нет ни одной точки графика функции $f(x)$ на множестве X (рис. 8 иллюстрирует случай функции $f_1(x)$, равномерно непрерывной на множестве $X \subset \mathbb{R}$ и функции $f_2(x)$, не являющейся равномерно непрерывной на этом множестве).

Установить взаимосвязь понятия *равномерной непрерывности функции на множестве* и введенного ранее (ИЛМА-1, § 30) понятия *непрерывности функции на множестве* позволяет анализ их формульных эквивалентов: "функция $f(x)$ непрерывна на множестве X" $\overset{\text{def}}{\leftrightarrow} \forall x' \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall x'' \in X \, (|x' - x''| < \delta \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon)$;

"функция $f(x)$ равномерно непрерывна на множестве X" $\overset{\text{def}}{\leftrightarrow}$

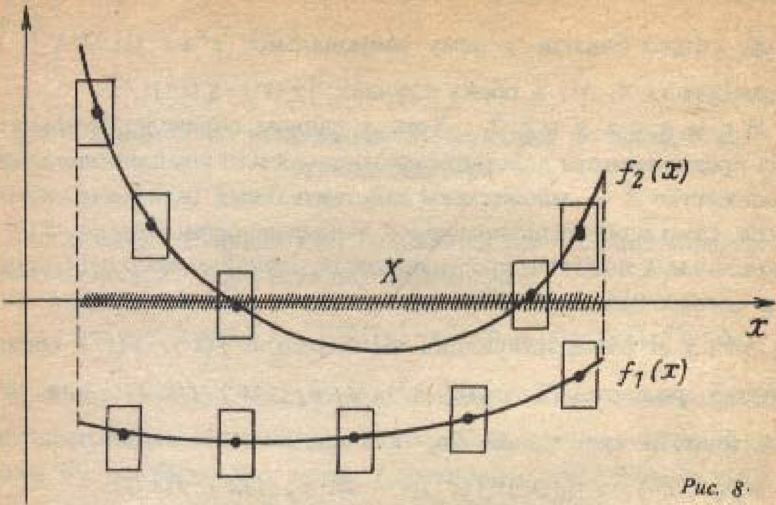


Рис. 8

$$\overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x' \in X\ \forall x'' \in X \left(|x'-x''|<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon\right).$$

Обе формулы строятся на основе одного и того же предиката

$$\forall x'' \in X \left(|x'-x''|<\delta \Rightarrow |f(x')-f(x'')|<\varepsilon\right), \qquad (*)$$

означающего, что для любой точки $x'' \in X$, удаленной от x' меньше, чем на δ, значения $f(x'')$ и $f(x')$ различаются меньше, чем на ε; различие смыслового содержания формул целиком определяется различием порядка следования стоящих впереди кванторов. Согласно первой формуле (выражающей свойство *непрерывности* функции $f(x)$ на множестве X) выбор числа $\delta>0$ (по произвольно взятому $\varepsilon>0$), при котором истинно значение предиката (*), осуществляется *после того, как была зафиксирована* точка $x' \in X$, таким образом в данном случае число $\delta>0$ оказывается зависящим, вообще говоря, не только от числа $\varepsilon>0$, но и от точки $x' \in X$ (т.е. $\delta=\delta(\varepsilon, x')$). Согласно же второй формуле, в случае *равномерной непрерывности* функции $f(x)$ на множестве X число $\delta>0$ (по произвольно взятому $\varepsilon>0$) должно быть выбрано таким образом, чтобы утверждение (*) оказывалось истинным *сразу для всех* точек $x' \in X$, а следовательно число $\delta>0$ может зависеть только от числа $\varepsilon>0$, но *не от точки* $x' \in X$ (т.е. $\delta=\delta(\varepsilon)$). Из проведенных рассуждений следует вывод: любая функция, *равномерно непрерывная* на множестве X, является *непрерывной* на этом множестве, утверждать же обратное в общем случае оснований нет.

Примеры. 1. Функция $f(x)=\sqrt{x}$, *непрерывная* на промежутке $I=[0, +\infty)$ (ИЛМА-1, § 32, пример 1), является *равномерно непрерывной* на этом промежутке; для доказательства истинности высказывания $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x' \geq 0\ \forall x'' \geq 0\ \left(|x'-x''|<\delta \rightarrow \left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|<\varepsilon\right)$ достаточно для любого $\varepsilon>0$ взять $\delta=\varepsilon^2$: если $x' \geq 0$, $x'' \geq 0$ и $|x'-x''|<\delta=\varepsilon^2$, то $\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|^2 \leq \left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right| \left|\sqrt{x'}+\sqrt{x''}\right| = |x'-x''| < \delta=\varepsilon^2$.

2. Функция $f(x)=x^2$, *непрерывная* на промежутке $I=[0, +\infty)$, не является *равномерно непрерывной* на этом промежутке; для доказательства достаточно заметить, что каково бы ни было число $\delta>0$, точки $x'=\dfrac{1}{\delta}$ или $x''=\dfrac{1}{\delta}+\dfrac{\delta}{2}$ промежутка I обладают тем свойством, что $|x'-x''|<\delta$ и $|(x')^2-(x'')^2|=1+\dfrac{\delta^2}{4}>1$, иначе говоря, истинно утверждение $\exists \varepsilon>0\ \forall \delta>0\ \exists x' \geq 0\ \exists x'' \geq 0\ \left(|x'-x''|<\delta \wedge \wedge |(x')^2-(x'')^2| \geq \varepsilon\right)$ — отрицание утверждения о равномерной непрерывности функции $f(x)=x^2$ на промежутке $I=[0, +\infty)$.

Хотя, как было установлено, понятия *непрерывности* и *равномерной непрерывности* функции $f(x)$ на множестве X в общем случае не совпадают (первое понятие всегда является следствием второго, но не наоборот), *для некоторых* множеств X эти понятия все же оказываются тождественными; в частности, этим свойством обладают все *отрезки*.

Теорема Кантора.* *Любая функция, непрерывная на отрезке, является равномерно непрерывной на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, т.е. истинно утверждение

$$\forall x_0 \in [a, b]\ \forall \{x_n\}\ \left(\{x_n\} \to x_0 \land \forall n\ (x_n \in [a, b]) \to \{f(x_n)\} \to f(x_0)\right),$$

означающее, что для любой точки x_0 отрезка $[a, b]$ и для любой последовательности $\{x_n\}$ точек этого отрезка, сходящейся к точке x_0, соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к числу $f(x_0)$ (определение непрерывности "на языке последовательностей"). Для доказательства теоремы достаточно показать, что предположение об истинности *отрицания* утверждения о равномерной непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, т.е. истинности значения формулы

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x' \in [a, b]\ \exists x'' \in [a, b]\ \left(|x' - x''| < \delta \land |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon\right),$$

приводит к противоречию. Беря в этой формуле значения $\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ и считая, что точки x_1', x_1'' соответствуют значению $\delta = 1$, точки x_2', x_2'' – значению $\delta = \frac{1}{2}$ и т.д., можно утверждать существование двух последовательностей $\{x_n'\}$ и $\{x_n''\}$ точек отрезка $[a, b]$, таких, что

$$|x_n' - x_n''| < \frac{1}{n} \land |f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ввиду неравенств $a \leq x_n' \leq b$, $n \in \mathbb{N}$, последовательность $\{x_n'\}$ является ограниченной и по теореме Больцано–Вейерштрасса (ИЛМА-1, § 19) содержит *сходящуюся* последовательность $\{x_{n_k}'\}$, пределом

---

*Кантор (Cantor), 1845–1918,– нем. математик, разработавший основы современной теории множеств.

которой в силу тех же неравенств является некоторая точка $x_0 \in [a, b]$. Так как последовательность $\{x_n' - x_n''\}$ сходится к нулю, подпоследовательность $\{x_{n_k}''\}$ (составленная из элементов последовательности $\{x_n''\}$ *с теми же номерами*, что и подпоследовательность $\{x_{n_k}'\}$) также будет иметь пределом точку x_0. Ввиду непрерывности функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ должны выполняться соотношения $\{f(x_{n_k}')\} \to f(x_0)$, $\{f(x_{n_k}'')\} \to f(x_0)$, а следовательно соотношение $\{f(x_{n_k}') - f(x_{n_k}'')\} \to 0$, противоречащее неравенствам $|f(x_n') - f(x_n'')| \geq \varepsilon$, $n \in \mathbf{N}$.

Замечание. Анализ только что проведенного доказательства с учетом определения *компактного* множества (§ 2, замечание 2) показывает, что теорема Кантора справедлива в следующей, более общей, формулировке: *любая функция, непрерывная на* ***компактном*** *множестве, является* ***равномерно непрерывной*** *на этом множестве.* Следующее утверждение можно рассматривать как частный случай этой теоремы, однако для него все же будет дано независимое доказательство.

Следствие. *Любая функция, непрерывная на множестве X, состоящем из конечного числа отрезков, является равномерно непрерывной на этом множестве.*

Доказательство. Пусть $X = [a_1, b_1] \cup [a_2, b_2] \cup \ldots \cup [a_m, b_m]$, где $a_1 \leq b_1 < a_2 \leq b_2 < \ldots < a_{m-1} \leq b_{m-1} < a_m \leq b_m$ (некоторые отрезки могут вырождаться в точки) и пусть $l_j = a_{j+1} - b_j$, $j = 1, \ldots, m-1$, — длины интервалов, промежуточных между отрезками $[a_1, b_1], \ldots, [a_m, b_m]$ (рис. 9). Взяв любое число $\varepsilon > 0$ и применяя теорему Кантора для каждого из перечисленных отрезков, можно утверждать существование таких положительных чисел $\delta_1, \ldots, \delta_m$, что для любых двух точек x', x'', принадлежащих *одному и тому же* отрезку $[a_j, b_j]$ и удаленных друг от друга на

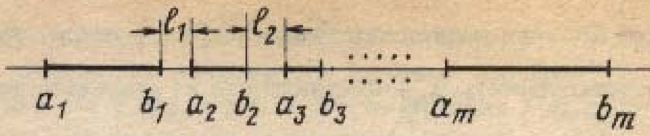


Рис. 9

расстояние, меньшее, чем δ_j, будет выполняться неравенство $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Взяв $\delta=\min\{\delta_1,\ldots,\delta_m, l_1,\ldots, l_{m-1}\}$, можно утверждать теперь, что если x', x'' – любые две точки множества X, удаленные друг от друга на расстояние, меньшее, чем δ, то эти точки принадлежат *одному* отрезку $[a_j, b_j]$ и $|x'-x''|<\delta\le\delta_j$, а следовательно $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. Этим установлена истинность высказывания $\forall\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0\,\forall x'\in X\,\forall x''\in X\,\{|x'-x''|<\delta\rightarrow|f(x')-f(x'')|<\varepsilon\}$, т.е. равномерная непрерывность функции $f(x)$ на множестве X.

§ 5. Точки разрыва функций и их классификация

В определениях 1, 2 этого параграфа под *точкой* x_0 понимается любой фиксированный элемент множества *всех возможных* значений переменного x, а под *окрестностью* $U(x_0)$ точки x_0 – окрестность этого элемента в указанном множестве. Например:

в случае функций $f(x)$ *действительного переменного* (когда множеством всех возможных значений x является числовая ось $\mathbb{R}$) x_0 – это точка числовой оси, а $U(x_0)$ – любой интервал вида $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$, $\delta>0$ (называемый δ-*окрестностью* точки x_0), а также любое другое множество действительных чисел, содержащее такой интервал;

применительно к функциям $f(x)$ *комплексного переменного* (когда множеством всех возможных значений x является комплексная плоскость $\mathbb{C}$) x_0 – это точка комплексной плоскости, а $U(x_0)$ – любой круг $\{x\in\mathbb{C}\colon |x-x_0|<\delta\}$, $\delta>0$, с центром в точке x_0, а также любое другое подмножество плоскости, содержащее такой круг;

если речь идет о функциях *нескольких переменных* (действительных или комплексных), то в качестве x_0 выступает точка конечномерного координатного пространства, а в качестве ее окрестности $U(x_0)$ – любое подмножество этого пространства, содержащее некоторый "*шар*" с центром в точке x_0, т.е. совокупность тех точек пространства, которые удалены от точки x_0 меньше, чем на некоторое положительное число δ (называемое *радиусом* этого "шара").

Фактически определения 1, 2 применимы к действительнозначным и комплекснозначным функциям $f(x)$ *любого* переменного x, если для конкретных значений x_0 этого переменного определены *окрестности* $U(x_0)$ *точек* x_0. С введением окрестностей приобретают смысл понятия:

а) *предела* функции $f(x)$ в точке x_0: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = b \overset{\text{def}}{\Rightarrow} \forall \varepsilon > 0 \, \exists \, U(x_0) \, \forall x \, (x \in U(x_0) \wedge x \neq x_0 \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon)$ (для любого положительного числа ε существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, в пределах которой, за возможным исключением лишь самой точки x_0, значения функции $f(x)$ отличаются от числа b меньше, чем на ε);

б) *непрерывности* функции $f(x)$ в точке x_0, по определению означающее выполнение соотношения $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, равнозначного высказыванию

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, U(x_0) \, \forall x \, (x \in U(x_0) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

(для любого положительного числа ε существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, в пределах которой значения функции $f(x)$ отличаются от числа $f(x_0)$ меньше, чем на ε).

Определение 1. Говорят, что функция $f(x)$ *имеет разрыв в точке* x_0 (или что x_0 есть *точка разрыва* этой функции), если выполнены следующие два условиях: 1) в любой окрестности точки x_0 есть точки $x \neq x_0$, принадлежащие области определения D_f функции $f(x)$ (при этом выполнение условия $x_0 \in D_f$ необязательно); 2) функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0, т.е. соотношение $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ не выполняется (по тем или иным причинам).

З а м е ч а н и е. Точка x_0 (принадлежащая или не принадлежащая области определения D_f функции $f(x)$), в некоторой окрестности которой *вообще нет* точек $x \neq x_0$, $x \in D_f$, *не считается* точкой разрыва функции $f(x)$. Отсюда следует, что высказывания:

"функция $f(x)$ не является непрерывной в точке x_0" и "функция $f(x)$ имеет разрыв в точке x_0" – отнюдь не тождественны. Например, функции действительного переменного $f(x)=\arcsin x$ и $g(x)=\sqrt{-|x-2|}$ с областями определения $D_f=[-1, 1]$ и $D_g=\{2\}$ (рис. 10) *не являются непрерывными в точке* 2: для обеих

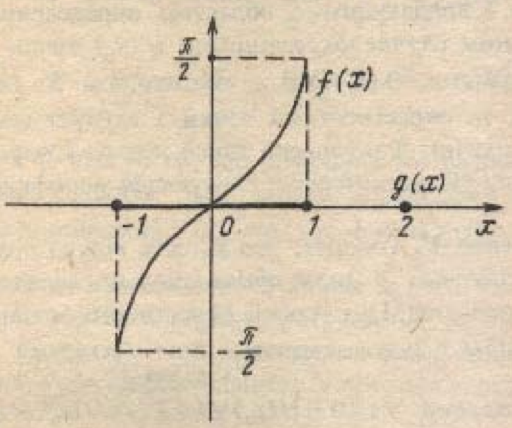


Рис. 10

функций понятие *предела в точке* 2, а следовательно и соотношения $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=f(2)$, $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=g(2)$ *лишены смысла* (к тому же не определено значение $f(2)$), вместе с тем функции $f(x)$ и $g(x)$ *не имеют разрыва в точке* 2 (не выполнено первое условие определения 1). Следует подчеркнуть, что функция $g(x)$, определенная в единственной точке 2, является (чисто формально) непрерывной *на одноточечном множестве* $X=\{2\}$, но отнюдь не непрерывной *в точке 2 как функция действительного переменного:* высказывание

$$\forall x_0 \in X\ \forall \varepsilon>0\ \exists \delta>0\ \forall x \in X\ \left(|x-x_0|<\delta \to |g(x)-g(x_0)|<\varepsilon\right) -$$

– формально-логический эквивалент утверждения о *непрерывности функции* $g(x)$ *на множестве* X – в данном случае истинно, а высказывание

$$\forall \varepsilon>0 \exists \delta>0 \forall x(|x-2|<\delta \rightarrow |g(x)-g(2)|<\varepsilon) -$$

— формально-логический эквивалент утверждения о *непрерывности функции действительного переменного* $g(x)$ *в точке* 2 – ложно.

Иногда при определении точек разрыва функции $f(x)$ заранее сужают множество *всех возможных* значений переменного x, ограничиваясь лишь некоторым его подмножеством X (не обязательно совпадающим с областью определения D_f функции $f(x)$); в этом случае *окрестности* $U(x_0)$ точек x_0 заменяются их пересечениями $U(x_0) \cap X$ с множеством X (например, если $X=[-1, 1]$, то окрестностями точки 1 следует считать ее *левые полуокрестности*). Фактически такой подход к определению точек разрыва функций соответствует следующей модификации определения 1.

Определение 1'. Говорят, что x_0 есть *точка разрыва* функции $f(x)$ *на множестве* X (или *относительно множества* X), если выполнены условия: 1) в любой окрестности точки x_0 есть точки $x \neq x_0$, $x \in X \cap D_f$; 2) соотношение $\lim\limits_{x \to x_0,\ x \in X} f(x)=f(x_0)$ не выполняется (т.е. высказывание $\forall \varepsilon>0 \exists U(x_0) \forall x \in X \left(x \in U(x_0) \rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right)$ ложно).

Например, функция действительного переменного $f(x)=\arcsin x$ в соответствии с исходным определением 1 имеет разрывы в точках ± 1 (в которых эта функция является непрерывной лишь *слева* или *справа*; можно сказать, что разрывы функции в точках ± 1 вызваны *разрывами области определения* этой функции), если же исходить из определения 1', то на отрезке $X=[-1, 1]$ функция $f(x)=\arcsin x$ *не имеет точек разрыва* (рис. 10).

Определение 2. Точка разрыва x_0 функции $f(x)$ называется *устранимой* (говорят также, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *устранимый разрыв*), если существует конечное число $b=\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ но при этом либо $b \neq f(x_0)$, либо значение $f(x_0)$ не определено; во всех других случаях (когда не существует конечного предела функции $f(x)$ в точке x_0) разрыв функции $f(x)$ в точке x_0 называется *неустранимым*.

К примеру, функции $f_1(x)=\frac{e^x-1}{x}$ и $f_2(x)=e^{\frac{1}{x}}$ (независимо от того, считается переменное x действительным или комплексным) имеют разрывы в точке 0, причем для первой функции разрыв оказывается устранимым, а для второй – неустранимым; это вытекает из соотношений $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ (ИЛМА-1, § 24, предложение 2) и $\lim\limits_{x\to 0-0} e^{\frac{1}{x}}=0$, $\lim\limits_{x\to 0+0} e^{\frac{1}{x}}=+\infty$, (ИЛМА-1, § 33, предложение 1).

З а м е ч а н и е. В случае *устранимого* разрыва функцию $f(x)$ можно доопределить (или заново определить) в точке x_0, полагая ее *новое значение* $f(x_0)=b$, где $b=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, в результате чего она становится *непрерывной в точке* x_0, т.е. разрыв в точке x_0 *устраняется* (отсюда и термин "устранимый разрыв"); если же функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *неустранимый* разрыв, то этот разрыв сохранится при любом доопределении (или переопределении) значения $f(x_0)$.

Спецификой точек разрыва функций *действительного* переменного является следующая их классификация, основанная на привлечении понятий *односторонних* (левостороннего и правостороннего) пределов (ИЛМА-1, § 26); для функций $f(x)$ переменного x *другой природы* (в частности, для функций *комплексного* и *нескольких* действительных переменных) подобная классификация точек разрыва не проводится – ограничиваются лишь понятиями *устранимого* и *неустранимого* разрывов.

Определение 3. В предположении, что функция действительного переменного $f(x)$ имеет неустранимый разрыв в точке x_0 и что в любой окрестности точки x_0 как слева, так и справа от нее есть точки x, принаждлежащие области определения D_f функции $f(x)$, разрыв этой функции в точке x_0 называется:

разрывом первого рода – если оба односторонных предела – $f(x_0-0)$ и $f(x_0+0)$ – существуют и являются конечными числами (при этом $f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$, т.к. в противном случае разрыв функции $f(x)$ в точке x_0 оказался бы устранимым; впрочем, устранимые разрывы часто также причисляют к разрывам первого рода);

разрывом второго рода – если по крайней мере один из односторонних пределов $\left(f(x_0-0)\right.$ или $\left.f(x_0+0)\right)$ либо не существует, либо является бесконечным.

Примеры. **1.** Функция $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^{2n}x=\begin{cases}1, & x=\pi k\\ 0, & x\neq\pi k,\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$, имеет устранимые разрывы в точках πk, $k\in\mathbb{Z}$ (рис. 11).

2. Функция $f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x^n-x^{-n}}{x^n+x^{-n}}=\begin{cases}-1, & |x|<1,\ x\neq0,\\ 0, & |x|=1,\\ 1, & |x|>1\end{cases}$ имеет устранимый разрыв в точке 0 и разрывы 1-го рода в точках ±1 (рис. 12).

3. Функция $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ имеет в точке 0 разрыв 2-го рода (рис. 13).

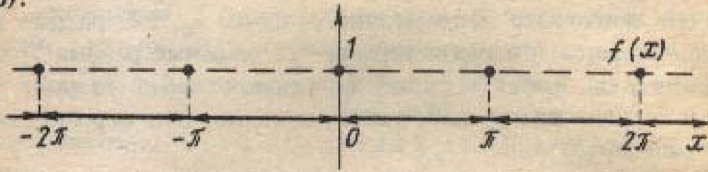


Рис. 11

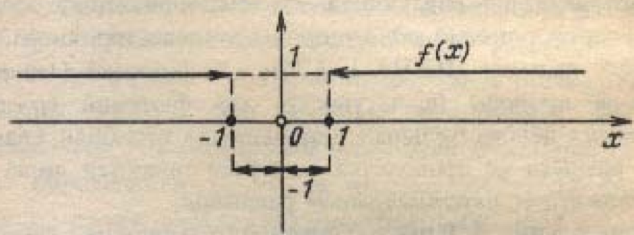


Рис. 12

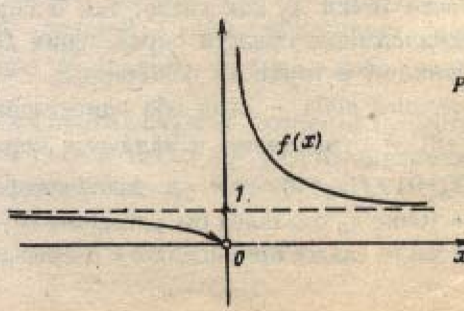


Рис. 13

4. Для функции Дирихле $\chi(x)=\lim\limits_{m\to+\infty}\left(\lim\limits_{n\to+\infty}\cos^n(\pi\, m!\, x)\right)$, значение которой равно 1 для любого рационального x и 0 для любого иррационального x (ИЛМА-1, § 35), каждая точка числовой оси является точкой разрыва 2-го рода; это вытекает из того, что между любыми двумя действительными числами есть как рациональное, так и иррациональное число (ИЛМА-1, § 5, предложения 4, 5).

5. Функции $f_1(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}$, $f_2(x)=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{x}}{\left|\sin\dfrac{\pi}{x}\right|}$, $f_3(x)=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{x}}{\sin\dfrac{\pi}{x}}$ (рис. 14)

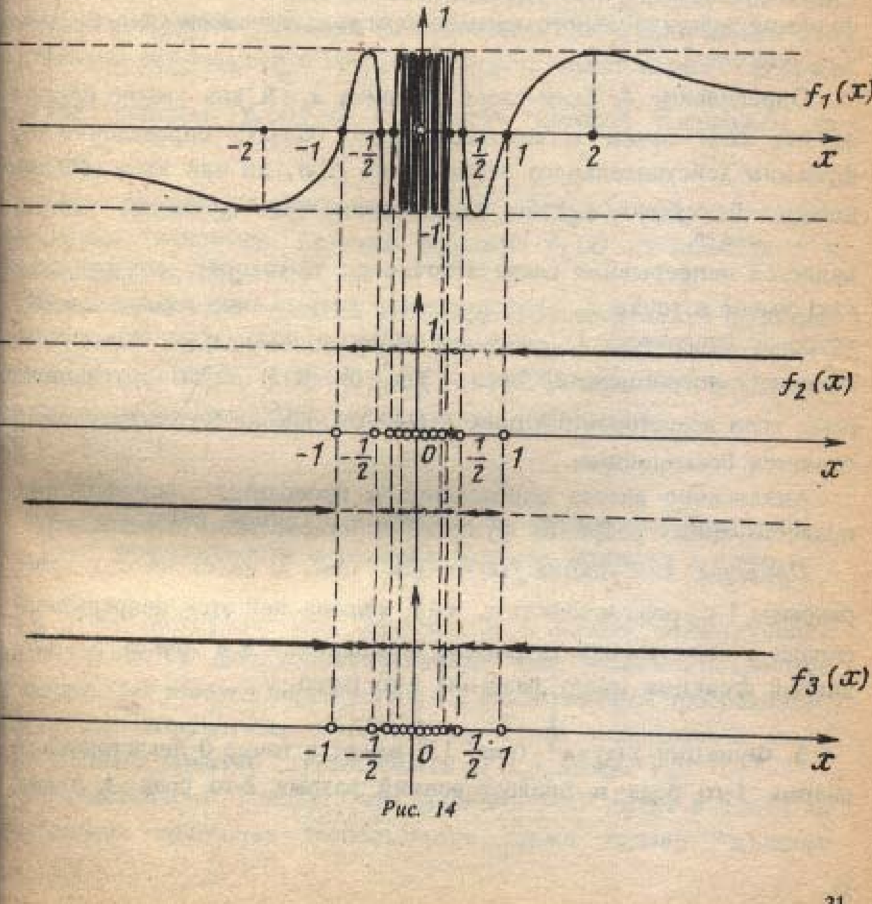


Рис. 14

имеют разрывы 2-го рода в точке 0; кроме того, в точках $\frac{1}{n}$, $n=\pm1, \pm2, \ldots$ функция $f_2(x)$ имеет разрывы 1-го рода, а функция $f_3(x)$ – устранимые разрывы; с учетом возможности устранения разрывов функции $f_3(x)$ в точках $\frac{1}{n}$, $n=\pm1, \pm2, \ldots$ разрыв этой функции в точке 0 также можно считать устранимым, хотя, строго говоря, это – разрыв 2-го рода.

Определение 3 не охватывает случаев, когда точки x числовой оси, в которых определена функция $f(x)$, лежат лишь *по одну сторону* от точки разрыва x_0 этой функции. Чтобы учесть и эти случаи (а также с целью дальнейшей конкретизации точек разрыва функций действительного переменного) вводят понятия *односторонних разрывов.*

Определение 4. Если слева от точки $x_0 \in \mathbf{R}$ как угодно близко от нее есть точки x, принадлежащие области определения D_f функции действительного переменного $f(x)$, но при этом соотношение $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)$ не выполняется (т.е. функция $f(x)$ не является непрерывной слева в точке x_0, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *левосторонний разрыв* (или *разрыв слева*), который считается: 1) *разрывом первого рода,* если существует конечный левосторонний предел $f(x_0-0)$, и 2) *разрывом второго рода,* если левосторонний предел $f(x_0-0)$ либо не существует, либо является бесконечным.

Аналогично дается определение и проводится классификация правосторонних разрывов функций действительного переменного.

Примеры. 1. Функция $f(x)=x-[x]$ (рис. 2) имеет левосторонние разрывы 1-го рода в точках n, $n \in \mathbf{Z}$ являясь при этом непрерывной справа в этих точках (в смысле определения 3 в точках $n, n \in \mathbf{Z}$, данная функция имеет разрывы 1-го рода).

2. Функция $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ (рис. 13) имеет в точке 0 левосторонний разрыв 1-го рода и правосторонний разрыв 2-го рода; в целом разрыв в точке 0 для данной функции считается разрывом 2-го рода.

Основанная на данных выше определениях (и являющаяся общепринятой) классификация точек разрыва функций имеет тот недостаток, что она не вполне отражает саму *природу разрывов.* Если исходить именно из причин, порождающих разрывы функций, то можно выделить:

точки разрыва, возникающие исключительно вследствие *разрывов области определения* функции (как, например, в случае функции $f_3(x)$ из примера 5 к определению 3, рис. 14);

точки разрыва, вызванные *нерегулярным поведением* функции в окрестностях этих точек (в том смысле, что разброс значений функции в окрестности точки не становится как угодно малым при стягивании окрестности в точку; примером может служить разрыв в нуле функции $f_1(x) = \cos\frac{\pi}{x}$, график которой изображен на рис. 14);

точки разрыва, порождаемые сразу обеими вышеуказанными причинами (например, разрывы функции $f_2(x)$ из примера 5 к определению 3, рис. 14).

Характеристикой *степени нерегулярности* поведения функции (т.е. степени разброса ее значений) служит введенное французским математиком Бэром (Baire), 1874–1932, понятие *колебания функции,* рассматриваемое в следующем параграфе.

§ 6. Колебания функции в точке и на множестве. Критерии Бэра непрерывности и наличия разрыва функции в точке

В этом параграфе (так же, как и в начале предыдущего) рассматриваются действительнозначные или комплекснозначные функции $f(x)$ *любого* переменного x с единственным требованием, чтобы для конкретных значений x_0 этого переменного было осмысленным понятие *окрестностей* $U(x_0)$ *точек* x_0.

Определение 1. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *исчезающее колебание* (используется также термин "нулевое колебание" и обозначение $\omega(f, x_0)=0$), если истинно утверждение

$$\forall \varepsilon>0 \exists U(x_0) \forall x' \forall x'' \left(x' \in U(x_0) \wedge x'' \in U(x_0) \wedge \right.$$

$$\left. \wedge x' \in D_f \wedge x'' \in D_f \to |f(x')-f(x'')|<\varepsilon\right),$$

означающее, что для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε существует (зависящая от этого ε) окрестность $U(x_0)$ точки x_0, в пределах которой (точнее, в пределах *пересечения* окрестности $U(x_0)$ с областью определения D_f функции $f(x)$) разброс значений функции $f(x)$ оказывается меньшим числа ε.

Замечание. Из данного определения следует, что соотношение $\omega(f, x_0)=0$ выполняется также в том случае, когда некоторая окрестность $U(x_0)$ точки x_0 *вообще не содержит* точек $x \in D_f$ или когда x_0 — *изолированная* точка области определения функции $f(x)$, т.е. в пределах некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 нет *других* точек $x \in D_f$: иначе говоря, истинно высказывание $\exists U(x_0) \forall x \left(x \in U(x_0) \cap D_f \to x=x_0\right)$.

Предложение 1 (критерий Бэра непрерывности функции в точке). *Функция $f(x)$ является непрерывной в точке x_0 в том и только в том случае, когда она определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет в этой точке исчезающее (нулевое) колебание.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0, т.е. истинно высказывание

$$\forall \varepsilon>0 \exists U(x_0) \forall x \left(x \in U(x_0) \to |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\right),$$

то взяв любое положительное число ε, можно утверждать, что для положительного числа $\frac{\varepsilon}{2}$ существует окрестность $U(x_0)$ точки x_0, в пределах которой значения функции $f(x)$ отличаются от числа $f(x_0)$ меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$; отсюда следует, что для любых точек $x', x'' \in U(x_0)$ выполняются соотношения

$$|f(x')-f(x'')| \le |f(x')-f(x_0)| + |f(x'')-f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

и тем самым установлена истинность высказывания

$$\forall \varepsilon>0\, \exists\, U(x_0)\, \forall x'\, \forall x'' \left(x' \in U(x_0) \wedge x'' \in U(x_0) \to |f(x')-f(x'')| < \varepsilon\right),$$

что означает выполнение следующих условий: 1) значение $f(x)$ определено для всех x из некоторой окрестности точки x_0; 2) $\omega(f, x_0)=0$. Обратно, если выполнены последние два условия, а следовательно истинно значение предыдущей кванторной формулы, то полагая в этой формуле $x''=x_0$ и меняя обозначение x' на x, можно прийти к истинности высказывания

$$\forall \varepsilon>0\, \exists\, U(x_0)\, \forall x \left(x \in U(x_0) \to |f(x)-f(x_0)| < \varepsilon\right) -$$

формально-логического эквивалента утверждения о непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0.

Применительно в функции $f(x)$ *действительного* переменного x, заданной на *промежутке* I числовой оси, выбор в качестве *окрестности* $U(x_0)$ точки $x_0 \in I$ *интервала* $(x_0-\delta,\, x_0+\delta) \subset I$, если x_0 – *внутренняя* точка промежутка I, или соответственно *полуинтервала* $[x_0,\, x_0+\delta) \subset I$ или $(x_0-\delta,\, x_0] \subset I$, если x_0 – левая или правая *концевая* точка промежутка I (принадлежащая этому промежутку), приводит к следующему частному случаю предложения 1.

Следствие. *Функция $f(x)$ действительного переменного x, заданная на промежутке I числовой оси, является непрерывной в точке $x_0 \in I$ (под непрерывностью в концевой точке промежутка I понимается непрерывность слева или справа) в том и только том случае, когда функция $f(x)$ имеет в точке x_0 исчезающее колебание* $(\omega(f, x_0)=0)$.

Определение 2. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 *неисчезающее колебание* (используется также термин "положительное колебание" и обозначение $\omega(f, x_0)>0$), если истинно утверждеи означает выполнение соотношения (*). (Проведенные рассуждения показывают, что множества $E_{\frac{1}{n}}(f)$ в соотношении (*) можно заменить множествами $E_{\varepsilon_n}(f)$, где $\{\varepsilon_n\}$ – любая последовательность положительных чисел, среди которых есть сколь угодно близкие к нулю.)

Определение 4. *Колебанием функции* $f(x)$ *в точке* x_0 называется неотрицательное число (возможно, равное $+\infty$), обозначаемое $\omega(f, x_0)$ и определяемое равенствами: $\omega(f, x_0)=0$, если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 исчезающее (нулевое) колебание, и

$$\omega(f, x_0)=\sup\{\varepsilon : \varepsilon>0 \wedge \omega(f, x_0)\geq\varepsilon\},$$

если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 неисчезающее (положительное) колебание.

З а м е ч а н и е. Ранее (посредством определений 1, 2) были введены лишь *соотношения* $\omega(f, x_0)=0$ и $\omega(f, x_0)>0$, но *не сама величина* $\omega(f, x_0)$. Согласно определению 4, соотношение $\omega(f, x_0)=0$, служившее ранее исключительно *сокращенной записью утверждения* "функция $f(x)$ имеет в точке x_0 исчезающее колебание", приобретает, наконец, смысл *числового равенства*. При выполнении же соотношения $\omega(f, x_0)>0$, используемого *для обозначения* того факта, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 неисчезающее колебание, множество *положительных* чисел $\{\varepsilon : \varepsilon>0 \wedge \omega(f, x_0)\geq\varepsilon\}$ в силу определения 3 является *непустым*, а следовательно имеем точную верхнюю грань, являющуюся либо положительным числом, либо $+\infty$ (ИЛМА-1, § 8) и обозначаемую, согласно определению 4, символом $\omega(f, x_0)$; в результате соотношение $\omega(f, x_0)>0$, приобретает смысл *числового неравенства*. С учетом того, что высказывания $\omega(f, x_0)=0$ и $\omega(f, x_0)>0$ являются противоположными по смыслу (предложение 2), а следовательно всегда оказывается истинным одно и только одно из этих высказываний, величина $\omega(f, x_0)$ – колебание функции $f(x)$ в точке x_0 – определена *однозначно* для *любой* функции $f(x)$ и *любой* точки x_0.

В тех случаях, когда изначально ограничивают (по тем или иным причинам) множество *всех возможных* значений переменного x, рассматривая функции $f(x)$ лишь на некотором его подмножестве X, данные выше определения 1–3 заменяются следующими их модификациями.

Определения $1'-3'$. Говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 соответственно:

$1'$) *исчезающее* (или *нулевое*) *колебание относительно множества* X (обозначение $\omega(f, x_0, X)=0$),

$2'$) *неисчезающее* (или *положительное*) *колебание относительно множества* X (обозначение $\omega(f, x_0, X)>0$),

$3'$) *колебание, не меньшее положительного числа* ε, *относительно множества* X (обозначение $\omega(f, x_0, X)\geq\varepsilon$) –

если истинны значения формульных высказываний определений 1–3 с заменой в них кванторов $\forall x'$, $\forall x''$, $\exists x'$, $\exists x''$ соответствующими *ограниченными* кванторами $\forall x'\in X$, $\forall x''\in X$, $\exists x'\in X$, $\exists x''\in X$.

Определение величины $\omega(f, x_0, X)$ – колебания функции $f(x)$ в точке x_0 относительно множества X – дается по схеме определения 4 с заменой выражения $\omega(f, x_0)$ на $\omega(f, x_0, X)$.

Предложение 4 (критерий Бэра непрерывности функции на множестве). *Для того чтобы функция $f(x)$ была непрерывной на множестве X, необходимо и достаточно, чтобы в каждой точке x_0 множества X функция $f(x)$ была определена и имела исчезающее колебание относительно множества X.*

Доказательство (по схеме доказательства предложения 1). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на множестве X, т.е. истинно высказывание

$$\forall x_0\in X\,\forall\varepsilon>0\,\exists U(x_0)\,\forall x\in X\big(x\in U(x_0)\to|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon\big).$$

Взяв любую точку $x_0\in X$ и любое положительное число ε, можно утверждать, таким образом, что для положительного числа $\frac{\varepsilon}{2}$ существует такая окрестность $U(x_0)$ точки x_0, в пределах которой значения функции $f(x)$ на множестве X отличаются от числа $f(x_0)$ меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$; отсюда следует, что для любых двух точек $x', x'' \in X$, попадающих в окрестность $U(x_0)$, будут выполняться соотношения

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f(x_0)| + |f(x'') - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

и тем самым установлена истинность высказывания

$$\forall x_0 \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists U(x_0) \, \forall x' \in X \, \forall x'' \in X \, \big(x' \in U(x_0) \land$$
$$\land x'' \in U(x_0) \to |f(x') - f(x'')| < \varepsilon\big),$$

означающая выполнение условий:1) функция $f(x)$ определена во всех точках множества X; 2) в каждой точке x_0 множества X функция $f(x)$ имеет исчезающее колебание относительно множества X. Обратно, если выполняются эти два условия, а следовательно истинно предшествующее им формульное высказывание, то, беря в нем $x'' = x_0$ и переобозначая x' на x, это высказывание можно преобразовать к виду

$$\forall x_0 \in X \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists U(x_0) \, \forall x \in X \, \big(x \in U(x_0) \to |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\big) \;-$$

формульному эквиваленту условия непрерывности функции $f(x)$ на множестве X.

Следующее понятие характеризует степень разброса значений функции *на множестве.*

Определение 5. *Колебанием функции* $f(x)$ *на множестве* X называется неотрицательное число (возможно, равное $+\infty$)

$$\omega(f, X) = \sup\{|f(x') - f(x'')| : \; x' \in X \land x'' \in X\},$$

или, что то же самое в более корректной записи,

$$\omega(f, X) = \sup\{\varepsilon : \; \exists x' \in X \, \exists x'' \in X \, (|f(x') - f(x'')| = \varepsilon)\}$$

(если функция $f(x)$ не определена ни в одной точке множества X, то величина $\omega(f, X)$ считается равной нулю).

Предложение 5. *Если функция $f(x)$ принимает на множестве X лишь действительные значения, то* $\omega(f, X) = \sup\limits_X f(x) - \inf\limits_X f(x)$.

Доказательство. Пусть $\bar{y} = \sup\limits_X f(x)$, $\underline{y} = \inf\limits_X f(x)$; тогда для любой точки $x \in X$ (в которой определена функция $f(x)$) справедливы соотношения $\underline{y} \le f(x) \le \bar{y}$, а следовательно для любых двух таких точек x', x'' выполняются неравенства $f(x') - f(x'') \le \le \bar{y} - \underline{y}$ и $f(x'') - f(x') \le \bar{y} - \underline{y}$, т.е. неравенство $|f(x') - f(x'')| < \bar{y} - \underline{y}$, из которого следует, что

$$\omega(f, X) = \sup\{|f(x') - f(x'')| : x' \in X \wedge x'' \in X\} \le \bar{y} - \underline{y}.$$

С другой стороны, ввиду определения 5, для любых двух точек x', $x'' \in X$ (в которых определена функция $f(x)$) выполняется неравенство $f(x') - f(x'') \le \omega(f, X)$, или $f(x') \le f(x'') + \omega(f, X)$; считая точку $x'' \in X$ фиксированной и меняя обозначение x' на x, можно утверждать, таким образом, что $\bar{y} = \sup\limits_X f(x) \le f(x'') + \omega(f, X)$, или $f(x'') \ge \bar{y} - \omega(f, X)$; ввиду произвольности точки $x'' \in X$ из последнего неравенства вытекают соотношения $\underline{y} = \inf\limits_X f(x) \ge \bar{y} - \omega(f, X)$, а следовательно неравенство $\bar{y} - \underline{y} \le \omega(f, X)$.

Предложение 6. *Для любой функции $f(x)$ и для любой точки x_0, являющейся внутренней по отношению к множеству X (т.е. обладающей окрестностью $U(x_0)$, целиком принадлежащей множеству X) выполняется неравенство* $\omega(f, x_0) \le \omega(f, X)$.

Доказательство. Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 исчезающее (нулевое) колебание, т.е. $\omega(f, x_0) = 0$, то утверждение очевидно. Если же $\omega(f, x_0) > 0$, то согласно определению 4 $\omega(f, x_0)$ есть точная верхняя грань множества тех положительных чисел ε, для которых колебание функции $f(x)$ в точке x_0 не меньше, чем ε. Поскольку x_0 — внутренняя точка множества X, а следовательно X можно рассматривать как *окрестность* точки x_0, соотношение $\omega(f, x_0) \ge \varepsilon$ ввиду определения 3 не может выполняться для чисел ε, больших числа $\omega(f, X)$; таким образом

$$\omega(f, x_0) = \sup\{\varepsilon : \varepsilon > 0 \wedge \omega(f, x_0) \geq \varepsilon\} \leq \omega(f, X).$$

З а м е ч а н и е. Если точка x_0 не является внутренней по отношению к множеству X, то неравенство $\omega(f, x_0) \leq \omega(f, X)$ может не выполняться. Например, для функции

$$f(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{\pi}{x - x_0}, & x < x_0 \\ \dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{x - x_0}, & x > x_0 \\ 0, & x = x_0 \end{cases}$$

(рис. 15) $\omega(f, x_0) = 1$, а $\omega(f, [x_0, b]) = \dfrac{1}{2}$ для любого $b > x_0$.

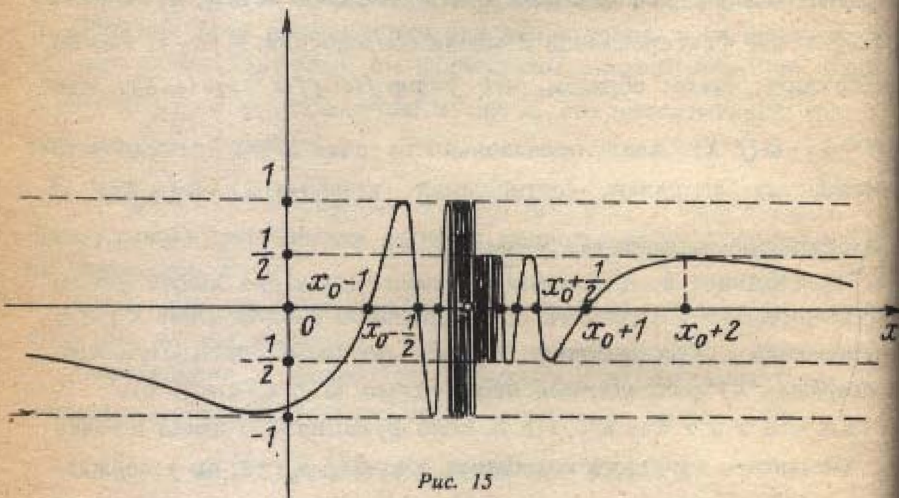


Рис. 15

§ 7. Разбиения отрезка. Суммы Дарбу и интегральные суммы

Определение 1. Говорят, что задано *разбиение* $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ отрезка $[a, b]$ числовой оси (обозначение Δ – по начальной букве греч. διαίρεσις – раздробление, разбиение на части), если выбрано конечное множество $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ точек отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих соотношениям $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Элементы множества $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ называются *точками разбиения* Δ, а отрезки $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, – *отрезками разбиения* Δ, их длины обозначаются Δx_i, таким образом

$$\bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i] = [a, b], \quad \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = b - a;$$

число n отрезков разбиения Δ может быть любым натуральным числом.

Определение 2. *Измельчением* разбиения Δ отрезка $[a, b]$ называется любое разбиение Δ' этого отрезка, обладающее тем свойством, что из его отрезков может быть составлен любой отрезок разбиения Δ.

Естественной операцией, приводящей к измельчению разбиений, является *пересечение разбиений.*

Определение 3. *Пересечением* разбиений Δ и Δ' отрезка $[a, b]$ называется разбиение Δ'' (обозначаемое также $\Delta \cap \Delta'$) этого же отрезка, возникающее в результате объединения всех точек разбиений Δ и Δ' с последующей их перенумерацией в порядке возрастания (рис. 16).

Рис. 16

Основными понятиями этого параграфа являются *верхняя* и *нижняя суммы Дарбу** $\overline{S}_\Delta(f)$ и $\underline{S}_\Delta(f)$, отвечающие произвольно взятой действительнозначной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и любому разбиению Δ этого отрезка.

Определение 4. Для действительнозначной функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a, b]$, и произвольно взятого разбиения $\Delta=\Delta(x_0, x_1,..., x_n)$ этого отрезка *верхней суммой Дарбу* называется величина

$$\overline{S}_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}\overline{y}_i\,\Delta x_i,$$

где $\overline{y}_i=\sup\limits_{[x_{i-1},\,x_i]} f(x)$, $i=1,..., n$, а *нижней суммой Дарбу* – величина*

$$\underline{S}_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}\underline{y}_i\,\Delta x_i,$$

где $\underline{y}_i=\inf\limits_{[x_{i-1},\,x_i]} f(x)$, $i=1,..., n$.

Пример. Для функции $f(x)=\cos x$, рассматриваемой на отрезке $[0, \pi]$, и разбиения Δ этого отрезка, образованного точками $0,\ \frac{\pi}{3},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{3}{4}\pi,\ \pi$ (рис. 17),

$$\overline{S}_\Delta(f)=1\left(\frac{\pi}{3}-0\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+0\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{2}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=\pi\left(\frac{5}{12}-\frac{\sqrt{2}}{8}\right),$$

---

*Дарбу́ (Darboux), 1842–1917,– фр. математик.

$$\underline{S}_\Delta(f)=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{3}-0\right)+0\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(\frac{3}{4}\pi-\frac{\pi}{2}\right)+$$

$$+(-1)\left(\pi-\frac{3}{4}\pi\right)=\pi\left(-\frac{1}{12}-\frac{\sqrt{2}}{8}\right).$$

З а м е ч а н и е. Поскольку для *комплекснозначных* функций понятия верхней и нижней суммы Дарбу лишены смысла, все функции, связанные с этими понятиями, предполагаются *действительнозначными*.

Геометрически введение сумм Дарбу отражает стремление распространить понятие *площади плоской фигуры*, изначально определенное лишь для *прямоугольников* декартовой координатной плоскости $\mathbb{R}^2$ (как произведение длин двух смежных сторон), на множества $T\subset\mathbb{R}^2$ более общего вида – так называемые *криволинейные трапеции*.

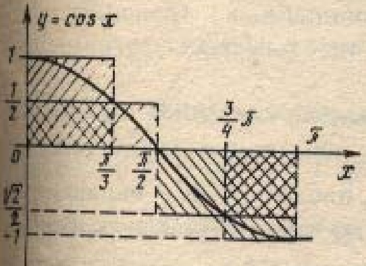


Рис. 17

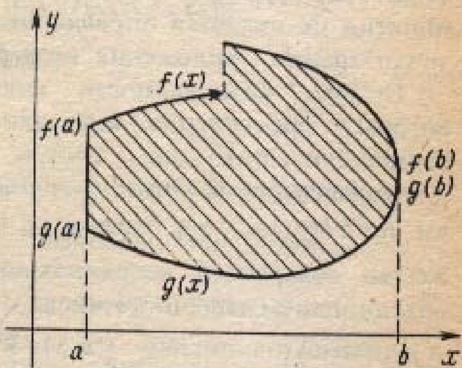


Рис. 18

Определение 5. *Криволинейными трапециями* называются подмножества $T\subset\mathbb{R}^2$ вида

$$T=\{(x,\ y):\ g(x)\le y\le f(x)\ \wedge\ a\le x\le b\},$$

где $f(x)$ и $g(x)$ – любые функции, значения которых в каждой точке отрезка $[a, b] \subset \mathbb{R}$ связаны соотношением $g(x) \le f(x)$ (рис. 18).

З а м е ч а н и е. Термин "криволинейная трапеция" (от греч. τραπέζιον – столик; τράπεζα – стол, еда) является весьма условным: "основания трапеции", лежащие на прямых $x=a$, $x=b$, могут вырождаться в точки (если $f(a)=g(a)$ или $f(b)=g(b)$), "криволинейные боковые стороны трапеции", коими служат графики функций $f(x)$ и $g(x)$ на отрезке $[a, b]$, могут оказаться отрезками прямых (если эти функции линейные). Иногда под *криволинейными трапециями* понимают лишь множества вида

$$T=\{(x, y)\in \mathbb{R}^2 \colon 0\le y\le f(x) \wedge a\le x\le b\}$$

(а также $T=\{(x, y)\in \mathbb{R}^2 \colon -f(x)\le y\le 0 \wedge a\le x\le b\}$), где $f(x)$ – *неотрицательная* функция на отрезке $[a, b]$, однако такое сужение понятия не является оправданным ни терминологически, ни с точки зрения приложения интеграла к определению площади.

Особую разновидность криволинейных трапеций, для которых определение площади не вызывает затруднений, составляют *ступенчатые фигуры.*

Определение 6. *Ступенчатой фигурой,* связанной с разбиением $\Delta=\Delta(x_0, x_1,\dots, x_n)$ отрезка $[a, b]$, называется любое подмножество декартовой координатной плоскости $\mathbb{R}^2$, являющееся объединением конечного числа n (по числу отрезков разбиения Δ) прямоугольников $\{(x, y)\in \mathbb{R}^2 \colon c_i\le y\le d_i \wedge x_{i-1}\le x\le x_i\}$, $-\infty\le c_i\le \le d_i\le +\infty$, $i=1,\dots, n$ (при $c_i=d_i$ прямоугольник вырождается в отрезок, а в случае бесконечных значений c_i или d_i становится полосой или полуполосой); под *площадью* ступенчатой фигуры понимается сумма площадей составляющих ее прямоугольников, т.е. величина $\sum_{i=1}^{n}(d_i-c_i)\Delta x_i$ (возможно равная $+\infty$).

Непосредственным следствием определений 4–6 является следующее утверждение, иллюстрацией которого служит рис. 19.

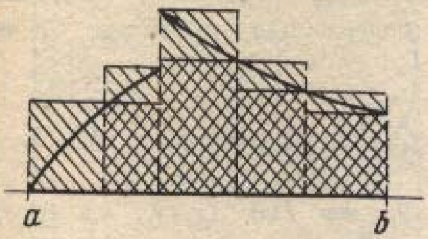


Рис. 19

Предложение. *Для любой неотрицательной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ среди всех ступенчатых фигур, связанных с фиксированным разбиением $\Delta = \Delta\left(x_0, x_1, \ldots, x_n\right)$ этого отрезка, существует минимальная (по размерам составляющих ее прямоугольников) ступенчатая фигура, содержащая множество*

$$T = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le f(x) \wedge a \le x \le b\right\}$$

(она состоит из прямоугольников

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le \bar{y}_i \wedge x_{i-1} \le x \le x_i\right\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\bar{y}_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$), и максимальная ступенчатая фигура, содержащаяся в множестве T (она состоит из прямоугольников

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \colon 0 \le y \le \underline{y}_i \wedge x_{i-1} \le x \le x_i\right\}, \quad i = 1, \ldots, n,$$

где $\underline{y}_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$); площадь первой ступенчатой фигуры равна $\sum\limits_{i=1}^{n} \bar{y}_i \Delta x_i = \bar{S}_\Delta(f)$, а площадь второй – $\sum\limits_{i=1}^{n} \underline{y}_i \Delta x_i = \underline{S}_\Delta(f)$.

З а м е ч а н и е. Что касается криволинейных трапеций общего вида

$$T=\{(x,\ y)\in\mathbf{R}^2:\ g(x)\le y\le f(x)\wedge a\le x\le b\},$$

то среди всех ступенчатых фигур, связанных с фиксированным разбиением $\Delta=\Delta(x_0,\ x_1,\dots,\ x_n)$ отрезка $[a,\ b]$, минимальная ступенчатая фигура, содержащая множество T, образована прямоугольниками

$$\{(x,\ y)\in\mathbf{R}^2:\ \underline{z}_i\le y\le\overline{y}_i\wedge x_{i-1}\le x\le x_i\},\quad i=1,\dots,\ n,$$

где $\underline{z}_i=\inf\limits_{[x_{i-1},\ x_i]} g(x)$, а $\overline{y}_i=\sup\limits_{[x_{i-1},\ x_i]} f(x)$ ($\underline{z}_i\le\overline{y}_i$, т.к. $\underline{z}_i\le g(x)\le f(x)\le\overline{y}_i$ для любого $x\in[x_{i-1},\ x_i]$, $i=1,\dots,\ n$) и имеет площадь, равную $\sum\limits_{i=1}^{n}(\overline{y}_i-\underline{z}_i)\,\Delta x_i=\overline{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(g)$; максимальная же ступенчатая фигура, содержащаяся в множестве T, состоит из прямоугольников

$$\{(x,\ y)\in\mathbf{R}^2:\ \overline{z}_i\le y\le\underline{y}_i\wedge x_{i-1}\le x\le x_i\},\quad i=1,\dots,\ n,$$

где $\overline{z}_i=\sup\limits_{[x_{i-1},\ x_i]} g(x)$, а $\underline{y}_i=\inf\limits_{[x_{i-1},\ x_i]} f(x)$ (если $\overline{z}_i>\underline{y}_i$, то соответствующий прямоугольник следует считать *пустым* множеством, имеющим *нулевую* площадь; в этом случае получающаяся ступенчатая фигура не вполне удовлетворяет определению 6, т.к. число составляющих ее прямоугольников меньше числа отрезков разбиения Δ), и площадь этой фигуры *не меньше* числа $\sum\limits_{i=n}^{n}(\underline{y}_i-\overline{z}_i)\,\Delta x_i=\underline{S}_\Delta(f)-\overline{S}_\Delta(g)$ (рис. 20).

Помимо сумм Дарбу $\overline{S}_\Delta(f)$ и $\underline{S}_\Delta(f)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a,\ b]$, определяемых исключительно выбором разбиения Δ этого отрезка, вводятся так называемые *интегральные суммы* $S_\Delta(f,\ \xi)$, зависящие не только от разбиения Δ, но и от системы ξ точек, взятых по одной в каждом отрезке этого разбиения.

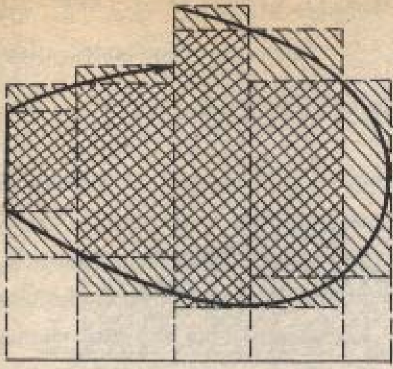


Рис. 20

Определение 7. *Интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, соответствующей выбору разбиения $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ этого отрезка и системы точек $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, называется выражение

$$S_\Delta(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i .$$

В отличие от сумм Дарбу интегральные суммы имеют смысл для функций, принимающих не только действительные, но и комплексные (и даже векторные) значения.

Примеры. 1. Для функции $f(x) = \sin x$ на отрезке $[0, \pi]$ и разбиения $\Delta = \Delta\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$ верхняя сумма Дарбу $\overline{S}_\Delta(f) = 1\,\frac{\pi}{2} + 1\,\frac{\pi}{2} = \pi$, нижняя сумма Дарбу $\underline{S}_\Delta(f) = 0\,\frac{\pi}{2} + 0\,\frac{\pi}{2} = 0$;

если $\xi = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right)$, то $S_\Delta(f, \xi) = \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$,

если $\xi = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}\pi\right)$, то $S_\Delta(f, \xi) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\pi}{2} = (\sqrt{2} + \sqrt{3})\,\frac{\pi}{4}$,

если $\xi = (0, \pi)$, то $S_\Delta(f, \xi) = \underline{S}_\Delta(f) = 0$, если $\xi = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, то $S_\Delta(f, \xi) = \bar{S}_\Delta(f) = \pi$ (рис. 21).

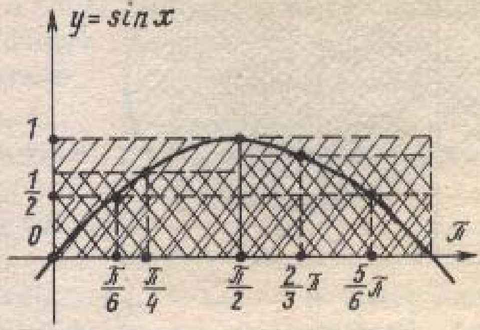


Рис. 21

2. Если $f(x) = e^{ix} = \cos x + i\sin x$, $x \in [0, \pi]$, $\Delta = \Delta\left(0, \frac{\pi}{2}, \pi\right)$, то

для $\xi = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi\right)$ $S_\Delta(f, \xi) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)\frac{\pi}{2} = i\frac{\pi}{2}$,

для $\xi = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}\pi\right)$ $S_\Delta(f, \xi) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\frac{\pi}{2} + \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\frac{\pi}{2}$,

для $\xi = (0, \pi)$ $S_\Delta(f, \xi) = 1\frac{\pi}{2} + (-1)\frac{\pi}{2} = 0$,

для $\xi = \left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ $S_\Delta(f, \xi) = i\frac{\pi}{2} + i\frac{\pi}{2} = i\pi$.

§ 8. Свойства сумм Дарбу

Предложение 1. *Если $f(x)$ – действительнозначная функция на отрезке $[a, b]$, то для любого разбиения* $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$

этого отрезка и при любом выборе точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots, n$, *выполняются соотношения*

$$\underline{S}_\Delta(f) \le S_\Delta(f, \xi) \le \overline{S}_\Delta(f),$$

при этом верхняя сумма Дарбу $\overline{S}_\Delta(f)$ *(соответственно нижняя сумма Дарбу* $\underline{S}_\Delta(f)$*) является интегральной суммой (т.е. имеет вид* $S_\Delta(f, \xi)$*) в том и только в том случае, когда функция* $f(x)$ *достигает точной верхней (соответственно точной нижней) грани на каждом отрезке разбиения* Δ.

Доказательство. Пусть $\overline{y}_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $\underline{y}_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $i = 1,\dots, n$, тогда $\underline{y}_i \le f(x) \le \overline{y}_i$ для любого $x \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots, n$, поэтому при любом выборе точек $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots, n$, выполняются соотношения

$$\underline{S}_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = S_\Delta(f, \xi),$$

$$\overline{S}_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i \Delta x_i \ge \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = S_\Delta(f, \xi).$$

Если функция $f(x)$ достигает точной верхней грани $\overline{y}_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$ на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения Δ, т.е. $\overline{y}_i = f(\xi_i)$ для некоторого $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots, n$, то

$$\overline{S}_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \Delta x_i = S_\Delta(f, \xi);$$

напротив, если функция $f(x)$ не достигает точной верхней грани по крайней мере на одном из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения Δ (т.е. $\overline{y}_i > f(\xi_i)$ для любого $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$), то какова бы ни была система точек $\xi = (\xi_1,\dots, \xi_n)$, $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots, n$, *конечность* значений $f(\xi_i)$, $i = 1,\dots, n$ (тогда как среди значений $\overline{y}_i$,

$i=1,\dots,n$ могут быть равные $+\infty$) обеспечивает выполнение соотношений

$$S_\Delta(f,\xi)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i<\sum_{i=1}^{n}\bar{y}_i\,\Delta x_i=\bar{S}_\Delta(f).$$

Утверждение относительно нижних сумм Дарбу устанавливается аналогично.

Предложение 2. *Если функция $f(x)$ ограничена сверху на отрезке $[a,b]$, то все величины $\bar{S}_\Delta(f)$ (отвечающие всевозможным разбиениям Δ отрезка $[a,b]$) являются конечными действительными числами, если же функция $f(x)$ не ограничена сверху на отрезке $[a,b]$, то все величины $\bar{S}_\Delta(f)$ равны $+\infty$.*

Доказательство. Если функция $f(x)$ ограничена сверху на отрезке $[a,b]$, то все величины $\bar{y}_i=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $i=1,\dots,n$, а следовательно и все слагаемые в выражении $\bar{S}_\Delta(f)=\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{y}_i\,\Delta x_i$ являются *конечными* действительными числами, так что $\bar{S}_\Delta(f)\in\mathbb{R}$. Если же функция $f(x)$ не ограничена сверху на отрезке $[a,b]$, то по крайней мере одна из величин $\bar{y}_i=\sup\limits_{[x_{i-1},x_i]} f(x)$, $i=1,\dots,n$, равна $+\infty$ (т.к. в противном случае функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ оказалась бы ограниченной сверху, например, числом $\bar{y}_1+\dots+\bar{y}_n$), таким образом в выражении $\bar{S}_\Delta(f)=\sum\limits_{i=1}^{n}\bar{y}_i\,\Delta x_i$ обязательно есть слагаемые, равные $+\infty$ (тогда как остальные являются действительными числами), поэтому $\bar{S}_\Delta(f)=+\infty$.

Предложение 3. *Если функция $f(x)$ ограничена снизу на отрезке $[a,b]$, то все величины $\underline{S}_\Delta(f)$ (отвечающие всевозможным разбиениям Δ отрезка $[a,b]$) являются конечными действительными числами, если же функция $f(x)$ не ограниче-*

на снизу на отрезке $[a, b]$, *то все величины* $\underline{S}_\Delta(f)$ *равны* $-\infty$.

Доказательство проводится по схеме доказательства предложения 2 с заменой точных верхних граней функции ее точными нижними гранями.

Предложение 4. *Если разбиение* Δ' *отрезка* $[a, b]$ *является измельчением разбиения* Δ, *то для любой функции* $f(x)$, *заданной на отрезке* $[a, b]$, *выполняются соотношения*

$$\overline{S}_{\Delta'}(f) \le \overline{S}_\Delta(f), \quad \underline{S}_{\Delta'}(f) \ge \underline{S}_\Delta(f)$$

(иначе говоря, при измельчении разбиений верхние суммы Дарбу функции $f(x)$ *не увеличиваются, а нижние суммы Дарбу не уменьшаются).*

Д о к а з а т е л ь с т в о. При переходе от разбиения $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ отрезка $[a, b]$ к любому его измельчению Δ' каждый отрезок $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения Δ оказывается либо отрезком разбиения Δ', либо объединением нескольких таких отрезков той же суммарной длины Δx_i. Поскольку на каждом из отрезков разбиения Δ', составляющих отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, точная верхняя грань функции $f(x)$ не превосходит величины $\overline{y}_i = \sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$ (т.е. точной верхней грани этой функции на *всем* отрезке $[x_{i-1}, x_i]$), а точная нижняя грань функции $f(x)$, напротив, не меньше величины $\underline{y}_i = \inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$ (рис. 22), то при переходе от сумм Дарбу

$$\overline{S}_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i \Delta x_i \quad \text{и} \quad \underline{S}_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i \Delta x_i$$

функции $f(x)$, отвечающих разбиению Δ отрезка $[a, b]$, к суммам Дарбу $\overline{S}_{\Delta'}(f)$ и $\underline{S}_{\Delta'}(f)$, отвечающим его измельчению Δ', слагаемые $\overline{y}_i \Delta x_i$ и $\underline{y}_i \Delta x_i$ либо остаются неизменными (если между точками x_{i-1} и x_i нет точек разбиения Δ'), либо за-

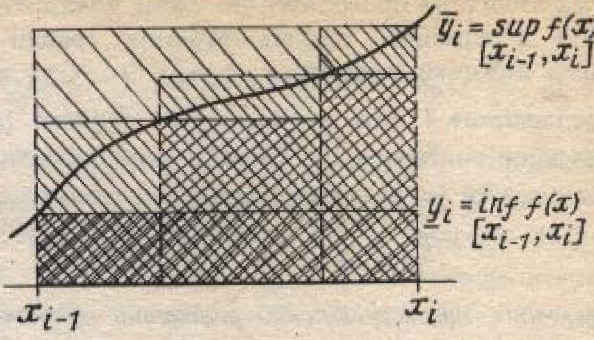


Рис. 22

меняются несколькими слагаемыми, сумма которых соответственно не больше числа $\bar{y}_i \Delta x_i$ и не меньше числа $\underline{y}_i \Delta x_i$.

Предложение 5. *Какова бы ни была действительнозначная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, для любых двух разбиений Δ и Δ' этого отрезка выполняются соотношения*

$$\underline{S}_\Delta(f) \le \bar{S}_{\Delta'}(f), \quad \underline{S}_{\Delta'}(f) \le \bar{S}_\Delta(f),$$

иначе говоря, любая нижняя сумма Дарбу функции $f(x)$ не превосходит любой верхней суммы Дарбу этой функции.

Доказательство. Пусть Δ'' – пересечение разбиений Δ и Δ' отрезка $[a, b]$. Поскольку разбиение Δ'' отрезка $[a, b]$ является измельчением обоих разбиений Δ и Δ', то в силу предложений 1 и 4 выполняются соотношения

$$\underline{S}_\Delta(f) \le \underline{S}_{\Delta''}(f) \le \bar{S}_{\Delta''}(f) \le \bar{S}_{\Delta'}(f),$$

$$\underline{S}_{\Delta'}(f) \le \underline{S}_{\Delta''}(f) \le \bar{S}_{\Delta''}(f) \le \bar{S}_\Delta(f).$$

Замечание. Геометрическим содержанием только что установленного утверждения является тот (кажущийся очевидным, но на самом деле требующий доказательства) факт, что площадь любой ступенчатой фигуры, *содержащейся* в произвольно взятой криволинейной трапеции, не превосходит площади любой ступенчатой фигуры, *содержащей* эту трапецию. Проверка этого факта может быть осуществлена по схеме доказательства предложения 5 с учетом определения площади ступенчатой фигуры и свойств коммутативности, ассоциативности и дистрибутивности операций сложения и умножения действительных чисел (ИЛМА-1, § 3).

Объединение предложений 2, 3, 5 с использованием аксиомы полноты системы действительных чисел (ИЛМА-1, § 3, аксиома А10) приводит к следующему результату.

Следствие. *Какова бы ни была действительнозначная функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, множество $\{\underline{S}_\Delta(f)\}$ всех нижних сумм Дарбу, соответствующих всевозможным разбиениям Δ этого отрезка, либо состоит из единственного элемента $-\infty$ (если функция $f(x)$ не ограничена снизу на отрезке $[a, b]$), либо является непустым множеством действительных чисел (если функция $f(x)$ ограничена снизу на отрезке $[a, b]$), множество же $\{\overline{S}_\Delta(f)\}$ всех верхних сумм Дарбу функции $f(x)$ либо состоит из единственного элемента $+\infty$ (если эта функция не ограничена сверху на отрезке $[a, b]$), либо является непустым множеством действительных чисел (если функция $f(x)$ ограничена сверху на отрезке $[a, b]$); в любом случае существует (но, вообще говоря, неединственное) число (конечное – если функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[a, b]$, или бесконечное – в противном случае), не меньшее любой нижней суммы Дарбу $\underline{S}_\Delta(f)$ и не превосходящее любой верхней суммы Дарбу $\overline{S}_{\Delta'}(f)$ каковы бы ни были разбиения Δ и Δ' отрезка $[a, b]$.*

§ 9. Интегрируемость и интеграл Римана функции на отрезке. Свойство ограниченности функций, интегрируемых по Риману

Вводимые в этом параграфе понятия *интегрируемости* функций (по Риману) и *интеграла Римана** в их исходном, или, как принято говорить, *собственном смысле,* применимы лишь по отношению к *отрезкам* числовой оси и функциям, определенным *во всех* точках этих отрезков. В последующих параграфах (по мере установления свойств интегрируемых функций и интеграла) область применения этих терминов будет расширяться вплоть до введения так называемых *несобственных интегралов Римана.* Словосочетание "интеграл Римана" объясняется существованием других, неэквивалентных, понятий интеграла, из которых самым употребительным в современной математике является *интеграл Лебега*** – более совершенный по свойствам, чем интеграл Римана, но применение которого требует большей предварительной подготовки.

Определение 1. Действительнозначная функция $f(x)$, область определения которой содержит отрезок $[a, b] \subset \mathbb{R}$, называется *интегрируемой (по Риману)* на этом отрезке (обозначение $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$), если существует *единственное действительное число* I, не превосходящее любой верхней суммы Дарбу $\overline{S}_\Delta(f)$ и не меньшее любой нижней суммы Дарбу $\underline{S}_{\Delta'}(f)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (вне зависимости от выбора разбиений Δ и Δ' этого отрезка):

$$f(x) \in \mathfrak{R}[a, b] \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} \exists! I\ \forall\Delta\ \forall\Delta' \left(\underline{S}_{\Delta'}(f) \le I \le \overline{S}_\Delta(f)\right).$$

Действительное число I, обладающее этим свойством (если оно существует и единственно), называется *интегралом* (точнее,

---

*Риман (Riemann), 1826–1866, – нем. математик, в работах которого понятие интеграла получило строгое определение.

**Лебег (Lebesgue), 1875–1941, – фр. математик, основоположник современной теории меры и нового понятия интеграла.

интегралом Римана) функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)\,dx$.

В некоторых случаях более удобной является следующая переформулировка только что данного определения.

Определение 1′. Действительнозначная функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, называется *интегрируемой (по Риману)* на этом отрезке (обозначение $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$), если существует действительное число I, одновременно являющееся точной верхней гранью всех нижних сумм Дарбу и точной нижней гранью всех верхних сумм Дарбу функции $f(x)$, соответствующих всевозможным разбиениям Δ отрезка $[a, b]$:

$$f(x) \in \mathfrak{R}[a, b] \overset{\text{def}}{\leftrightarrow} \exists I \left(\sup_{\Delta} \underline{S}_{\Delta}(f) = I = \inf_{\Delta} \overline{S}_{\Delta}(f) \right);$$

действительное число I, обладающее этим свойством (если такое число существует), называется *интегралом (Римана)* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ и обозначается символом $\int_a^b f(x)\,dx$.

Предложение. *Определения 1 и 1′ эквивалентны, т.е.*

$$\exists I \left(\sup_{\Delta} \underline{S}_{\Delta}(f) = I = \inf_{\Delta} \overline{S}_{\Delta}(f) \right) \leftrightarrow$$

$$\leftrightarrow \exists! I \, \forall \Delta \, \forall \Delta' \left(\underline{S}_{\Delta'}(f) \le I \le \overline{S}_{\Delta}(f) \right).$$

Доказательство. Если действительное число I обладает тем свойством, что $\sup_{\Delta} \underline{S}_{\Delta}(f) = I = \inf_{\Delta} \overline{S}_{\Delta}(f)$, то для любых разбиений Δ, Δ' отрезка $[a, b]$ выполняются соотношения $\underline{S}_{\Delta'}(f) \le I \le \overline{S}_{\Delta}(f)$, и *нет другого* действительного числа $\tilde{I}$, удовлетворяющего этим же соотношениям, ибо если $\tilde{I} < I$, то ввиду равенства $I = \sup_{\Delta} \underline{S}_{\Delta}(f)$ существует разбиение Δ_1 отрезка

$[a, b]$, для которого $\underline{S}_{\Delta_1}(f) > \bar{I}$, а если $\bar{I} > I$, то из равенства $I = \inf\limits_{\Delta} \bar{S}_{\Delta}(f)$ вытекает существование разбиения Δ_2 отрезка $[a, b]$, для которого $\bar{S}_{\Delta_2}(f) < \bar{I}$. Обратно, если существует такое *единственное* действительное число I, что $\underline{S}_{\Delta'}(f) \leq I \leq \bar{S}_{\Delta}(f)$ *для любых* разбиений Δ, Δ' отрезка $[a, b]$, то, во-первых, $\sup\limits_{\Delta} \underline{S}_{\Delta}(f) \leq I \leq \inf\limits_{\Delta} \bar{S}_{\Delta}(f)$, а во-вторых, ни в одном из этих соотношений не может выполняться знак *строгого* неравенства: если $\sup\limits_{\Delta} \underline{S}_{\Delta}(f) = I_1 < I$ или если $\inf\limits_{\Delta} \bar{S}_{\Delta}(f) = I_2 > I$ (где $I_1 \geq -\infty$, а $I_2 \leq +\infty$), то для любых разбиений Δ, Δ' отрезка $[a, b]$, кроме соотношений $\underline{S}_{\Delta'}(f) \leq I \leq \bar{S}_{\Delta}(f)$, будут выплняться также соотношения $\underline{S}_{\Delta'}(f) \leq \bar{I} \leq \bar{S}_{\Delta}(f)$, где $\bar{I}$, – любое действительное число, промежуточное между I_1 и I или между I и I_2.

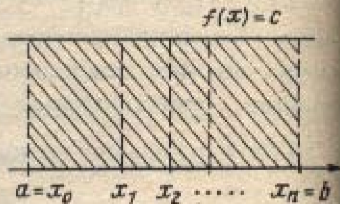
З а м е ч а н и е 1. Само обозначение $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ указывает на то, что источником понятия *интеграла* послужили *интегральные суммы*

$$S_{\Delta}(f, \xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \quad (\S\,7,\ \text{определение } 7):$$

символ $\int$ – это видоизмененная начальная буква лат. summa, прообразом же знакосочетания dx является обозначение длин отрезков разбиений Δx_i.

З а м е ч а н и е 2. Исторически сложилось, что созвучные термины "интегрируемость" и "интегрирование" используются для обозначения хоть и связанных между собой, но *различных по происхождению* понятий. *Интегрируемость* действительнозначной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ означает существование интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (от лат. integer – целый, безупречный) – *действительного числа* со свойствами, сформулированными в определениях 1 и 1'. *Интегрированием* же принято называть операцию, обратную дифференцированию,– восстановление функций по их дифференциалам (лат. differo – рассеивать, расчленять; integro – приводить в прежнее состояние, восстанавливать): результатом этой операции, примененной к выражению $f(x)dx$, по определению является *множество всех первообразных* по отношению к $f(x)$ функций, т.е. всех функций $F(x)$, имеющих (на том или ином промежутке) дифференциал $dF(x)=f(x)\,dx$, или, что то же самое, имеющих производную $F'(x)=f(x)$. По укоренившейся, но постепенно изживающей себя традиции множество всех функций, первообразных по отношению к $f(x)$, обозначают $\int f(x)\,dx$ и называют *неопределенным интегралом* функции $f(x)$, в противоположность чему число $\int_a^b f(x)\,dx$ называют ее *определенным интегралом*. Возникновение этой терминологии (и обозначений) относится к тому периоду развития математики, когда понятия интеграла и функции толковались недостаточно четко, и различие между объектами $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int f(x)\,dx$ представлялось чисто внешним: в первом случае указаны конкретные пределы интегрирования, а во втором они не уточнены и могут быть произвольными (известно даже остроумное предложение называть $\int_a^b f(x)\,dx$ опредéленным интегралом, а $\int f(x)\,dx$ – неопредéленным). Понимание того, что объекты, названные *определенным* и *неопределенным интегралами*, имеют принципиально различную природу, пришло лишь после строгого определения интеграла, данного Риманом, когда и терминология, и обозначения уже устоялись и смена их оказалась затруднительной. Следует подчеркнуть, что различие между объектами $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int f(x)\,dx$ состоит не только в том, что первый является *числом*, а второй — *множеством функций*, но и в том, что эти объекты имеют *разные области определения:* функция $f(x)$ может оказаться интегрируемой на отрезке $[a, b]$ и при этом не иметь на этом отрезке ни одной первообразной функции, и наоборот, иметь на отрезке $[a, b]$ первообразную функцию, но не быть на нем интегрируемой; подробно эти вопросы будут обсуждаться в § 18.

Примеры. **1.** Если функция $f(x)$ является постоянной ($f(x) = c$) на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, то для любого разбиения $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ этого отрезка имеют место равенства



$$\underline{S}_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} c\,\Delta x_i = \overline{S}_\Delta(f) = c\,(b-a),$$

Рис. 23

из которых следует, что постоянные функции интегрируемы (по Риману) на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ и что $\int_a^b c\,dx = c\,(b-a)$ (рис. 23).

2. Для функции Дирихле $\chi(x)$, определяемой соотношением

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \text{ – рациональное число,} \\ 0, & \text{если } x \text{ – иррациональное число,} \end{cases}$$

и любого разбиения $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ отрезка $[a, b]$ числовой оси выполняются равенства

$$\underline{S}_\Delta(\chi) = \sum_{i=1}^{n} 0\,\Delta x_i = 0, \quad \overline{S}_\Delta(\xi) = \sum_{i=1}^{n} 1\,\Delta x_i = b-a,$$

вытекающие из того, что каждый отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \ldots, n$, содержит как рациональные, так и иррациональные числа

(ИЛМА-1, § 5, предложения 4, 5); в соответствии с этим $\sup\limits_{\Delta} \underline{S}_{\Delta}(\chi)=0$, а $\inf\limits_{\Delta} \overline{S}_{\Delta}(\chi)=b-a$, следовательно функция $\chi(x)$ не является интегрируемой (по Риману) ни на каком отрезке $[a, b]\subset\mathbb{R}$. Следует отметить, что величина $\int\limits_a^b \chi(x)\,dx$, не существующая как *интеграл Римана,* тем не менее определена как интеграл Лебега (о котором будет говориться в § 27) и равна нулю для любого отрезка $[a, b]\subset\mathbb{R}$.

Наглядной геометрической интерпретацией *интегрируемости* (по Риману) и *интеграла* (Римана) функции на отрезке служат понятия *квадрируемости* криволинейной трапеции и ее *площади;* аналогами верхней и нижней сумм Дарбу в этом случае являются площади ступенчатых фигур (§ 7, определение 6), соответственно *содержащих* криволинейную трапецию и *содержащиеся* в ней.

Определение 2. Криволинейная трапеция T (§ 7, определение 5) называется *квадрируемой* (или *имеющей площадь* – от лат. quadratio – деление на четырехугольные части), если существует единственное действительное число s (очевидно, неотрицательное), которое одновременно не превосходит площади любой ступенчатой фигуры, содержащей множество T, и не меньше площади любой ступенчатой фигуры, содержащейся в множестве T; число s с таким свойством (в случае его существования и единственности) принимается за *площадь* криволинейной трапеции T.

Сравнивая определения 1 и 2 этого параграфа (с учетом определений 5 и 6 и предложения из § 7), можно прийти к следующему утверждению.

Предложение 2. *Для того чтобы криволинейная трапеция*

$$T=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y\le f(x)\wedge a\le x\le b\}$$

была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ *была интегрируемой (по Риману) на отрезке* $[a, b]$, *при этом площадь криволинейной трапеции* T *равна* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

З а м е ч а н и е. Что касается более общих криволинейных трапеций

$$T=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2:\ g(x)\le y\le f(x)\wedge a\le x\le b\},$$

то, принимая во внимание замечание к предложению из § 7, можно утверждать, что если *обе* функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы (по Риману) на отрезке $[a, b]$, то криволинейная трапеция T квадрируема и имеет площадь, равную $\int\limits_a^b f(x)\,dx-\int\limits_a^b g(x)\,dx$. Следует подчеркнуть, что хотя последнее выражение может быть представлено (с учетом устанавливаемого в § 12 свойства линейности интеграла Римана) в виде $\int\limits_a^b (f(x)-g(x))\,dx$, одной лишь интегрируемости *разности* функций $f(x)-g(x)$ на отрезке $[a, b]$ для квадрируемости криволинейной трапеции T оказывается недостаточно. Например, если $g(x)=\chi(x)$, а $f(x)=\chi(x)+1$, где $\chi(x)$ – функция Дирихле из примера 2, то $f(x)-g(x)\in\in\mathfrak{R}[a, b]$ (хотя $f(x)\notin\mathfrak{R}[a, b]$ и $g(x)\notin\mathfrak{R}[a, b]$), при этом соответствующая криволинейная трапеция T *не является квадрируемой* (последнее непосредственно вытекает из определения 2).

В качестве простейшего приложения к *кинематике* понятия интеграла Римана функции на отрезке можно привести следующее определение *величины пути*, который проходит за отрезок времени от $t=a$ до $t=b$ перемещающаяся точка пространства в предположении, что зависимость декартовых координат (x, y, z) этой точки от времени выражается дифференцируемыми функциями $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, $t\in[a, b]$. Вектор *мгновенной скорости*

$$(\dot x(t), \dot y(t), \dot z(t))=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t), z(t+\Delta t))-(x(t), y(t), z(t))}{\Delta t}$$

определен для любого $t\in[a, b]$, его модуль $v(t)=\sqrt{\dot x^2(t)+\dot y^2(t)+\dot z^2(t)}$ даст выражение *абсолютной величины скорости* в момент времени t. Взяв любое разбиение $\Delta = \Delta(t_0, t_1, \dots, t_n)$ отрезка $[a, b]$, верхнюю и нижнюю суммы Дарбу $\overline{S}_\Delta(v)$ и $\underline{S}_\Delta(v)$ функции $v(t)$ можно интерпретировать как величину пути, который прошла бы точка, если бы на каждом отрезке $[t_{i-1}, t_i]$ она двигалась равномерно и прямолинейно со скоростью, равной соответственно $\overline{v}_i = \sup\limits_{[t_{i-1}, t_i]} v(t)$ и $\underline{v}_i = \inf\limits_{[t_{i-1}, t_i]} v(t)$. За величину же пути, *фактически* пройденного точкой за время от $t = a$ до $t = b$, следует принять то число s (если оно существует и является единственным), которое не превосходит значения $\overline{S}_\Delta(v)$ и не меньше значения $\underline{S}_\Delta(v)$ при любом выборе разбиения отрезка времени $[a, b]$. В предположении интегрируемости (по Риману) функции $v(t) = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}$ на отрезке $[a, b]$ величина пути, пройденного точкой за время от $t = a$ до $t = b$, имеет выражение $\int\limits_a^b v(t)\,dt = \int\limits_a^b \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t) + \dot{z}^2(t)}\,dt$.

На *комплекснозначные* функции $f(x)$ определения 1 и 1$'$ этого параграфа не распространяются (поскольку в этом случае отсутствуют понятия сумм Дарбу), тем не менее определения *интегрируемости (по Риману)* и *интеграла Римана* могут быть даны и для таких функций.

Определение 3. Комплекснозначная функция $f(x) = u(x) + i\,v(x)$ считается *интегрируемой (по Риману)* на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$ в том и только в том случае, когда интегрируемы (по Риману) на этом отрезке обе действительнозначные функции $u(x) = \operatorname{Re} f(x)$ и $v(x) = \operatorname{Im} f(x)$, при этом значение $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ считается равным $\int\limits_a^b u(x)\,dx + i\int\limits_a^b v(x)\,dx$ (таким образом

$$f(x) \in \mathfrak{R}[a, b] \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} \operatorname{Re} f(x) \in \mathfrak{R}[a, b] \wedge \operatorname{Im} f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$$

и имеют место равенства

$$\operatorname{Re}\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b \operatorname{Re} f(x)\,dx\,,\quad \operatorname{Im}\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^b \operatorname{Im} f(x)\,dx\Big).$$

Следующее важное утверждение известно как *необходимое условие интегрируемости* (по Риману) функции на отрезке.

Теорема. *Любая функция, интегрируемая на отрезке, является ограниченной на этом отрезке:*

$$f(x)\in\mathfrak{R}\,[a,\,b]\to\exists\,h\,\forall x\in[a,\,b]\ (|f(x)|\le h)\,.$$

Доказательство. Поскольку интегрируемость (соответственно ограниченность) *комплекснозначной* функции $f(x)$ на отрезке $[a,\,b]$ – это то же самое, что интегрируемость (соответственно ограниченность) на этом отрезке обеих действительнозначных функций $\operatorname{Re} f(x)$ и $\operatorname{Im} f(x)$, достаточно доказать теорему, считая, что функция $f(x)$ принимает на отрезке $[a,\,b]$ *действительные* значения. Согласно определению $1'$ интегрируемость (по Риману) функции $f(x)$ на отрезке $[a,\,b]$ означает существование такого действительного числа I, что $\sup\limits_{\Delta} \underline{S}_\Delta(f)=I=\inf\limits_{\Delta} \overline{S}_\Delta(f)$ (Δ пробегает совокупность всевозможных разбиений отрезка $[a,\,b]$). Если бы функция $f(x)$ была неограниченной сверху на отрезке $[a,\,b]$, то в силу предложения 2 из § 8 *все* верхние суммы Дарбу $\overline{S}_\Delta(f)$ равнялись бы $+\infty$, в соответствии с чем имело бы место соотношение $\inf\limits_{\Delta} \overline{S}_\Delta(f)=+\infty$; аналогично в предположении неограниченности снизу функции $f(x)$ на отрезке $[a,\,b]$ все нижние суммы Дарбу $\underline{S}_\Delta(f)$ равнялись бы $-\infty$, вследствие чего выполнялось бы соотношение $\sup\limits_{\Delta} \underline{S}_\Delta(f)=-\infty$. Поскольку ни $+\infty$, ни $-\infty$ *не являются действительными числами,* интегрируемость (по Риману) функции $f(x)$ на отрезке $[a,\,b]$ несовместима с неограниченностью этой функции на указанном отрезке.

З а м е ч а н и е 1. Разобранный выше пример функции Дирихле (принимающей значение 1 во всех рациональных точках и значение 0 во всех иррациональных точках числовой оси) показывает, что функция $f(x)$, $x \in [a, b]$, являющаяся ограниченной на отрезке $[a, b]$, не обязательна быть интегрируемой (по Риману) на этом отрезке, иначе говоря, знак импликации $\to$ в символической записи формулировки теоремы оказывается *необратимым*.

З а м е ч а н и е 2. Следует особо подчеркнуть, что термин "интегрируемость" в формулировке теоремы понимается именно как интегрируемость по Риману *в собственном смысле*, т.е. в соответствии с определениями 1, $1'$ и 3 настоящего параграфа; если же термин "интегрируемость" понимать в *несобственном смысле* (§ 21) или как интегрируемость *по Лебегу* (§ 27), то утверждение теоремы становится *неверным*.

§ 10. Основной критерий интегрируемости функций по Риману. Интегрируемость непрерывных функций на отрезке

Решить вопрос об интегрируемости по Риману конкретной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, используя только определения 1 и $1'$ из § 9, удается лишь в сравнительно редких случаях (§ 9, примеры 1, 2). В связи с этим важную роль играют разнообразные *признаки* и *критерии интегрируемости* (греч. κριτήριον — средство суждения), которые в большинстве случаев основываются на следующем утверждении.

Теорема 1 (основной критерий интегрируемости). *Для того чтобы действительнозначная функция $f(x)$, область определения которой содержит отрезок $[a, b]$, была интегрируемой (по Риману) на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε существовало такое разбиение Δ отрезка $[a, b]$, что соответствующие этому разбиению верхняя и нижняя суммы Дарбу функции $f(x)$ различались бы между собой меньше, чем на ε:*

$$f(x) \in \Re[a, b] \leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \Delta \left(\bar{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \varepsilon\right).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x) \in \Re[a, b]$, т.е. согласно определению $1'$ из § 9 существует *действительное число I*, такое, что

$$\sup_\Delta \underline{S}_\Delta(f) = I = \inf_\Delta \bar{S}_\Delta(f)$$

(где в обоих случаях предполагается, что Δ пробегает совокупность *всех возможных разбиений* отрезка $[a, b]$). Взяв любое

$\varepsilon>0$, можно утверждать (ввиду соотношения $I=\sup\limits_{\Delta} \underline{S}_{\Delta}(f)$), что для положительного числа $\frac{\varepsilon}{2}$ существует разбиение Δ' отрезка $[a,b]$, для которого $I-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}_{\Delta'}(f)$; точно так же (но уже ввиду соотношения $\inf\limits_{\Delta} \bar{S}_{\Delta}(f)=I$) существует разбиение Δ'' отрезка $[a,b]$, для которого $\bar{S}_{\Delta''}(f)<I+\frac{\varepsilon}{2}$. В силу предложения 4 из § 8 для *пересечения* $\Delta=\Delta'\cap\Delta''$ разбиений Δ' и Δ'' будут выполняться соотношения

$$I-\frac{\varepsilon}{2}<\underline{S}_{\Delta'}(f)\leq\underline{S}_{\Delta}(f)\leq\bar{S}_{\Delta}(f)\leq\bar{S}_{\Delta''}(f)<I+\frac{\varepsilon}{2},$$

а следовательно и требуемое неравенство $\bar{S}_{\Delta}(f)-\underline{S}_{\Delta}(f)<\varepsilon$. Обратно, пусть функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ обладает тем свойством, что для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon>0$ существует разбиение Δ отрезка $[a,b]$, для которого $\bar{S}_{\Delta}(f)-\underline{S}_{\Delta}(f)<\varepsilon$. Выполнение этих неравенств свидетельствует, в частности, о *конечности* величин $\bar{S}_{\Delta}(f)$ и $\underline{S}_{\Delta}(f)$ для данного разбиения Δ и как следствие (ввиду предложений 2 и 3 из § 8) – об *ограниченности* функции $f(x)$ *сверху* и *снизу* на отрезке $[a,b]$. Повторное применение предложений 2 и 3 из § 8 приводит к тому, что *все* верхние и *все* нижние суммы Дарбу функции $f(x)$ (соответствующие всем возможным разбиениям отрезка $[a,b]$) являются *действительными числами*, при этом (ввиду предложения 5 из § 8) для произвольно взятых разбиений Δ, Δ' отрезка $[a,b]$ выполняется соотношение $\underline{S}_{\Delta}(f)\leq\bar{S}_{\Delta'}(f)$, смысл которого состоит в том, что любая верхняя сумма Дарбу $\bar{S}_{\Delta'}(f)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ служит *верхней границей множества всех нижних сумм Дарбу* $\underline{S}_{\Delta}(f)$ этой функции на этом отрезке. По известной теореме о существовании точной верхней грани непустого ограниченного сверху множества действительных чисел (ИЛМА-1, § 8, теорема 1) существует *действительное число* $\underline{I}=\sup\limits_{\Delta}\underline{S}_{\Delta}(f)$, при этом $\underline{I}\le\overline{S}_{\Delta'}(f)$ для любого разбиения Δ' отрезка $[a,b]$; отсюда в свою очередь вытекает существование *действительного числа* $\overline{I}=\inf\limits_{\Delta'}\overline{S}_{\Delta'}(f)$, причем $\underline{I}\le\overline{I}$. Если бы выполнялось *строгое* неравенство $\underline{I}<\overline{I}$, то для произвольно взятого разбиения Δ отрезка $[a,b]$ имели бы место соотношения $\underline{S}_{\Delta}(f)\le\underline{I}<\overline{I}\le\overline{S}_{\Delta}(f)$, т.е. разность $\overline{S}_{\Delta}(f)-\underline{S}_{\Delta}(f)$ *ни при каком* разбиении Δ отрезка не была бы меньшей *положительного* числа $\varepsilon=\overline{I}-\underline{I}$, что противоречит изначально сделанному предположению. Таким образом $\underline{I}=\overline{I}$, т.е. для *действительного числа* $I=\underline{I}=\overline{I}$ выполнены соотношения $\sup\limits_{\Delta}\underline{S}_{\Delta}(f)=I=\inf\limits_{\Delta}\overline{S}_{\Delta}(f)$, а следовательно (согласно определению 1 из § 9) $f(x)\in\Re\,[a,b]$, при этом $I=\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

З а м е ч а н и е. Согласно предложению 5 из § 8 соотношение $\underline{S}_{\Delta}(f)\le\overline{S}_{\Delta'}(f)$, где Δ, Δ' – произвольно взятые разбиения отрезка $[a,b]$, выполняются *для любой* действительнозначной функции $f(x)$, заданной на этом отрезке, при этом (§ 8, предложения 2, 3) значение $\underline{S}_{\Delta}(f)$ может быть как конечным, так и равным $-\infty$ (если функция $f(x)$ не ограничена снизу на отрезке $[a,b]$), а значение $\overline{S}_{\Delta'}(f)$ – конечным или равным $+\infty$ (если функция $f(x)$ не ограничена сверху на отрезке $[a,b]$). Таким образом, для произвольно взятой действительнозначной функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ *любая* верхняя сумма Дарбу $\overline{S}_{\Delta'}(f)$ является *верхней границей* множества $\{\underline{S}_{\Delta}(f)\}$ *всех* нижних сумм Дарбу (соответствующих всевозможным разбиениям δ отрезка $[a,b]$), вместе с тем множество $\{\underline{S}_{\Delta}(f)\}$ может состоять из *единственного* элемента $-\infty$ (т.е.

быть пустым как множество действительных чисел), а упомянутая верхняя граница $\overline{S}_{\Delta'}(f)$ этого множества может оказаться равной $+\infty$. С учетом этого обстоятельства проведенные при доказательстве теоремы 1 рассуждения (в той его части, которая относится к существованию точных граней $\underline{I} = \sup\limits_{\Delta} \underline{S}_{\Delta}(f)$ и $\overline{I} = \inf\limits_{\Delta} \overline{S}_{\Delta}(f)$) приводят к следующему результату: а) величины $\underline{I} = \sup\limits_{\Delta} \underline{S}_{\Delta}(f)$ и $\overline{I} = \inf\limits_{\Delta} \overline{S}_{\Delta}(f)$ (где в обоих случаях Δ пробегает совокупность всех возможных разбиений отрезка $[a, b]$) определены *для любой* действительнозначной функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, при этом $-\infty \le \underline{I} \le \overline{I} \le +\infty$; б) функция $f(x)$ является интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a, b]$ в том и только в том случае, когда обе величины $\underline{I}$ и $\overline{I}$ конечны и совпадают между собой:

$$f(x) \in \mathfrak{R}\,[a, b] \leftrightarrow -\infty < \underline{I} = \overline{I} < +\infty$$

(в этом случае $\underline{I} = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \overline{I}$). Число $\underline{I} = \sup\limits_{\Delta} \underline{S}_{\Delta}(f)$ (конечное или равное $\pm\infty$) называется *нижним интегралом Дарбу*, а число $\overline{I} = \inf\limits_{\Delta} \overline{S}_{\Delta}(f)$ (также конечное или равное $\pm\infty$) – *верхним интегралом Дарбу* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (числа $\underline{I}$ и $\overline{I}$ были впервые точно определены Дарбу в 1875 г.). Если провести образную аналогию между *интегрируемостью* (по Риману) действительнозначных функций на отрезке $[a, b]$ числовой оси и *сходимостью* последовательностей действительных чисел (при которой понятию *интеграла Римана* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ соответствует понятие *предела* $x = \lim x_n$ последовательности $\{x_n\}$), то *верхний* и *нижний интегралы Дарбу* $\overline{I} = \inf\limits_{\Delta} \overline{S}_{\Delta}(f)$ и $\underline{I} = \sup\limits_{\Delta} \underline{S}_{\Delta}(f)$ функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$

окажутся аналогами *верхнего* и *нижнего пределов* $\bar{x}=\overline{\lim}\, x_n$ и $\underline{x}=\underline{\lim}\, x_n$ последовательности $\{x_n\}$ (определения и свойства которых приведены в § 18 и 20 ИЛМА-1). А именно: а) обе величины $\bar{I}=\inf\limits_{\Delta} \bar{S}_\Delta(f)$ и $\underline{I}=\sup\limits_{\Delta} \underline{S}_\Delta(f)$ *определены однозначно* для любой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[a,b]$ и принимающей на нем действительные значения, точно так же обе величины $\bar{x}=\overline{\lim}\, x_n$ и $\underline{x}=\underline{\lim}\, x_n$ *определены однозначно* для любой последовательности действительных чисел $\{x_n\}$; б) всегда $-\infty\le\underline{I}\le\bar{I}\le+\infty$ и аналогично $-\infty\le\underline{x}\le\bar{x}\le+\infty$; в) *интегрируемость (по Риману)* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ равнозначна выполнению соотношений $-\infty<\underline{I}=\bar{I}<+\infty$, так же как *сходимость* последовательности $\{x_n\}$ – выполнению соотношений $-\infty<\underline{x}=\bar{x}<+\infty$, причем в обоих случаях $\underline{I}=\int\limits_a^b f(x)\,dx=\bar{I}$ и аналогично $\underline{x}=$ $=\lim x_n=\bar{x}$.

Какова бы ни была действительнозначная функция $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и каково бы ни было разбиение $\Delta=\Delta(x_0, x_1,\ldots, x_n)$ этого отрезка, величина

$$\bar{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}_i-\underline{y}_i)\,\Delta x_i$$

(где, как обычно, $\bar{y}_i=\sup\limits_{[x_{i-1},\,x_i]} f(x)$, $\underline{y}_i=\inf\limits_{[x_{i-1},\,x_i]} f(x)$, $i=1,\ldots, n$) всегда является *неотрицательным* числом (или $+\infty$) и геометрически представляет собой площадь минимальной ступенчатой фигуры, связанной с разбиением Δ отрезка $[a,b]$ § 7, определение 6), целиком содержащей график функции $f(x)$, $x\in[a,b]$ (рис. 24). Это наблюдение позволяет дать следующую квивалентную, но геометрически более наглядную (а иногда и более удобную для приложений) переформулировку основного критерия интегрируемости (теоремы 1).

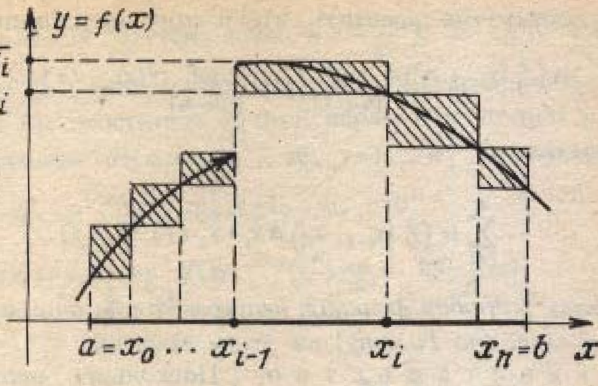


Рис. 24

Теорема 1′. *Действительнозначная функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, является интегрируемой (по Риману) на этом отрезке в том и только в том случае, когда для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε существует ступенчатая фигура (связанная с некоторым разбиением Δ отрезка $[a, b]$), целиком содержащая график функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, и имеющая площадь, меньшую, чем ε.*

Еще одну эквивалентную переформулировку основного критерия интегрируемости (теоремы 1) можно дать, используя понятие *колебания функции на множестве* (§ 6, определение 5).

Теорема 1″. *Для того чтобы действительнозначная функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a, b]$, была интегрируемой (по Риману) на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε существовало такое разбиение $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ отрезка $[a, b]$, что*

$$\sum_{i=1}^{n} \omega(f, [x_{i-1}, x_i])\, \Delta x_i < \varepsilon,$$

где $\omega(f, [x_{i-1}, x_i])$ — колебание функции $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$.

Для доказательства эквивалентности формулировок теорем 1 и 1″ достаточно заметить, что в силу предложения 6 из § 6

$$\omega\left(f, [x_{i-1}, x_i]\right) = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x), \quad i = 1, \ldots, n,$$

а следовательно

$$\sum_{i=1}^{n} \omega\left(f, [x_{i-1}, x_i]\right) \Delta x_i = \bar{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f).$$

Теорема 2. *Любая функция, непрерывная на отрезке, является интегрируемой (по Риману) на этом отрезке.*

Доказательство. Поскольку непрерывность *комплекснозначной* функции $f(x) = u(x) + i\,v(x)$ на отрезке $[a, b]$ равносильна (в силу соотношений

$$\left.\begin{array}{l} |u(x') - u(x'')| \\ |v(x') - v(x'')| \end{array}\right\} \le |f(x') - f(x'')| \le |u(x') - u(x'')| +$$

$$+ |v(x') - v(x'')|, \quad x', x'' \in [a, b])$$

непрерывности на этом отрезке *действительной* и *мнимой частей* $u(x) = \mathrm{Re}\, f(x)$ и $v(x) = \mathrm{Im}\, f(x)$ этой функции, и точно так же (но уже в силу определения 3 из § 9) интегрируемость функции $f(x) = u(x) + i\,v(x)$ на отрезке $[a, b]$ равносильна интегрируемости на этом отрезке каждой из функций $u(x)$ и $v(x)$, достаточно доказать утверждение теоремы, считая, что $f(x)$ – непрерывная *действительнозначная* функция на отрезке $[a, b]$. Согласно теореме Кантора (§ 4) любая непрерывная функция на отрезке является также *равномерно непрерывной* на этом отрезке, поэтому, взяв любое (сколь угодно малое) число $\varepsilon > 0$, можно утверждать, что для положительного числа $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$ существует такое положительное число δ, что для любых двух точек x', x'' отрезка $[a, b]$, удаленных друг от друга меньше, чем на δ, значения функции $f(x')$ и $f(x'')$ различаются между собой меньше, чем на $\dfrac{\varepsilon}{b-a}$. Пусть $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ – любое разбиение отрезка $[a, b]$, такое, что $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} < \delta$, $i = 1,\dots, n$ (для получения такого разбиения достаточно разделить отрезок $[a, b]$ на n равных частей, взяв $n > \frac{b-a}{\delta}$). В силу теоремы Вейерштрасса (§ 2, теорема 2) непрерывная *действительнозначная* функция $f(x)$ достигает точной верхней и точной нижней граней на каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots, n$, т.е. существуют такие точки x_i', $x_i'' \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1,\dots, n$, что

$$f(x_i') = \bar{y}_i = \sup_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x), \quad f(x_i'') = \underline{y}_i = \inf_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x),$$

поэтому

$$\bar{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} \bar{y}_i \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i') - f(x_i'') \right) \Delta x_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i') - f(x_i'') \right| \Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a} \Delta x_i = \varepsilon,$$

а следовательно (§ 10, теорема 1) $f(x) \in \Re[a, b]$.

§ 11. Интегрируемость по Риману некоторых разрывных и всех монотонных функций на отрезке

Определение. Функция $\chi_E(x)$, принимающая значение 1 в каждой точке множества $E \subset \mathbf{R}$ и значение 0 во всех остальных точках x числовой оси, называется *характеристической функцией* множества E.

Пример. Функция Дирихле

$$\chi(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ - рациональное число,} \\ 0, & x \text{ - иррациональное число} \end{cases}$$

служит характеристической функцией множества $\mathbf{Q}$ всех рациональных чисел: $\chi(x) = \chi_{\mathbf{Q}}(x)$.

З а м е ч а н и е. Понятие *характеристической функции* $\chi_E(x)$ распространяется на случай *любого* переменного x и любого подмножества E области допустимых значений этого переменного.

Предложение 1. *Каковы бы ни были точки* $a \le \alpha < \beta \le b$ *числовой оси, характеристическая функция* $\chi_{[\alpha,\beta]}(x)$ *отрезка* $[\alpha, \beta]$ *интегрируема (по Риману) на отрезке* $[a, b]$, *и* $\int_a^b \chi_{[\alpha,\beta]}(x)\,dx = \beta - \alpha$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Для произвольно взятого положительного числа ε пусть Δ — такое разбиение отрезка $[a, b]$, что: а) обе точки α, β являются точками разбиения Δ; б) отрезки разбиения Δ, содержащие (в качестве одного из концов) точку α или β, имеют длину, меньшую, чем $\frac{\varepsilon}{2}$. В этом случае $\underline{S}_\Delta(\chi_{[\alpha,\beta]}) = \beta - \alpha$, а $\overline{S}_\Delta(\chi_{[\alpha,\beta]}) < \beta - \alpha + 2\frac{\varepsilon}{2}$ (рис. 25); таким образом $\overline{S}_\Delta(\chi_{[\alpha,\beta]}) - \underline{S}_\Delta(\chi_{[\alpha,\beta]}) < \varepsilon$, а поэтому $\chi_{[\alpha,\beta]}(x) \in \Re[a, b]$ (§ 10, теорема 1), и для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ выполняются соотношения $\beta - \alpha \le \int_a^b \chi_{[\alpha,\beta]}(x)\,dx < \beta - \alpha + \varepsilon$, т.е. $\int_a^b \chi_{[\alpha,\beta]}(x)\,dx = \beta - \alpha$.

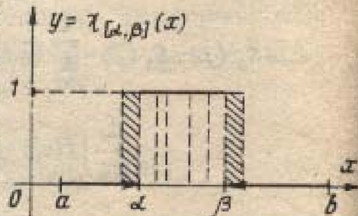


Рис. 25

Предложение 2. *Для любого отрезка* $[a, b] \subset \mathbf{R}$ *и любой точки* $\alpha \in [a, b]$ *характеристическая функция* $\chi_\alpha(x)$ *одноточечного множества* $\{\alpha\}$ *интегрируема (по Риману) на отрезке* $[a, b]$ *и* $\int_a^b \chi_\alpha(x)\,dx = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть ε – сколь угодно малое положительное число и пусть Δ – любое разбиение отрезка $[a, b]$, подчиненное лишь условиям: а) α является одной из точек разбиения Δ; б) отрезки разбиения Δ, содержащие точку α (их не больше двух) имеют длину, меньшую, чем $\frac{\varepsilon}{2}$ (рис. 26). В этом случае $\underline{S}_\Delta(\chi_\alpha)=0$, а $\overline{S}_\Delta(\chi_\alpha)<2\,\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$; в силу произвольности числа $\varepsilon>0$ отсюда следует, что $\chi_\alpha(x)\in \in \Re\,[a, b]$ и что $\int\limits_a^b \chi_\alpha(x)\,dx=0$.

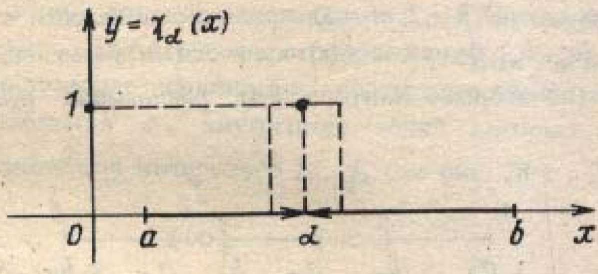


Рис.26

Теорема 1. *Если функция $f(x)$, $x\in[a, b]$, ограничена на отрезке $[a, b]$, и множество всех ее точек разрыва на этом отрезке может быть покрыто конечным набором интервалов сколь угодно малой суммарной длины (что выполняется, например, если число разрывов функции $f(x)$ конечно), то функция $f(x)$ интегрируема (по Риману) на отрезке $[a, b]$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Поскольку ограниченность *комплекснозначной* функции $f(x)=u(x)+iv(x)$ на отрезке $[a, b]$ равносильна одновременной ограниченности на этом отрезке ее действительной и мнимой частей $u(x)$ и $v(x)$, а точки разрыва функции $f(x)=u(x)+iv(x)$ – это точки разрыва по крайней мере одной из функций $u(x)$, $v(x)$, достаточно доказать теорему, считая, что $f(x)$ — *действительнозначная* функция на отрезке $[a, b]$. Пусть ε — сколь угодно малое положительное число. В соответствии с условием теоремы существует такое положительное число h, что $|f(x)| \leq h$, $x \in [a, b]$, и для положительного числа $\frac{\varepsilon}{4h}$ существует конечный набор интервалов $I_1, \ldots, I_k$, сумма длин которых меньше числа $\frac{\varepsilon}{4h}$ и объединение которых содержит *все* точки разрыва функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Множество, остающееся после удаления из отрезка $[a, b]$ интервалов $I_1, \ldots, I_k$, может состоять лишь из конечного числа непересекающихся отрезков $[a_1, b_1], \ldots, [a_m, b_m]$ с возможным добавлением конечного числа отдельных точек (на рис. 27 изображен случай $k = 2$, $m = 3$), при этом на каждом из отрезков $[a_1, b_1], \ldots, [a_m, b_m]$ функция $f(x)$ является *непрерывной*, а следовательно (по теореме Кантора, § 4), *равномерно непрерывной*.

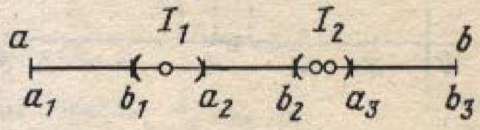


Рис.27

В соответствии с этим для положительного числа $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$ существуют такие положительные числа $\delta_1, \ldots, \delta_m$, что для любых двух точек x_j' и x_j'', принадлежащих одному и тому же отрезку $[a_j, b_j]$, $j = 1, \ldots, m$, и удаленных друг от друга меньше, чем на δ_j, значения $f(x_j')$ и $f(x_j'')$ различаются между собой меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Пусть $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ — любое разбиение отрезка $[a, b]$, подчиненное лишь условиям:

а) концевые точки интервалов $I_1,...,I_k$, не выходящие за пределы отрезка $[a, b]$, входят в состав точек разбиения Δ; б) длина каждого отрезка разбиения Δ меньше любого из чисел $\delta_1,..., \delta_m$. Чтобы оценить величину

$$\bar{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}(\bar{y}_i-\underline{y}_i)\Delta x_i,$$

где, как обычно, $\bar{y}_i=\sup\limits_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x)$, $\underline{y}_i=\inf\limits_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x)$, $i=1,..., n$, последнюю сумму удобно разделить на две – $\sum\limits_i{}'$ и $\sum\limits_i{}''$, отнеся к первой слагаемые $(\bar{y}_i-\underline{y}_i)\Delta x_i$, отвечающие отрезкам $[x_{i-1}, x_i]$, не имеющим общих точек с интервалами $I_1,...,I_k$, а следовательно принадлежащим какому-то из отрезков $[a_1, b_1],...,[a_m, b_m]$, а ко второй – остальные слагаемые, соответствующие отрезкам $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения Δ, внутренние точки которых принадлежат объединению интервалов $I_1,...,I_k$ (на рис. 28 $k = 2$, $m = 3$).

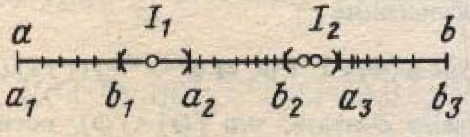


Рис.28

На каждом отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ первого типа функция $f(x)$ достигает (в силу теоремы 2 из § 2) своих точной верхней и точной нижней граней, т.е. $\bar{y}_i=f(x_i')$, $\underline{y}_i=f(x_i'')$, где $x_i', x_i''\in[x_{i-1}, x_i]$, поэтому

$$\sum_i{}'(\bar{y}_i-\underline{y}_i)\Delta x_i=\sum_i{}'\left(f(x_i')-f(x_i'')\right)\Delta x_i\le$$

$$\le\sum_i{}'\left|f(x_i')-f(x_i'')\right|\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_i{}'\Delta x_i\le\frac{\varepsilon}{2};$$

на отрезках же второго типа заведомо $\bar{y}_i - \underline{y}_i \le 2h$, а сумма длин этих отрезков не превосходит суммы длин интервалов $I_1, \dots, I_k$, т.е. меньше числа $\frac{\varepsilon}{4h}$, поэтому

$$\sum_i{}'' (\bar{y}_i - \underline{y}_i) \Delta x_i \le 2h \sum_i{}'' \Delta x_i < 2h \frac{\varepsilon}{4h} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Окончательно $\bar{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, и остается воспользоваться основным критерием интегрируемости (§ 10, теорема 1).

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема на самом деле является следствием гораздо более общей *теоремы Лебега* (составляющей знаменитый *критерий Лебега* интегрируемости функции по Риману). Ее формулировка и доказательство будут даны в § 26.

Теорема 2. *Любая функция, монотонная на отрезке, является интегрируемой (по Риману) на этом отрезке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу однотипности рассуждений достаточно провести доказательство лишь для *неубывающих* функций на отрезке $[a, b]$, т.е. функций $f(x)$, для которых истинно высказывание

$$\forall x' \in [a, b]\ \forall x'' \in [a, b]\ (x' < x'' \Rightarrow f(x') \le f(x'')),$$

при этом можно считать, что $f(a) < f(b)$, поскольку в случае $f(a) = f(b)$ функция $f(x)$ является *постоянной* на отрезке $[a, b]$, а интегрируемость постоянных функций была установлена выше (§ 9, пример 1). Для произвольно взятого (сколь угодно малого) положительного числа ε пусть $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \dots, x_n)$ – разбиение отрезка $[a, b]$ на n *равных* частей: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$, $i = 1, \dots, n$, где n настолько велико, что $\frac{b-a}{n} < \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)}$. В силу *неубывания* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (рис. 29) имеют место равенства

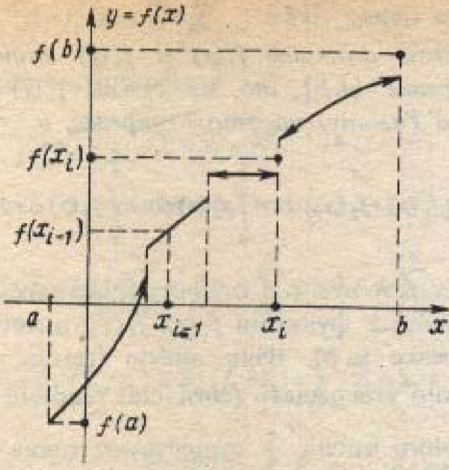


Рис. 29

$$f(x_i)=\sup_{[x_{i-1},\,x_i]} f(x)\,,\quad f(x_{i-1})=\inf_{[x_{i-1},\,x_i]} f(x)\,,\quad i=1,\ldots,n\,,$$

поэтому

$$\bar{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x_i-\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})\,\Delta x_i=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(f(x_i)-f(x_{i-1})\right)\frac{b-a}{n}=\left(f(x_n)-f(x_0)\right)\frac{b-a}{n}=$$

$$=\left(f(b)-f(a)\right)\frac{b-a}{n}<\left(f(b)-f(a)\right)\frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}=\varepsilon\,,$$

и утверждение теоремы вытекает из основного критерия интегрируемости (§ 10, теорема 1).

§ 12. Свойства линейности интеграла Римана

Свойства линейности интеграла Римана могут быть выражены как в виде нижеследующих теорем 1 и 2, так и в виде вытекающего из этих теорем следствия, где свойства линейности объединены в одно.

Теорема 1. *Если функции* $f_1(x)$ *и* $f_2(x)$ *интегрируемы (по Риману) на отрезке* $[a, b]$, *то их сумма* $f_1(x) + f_2(x)$ *также интегрируема (по Риману) на этом отрезке, и*

$$\int_a^b \left(f_1(x) + f_2(x)\right) dx = \int_a^b f_1(x)\, dx + \int_a^b f_2(x)\, dx .$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай *действительнозначных* функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, интегрируемых (по Риману) на отрезке $[a, b]$. Взяв любое (сколь угодно малое) число $\varepsilon > 0$, можно утверждать (согласно теореме 1 из § 10), что для положительного числа $\frac{\varepsilon}{2}$ существуют такие разбиения Δ_1 и Δ_2 отрезка $[a, b]$, что

$$\overline{S}_{\Delta_1}(f_1) - \underline{S}_{\Delta_1}(f_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \overline{S}_{\Delta_2}(f_2) - \underline{S}_{\Delta_2}(f_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \dots, x_n)$ – *пересечение* разбиений Δ_1 и Δ_2, то (в силу предложения 4 из § 8) тем более выполняются неравенства

$$\overline{S}_{\Delta}(f_1) - \underline{S}_{\Delta}(f_1) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \overline{S}_{\Delta}(f_2) - \underline{S}_{\Delta}(f_2) < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (*)$$

Введя обозначения

$$\overline{y}_i' = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f_1(x), \qquad \overline{y}''_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f_2(x),$$

$$\underline{y}'_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f_1(x), \qquad \underline{y}''_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f_2(x),$$

$$\overline{z}_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} \left(f_1(x) + f_2(x)\right), \qquad \underline{z}_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} \left(f_1(x) + f_2(x)\right),$$

где $i = 1, \dots, n$, можно утверждать ввиду неравенств

$$\underline{y}_i' + \underline{y}_i'' \le f_1(x) + f_2(x) \le \overline{y}_i' + \overline{y}_i'', \quad x \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, \dots, n,$$

что выполняются соотношения

$$\underline{y}_i' + \underline{y}_i'' \le \underline{z}_i \le \overline{z}_i \le \overline{y}_i' \le \overline{y}_i'', \quad i = 1, \dots, n,$$

а следовательно и соотношения

$$\underline{S}_\Delta(f_1) + \underline{S}_\Delta(f_2) = \sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i' \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \underline{y}_i'' \Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} \underline{z}_i \Delta x_i =$$

$$= \underline{S}_\Delta(f_1 + f_2) \le \overline{S}_\Delta(f_1 + f_2) = \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i \Delta x_i \le$$

$$\le \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i' \Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} \overline{y}_i'' \Delta x_i = \overline{S}_\Delta(f_1) + \overline{S}_\Delta(f_2).$$

Вместе с неравенствами (*) эти соотношения показывают, что

$$\overline{S}_\Delta(f_1 + f_2) - \underline{S}_\Delta(f_1 + f_2) < \varepsilon,$$

следовательно (ввиду теоремы 1 из § 10) $f_1(x) + f_2(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$; с учетом же неравенств

$$\underline{S}_\Delta(f_1) \le \int_a^b f_1(x)\,dx \le \overline{S}_\Delta(f_2), \qquad \underline{S}_\Delta(f_2) \le \int_a^b f_2(x)\,dx \le \overline{S}_\Delta(f_2),$$

$$\underline{S}_\Delta(f_1 + f_2) \le \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx \le \overline{S}_\Delta(f_1 + f_2)$$

из этих же соотношений следует, что действительные числа

$$\int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx \quad \text{и} \quad \int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx$$

различаются между собой меньше, чем на (сколь угодно малое) положительное число ε, так что

$$\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))\,dx=\int_a^b f_1(x)\,dx+\int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ интегрируема (по Риману) на отрезке $[a, b]$, то для любого (действительного или комплексного) числа λ функция $\lambda f(x)$ также интегрируема (по Риману) на этом отрезке и*

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx.$$

Доказательство. С учетом определения 3 из §9, только что доказанной теоремы и равенства

$$\lambda f(x)=(\alpha\; u(x)-\beta\; v(x))+i\,(\alpha\; v(x)+\beta\; u(x)),$$

в котором $\lambda=\alpha+i\beta$, а $f(x)=u(x)+i\,v(x)$, достаточно доказать утверждение теоремы, считая, что $f(x)$ – *действительнозначная* функция ($f(x)\in\Re[a,b]$), а λ – *действительное* число, при этом можно ограничиться лишь значениями $\lambda>0$ и $\lambda=-1$ (отсюда будет вытекать справедливость теоремы также для $\lambda<0$, а для $\lambda=0$ утверждение теоремы очевидно). Если $\lambda>0$, то для любого разбиения $\Delta=\Delta(x_0, x_1,..., x_n)$ отрезка $[a, b]$ будут выполняться соотношения $\sup\limits_{[x_{i-1},\, x_i]}\lambda f(x)=\lambda\sup\limits_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x)$, $\inf\limits_{[x_{i-1},\, x_i]}\lambda f(x)=\lambda\inf\limits_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x)$, $i=1,..., n$ (являющиеся прямыми следствиями определений 4, 5 из § 1), а поэтому и соотношения $\overline{S}_\Delta(\lambda f)=\lambda\,\overline{S}_\Delta(f)$, $\underline{S}_\Delta(\lambda f)==\lambda\,\underline{S}_\Delta(f)$; таким образом, если $I=\sup\limits_\Delta\underline{S}_\Delta(f)=\inf\limits_\Delta\overline{S}_\Delta(f)$ (где Δ пробегает совокупность *всех* возможных разбиений отрезка $[a,b]$), то $\lambda I=\sup\limits_\Delta\underline{S}_\Delta(\lambda f)=\inf\limits_\Delta\overline{S}_\Delta(\lambda f)$, поэтому если $f(x)\in\Re[a, b]$, то $\lambda f(x)\in\Re[a, b]$, и $\int_a^b\lambda f(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)\,dx$ для любого $\lambda>0$. Переходя к случаю $\lambda=-1$, следует заметить, что

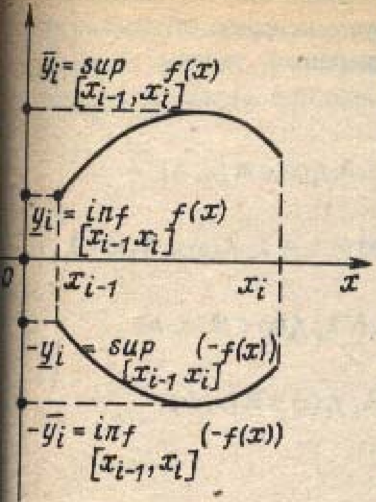


Рис. 30

для любого множества $X \subset \mathbb{R}$ имеют место равенства $\sup(-X) = -\inf X$ и $\inf(-X) = -\sup X$ (ИЛМА-1, § 8), поэтому для любого разбиения $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ отрезка $[a, b]$ выполняются соотношения $\sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} (-f(x)) = -\inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$,

$\inf\limits_{[x_{i-1}, x_i]} -f(x)) = -\sup\limits_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)$, $\quad i = 1, \ldots, n$

(рис. 30), а следовательно и соотношения $\underline{S}_\Delta(-f) = -\bar{S}_\Delta(f)$, $\bar{S}_\Delta(-f) = -\underline{S}_\Delta(f)$; таким образом, если $I = \sup\limits_\Delta \underline{S}_\Delta(f) = \inf\limits_\Delta \bar{S}_\Delta(f)$, то

$$-I = -\sup_\Delta \underline{S}_\Delta(f) = \inf_\Delta \left(-\underline{S}_\Delta(f)\right) = \inf_\Delta \bar{S}_\Delta(-f)$$

и одновременно

$$-I = -\inf_\Delta \bar{S}_\Delta(f) = \sup_\Delta\left(-\bar{S}_\Delta(f)\right) = \sup_\Delta \underline{S}_\Delta(-f);$$

это означает, что условия $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$ и $-f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$ равносильны и что $\int\limits_a^b (-f(x))\,dx = -\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Следствие. *Если функции $f_1(x), \ldots, f_k(x)$ интегрируемы (по Риману) на отрезке $[a, b]$, то любая их линейная комбинация $\sum\limits_{j=1}^k \lambda_j f_j(x)$ (с любыми постоянными коэффициентами $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$) также интегрируема (по Риману) на этом отрезке и*

$$\int_a^b \left(\sum_{j=1}^k \lambda_j f_j(x)\right) dx = \sum_{j=1}^k \lambda_j \int_a^b f_j(x)\,dx.$$

Для доказательства *интегрируемости* любой линейной комбинации *конечного числа* интегрируемых функций достаточно несколько раз применить утверждения теорем 1 и 2, действуя по схеме:

$$f_1(x) \in \Re[a, b] \wedge f_2(x) \in \Re[a, b] \wedge \ldots \wedge f_k(x) \in \Re[a, b] \xrightarrow{\text{т.2}}$$

$$\xrightarrow{\text{т.2}} \lambda_1 f_1(x) \in \Re[a, b] \wedge \lambda_2 f_2(x) \in \Re[a, b] \wedge \ldots \wedge \lambda_k f_k(x) \in \Re[a, b]$$

$$\xrightarrow{\text{т.1}} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) \in \Re[a, b] \wedge \ldots \wedge \lambda_k f_k(x) \in \Re[a, b]$$

$$\xrightarrow{\text{т.1}} \ldots \xrightarrow{\text{т.1}} \lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots + \lambda_k f_k(x) \in \Re[a, b];$$

по тем же соображениям

$$\int_a^b \left(\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) + \ldots + \lambda_k f_k(x)\right) dx =$$

$$= \int_a^b \lambda_1 f_1(x)\, dx + \int_a^b \left(\lambda_2 f_2(x) + \ldots + \lambda_k f_k(x)\right) dx = \ldots =$$

$$= \int_a^b \lambda_1 f_1(x)\, dx + \int_a^b \lambda_2 f_2(x)\, dx + \ldots + \int_a^b \lambda_k f_k(x)\, dx =$$

$$= \lambda_1 \int_a^b f_1(x)\, dx + \lambda_2 \int_a^b f_2(x)\, dx + \ldots + \lambda_k \int_a^b f_k(x)\, dx.$$

З а м е ч а н и е. Следует подчеркнуть, что в формулировке следствия речь идет лишь о *конечных* линейных комбинациях интегрируемых функций, т.е. сумма вида $\sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j f_j(x)$, содержащих *конечное* число слагаемых. Аналог этого утверждения для *бесконечных* линейных комбинаций интегрируемых функций, т.е. для *функциональных рядов* вида $\sum\limits_{j=1}^{+\infty} \lambda_j f_j(x)$, оказывается справедливым лишь *при специальных дополнительных условиях,* формулировка которых относится к теме *функциональных рядов* и выходит за рамки данной части курса математического анализа.

§ 13. Устойчивость интеграла Римана к изменению значений функций в конечном числе точек. Допустимые исключительные множества

Теорема. *Если функция $f(x)$ интегрируема (по Риману) на отрезке $[a, b]$, то при любом изменении ее значений на любом конечном множестве точек $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset [a, b]$ эта функция остается интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a, b]$, и величина ее интеграла не изменяется.*

Доказательство. Изменение значений функции $f(x)$ на подмножестве $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_k\} \subset [a, b]$ означает переход к функции $\tilde{f}(x) = f(x) + \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j \chi_{\alpha_j}(x)$, где $\chi_{\alpha_1}(x), \ldots, \chi_{\alpha_k}(x)$ – характеристические функции одноточечных множеств $\{\alpha_1\}, \ldots, \{\alpha_k\}$ (т.е. $\chi_{\alpha_j}(x) = 1$, если $x = \alpha_j$, и $\chi_{\alpha_j}(x) = 0$, если $x \neq \alpha_j$), а $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ – некоторые числа $\left(\lambda_j = \tilde{f}(\alpha_j) - f(\alpha_j),\ j = 1, \ldots, k,\right.$ – рис. 31). В силу предыдущего следствия и предложения 2 из § 11 $f(x) + \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j \chi_{\alpha_j}(x) \in \mathcal{R}[a, b]$ и $\int\limits_a^b \tilde{f}(x)\,dx = \int\limits_a^b \Big(f(x) + \sum\limits_{j=1}^{k} \lambda_j \chi_{\alpha_j}(x) \Big) dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx$.

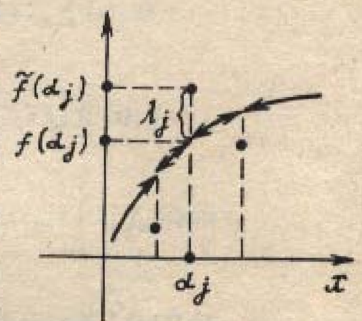


Рис. 31

З а м е ч а н и е 1. Данная теорема позволяет распространить понятия интегрируемости (по Риману) и интеграла Римана функции на отрезке на случай функций, изначально не определенных на некотором *конечном* подмножестве точек отрезка. А именно, если функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a,b]$ *за исключением конечного числа точек* $\alpha_1,\dots,\alpha_k$, оказывается интегрируемой (по Риману) на этом отрезке *при некотором доопределении* ее значений в точках $\alpha_1,\dots,\alpha_k$, то (в силу теоремы) функция $f(x)$ будет интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a,b]$, и *при любом другом* определении ее значений в указанных точках, причем значение $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ оказывается *одним и тем же*. Так, например, можно утверждать, что функция $f(x)=x\ln x$ является интегрируемой (по Риману) на отрезке $[0,1]$, хотя она и не определена в точке $x=0$: достаточно заметить, что при доопределении $f(0)=0$ функция $f(x)=x\ln x$ становится *непрерывной* на отрезке $[0,1]$.

З а м е ч а н и е 2. На *бесконечные* подмножества $E\subset[a,b]$ утверждение теоремы распространения не имеет: значения любой функции $f(x)\in\Re[a,b]$ на любом подмножестве $E\subset[a,b]$, содержащем *бесконечное* число точек, всегда можно изменить таким образом, чтобы условие $f(x)\in\Re[a,b]$ уже оказалось невыполненным (достаточно, взяв любую последовательность $\{\alpha_n\}$ *различных* точек множества E, изменить значения $f(\alpha_n)$, например на n, $n=1,2,\dots$, в результате чего функция $f(x)$ становится неограниченной на отрезке $[a,b]$, а следовательно условие $f(x)\in\Re[a,b]$ – невыполненным).

С учетом только что сделанных замечаний представляется естественным принять следующее *соглашение*, позволяющее распространить (что важно для приложений) понятия *интегрируемости (по Риману)* и *интеграла Римана* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ на некоторые случаи, когда этот отрезок не принадлежит целиком области определения функции $f(x)$.

Соглашение. Если значения функции $f(x)$ *не заданы* на некотором подмножестве $E\subset[a,b]$ (или *нет никакой информа-*

ции об этих значениях), то функция $f(x)$ считается интегрируемой (по Риману) на отрезке $[a, b]$ (а следовательно символ $\int_a^b f(x)\,dx$ – имеющим смысл) в том и только в том случае, когда:

а) условие $f(x) \in \Re[a, b]$ оказывается выполненным (в обычном смысле) после *любого доопределения* функции $f(x)$ в точках $x \in E$;

б) значение интеграла Римана $\int_a^b f(x)\,dx$ при любом доопределении функции $f(x)$ в точках множества E оказывается *одним и тем же.*

Пример. Функцию $f(x) = \dfrac{\sin\frac{\pi}{x}}{\sin\frac{\pi}{x}}$ нельзя считать интегрируемой (по Риману) на отрезке $[0, 1]$, поскольку этот отрезок содержит *бесконечное* множество точек $\left\{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$, не принадлежащих области определения данной функции (существует бесконечное число способов доопределения этой функции в точках указанного множества, при которых она оказывается неограниченной на отрезке $[0, 1]$). С другой стороны, в соответствии с принятым выше соглашением условие $\dfrac{\sin\frac{\pi}{x}}{\sin\frac{\pi}{x}} \in \Re[\alpha, 1]$ и равенство $\displaystyle\int_\alpha^1 \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\sin\frac{\pi}{x}}\,dx = 1 - \alpha$ выполняются для любого $\alpha \in (0, 1)$ (т.к. в данном случае подынтегральная функция не определена на *конечном* подмножестве $\left\{1, \frac{1}{2}, ..., \frac{1}{\left[\frac{1}{\alpha}\right]}\right\}$ отрезка интегрирования, а в остальных его точках равна 1).

Определение. Подмножество $E \subset [a, b]$ называется *$\mathfrak{R}$-допустимым исключительным множеством* (более подробно: допустимым исключительным множеством относительно свойства интегрируемости по Риману на отрезке $[a, b]$), если для произвольно взятой функции $f(x)$ выполнение условия $f(x) \subset \mathfrak{R}\,[a, b]$ и величина интеграла Римана $\int_a^b f(x)\,dx$ не зависят от значений $f(x)$, $x \in E$ (и даже от того, определена ли вообще функция $f(x)$ в точках множества E).

С учетом данного определения предыдущие результаты этого парагорафа можно резюмировать в виде следующего утверждения.

Следствие. *Подмножество $E \subset [a, b]$ является $\mathfrak{R}$-допустимым исключительным множеством в том и только в том случае, когда E состоит из конечного числа точек.*

З а м е ч а н и е. Если видоизменить данное определение $\mathfrak{R}$-допустимого исключительного множества (и, соответственно, формулировку принятого выше соглашения) и принимать во внимание лишь такие изменения значений функций $f(x)$ на множестве E, при которых эти функции остаются *ограниченными* на отрезке $[a, b]$ (оправданием этому может служить установленное в § 9 *необходимое условие интегрируемости*), то класс $\mathfrak{R}$-допустимых исключительных множеств расширится: таковыми окажутся в точности те подмножества $E \subset [a, b]$, которые имеют *нулевое протяжение* (определение последнего понятия и доказательство отмеченного факта будут даны соответственно в § 24 и 25).

§ 14. Интегрируемость произведения двух интегрируемых функций, квадратного корня из неотрицательной интегрируемой функции и модуля интегрируемой функции на отрезке

Теорема 1. *Произведение любых двух функций, интегрируемых (по Риману) на отрезке, является интегрируемым (по Риману) на этом отрезке:*

$$\forall f(x)\,\forall g(x)\,(f(x) \in \Re[a, b] \wedge g(x) \in \Re[a, b] \to f(x)\,g(x) \in \Re[a, b]).$$

Доказательство. Достаточно доказать интегрируемость *квадрата* любой функции, интегрируемой на отрезке, т.е. истинность утверждения

$$\forall f(x)\,(f(x) \in \Re[a, b] \to f^2(x) \in \Re[a, b]),$$

после чего воспользоваться соотношением

$$f(x)\,g(x) = \frac{1}{2}\,(f(x) + g(x))^2 - \frac{1}{2} f^2(x) - \frac{1}{2} g^2(x)$$

и установленной в §12 интегрируемостью *линейных комбинаций* интегрируемых функций; можно также считать, что $f(x)$ – *действительнозначная* функция, поскольку в случае $f(x) = u(x) + i\,v(x)$

$$f^2(x) = (u(x) + i\,v(x))^2 = u^2(x) - v^2(x) + i\,2u(x)\,v(x) =$$

$$= u^2(x) - v^2(x) + i\left[(u(x) + v(x))^2 - u^2(x) - v^2(x)\right].$$

Итак, пусть $f(x)$ – действительнозначная функция, интегрируемая (по Риману) на отрезке $[a, b]$, и пусть ε – любое (сколь угодно малое) положительное число. В силу теоремы из § 9 (об ограниченности любой интегрируемой функции на отрезке) существует такое число $h > 0$, что $|f(x)| \le h$, $x \in [a, b]$, а в силу основного критерия интегрируемости (§ 10, теорема 1) для положительного числа $\dfrac{\varepsilon}{2h}$ существует разбиение $\Delta = \Delta\,(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ отрезка $[a, b]$, такое, что $\overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \dfrac{\varepsilon}{2h}$; остается убедиться, что для этого же разбиения Δ выполняется неравенство $\overline{S}_\Delta(f^2) - \underline{S}_\Delta(f^2) < \varepsilon$, и воспользоваться основным критерием интегрируемости. Пусть

$$\overline{y}_i = \sup_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x), \quad \underline{y}_i = \inf_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x), \quad \overline{z}_i = \sup_{[x_{i-1},\, x_i]} f^2(x),$$

$$\underline{z}_i = \inf_{[x_{i-1},\, x_i]} f^2(x), \quad i = 1, \ldots, n;$$

достаточно проверить, что каждое слагаемое в выражении

$$\overline{S}_\Delta(f^2)-\underline{S}_\Delta(f^2)=\sum_{i=1}^{n}(\overline{z}_i-\underline{z}_i)\,\Delta x$$

не превосходит соответствующего ему слагаемого в выражении

$$\overline{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)=\sum_{i=1}^{n}(\overline{y}_i-\underline{y}_i)\,\Delta x_i\,,$$

умноженного на $2h$. Применительно к каждому отрезку $[x_{i-1},\ x_i]$, $i=1,\dots,n$, приходится отдельно рассматривать случаи, когда функция $f(x)$ является на этом отрезке: а) неотрицательной, б) неположительной, в) знакопеременной.

а) Если $f(x)\ge 0$ для любого $x\in[x_{i-1},\ x_i]$, то соотношения $\overline{y}_i=\sup\limits_{[x_{i-1},\ x_i]} f(x)$ и $\overline{y}_i^2=\sup\limits_{[x_{i-1},\ x_i]} f^2(x)$ эквивалентны, поэтому $\overline{z}_i=\overline{y}_i^2$ и аналогично $\underline{z}_i=\inf\limits_{[x_{i-1},\ x_i]} f^2(x)=\Big(\inf\limits_{[x_{i-1},\ x_i]} f(x)\Big)^2=\underline{y}_i^2$; таким образом $\overline{z}_i-\underline{z}_i=\overline{y}_i^2-\underline{y}_i^2=(\overline{y}_i+\underline{y}_i)(\overline{y}_i-\underline{y}_i)\le 2h(\overline{y}_i-\underline{y}_i)$.

б) Если $f(x)\le 0$ (т.е. $-f(x)\ge 0$) для любого $x\in[x_{i-1},\ x_i]$, то

$$\overline{z}_i=\sup_{[x_{i-1},\ x_i]} f^2(x)=\sup_{[x_{i-1},\ x_i]}(-f(x))^2=\Big(\sup_{[x_{i-1},\ x_i]}(-f(x))\Big)^2=\Big(-\inf_{[x_{i-1},\ x_i]} f(x)\Big)^2=\underline{y}_i^2\,,$$

а

$$\underline{z}_i=\inf_{[x_{i-1},\ x_i]} f^2(x)=\inf_{[x_{i-1},\ x_i]}(-f(x))^2=\Big(\inf_{[x_{i-1},\ x_i]}(-f(x))\Big)^2=\Big(-\sup_{[x_{i-1},\ x_i]} f(x)\Big)^2=\overline{y}_i^2\,,$$

поэтому $\overline{z}_i-\underline{z}_i=\underline{y}_i^2-\overline{y}_i^2=(-\overline{y}_i-\underline{y}_i)(\overline{y}_i-\underline{y}_i)\le 2h(\overline{y}_i-\underline{y}_i)$.

в) Если функция $f(x)$ принимает на отрезке $[x_{i-1},\ x_i]$ как положительные, так и отрицательные значения, то $\overline{y}_i>0$, $\underline{y}_i<0$, $\overline{z}_i=\max\{\overline{y}_i^2,\ \underline{y}_i^2\}$, а $\underline{z}_i\ge 0$, так что $\overline{z}_i-\underline{z}_i\le\overline{z}_i<\overline{y}_i^2+\underline{y}_i^2<\overline{y}_i^2+$ $+\underline{y}_i^2-2\overline{y}_i\,\underline{y}_i=(\overline{y}_i-\underline{y}_i)^2\le 2h(\overline{y}_i-\underline{y}_i)$.

Во всех разобранных случаях $(\bar{z}_i - \underline{z}_i)\,\Delta x_i \le 2h\,(\bar{y}_i - \underline{y}_i)\,\Delta x_i$, $i = 1, \ldots, n$, откуда следует, что

$$\bar{S}_\Delta(f^2) - \underline{S}_\Delta(f^2) \le 2h\left(\bar{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f)\right) < 2h\,\frac{\varepsilon}{2h} = \varepsilon.$$

В силу произвольности числа $\varepsilon > 0$ можно утверждать (на основании теоремы 1 из § 10), что $f^2(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$.

Теорема 2. *Если $f(x)$ – неотрицательная функция, интегрируемая (по Риману) на отрезке $[a, b]$, то функция $\sqrt{f(x)}$ также интегрируема (по Риману) на этом отрезке.*

Доказательство. Если $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$, то, взяв любое (сколь угодно малое) положительное число ε, можно утверждать (в силу теоремы 1 из § 10), что для положительного числа $\dfrac{\varepsilon^2}{4(b-a)}$ существует такое разбиение $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ отрезка $[a, b]$, что

$$\bar{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \frac{\varepsilon^2}{4(b-a)}.$$

Поскольку для *неотрицательной* функции $[a, b]$ соотношения

$$\bar{y}_i = \sup_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x) \quad \text{и} \quad \sqrt{\bar{y}_i} = \sup_{[x_{i-1},\, x_i]} \sqrt{f(x)},$$

а также

$$\underline{y}_i = \inf_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x) \quad \text{и} \quad \sqrt{\underline{y}_i} = \inf_{[x_{i-1},\, x_i]} \sqrt{f(x)}$$

равносильны, то для указанного разбиения Δ выполняется соотношение

$$\bar{S}_\Delta(\sqrt{f}) - \underline{S}_\Delta(\sqrt{f}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{\bar{y}_i} - \sqrt{\underline{y}_i}\right) \Delta x_i.$$

Остается показать, что последнее выражение *меньше* числа ε, для чего всю сумму удобнее разбить на две $\left(\sum_i{}' \text{ и } \sum_i{}''\right)$, в первую из которых включены лишь те слагаемые $\left(\sqrt{\bar{y}_i}-\sqrt{\underline{y}_i}\right)\Delta x_i$, для которых $\sqrt{\bar{y}_i}\ge\frac{\varepsilon}{2(b-a)}$, а во вторую – остальные слагаемые $\left(\text{с } \sqrt{\bar{y}_i}<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\right)$. Тогда

$$\sum_i{}'\left(\sqrt{\bar{y}_i}-\sqrt{\underline{y}_i}\right)\Delta x_i\le\sum_i{}'\frac{\left(\sqrt{\bar{y}_i}-\sqrt{\underline{y}_i}\right)\left(\sqrt{\bar{y}_i}+\sqrt{\underline{y}_i}\right)}{\sqrt{\bar{y}_i}}\Delta x_i\le$$

$$\le\frac{2(b-a)}{\varepsilon}\sum_i{}'\left(\bar{y}_i-\underline{y}_i\right)\Delta x_i\le\frac{2(b-a)}{\varepsilon}\left(\bar{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)\right)<$$

$$<\frac{2(b-a)}{\varepsilon}\,\frac{\varepsilon^2}{4(b-a)}=\frac{\varepsilon}{2};$$

$$\sum_i{}''\left(\sqrt{\bar{y}_i}-\sqrt{\underline{y}_i}\right)\Delta x_i\le\sum_i{}''\sqrt{\bar{y}_i}\,\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_i{}''\Delta x_i\le$$

$$\le\frac{\varepsilon}{2(b-a)}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a)=\frac{\varepsilon}{2};$$

таким образом,

$$\bar{S}_\Delta(\sqrt{f})-\underline{S}_\Delta(\sqrt{f})=\sum_{i=1}^{n}\left(\sqrt{\bar{y}_i}-\sqrt{\underline{y}_i}\right)\Delta x_i=\sum_i{}'+\sum_i{}''<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

и в силу произвольности числа $\varepsilon>0$ можно утверждать (согласно теореме 1 из § 10), что $\sqrt{f(x)}\in\Re[a,b]$.

З а м е ч а н и е. Доказанная теорема является частным случаем более общего утверждения, формулировка и доказательство которого будут даны в § 26.

Теорема 3. *Если функция $f(x)$ (принимающая действительные или комплексные значения) интегрируема (по Риману) на отрезке $[a,b]$, то функция $|f(x)|$ также интегрируема (по Риману) на этом отрезке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если $f(x)$ – действительнозначная функция, то в силу соотношения $|f(x)|=\sqrt{f^2(x)}$ интегрируемость функции $|f(x)|$ вытекает из теорем 1 и 2. В случае же комплекснозначной функции $f(x)=u(x)+iv(x)\in\Re[a,b]$ интегрируемость функции $|f(x)|$ устанавливается по схеме:

$$f(x)\in\Re[a,b]\overset{\text{def}}{\to}u(x)\in\Re[a,b]\wedge v(x)\in\Re[a,b]\to$$

$$\to u^2(x)\in\Re[a,b]\wedge v^2(x)\in\Re[a,b]\to$$

$$\to u^2(x)+v^2(x)\in\Re[a,b]\to|f(x)|=\sqrt{u^2(x)+v^2(x)}\in\Re[a,b]$$

(с последовательным использованием определения 3 из § 9, теоремы 1, теоремы 1 из § 12 и теоремы 2).

Замечание. Пример функции $f(x)=\begin{cases}1, & x-\text{рациональное число}\\ -1, & x-\text{иррациональное число}\end{cases}$ показывает, что утверждение, обратное теореме 3, неверно: $|f(x)|$ есть *постоянная* функция на числовой оси, следовательно $|f(x)|\in\Re[a,b]$ для любого отрезка $[a,b]\subset\mathbb{R}$ (§ 9, пример 1), вместе с тем $f(x)\notin\Re[a,b]$, так как в противном случае оказалась бы интегрируемой функция Дирихле $\chi(x)=\frac{1}{2}(f(x)+1)$, что неверно (§ 9, пример 2).

Для функций $f(x)$, $x\in[a,b]$, принимающих *действительные* значения, можно дать прямое доказательство утверждения

$$f(x)\in\Re[a,b]\to|f(x)|\in\Re[a,b],$$

не использующее теоремы 2. А именно, взяв любое (сколь угодно малое) число $\varepsilon>0$ и такое (соответствующее этому числу в силу предположения $f(x)\in\Re[a,b]$ и основного критерия интегрируемости) разбиение $\Delta=\Delta(x_0,x_1,\dots,x_n)$ отрезка $[a,b]$, что $\bar{S}_\Delta(f)-\underline{S}_\Delta(f)<\varepsilon$, достаточно заметить, что для любого отрезка $[x_{i-1},x_i]$ разбиения Δ выполняется соотношение

$$\sup_{[x_{i-1},x_i]}|f(x)|-\inf_{[x_{i-1},x_i]}|f(x)|\le\sup_{[x_{i-1},x_i]}f(x)-\inf_{[x_{i-1},x_i]}f(x)\qquad(**)$$

(иначе говоря, колебание функции $|f(x)|$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ не превосходит колебания функции $f(x)$ на этом же отрезке), поэтому

$$\bar{S}_\Delta(|f|) - \underline{S}_\Delta(|f|) \le \bar{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \varepsilon,$$

а следовательно $|f(x)| \in \Re[a, b]$. Истинность соотношения (**) в случае, когда $f(x) \ge 0$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, очевидна. Если $f(x) \le 0$, $x \in [x_{i-1}, x_i]$, то

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)| = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} (-f(x)) = -\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),$$

$$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)| = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} (-f(x)) = -\sup_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)|$$

следовательно соотношение (**) опять выполняется со знаком равенства. Если же функция $f(x)$ принимает на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ как положительные, так и отрицательные значения, то

$$\inf_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)| \ge 0, \quad \text{а} \quad \sup_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)| = \max\left\{\sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x),\ -\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)\right\},$$

поэтому

$$\sup_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)| - \inf_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)| \le \sup_{[x_{i-1}, x_i]} |f(x)| <$$

$$< \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f(x) + \left(-\inf_{[x_{i-1}, x_i]} f(x)\right).$$

§ 15. Свойство аддитивности интеграла Римана

Следующее (отнюдь не очевидное) утверждение, часто используемое при обращении с интегралами, несет основную нагрузку при выводе так называемого *свойства аддитивности* интеграла (от лат. additio – прибавление), суть которого состоит в том, что интеграл по *объединению* двух или вообще любого конечного числа примыкающих друг к другу отрезков равен *сумме* интегралов по каждому из отрезков в отдельности.

Лемма. *Если функция* $f(x)$, $x \in [a, b]$, *равна нулю вне некоторого отрезка* $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, *то условия* $f(x) \in \Re[a, b]$ *и* $f(x) \in \Re[\alpha, \beta]$ *эквивалентны и* $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать лемму лишь для *действительнозначных* функций $f(x)$ (последующее ее распределение на *комплекснозначные* функции $f(x) = u(x) + i\,v(x)$ обеспечивается определением 3 § 9). Пусть $f(x) \in \Re[a, b]$, следовательно (по теореме из § 9) функция $f(x)$ *ограничена* на отрезке $[a, b]$, т.е. существует такое положительное число h, что $|f(x)| \le h$ для всех $x \in [a, b]$. В силу основного критерия интегрируемости (§ 10, теорема 1) для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение Δ отрезка $[a, b]$, что $\overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \varepsilon$. Можно считать, что концы отрезка $[\alpha, \beta]$ входят в состав точек разбиения Δ и что отрезки разбиения Δ, непосредственно примыкающие (извне) к отрезку $[\alpha, \beta]$, имеют длины, не превосходящие числа $\frac{\varepsilon}{6h}$; в случае, если эти условия изначально не выполнялись, достаточно дополнить точки разбиения Δ еще точками α, β, $\alpha - \frac{\varepsilon}{6h}$, $\beta + \frac{\varepsilon}{6h}$ (переходя тем самым к *измельчению* разбиения Δ), в результате чего неравенство $\overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \varepsilon$ может лишь усилиться (§ 8, предложение 4). Точки разбиения Δ, попавшие на отрезок $[\alpha, \beta]$, образуют разбиение $\tilde{\Delta}$ этого отрезка, при этом соответствующие этому разбиению верхняя и нижняя суммы Дарбу $\overline{S}_{\tilde{\Delta}}(f)$ и $\underline{S}_{\tilde{\Delta}}(f)$ функции $f(x)$ *на отрезке* $[\alpha, \beta]$ либо совпадают с суммами Дарбу $\overline{S}_\Delta(f)$ и $\underline{S}_\Delta(f)$ этой же функции, *но на отрезке* $[a, b]$, либо отличаются от них отсутствием одного или двух слагаемых (все зависит от значений $f(\alpha)$ и $f(\beta)$), соответствующих тем отрезкам разбиения Δ, которые примыкают извне к отрезку $[\alpha, \beta]$ (рис. 32). В любом случае в силу сделанных выше предположений относительно функции $f(x)$ и разбиения Δ выполняются соотношения

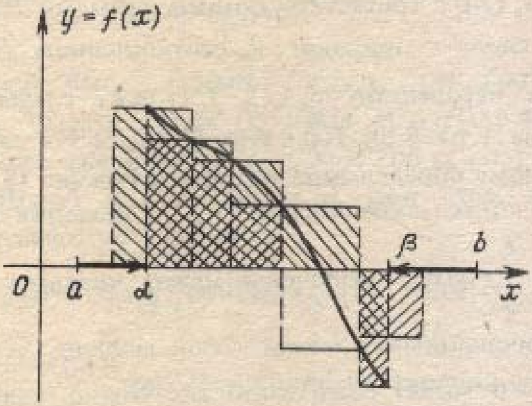


Рис. 32

$$\underline{S}_{\tilde{\Delta}}(f)-2h\frac{\varepsilon}{6h}<\underline{S}_{\Delta}(f)\le\underline{S}_{\tilde{\Delta}}(f)\le\bar{S}_{\tilde{\Delta}}(f)\le\bar{S}_{\Delta}(f)<\bar{S}_{\tilde{\Delta}}(f)+2h\frac{\varepsilon}{6h}. \quad (***)$$

В частности, справедливо неравенство $\bar{S}_{\tilde{\Delta}}(f)-\underline{S}_{\tilde{\Delta}}(f)<\varepsilon$, позволяющее сделать вывод, что $f(x)\in\mathfrak{R}[\alpha,\ \beta]$. Обратно, пусть $f(x)\in\mathfrak{R}[\alpha,\ \beta]$, в частности функция $f(x)$ ограничена на отрезке $[\alpha,\ \beta]$, а следовательно и на отрезке $[a, b]$ (т.к. $f(x)=0$ при $x\notin[\alpha,\ \beta]$), таким образом $|f(x)|\le h$, $x\in[a,\ b]$, для некоторого числа $h>0$. Взяв любое (сколь угодно малое) положительное число ε, можно утверждать (в силу теоремы 1 из § 10), что для положительного числа $\frac{\varepsilon}{3}$ существует такое разбиение $\tilde{\Delta}$ отрезка $[\alpha,\ \beta]$, что выполняется неравенство $\bar{S}_{\tilde{\Delta}}(f)-\underline{S}_{\tilde{\Delta}}(f)<\frac{\varepsilon}{3}$. Добавляя к точкам разбиения $\tilde{\Delta}$ еще точки a, b, $\alpha-\frac{\varepsilon}{6h}$, $\beta+\frac{\varepsilon}{6h}$ (все четыре или часть из них), можно продолжить разбиение $\tilde{\Delta}$ до разбиения Δ *всего отрезка* $[a, b]$ так, чтобы отрезки получившегося разбиения Δ, примыкающие извне к отрезку $[\alpha, \beta]$ имели длины, не превосходящие числа $\frac{\varepsilon}{6h}$. Сравнение сумм Дарбу $\overline{S}_\Delta(f)$ и $\underline{S}_\Delta(f)$ с соответствующими суммами Дарбу $\overline{S}_{\hat\Delta}(f)$ и $\underline{S}_{\hat\Delta}(f)$ снова приводит к соотношениям (***) и, как следствие, к неравенству $\overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \varepsilon$, следовательно (в силу теоремы 1 из § 10) $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$. Остается заметить, что согласно самому определению интеграла Римана (§ 9, определение 1) с учетом соотношений (***) значения интегралов $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и $\int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$ заключены между числами $\overline{S}_\Delta(f)$ и $\underline{S}_\Delta(f)$, различающимися между собой меньше, чем на ε; так как число $\varepsilon > 0$ может быть взято как угодно малым, отсюда следует, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(x)\,dx$.

Теорема (свойство аддитивности интеграла Римана). *Если $a < c < b$, то интегрируемость (по Риману) функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ эквивалентна ее интегрируемости на каждом из отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$ (т.е. $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b] \leftrightarrow f(x) \in \mathfrak{R}[a, c] \wedge f(x) \in \in \mathfrak{R}[c, b]$), при этом* $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$.

Доказательство. Пусть $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$ и пусть $\chi_{[a,c]}(x)$ и $\chi_{[c,b]}(x)$ – характеристические функции отрезков $[a, c]$ и $[c, b]$:

$$\chi_{[a,c]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, c], \\ 0, & x \notin [a, c], \end{cases} \qquad \chi_{[c,b]}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [c, b], \\ 0, & x \notin [c, b]. \end{cases}$$

В силу предложения 1 из § 11 обе эти функции интегрируемы (по Риману) на отрезке $[a, b]$, а следовательно (§ 13, теорема 1) это же верно по отношению к функциям $f(x)\,\chi_{[a,\,c]}(x)$ и $f(x)\,\chi_{[c,\,b]}(x)$. Поскольку

$$f(x)\,\chi_{[a,\,c]}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[a,\,c],\\ 0, & x\notin[a,\,c], \end{cases} \qquad f(x)\,\chi_{[c,\,b]}(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[c,\,b],\\ 0, & x\notin[c,\,b], \end{cases}$$

из доказанной выше леммы следует, что $f(x)\in\Re\,[a,\,c]$ и $f(x)\in\Re\,[c,\,b]$. Обратно, если $f(x)\in\Re\,[a,\,c]$ и $f(x)\in\Re\,[c,\,b]$, то в силу леммы обе функции $f(x)\,\chi_{[a,\,c]}(x)$ и $f(x)\,\chi_{[c,\,b]}(x)$ интегрируемы (по Риману) на отрезке $[a,b]$, при этом для любого $x\in[a,\,b]$ справедливо равенство

$$f(x)=f(x)\,\chi_{[a,\,c]}(x)+f(x)\,\chi_{[c,\,b]}(x)-f(c)\,\chi_c(x),$$

где $\chi_c(x)=\begin{cases} 1, & x=c\\ 0, & x\neq c \end{cases}$ — характеристическая функция одноточечного множества $\{c\}$, интеграл Римана которой на любом отрезке числовой оси равен нулю (§ 11, предложение 2). С учетом свойства линейности интеграла Римана (§ 12) из этого равенства вытекает как интегрируемость (по Риману) функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, так и требуемое соотношение

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b f(x)\,dx.$$

Свойство аддитивности интеграла Римана можно выразить в более общей и симметричной форме, если распространить определение величины $\int_a^b f(x)\,dx$ применительно к случаям, когда $a>b$ и $a=b$ (иначе говоря, если перейти от понятия интеграла *по отрезку* $[a,b]$ к понятию интеграла *от точки a до точки b* для любых точек $a,\ b\in\mathbb{R}$).

Определение 1. Величина $\int_a^b f(x)\,dx$ при $a>b$ понимается как *взятый со знаком минус* интеграл функции $f(x)$ на отрезке $[b, a]$, т.е. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$, в предположении, что $f(x) \in \Re[b, a]$.

Определение 2. Величина $\int_a^a f(x)\,dx$ считается *равной нулю* для любой точки $a \in \mathbb{R}$ и любой функции $f(x)$.

С учетом этих определений доказанная выше теорема приводит к следующему утверждению, также выражающему *свойство аддитивности* интеграла Римана.

Следствие. *Каковы бы ни были точки a, b, c числовой оси (не обязательно различные), если имеют смысл какие-то две из величин $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_b^c f(x)\,dx$, $\int_c^a f(x)\,dx$, то имеет смысл и третья величина, причем*

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0.$$

Доказательство. Пусть, например $b < c < a$ и имеют смысл величины $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_b^c f(x)\,dx$, т.е. $f(x) \in \Re[b, a]$ и $f(x) \in \Re[b, c]$. Согласно утверждению теоремы в этом случае $f(x) \in \Re[c, a]$ и $\int_c^a f(x)\,dx = \int_b^a f(x)\,dx - \int_b^c f(x)\,dx$, т.е. имеет смысл величина $\int_c^a f(x)\,dx$ и $\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = 0$. Если же, к примеру, $a = c < b$, то, согласно определениям 1, 2,

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx + \int_c^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx + 0 = 0.$$

§ 16. Неравенства для интегралов и теорема о среднем

Предложение 1. *Если* $f(x)$ *– неотрицательная функция, интегрируемая по Риману на отрезке* $[a, b]$, *то* $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно определению 1′ из § 9 $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \sup\limits_{\Delta} \underline{S}_\Delta(f) = \inf\limits_{\Delta} \overline{S}_\Delta(f)$ (где Δ пробегает совокупность всех возможных разбиений отрезка $[a, b]$). Но в силу неотрицательности функции $f(x)$ все ее нижние (и тем более верхние) суммы Дарбу *неотрицательны*, а поэтому и $\int\limits_a^b f(x)\,dx \ge 0$.

З а м е ч а н и е. Доказанное утверждение допускает следующее уточнение: если $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$ и $f(x) > 0$ *для любого* $x \in [a, b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$. Рассуждая *от противного*, т.е. предполагая, что для некоторой функции $f(x)$, принимающей на отрезке $[a, b]$ лишь *положительные* значения, $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$ (отрицательным интеграл быть не может в силу предложения 1), пришлось бы сделать вывод, что для положительного числа $\varepsilon = b - a$ существует такое разбиение $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \dots, x_n)$ отрезка $[a, b]$, что $\overline{S}_\Delta(f) = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{y}_i\,\Delta x_i < b - a$, где, как обычно,

$\bar{y}_i = \sup\limits_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x)$, $i=1,\dots,n$. Ввиду неотрицательности чисел $\bar{y}_i$, $i=1,\dots,n$, отсюда следует, что $\sup\limits_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x) < 1$ по крайней мере для одного из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ разбиения Δ. Обозначив этот отрезок $[a_1, b_1]$ и замечая, что $\int\limits_{a_1}^{b_1} f(x)\,dx = 0$ (ввиду соотношений $0 = \int\limits_a^b f(x)\,dx = \sum\limits_{i=1}^{n} \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx$ и предложения 1), можно повторить вышеприведенные рассуждения применительно к отрезку $[a_1, b_1]$: для положительного числа $\varepsilon = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$ существует такое разбиение Δ_1 отрезка $[a_1, b_1]$, что $\bar{S}_{\Delta_1}(f) = \frac{1}{2}(b_1 - a_1)$, следовательно по крайней мере для одного из отрезков разбиения Δ_1 (пусть это будет отрезок $[a_2, b_2]$) $\sup\limits_{[a_2,\, b_2]} f(x) < \frac{1}{2}$. Рассуждая далее по этой схеме, можно прийти к последовательности *вложенных отрезков* $\{[a_n, b_n]\}$, обладающих тем свойством, что $\sup\limits_{[a_n,\, b_n]} f(x) < \frac{1}{n}$; в силу принципа вложенных отрезков (ИЛМА-1, § 15, предложение 3) существует точка c, принадлежащая всем отрезкам $[a_n, b_n]$, $n=1, 2, \dots$, так что $f(c) < \frac{1}{n}$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т.е. $f(c) \le 0$, что противоречит условию $f(x) > 0$ *для любого* $x \in [a, b]$. Поскольку источником противоречия является предположение $\int\limits_a^b f(x)\,dx = 0$, следует сделать вывод, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$.

Предложение 2. *Если функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы (по Риману) на отрезке* $[a,b]$ *и* $f(x) \geq g(x)$ *на этом отрезке, то* $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$.

Доказательство. Согласно свойству линейности интеграла (§ 12, теорема 1) и предложению 1 выполняются соотношения:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x) + g(x))\,dx = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx +$$

$$+ \int_a^b g(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx.$$

Следующее важное предложение дает количественное уточнение теоремы 3 из § 14 об интегрируемости модуля интегрируемой функции.

Предложение 3. *Для любой функции* $f(x)$ *(принимающей действительные или комплексные значения), интегрируемой (по Риману) на отрезке* $[a,b]$, *выполняется неравенство*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx. \qquad (*)$$

Доказательство. Для *действительнозначных* функций $f(x) \in \Re[a, b]$ неравенство (*) является следствием теоремы 3 из § 14, теоремы 2 из § 12, предложения 2 и неравенств $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, $x \in [a, b]$: $-\int_a^b |f(x)|\,dx \leq$ $\leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$, что равносильно (*). В случае *комплекснозначной* функции $f(x) = u(x) + i\,v(x) \in \Re[a, b]$ доказательство неравенства (*) оказывается более сложным и его удобнее вести от противного. А именно, пусть (вопреки утверждению)

$f(x) = u(x) + i\,v(x) \in \Re[a, b]$ и $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| > \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$. Используя определение 3 из § 9 и вводя обозначения

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b u(x)\,dx + i\int\limits_a^b v(x)\,dx = I_1 + i\,I_2,$$

$$\int\limits_a^b |f(x)|\,dx = \int\limits_a^b \sqrt{u^2(x) + v^2(x)}\,dx = I_3,$$

можно утверждать, что *квадрат* Q с центром в точке $I_1 + i\,I_2$ комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и стороной длины ε, где

$$\varepsilon = \frac{1}{3}\left\{\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| - \int\limits_a^b |f(x)|\,dx\right\} = \frac{1}{3}\left(\sqrt{I_1^2 + I_2^2} - I_3\right) > 0,$$

лежит *вне* окружности радиуса $I_3 + \varepsilon$ с центром в начале координат (рис. 33). По теореме 1 из § 10 для указанного

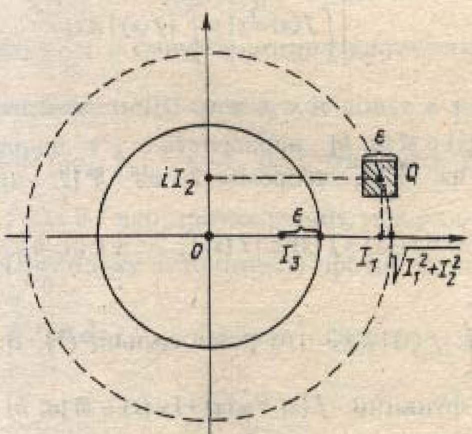


Рис. 33

положительного числа ε существуют такие разбиения Δ_1, Δ_2, Δ_3 отрезка $[a, b]$, что

$$\bar{S}_{\Delta_1}(u) - \underline{S}_{\Delta_1}(u) < \varepsilon, \qquad \bar{S}_{\Delta_2}(v) - \underline{S}_{\Delta_2}(v) < \varepsilon,$$

$$\bar{S}_{\Delta_3}\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) - \underline{S}_{\Delta_3}\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) < \varepsilon;$$

ввиду предложения 4 из § 8 эти неравенства могут лишь *усилиться* при переходе от разбиений Δ_1, Δ_2, Δ_3 отрезка $[a, b]$ к их *пересечению* $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Поскольку (в силу предложения 1 из § 8) при *любом* выборе точек $\xi_j \in [x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$ (взятых по одной в каждом отрезке разбиения Δ) соответствующие *интегральные суммы*

$$S_\Delta(u, \xi) = \sum_{j=1}^{n} u(\xi_j)\,\Delta x_j, \qquad S_\Delta(v, \xi) = \sum_{j=1}^{n} v(\xi_j)\,\Delta x_j$$

функций $u(x)$, $v(x)$ на отрезке $[a, b]$ удовлетворяют неравенствам

$$\underline{S}_\Delta(u) \le S_\Delta(u, \xi) \le \bar{S}_\Delta(u), \qquad \underline{S}_\Delta(v) \le S_\Delta(v, \xi) \le \bar{S}_\Delta(v),$$

а по самому определению чисел I_1 и I_2

$$\underline{S}_\Delta(u) \le I_1 \le \bar{S}_\Delta(u), \qquad \underline{S}_\Delta(v) \le I_2 \le \bar{S}_\Delta(v),$$

то можно утверждать, что точка плоскости $\mathbf{C}$, изображающая число

$$S_\Delta(u, \xi) + i\,S_\Delta(v, \xi) = \sum_{j=1}^{n} \left(u(\xi_j) + i\,v(\xi_j)\right)\Delta x_j = \sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,\Delta x_j,$$

лежит внутри указанного выше квадрата Q (рис. 33). Поэтому

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,\Delta x_j\right| > I_3 + \varepsilon > \bar{S}_\Delta\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$$

(правое неравенство является следствием соотношений

$$\underline{S}_\Delta\left(\sqrt{u^2+v^2}\right) \le I_3 \le \bar{S}_\Delta\left(\sqrt{u^2+v^2}\right),$$

$$\overline{S}_\Delta\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)-\underline{S}_\Delta\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)<\varepsilon\,).$$

С другой стороны,

$$\left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j)\,\Delta x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} |f(\xi_j)|\,\Delta x_j \le \overline{S}_\Delta\left(\sqrt{u^2+v^2}\right)$$

(левое неравенство выражает свойства модуля, а правое выполняется в силу предложения 1 из § 8, примененного к функции $|f(x)|=\sqrt{u^2(x)+v^2(x)}$). Таким образом сделанное выше предположение о том, что неравенство (*) не выполняется для некоторой функции $f(x)=u(x)+i\,v(x)\in\Re[a,\,b]$, приводит к противоречию.

Теорема о среднем. *Если $f(x)$ – непрерывная действительнозначная функция на отрезке, соединяющем точки $a,\ b\in\mathbb{R}$ (предполагается, что $a<b$ или $b<a$), то на этом отрезке существует точка ξ, для которой* $\int\limits_a^b f(x)\,dx=f(\xi)\,(b-a)$.

Доказательство. В случае $a<b$ условие теоремы означает, что $f(x)$ – непрерывная действительнозначная функция на отрезке $[a,b]$. По теореме 2 из § 10 функция $f(x)$ интегрируема (по Риману) на этом отрезке (поэтому выражение $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ определено), а по теореме 2 из § 2 функция $f(x)$ достигает на отрезке $[a,b]$ точной верхней и точной нижней граней, т.е. существуют такие точки $\overline{x},\ \underline{x}\in[a,\,b]$, что $f(\overline{x})=\sup\limits_{[a,\,b]} f(x)$, $f(\underline{x})=\inf\limits_{[a,\,b]} f(x)$. Поскольку $f(\underline{x})\le f(x)\le f(\overline{x})$ для любого $x\in[a,b]$, то (как показывают пример 1 из § 9 и предложение 2) выполняются неравенства

$$f(\underline{x})\,(b-a)\le\int\limits_a^b f(x)\,dx\le f(\overline{x})\,(b-a),$$

или, что то же самое, неравенства

$$f(\underline{x}) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le f(\overline{x}).$$

По теореме о промежуточных значениях (§ 3) число $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ является значением функции $f(x)$ в некоторой точке ξ, принадлежащей отрезку с концевыми точками $\underline{x}$, $\overline{x}$ (а следовательно и отрезку $[a, b]$), и таким образом $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(b-a)$. В случае $b < a$ условие теоремы означает, что $f(x)$ — непрерывная действительнозначная функция на отрезке $[b, a]$, поэтому (как только что было доказано) $\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)\,(a-b)$ для некоторой точки $\xi \in [b, a]$, так что (согласно определению 1 из § 15) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx = -f(\xi)\,(a-b) = f(\xi)\,(b-a)$.

На *разрывные* функции $f(x) \in \mathfrak{R}\,[a, b]$, а также на непрерывные *комплекснозначные* функции $f(x) = u(x) + i\,v(x)$, $x \in [a, b]$, утверждение теоремы о среднем *не распространяется.* В качестве подтверждения можно привести следующие примеры.

1. Если $a < \alpha < \beta < b$ и $\chi_{[\alpha,\,\beta]}(x)$ — характеристическая функция отрезка $[\alpha, \beta]$ (рис. 34), то с учетом предложения 1 из § 11 $\int_a^b \chi_{[\alpha,\,\beta]}(x)\,dx = \beta - \alpha \neq \chi_{[\alpha,\,\beta]}(\xi)\,(b-a)$ *при любом* выборе точки ξ.

2. Если $f(x) = \sqrt{1-x^2} + i\,x$, $x \in [0, 1]$, то согласно определению 3 из § 9

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + i\int_0^1 f\,dx = \frac{\pi}{4} + i\,\frac{1}{2},$$

при этом было учтено, что в силу предложения 2 из § 9

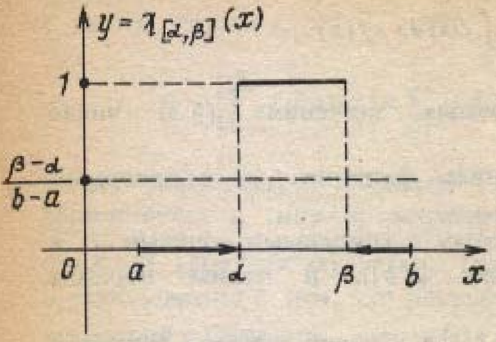


Рис.34

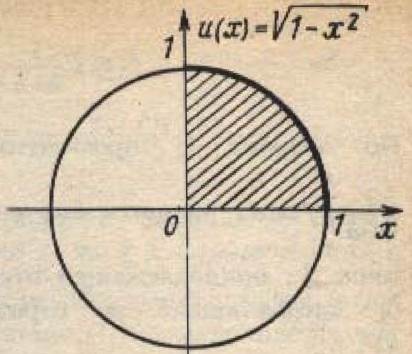


Рис. 35

величина $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ выражает площадь криволинейной трапеции, совпадающей с четвертью круга единичного радиуса

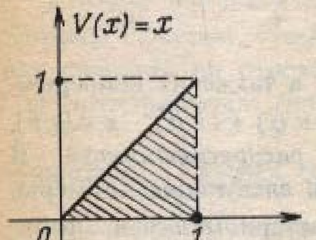


Рис. 36

(рис. 35), а величина $\int_0^1 x\,dx$ есть площадь прямоугольного треугольника с единичными катетами (рис. 36). Поскольку равенство $\int_0^1 f(x)\,dx = f(\xi)\,(1-0)$ в данном случае эквивалентно системе равенств $\left(\sqrt{1-\xi^2}=\frac{\pi}{4}\right)\wedge\left(\xi=\frac{1}{2}\right)$, оно не выполняется *ни для какой* точки $\xi\in[0,\,1]$.

§ 17. Свойства интегралов с переменными пределами интегрирования

В предположении, что функция $f(x)$ интегрируема (по Риману) на отрезке $[a,\,b]\subset\mathbb{R}$, из установленного в § 14 *свойства* *аддитивности* интеграла Римана вытекает, что *для любой точки* $c \in [a,b]$ определены величины $\int\limits_a^c f(x)\,dx$ и $\int\limits_c^b f(x)\,dx$ (в сумме составляющие число $\int\limits_a^b f(x)\,dx$). Считая точку $c \in [a, b]$ *переменной*, изменив (с целью подчеркнуть этот факт) обозначение c на x, предварительно поменяв (к примеру, на t) обозначение аргумента функции $f(x)$, можно утверждать, что функция $f(x) \in \mathfrak{R}\,[a,b]$ порождает *две новые функции* $F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt$ и $F_-(x) = \int\limits_x^b f(t)\,dt$, $x \in [a, b]$, по традиции называемые *интегралами с переменными пределами интегрирования* (соответственно *верхним* и *нижним*). Изучаемые в этом параграфе свойства функций $F(x)$ и $F_-(x)$, сформулированные в виде теорем 1, 2 и вытекающих из них следствий, важны не столько сами по себе, как тем, что первое из этих свойств служит основой для распространения понятия интеграла – введения так называемых *несобственных интегралов Римана* (§ 21), а второе связывает между собой понятия *интеграла* и *первообразной*, или, как еще говорят, *определенного* и *неопределенного интегралов* (§ 18). Ввиду соотношения $F(x) + F_-(x) = \int\limits_a^b f(t)\,dt$, $x \in [a, b]$, вытекающего из самого определения функций $F(x)$ и $F_-(x)$ и свойства аддитивности интеграла Римана, можно ограничиться изучением лишь функции $F(x)$ (т.е. интеграла с *переменным верхним пределом*), выводя соответствующие свойства функции $F_-(x)$ (интеграла с *переменным нижним пределом*) из равенства $F_-(x) = \int\limits_a^b f(t)\,dt - F(x)$, $x \in [a, b]$.

З а м е ч а н и е. Смысл произведенного выше переобозначения аргумента функции $f(x)$ с x на t (отнюдь не меняющего саму эту функцию) заключался исключительно в стремлении "освободить" символ x для обозначения аргумента функций $F(x)$

и $F_-(x)$, поскольку именно они, а не порождающая их функция $f(x)$, являются основными объектами изучения в данном параграфе. В принципе допустима также запись типа $F(x) = \int_a^x f(x)\,dx$, если иметь при этом в виду, что x в знакосочетаниях $\int_a^x$ и $f(x)$ служит обозначением хоть и одинаковых по природе, но *различных по выполняемой ими роли* переменных.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ интегрируема (по Риману) на отрезке $[a, b]$, то функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ непрерывна на этом отрезке.*

Доказательство. Пусть $f(x) \in \mathfrak{R}\,[a, b]$ и пусть x_0 – произвольно взятая точка отрезка $[a, b]$. По теореме из §9 функция $f(x)$, или, что то же самое, $f(t)$ (после переобозначения аргумента) является *ограниченной* на отрезке $[a, b]$, т.е. существует такое число $h > 0$, что $|f(t)| \le h$ для любого $t \in [a, b]$. Взяв любое (сколь угодно малое) положительное число ε, можно утверждать, что если $x \in [a, b]$ и $|x - x_0| < \dfrac{\varepsilon}{h}$, то

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right| =$$

$$= \left|\int_{x_0}^x f(t)\,dt\right| \le \left|\int_{x_0}^x |f(t)|\,dt\right| \le h|x - x_0| < h\frac{\varepsilon}{h} = \varepsilon$$

(были использованы последовательно: определение функции $F(x)$, свойство аддитивности интеграла Римана, предложения 3 и 2 из § 16; необходимость внешнего знака модуля в выражении $\left|\int_{x_0}^x |f(t)|\,dt\right|$ объясняется тем, что не исключен случай

$x < x_0$, когда $\int\limits_{x_0}^{x} |f(t)|\,dt \leq 0)$. Тем самым для функции $F(x)$ установлена истинность высказывания

$$\forall x_0 \in [a,\, b]\; \forall \varepsilon > 0\; \exists \delta > 0\; \forall x \in [a,\, b]\; \left(|x - x_0| < \delta \to \left|F(x) - F(x_0)\right| < \varepsilon\right),$$

что по определению и означает непрерывность этой функции на отрезке $[a, b]$.

З а м е ч а н и е. Поскольку (как следует из доказательства) в последней формуле в качестве δ может быть взято число $\frac{\varepsilon}{h}$, *не зависящее от точки* $x_0 \in [a,\, b]$, фактически была установлена *равномерная непрерывность* функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$. Формулировка и доказательство теоремы 1 в равной степени относятся к действительнозначным и комплекснозначным функциям $f(x)$, $x_0 \in [a,\, b]$.

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ интегрируема (по Риману) на отрезке $[a, b]$, то функция $F_-(x) = \int\limits_{x}^{b} f(t)\,dt$ непрерывна на этом отрезке.*

Следствие 2. *Если* $f(x) \in \Re\,[a,\, b]$, *то*

$$\lim_{\alpha \to a+0} \int\limits_{a}^{\alpha} f(x)\,dx = 0, \qquad \lim_{\beta \to b-0} \int\limits_{a}^{\beta} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx,$$

$$\lim_{\alpha \to a+0} \int\limits_{\alpha}^{b} f(x)\,dx = \int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx, \qquad \lim_{\beta \to b-0} \int\limits_{\beta}^{b} f(x)\,dx = 0.$$

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то функция $F(x) = \int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt$ имеет произвольную в каждой точке этого отрезка (понимаемую как правая и левая производная в точках a и b), при этом* $F'(x) = \left(\int\limits_{a}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x)$, $x \in [a,\, b]$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $f(x)$ – непрерывная *действительнозначная* функция на отрезке $[a, b]$ и пусть x_0 – любая фиксированная точка этого отрезка. Согласно определению функции $F(x)$, свойству аддитивности интеграла Римана (§ 15) и *теореме о среднем* (§ 16) для любой точки $x \in [a, b]$, $x \neq x_0$, справедливы соотношения

$$F(x)-F(x_0)=\int_a^x f(t)\,dt-\int_a^{x_0} f(t)\,dt=\int_{x_0}^x f(t)\,dt=f(\xi)\,(x-x_0),$$

где ξ – некоторая точка отрезка с концами x_0, x. Поскольку для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon>0$ существует такое число $\delta>0$, что из условий $x \in [a, b]$ и $|x-x_0|<\delta$ вытекает неравенство $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$, можно утверждать (дополнительно предполагая $x \neq x_0$ и учитывая неравенство $|\xi-x_0| \leq |x-x_0|$), что

$$\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right|=|f(\xi)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

т.е. *по определению производной* для любой точки $x \in [a, b]$ выполняются равенства $F'(x_0)=\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=f(x_0)$ (в силу требования $x \in [a, b]$ символ $x \to x_0$ в случае $x_0=a$ или $x_0=b$ надо понимать соответственно как $x \to a+0$ и $x \to b-0$). Для непрерывной *комплекснозначной* функции $f(x)=u(x)+i\,v(x)$, $x \in [a, b]$, рассуждения проводятся по той же схеме, но только теорема о среднем (справедливая, как уже отмечалось в § 16, лишь для *непрерывных* функций с *действительными* значениями) применяется отдельно к каждой функции $u(x)$ и $v(x)$ (непрерывность этих функций на отрезке $[a, b]$ является следствием непрерывности функции $f(x)$ и неравенств

$$\left.\begin{matrix}|u(x)-u(x_0)|\\|v(x)-v(x_0)|\end{matrix}\right\} \leq |f(x)-f(x_0)|, \qquad x,\ x_0 \in \mathfrak{R}\,[a, b]):$$

$$F(x)-F(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt=\int_{x_0}^{x} u(t)\,dt+i\int_{x_0}^{x} v(t)\,dt=$$

$$=u(\xi_1)(x-x_0)+i\,v(\xi_2)(x-x_0),$$

где ξ_1 и ξ_2 – некоторые (вообще говоря, различные) точки отрезка с концами x_0 и x. Если $x\to x_0$, то необходимо $\xi_1\to x_0$ и $\xi_2\to x_0$, вследствие чего

$$F'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\left(u(\xi_1)+i\,v(\xi_2)\right)=$$

$$=u(x_0)+i\,v(x_0)=f(x_0).$$

Следствие 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то функция $F_-(x)=\int_x^b f(t)\,dt$ имеет производную в каждой точке этого отрезка, причем* $F_-'(x)=\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)'=-f(x)$, $x\in[a,b]$.

Следствие 2. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ имеют производные $\varphi'(x)$ и $\psi'(x)$ в каждой точке некоторого промежутка $J\subset\mathbb{R}$, причем $\varphi(x)\in\in[a,b]$ и $\psi(x)\in[a,b]$ для любого $x\in J$, то функция $g(x)=\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt$ имеет производную в каждой точке промежутка J и*

$$g'(x)=\left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(t)dt\right)'=f(\psi(x))\,\psi'(x)-f(\varphi(x))\,\varphi'(x),\quad x\in J.$$

Для доказательства достаточно воспользоваться теоремой 2 и формулой производной сложной функции (в качестве промежуточных переменных выступают $\varphi(x)$ и $\psi(x)$):

$$g'(x)=\left(\int_a^{\psi(x)} f(t)\,dt-\int_a^{\varphi(x)} f(t)\,dt\right)'=f(\psi(x))\,\psi'(x)-f(\varphi(x))\,\varphi'(x).$$

Пример. $\int\limits_{\sqrt{x}}^{x^2} e^t \arcsin t\,dt \sim -\frac{x}{2}$ при $x\to 0$. Чтобы убедиться в этом, можно воспользоваться правилом Лопиталя (заметив, что в силу следствия 2 из теоремы 1 $\lim\limits_{x\to 0}\int\limits_{\sqrt{x}}^{x^2} e^t \arcsin t\,dt=0$):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_{\sqrt{x}}^{x^2} e^t\arcsin t\,dt}{-\frac{x}{2}}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\int\limits_{\sqrt{x}}^{x^2} e^t\arcsin t\,dt\right)'}{\left(-\frac{x}{2}\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(e^{x^2}\arcsin x^2\right)2x-\left(e^{\sqrt{x}}\arcsin\sqrt{x}\right)\frac{1}{2\sqrt{x}}}{-\frac{1}{2}}=1.$$

§ 18. Существование первообразных функций у непрерывных функций на промежутках. Формула Ньютона–Лейбница

Нижеследующие теоремы 1, 2 и вытекающее из них следствие относятся к числу наиболее важных утверждений математического анализа.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $J\subset\mathbb{R}$, то на этом промежутке существует функция $F(x)$, являющаяся первообразной по отношению к $f(x)$ (т.е. $F'(x)=f(x)$, $x\in J$). Одной из первообразных служит функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$, $x\in J$, где a — произвольно взятая точка промежутка J; любая другая* *первообразная отличается от функции $F(x)$ на постоянное слагаемое, иначе говоря, справедлива формула* $\int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C$.

Доказательство. То, что при любом выборе точки $a \in J$ функция $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ (принимающая вид $F(x) = -\int_x^a f(t)\,dt$ при $x < a$) служит первообразной по отношению к *непрерывной* функции $f(x)$ на промежутке J, непосредственно вытекает из теоремы 2 (и следствия 1). То, что *любая другая* функция $\tilde{F}(x)$, также являющаяся *первообразной* по отношению к функции $f(x)$ на промежутке J, отличается от функции $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ $x \in J$, на *постоянное слагаемое,* есть известное следствие из *теоремы Лагранжа о конечных приращениях,* примененной к функции $\varphi(x) = \tilde{F}(x) - F(x)$ (а в случае комплекснозначной функции $\varphi(x)$ – отдельно к ее действительной и мномой частям) на произвольно взятом отрезке $[x_1, x_2] \subset J$: $\varphi(x_2) - \varphi(x_1) = \varphi'(\xi)(x_2 - x_1)$, где $\xi \in (x_1, x_2)$, причем $\varphi'(\xi) = \tilde{F}'(\xi) - F'(\xi) = f(\xi) - f(\xi) = 0$, откуда следует, что функция $\varphi(x) = \tilde{F}(x) - F(x)$ принимает *одинаковые* значения *в любых двух точках* промежутка J, т.е. $\varphi(x) = C$, $x \in J$.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ одновременно имеет первообразную функцию $F(x)$ и является интегрируемой (по Риману) на этом отрезке, то справедлива формула Ньютона –Лейбница*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{**}$$

Доказательство. Пусть $f(x)$ – *действительнозначная* функция, имеющая на отрезке $[a, b]$ первообразную функцию $F(x)$ и являющаяся интегрируемой (по Риману) на этом отрезке. Согласно основному критерию интегрируемости (§ 10, теорема 1) для любого (сколь угодно малого) числа $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ отрезка $[a, b]$, что $\overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \varepsilon$. Так как (по условию теоремы) функция $F(x)$ имеет производную $F'(x) = f(x)$ в каждой точке $x \in [a, b]$, то с учетом теоремы Лагранжа о конечных приращениях справедливы равенства

$$\begin{aligned}
F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_0) = F(x_n) - F(x_{n-1}) + \\
&+ F(x_{n-1}) - F(x_{n-2}) + \ldots + F(x_2) - F(x_2) + F(x_1) - F(x_0) = \\
&= F'(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) + F'(\xi_{n-1})(x_{n-1} - x_{n-2}) + \ldots + \\
&+ F'(\xi_2)(x_2 - x_1) + F'(\xi_1)(x_1 - x_0) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i,
\end{aligned}$$

где $\xi_i \in (x_{i-1}, x_i)$, $i = 1, \ldots, n$. Это означает, что число $F(b) - F(a)$ совпадает со значением одной из *интегральных сумм* функции $f(x)$, связанных с разбиением Δ отрезка $[a, b]$. Так как в силу предложения 1 из § 8

$$\underline{S}_\Delta(f) \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \le \overline{S}_\Delta(f),$$

а по самому определению интеграла Римана (§ 9, определение 1)

$$\underline{S}_\Delta(f) \le \int_a^b f(x)\,dx \le \overline{S}_\Delta(f),$$

то с учетом неравенства $\overline{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \varepsilon$ различие между числами $F(b) - F(a)$ и $\int_a^b f(x)\,dx$ оказывается меньшим произвольно взятого положительного числа ε, иначе говоря, справедлива формула Ньютона–Лейбница (**). Чтобы распространить эту формулу на случай *комплекснозначной* функции $f(x) = u(x) + i\,v(x)$, достаточно (принимая во внимание определение 3 из § 9 и тот факт, что равенство $F'(x)=f(x)$, $x \in [a, b]$, для комплекснозначных функций $F(x) = U(x) + i\,V(x)$ и $f(x) = u(x) + iv(x)$ означает *одновременное* выполнение равенств $U'(x)=u(x)$ и $V'(x)=v(x)$, $x \in [a, b]$) применить формулу (**) отдельно к действительной и мнимой частям функции $f(x)$:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx =$$

$$=(U(b) - U(a)) + i\,(V(b) - V(a)) = F(b) - F(a).$$

Следует отметить, что в формуле (**) в качестве $F(x)$ может быть взята *любая* первообразная функция по отношению к $f(x)$, $x \in [a, b]$, поскольку все первообразные различаются между собой на *постоянные слагаемые* (это было установлено в ходе доказательства теоремы 1).

Как уже отмечалось (§ 9, замечание 2), требования:

а) существования для функции $f(x)$ первообразной функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$ (или, как еще говорят, *неопределенного интеграла* $\int f(x)\,dx = F(x) + C$) и

б) интегрируемости (по Риману) функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (т.е. существование *определенного интеграла* $\int_a^b f(x)\,dx$) – совершенно различны по своей природе, причем ни одно из них не вытекает из другого. Вот простейшие подтверждающие примеры.

1. Характеристическая функция $\chi_{[0,\,1]}(x)$ отрезка $[0, 1]$, интегрируемая (по Риману) на отрезке $[-1, 1]$ (§ 11, предложение 1), не имеет на этом отрезке первообразной функции, так как если бы для некоторой функции $F(x)$ выполнялось соотношение $F'(x) = \chi_{[0,\,1]}(x)$, $x \in [-1, 1]$, то согласно теореме 1

выполнялись бы соотношения $F(x)=C_1$, $-1\le x\le 0$, и $F(x)=$ $=x+C_2$, $0\le x\le 1$, несовместимые с существованием у функции $F(x)$ производной в точке $x=0$. Отсутствие первообразной функции на отрезке $[-1, 1]$ у функции $\chi_{[0,1]}(x)$ на самом деле является лишь частным проявлением следующего общего факта, выводимого из теоремы Лагранжа о конечных приращениях: если функция $f(x)$, $x\in[a, b]$, совпадает с производной $F'(x)$ некоторой функции $F(x)$ на отрезке $[a, b]$, то функция $f(x)$ не может иметь на этом отрезке точек разрыва 1-го рода.

2. Функция

$$F(x)=\begin{cases} x^{\frac{3}{2}}\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\le 1,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

имеет производную $F'(x)$ в любой точке отрезка $[0, 1]$, причем

$$F'(x)=\begin{cases} \dfrac{3}{2}\sqrt{x}\sin\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cos\dfrac{1}{x}, & 0<x\le 1,\\ \lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{F(x)-F(0)}{x}=0, & x=0.\end{cases}$$

Так как функция $F'(x)$ является *неограниченной* на отрезке $[0,1]$, то (с учетом теоремы из § 9) следует вывод: функция $f(x)=$ $=F'(x)$ имеет на отрезке $[0, 1]$ первообразную функцию $F(x)$, но не является интегрируемой (по Риману) на этом отрезке.

Приведенные примеры показывают, что ни одно из условий теоремы 2 не может быть опущено: оба этих условия являются не только достаточными, но и необходимыми для выполнения формулы (**) (известной также под названием *основной формулы интегрального исчисления*).

Теорема 2 допускает следующую перефразировку, часто более удобную для приложений.

Теорема 2$'$. *Если функция $F(x)$ имеют производную $F'(x)$ в* *каждой точке отрезка* $[a, b]$ *(причем значения* $F'(a)$ *и* $F'(b)$ *понимаются соответственно как правая и левая производные), и если функция* $F'(x)$ *интегрируема (по Риману) на отрезке* $[a, b]$, *то*

$$\int_a^b F'(x)\,dx = F(b) - F(a). \qquad (***)$$

По теореме 1 любая *непрерывная* функция на отрезке имеет на этом отрезке первообразную функцию, а по теореме 2 из § 10 любая непрерывная функция на отрезке является интегрируемой на нем (по Риману). Это означает, что для непрерывных функций на отрезке выполняются *оба* условия теоремы 2, а поэтому справедливо следующее утверждение.

Следствие. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$, *то выполняется равенство* (**) , *где в качестве* $F(x)$ *может быть взята любая первообразная функция по отношению к функции* $f(x)$, $x \in [a, b]$ *(эквивалентная формулировка: если функция* $F(x)$ *имеет на отрезке* $[a, b]$ *непрерывную производную, то выполняется равенство* (***)).

З а м е ч а н и е 1. Непрерывность функции $f(x) = F'(x)$ на отрезке $[a, b]$ является (как было отмечено) *достаточным*, но отнюдь *не необходимым* условием справедливости формул (**) и (***). Так, например, функция $f(x) = F'(x)$, где

$$F(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

определена *в каждой точке* отрезка [0, 1], но *не является непрерывной* на этом отрезке, поскольку в силу представления

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}, & 0 < x \le 1, \\ \lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{F(x) - F(0)}{x} = 0, & x = 0 \end{cases}$$

эта функция на отрезке $[0, 1]$ является непрерывной лишь в точках $x \in (0, 1]$, имея в точке $x = 0$ разрыв 2-го рода (предел справа в точке 0 для функции $f(x) = F'(x)$ не существует). Тем не менее формула Ньютона–Лейбница (**) (или, что то же самое, (***)) для функции $f(x) = F'(x)$ на отрезке $[0, 1]$ оказывается справедливой. Это вытекает из теоремы 2 (или $2'$), поскольку функция $f(x) = F'(x)$ имеет на отрезке $[0, 1]$ первообразную функцию $F(x)$ и одновременно (в силу теоремы 1 из § 11) является интегрируемой (по Риману) на отрезке $[0, 1]$, будучи на этом отрезке *ограниченной* (т.к. $|f(x)| \le 3$ для любого $x \in [0, 1]$) и имея на нем *единственную точку разрыва* ($x = 0$).

Замечание 2. С учетом определения 1 из § 15 формулы (**) и (***) сохраняют справедливость и в случае $a < b$ (с заменой в формулировках теорем 2 и $2'$ отрезка $[a, b]$ на отрезок $[b, a]$).

§ 19. Формула интегрирования по частям для интеграла Римана на отрезке

Предложение. *Если функции* $u(x)$ *и* $v(x)$ *имеют на отрезке* $[a, b]$ *производные* $u'(x)$ *и* $v'(x)$, *причем* $u'(x)$, $v'(x) \in \Re[a, b]$ *(последнее условие заведомо выполняется, если обе функции* $u'(x)$ *и* $v'(x)$ *непрерывны на отрезке* $[a, b]$*), то справедлива формула интегрирования по частям*

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x)\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b v(x)\, u'(x)\, dx, \qquad (*)$$

в которой выражение $u(x)\, v(x)\Big|_{x=a}^{b}$ *понимается как* $u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a)$.

Доказательство. Так как по условию производные $u'(x)$ и $v'(x)$ существуют в каждой точке $x \in [a, b]$, обе функции $u(x)$ и $v(x)$ *непрерывны*, а следовательно (в силу теоремы 2 из § 10) *интегрируемы* (по Риману) на отрезке $[a, b]$. Используя теорему 1 из § 14 и теорему 1 из § 12, можно утверждать, что

$$(u(x)\, v(x))' = u'(x)\, v(x) + u(x)\, v'(x) \in \Re[a, b],$$

поэтому (ввиду теоремы 1 из § 12 и теоремы 2′ из § 18) справедливы равенства

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx + \int_a^b v(x)\, u'(x)\, dx = \int_a^b \big(u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x)\big)\, dx =$$

$$= \int_a^b (u(x)\,v(x))'\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a) = u(x)\,v(x)\Big|_{x=a}^{b}.$$

З а м е ч а н и е. Следует обратить внимание на различия между формулой (*) и аналогичной ей формулой интегрирования по частям для *неопределенных интегралов*

$$\int u(x)\,v'(x)\,dx = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,u'(x)\,dx: \qquad (**)$$

1) формула (*) является *числовым равенством*, тогда как формула (**) выражает *совпадение двух множеств функций:* левая часть формулы (**) *по определению неопределенного интеграла* есть совокупность всех тех функций, которые имеют дифференциал, равный $u(x)\,v'(x)\,dx$;

2) формула (**) имеет смысл в предположении лишь *существования* производных $u'(x)$ и $v'(x)$ на некотором промежутке $J \subset \mathbb{R}$, при этом если определена левая часть формулы (**), то определена и правая часть (и наоборот), справедливость же формулы (*) дополнительно требует *интегрируемости* (по Риману) производных $u'(x)$ и $v'(x)$;

3) формула (**) может быть записана в виде

$$\int u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x) - \int v(x)\,du(x)$$

(или, еще короче, $\int u\,dv = uv - \int v\,du$), поскольку существование производной, $v'(x)$ функции $v(x)$ действительного переменного эквивалентно дифференцируемости функции $v(x)$ с выполнением равенства $dv(x) = v'(x)\,dx$; аналогичная же запись формулы (*) в виде

$$\int_a^b u(x)\,dv(x) = u(x)\,v(x)\Big|_{x=a}^{b} - \int_a^b v(x)\,du(x)$$

(тем более в виде $\int_a^b u\,dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$) *в рамках понятия* *интеграла Римана* (т.е. в соответствии с приведенными в § 9 определениями и данными там же обоснованиями обозначения интеграла Римана) является *некорректной,* хотя и нередко используется. Выражения вида $\int\limits_a^b u(x)\,dv(x)$ приобретают истинный смысл лишь при переходе к понятию *интеграла Сти́лтьеса** (точнее, *Ри́мана–Сти́лтьеса*), изложение которого выходит за рамки этих лекций (с ним можно познакомиться, например, по учебнику У. Рудина "Основы математического анализа", М., 1976).

Примером применения формулы (*) может послужить вывод следующего утверждения, обобщающего теорему 1 из § 18.

Теорема. *Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $J\subset\mathbf{R}$, то для любого натурального числа n и произвольно взятой точки $a\in J$ функция*

$$F(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int\limits_a^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt,\quad x\in J,$$

является n-й первообразной по отношению к функции $f(x)$ на промежутке J, т.е. $F^{(n)}(x)=f(x)$, $x\in J$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего следует заметить, что для произвольно взятых точек a, $\bar a\in J$ величина

$$\int\limits_a^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt-\int\limits_{\bar a}^x (x-t)^{n-1}f(t)\,dt=\int\limits_a^{\bar a} (x-t)^{n-1}f(t)\,dt$$

как функция переменного x является *многочленом,* содержащим лишь степени x *не выше* $n-1$ (достаточно в выражении под знаком интеграла в правой части равенства представить сомножитель $(x-t)^{n-1}$ по формуле бинома Ньютона (ИЛМА-1, § 17), после чего, пользуясь свойством линейности интеграла

---

*Стилтьес (Stieltjes), 1856–1894, голл. математик, предложивший обобщение понятия интеграла.

Римана (§ 12), проинтегрировать каждое слагаемое полученной суммы). В силу этого замечания функции $F(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt$, $x \in J$, соответствующие *различным начальным точкам* $a \in J$, различаются между собой на слагаемое, n-я производная которого *заведомо равна нулю*. Это позволяет при выводе соотношения

$$F^{(n)}(x) = \left(\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1} f(t)\,dt\right)^{(n)} = f(x), \quad x \in J,$$

не рассматривать значение $x = a$, ограничиваясь лишь точками $x \in J$, $x \neq a$. В случае $n = 1$, когда $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$, утверждение теоремы совпадает с утверждением теоремы 1 из § 18, поэтому, проводя индукцию по n, остается показать, что из истинности утверждения теоремы для натурального числа n вытекает истинность этого же утверждения и для числа $n + 1$, когда $F(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f(t)\,dt$. Если $x \in J$ и $x > a$, то применение формулы (*) (с предварительной заменой в ней x на t, а b на x) для функций $u(t) = (x-t)^n$ и $v(t) = \int_a^t f(\tau)\,d\tau$, $a \le t \le x$, приводит к соотношениям

$$F(x) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n \left(\int_a^t f(\tau)\,d\tau\right)' dt = \frac{1}{n!}\left\{(x-t)^n \int_a^t f(\tau)\,d\tau\,\Big|_{t=a}^{x} - \right.$$

$$\left. - \int_a^x (-n)\,(x-t)^{(n-1)}\left(\int_a^t f(\tau)\,d\tau\right) dt\right\} = \frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\left(\int_a^t f(\tau)\,d\tau\right) dt;$$

в случае $x \in J$, $x < a$, аналогичные соотношения (учитывающие определение 1 из § 15 и следствие 1 из теоремы 2, § 17) приводят к тому же результату:

$$F(x)=-\frac{1}{n!}\int_x^a (x-t)^n f(t)\,dt=\frac{1}{n!}\int_x^a (x-t)^n\left(\int_t^a f(\tau)\,d\tau\right)' dt=$$

$$=\frac{1}{n!}\left\{(x-t)^n\left(\int_t^a f(\tau)\,d\tau\right)\Bigg|_{t=x}^{a}-\int_x^a(-n)\,(x-t)^{n-1}\left(\int_t^a f(\tau)\,d\tau\right)dt\right\}=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\int_x^a (x-t)^{n-1}\left(\int_t^a f(\tau)\,d\tau\right)dt=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x (x-t)^{n-1}\left(\int_a^t f(\tau)\,d\tau\right)dt.$$

По предположению индукции выражение в правой части является n-й первообразной по отношению к функции $\int_a^x f(\tau)\,d\tau$, $x\in J$ $\left(F^{(n)}(x)=\int_a^x f(\tau)\,d\tau,\quad x\in J\right)$, следовательно $F^{(n+1)}(x)=\left(F^{(n)}(x)\right)'=$

$$=\left(\int_a^x f(\tau)\,d\tau\right)'=f(x),\quad x\in J.$$

§ 20. Замена переменного в интеграле Римана на отрезке

Под *заменой переменного* $x\in X$ понимается задание функции $x=\varphi(t)$ (или $x=x(t)$), $t\in T$, осуществляющей *взаимно-однозначное* соответствие между точками множеств X и T (последнее означает, что каждому элементу $x\in X$ соответствует *единственный* элемент $t\in T$, такой, что $\varphi(t)=x$, иначе говоря, *различным* элементам t_1, t_2 множества T соответствуют *различные* элементы $x_1=\varphi(t_1)$, $x_2=\varphi(t_2)$ множества X). Известно (ИЛМА-1, § 1, п. 1), что выполнение сформулированного условия обеспечивает существование *обратной функции* $t=\varphi^{-1}(x)$ (или $t=t(x)$), $x\in X$, связанной с функцией $x=\varphi(t)$ соотношениями

$$\varphi^{-1}(\varphi(t))=t, \quad t\in T, \quad \text{и} \quad \varphi(\varphi^{-1}(x))=x, \quad x\in X.$$

Основное назначение замены переменного – переход от функций $f(x)$, $x\in X$, к функциям $\tilde{f}(t)=f(\varphi(t))$, $t\in T$, облегчающий (при удачном подборе соответствия $x=\varphi(t)$) изучение свойств функций $f(x)$ и проведение с ними тех или иных операций. Существование обратного соответствия $t=\varphi^{-1}(x)$ позволяет в нужный момент *восстановить* исходную функцию $f(x)$, $x\in X$, по функции $\tilde{f}(t)$, $t\in T$: $\tilde{f}(\varphi^{-1}(x))=f(\varphi(\varphi^{-1}(x)))=$ $=f(x)$, $x\in X$.

В зависимости от специфики конкретных задач к функции $\varphi(t)$, $t\in T$, осуществляющей замену переменного $x\in X$, предъявляют те или иные *дополнительные требования* с тем, чтобы функции $\tilde{f}(t)=f(\varphi(t))$, $t\in T$, наследовали основные свойства исходных функций $f(x)$, $x\in X$. Применительно к задачам анализа функций $f(x)$, заданных на *промежутках* I числовой оси, стандартный набор таких требований включает следующие условия:

а) функция $\varphi(t)$ должна быть *строго монотонной* на некотором *промежутке* $J\subset\mathbb{R}$, и ее значения $x=\varphi(t), t\in J$, должны принадлежать промежутку I (причем концевые точки промежутка I должны соответствовать концевым точкам промежутка J);

б) функция $\varphi(t)$ должна иметь на промежутке J *непрерывную производную* $\varphi'(t)$.

Условие "а" обеспечивает не только взаимную однозначность соответствия между точками $x\in X$ и $t\in T$, но и согласованность порядка следования этих точек. Условие "б" имеет в качестве механической аналогии свойство *непрерывности растяжения* при переходе от промежутка J к промежутку I: в силу *теоремы Лагранжа о конечных приращениях* $x'-x''=\varphi(t')-\varphi(t'')=$ $=\varphi'(\xi)(t'-t'')$, где ξ – некоторая точка, промежуточная между точками t', $t''\in J$, таким образом величина $|\varphi'(\xi)|$ имеет смысл *коэффициента локального растяжения* при соответствии $x=\varphi(t)$; кроме того свойство "б" обеспечивает сохранение при замене переменного свойства дифференцируемости функций $f(x)$, $x\in X$. Иногда условия "а", "б" используются не в полном объеме, в некоторых же случаях, напротив, от функции $\varphi(t)$ дополнительно требуется существование производных $\varphi^{(k)}(t)$ порядка $k>1$.

Существуют два основных утверждения, устанавливающие для интеграла Римана функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]\subset\mathbb{R}$ *формулу замены переменного*

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt; \qquad (***)$$

первое из этих утверждений (теорема 1 этого параграфа, имеющая совсем простое доказательство, основанное на формуле Ньютона–Лейбница), к сожалению, распространяется лишь на *непрерывные* функции $f(x)$, $x\in[a,b]$, но зато позволяет отказаться от предположения о *строгой монотонности* функции $\varphi(t)$ в требовании "а" к замене переменного $x=\varphi(t)$. Напротив, теорема 2 (доказываемая значительно сложнее) применима ко всем *интегрируемым (по Риману)* функциям $f(x)$, $x\in[a,b]$, однако при этом условия "а", "б" на функцию $\varphi(t)$, осуществляющую замену переменного $x=\varphi(t)$, используются в полном объеме.

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, а функция $\varphi(t)$ обладает на отрезке J с концевыми точками α, β свойствами:*

а) $\varphi(t)\in[a,b]$ *для любого* $t\in J$, *причем* $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

б) *существует непрерывная производная* $\varphi'(t)$, $t\in J$, *то справедлива формула замены переменного* (***).

Доказательство. Обе части равенства (***) имеют смысл в силу *непрерывности* как функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, так и функции $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ на отрезке с концами α, β. Согласно теореме 1 из § 18 на отрезке $[a,b]$ определена функция $F(x)$, являющаяся первообразной по отношению к функции $f(x)$, $x \in [a, b]$, т.е. $F'(x) = f(x)$, $x \in [a, b]$; с учетом *формулы производной сложной функции* справедливо равенство $(F(\varphi(t)))' = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$, $t \in J$, иначе говоря, сложная функция $F(\varphi(t))$ является первообразной по отношению к функции $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ на отрезке J (с концевыми точками α, β). Согласно формуле Ньютона–Лейбница (§ 18, следствие из теоремы 2 с учетом замечания 2) как в случае $\alpha < \beta$, так и в случае $\alpha > \beta$ выполняются соотношения

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (F(\varphi(t)))'\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) =$$

$$= F(b) - F(a) = \int_a^b F'(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

З а м е ч а н и е. Отсутствие в формулировке теоремы требования *строгой монотонности* функции $\varphi(t)$, $t \in J$, осуществляющей замену переменного $x \in [a, b]$, приводит к тому, что соответствие $x = \varphi(t)$ между точками $x \in [a, b]$ и $t \in J$ может оказаться *не взаимнооднозначным:* при однократном прохождении точки t вдоль отрезка J от α к β соответствующая точка $x = \varphi(t)$ может *несколько раз* пройти отрезок $[a, b]$ (или какую-то его часть) в противоположных направлениях (n раз от a к b и $n-1$ раз от b к a, рис. 37). Это тем не менее не отражается на справедливости формулы замены переменного (***) ввиду *взаимного сокращения* возникающих "дополнительных" интегралов по тем отрезкам $I \subset [a, b]$, которые проходятся точкой $x = \varphi(t)$ несколько раз в ту и другую сторону.

Пример. При вычислении величины $\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx$ с помощью замены переменного $x = \sin t$ по формуле

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx = \int_\alpha^\beta \sqrt{1 - \sin^2 t}\,(\sin t)'\,dt = \int_\alpha^\beta |\cos t| \cos t\,dt$$

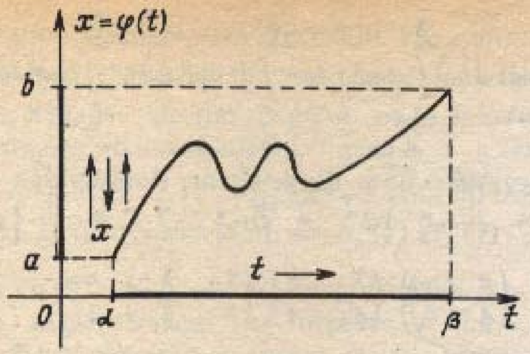


Рис. 37

в качестве α и β можно взять, например:

1) $\alpha=-\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, когда

$$\int_{\alpha}^{\beta}|\cos t|\cos t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\,dt=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2};$$

2) $\alpha=\frac{3}{2}\pi$, $\beta=\frac{\pi}{2}$, когда

$$\int_{\alpha}^{\beta}|\cos t|\cos t\,dt=\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}}(-\cos^2 t)\,dt=-\int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,dt=$$

$$=-\left(\frac{t}{2}+\frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{t=\frac{3}{2}\pi}^{\frac{\pi}{2}}=-\left(\frac{\pi}{4}-\frac{3}{4}\pi\right)=\frac{\pi}{2};$$

3) $\alpha=-\frac{\pi}{2}$, $\beta=\frac{5}{2}\pi$, когда (с учетом свойства аддитивности)

$$\int_{\alpha}^{\beta} |\cos t| \cos t \, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} (-\cos^2 t) \, dt + \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} \cos^2 t \, dt =$$

$$= \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{t=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} - \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{t=\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} + \left(\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right)\Bigg|_{t=\frac{3}{2}\pi}^{\frac{5}{2}\pi} =$$

$$= \left(\frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4}\right)\right) - \left(\frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4}\right) + \left(\frac{5}{4}\pi - \frac{3}{4}\pi\right) = \frac{\pi}{2}$$

(в последнем случае при *однократном* прохождении точки t от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{5}{2}\pi$ точка $x = \sin t$ *трижды* проходит отрезок $[-1, 1]$).

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ интегрируема (по Риману) на отрезке $[a, b]$, а функция $\varphi(t)$ (осуществляющая замену переменного $x \in [a, b]$) обладает на отрезке J с концевыми точками α, β свойствами:*

а) $\varphi(t) \in [a, b]$ *для любого* $t \in J$, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$, *причем функция* $\varphi(t)$ *строго монотонна на отрезке* J,

б) *существует непрерывная производная* $\varphi'(t)$, $t \in J$, *то справедлива формула замены переменного* (***), *т.е.*

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt.$$

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай *действительнозначной* функции $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$, поскольку (в силу определения 3 из § 9) равенство (***) для *комплексно-значной* функции $f(x) = u(x) + i\,v(x)$ эквивалентно системе равенств

$$\int_a^b u(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} u(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt, \qquad \int_a^b v(x) \, dx = \int_{\alpha}^{\beta} v(\varphi(t)) \, \varphi'(t) \, dt.$$

Составной частью вывода формулы (***) является доказательство интегрируемости (по Риману) функции $f(\varphi(t)) \, \varphi'(t)$ на отрезке J (при условии, что $f(x) \in \Re[a, b]$, а функция $\varphi(t)$, $t \in J$, обладает свойствами "а", "б" формулировки теоремы). Поскольку $f(x) \in \Re[a, b]$, то (по теореме из § 9) $|f(x)| \le h, x \in [a, b]$, для некоторого положительного числа h, а в силу теоремы 1 из § 10 для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ отрезка $[a, b]$, что $\bar{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \frac{\varepsilon}{3}$. Предполагая функцию $\varphi(t)$, $t \in J$, (удовлетворяющую "а" и "б" условия теоремы) *возрастающей* на отрезке J (случай убывающей функции будет рассмотрен ниже), можно утверждать, что $\alpha < \beta$ (следовательно $J = [\alpha, \beta]$) и что $\varphi'(t) \ge 0$ для любого $t \in [\alpha, \beta]$. По теореме Кантора (§ 4) функция $\varphi'(t)$ *равномерно непрерывна* на отрезке $J = [\alpha, \beta]$, поэтому для положительного числа $\frac{\varepsilon}{3h(\beta - \alpha)}$ существует такое (зависящее от ε) положительное число δ, что условия t_1, $t_2 \in [\alpha, \beta]$ и $|t_1 - t_2| < \delta$ влекут выполнение неравенства $|\varphi'(t_1) - \varphi'(t_2)| < \frac{\varepsilon}{3h(\beta - \alpha)}$. Так как соответствие $x = \varphi(t)$ между точками $x \in [a, b]$ и $t \in [\alpha, \beta]$ является *взаимно-однозначным*, разбиение $\Delta = \Delta(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ отрезка $[a, b]$ определяет разбиение $\tilde{\Delta} = \tilde{\Delta}(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ отрезка $[\alpha, \beta]$ ($x_i = \varphi(t_i)$, или, что то же самое, $t_i = \varphi^{-1}(t_i)$, $i = 1, \ldots, n$; рис. 38). Можно считать,

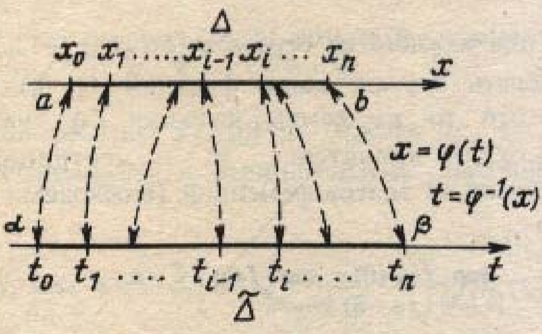


Рис. 38

проводя в случае необходимости дополнительное измельчение разбиения $\tilde{\Delta}$, что $\Delta t_i = t_i - t_{i-1} < \delta$, $i = 1, \ldots, n$.

Следует учесть, что измельчение разбиения $\tilde{\Delta}$ отрезка $[\alpha, \beta]$ приводит к измельчению соответствующего ему разбиения Δ отрезка $[a, b]$, что (в силу предложения 4 из § 8) может лишь усилить неравенство $\bar{S}_\Delta(f) - \underline{S}_\Delta(f) < \frac{\varepsilon}{3}$, которое с учетом теоремы Лагранжа о конечных приращениях приобретает вид

$$\sum_{i=1}^{n} (\bar{y}_i - \underline{y}_i)\,\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (\bar{y}_i - \underline{y}_i)\,\varphi'(\tau_i)\,\Delta t_i < \frac{\varepsilon}{3},$$

где, как обычно,

$$\bar{y}_i = \sup_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x), \qquad \underline{y}_i = \inf_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x), \qquad i = 1, \ldots, n,$$

а τ_i – некоторая точка, промежуточная между t_{i-1} и t_i, $i = 1, \ldots, n$. Остается оценить значения верхней и нижней сумм Дарбу

$$\bar{S}_{\tilde{\Delta}}(f(\varphi)\,\varphi') = \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i\,\Delta t_i, \qquad \underline{S}_{\tilde{\Delta}}(f(\varphi)\,\varphi') = \sum_{i=1}^{n} \underline{z}_i\,\Delta t_i,$$

где

$$\bar{z}_i = \sup_{[t_{i-1},\, t_i]} \big(f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\big), \qquad \underline{z}_i = \inf_{[t_{i-1},\, t_i]} \big(f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\big), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

С этой целью для каждого из отрезков $[t_{i-1}, t_i]$, $i = 1, \ldots, n$, надо отдельно разобрать случаи, когда функция $f(\varphi(t))$ на этом отрезке (или, что то же самое, функция $f(x)$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i] = [\varphi(t_{i-1}), \varphi(t_i)]$) является: а) неотрицательной, б) неположительной, в) знакопеременной. Необходимо при этом учитывать, что

$$\sup_{[t_{i-1},\, t_i]} f(\varphi(t)) = \sup_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x) = \bar{y}_i \le h,$$

$$\inf_{[t_{i-1},\, t_i]} f(\varphi(t)) = \inf_{[x_{i-1},\, x_i]} f(x) = \underline{y}_i \ge -h,$$

$$\left|\varphi'(t)-\varphi'(\tau_i)\right| < \frac{\varepsilon}{3h(\beta-\alpha)}, \qquad t\in\left[t_{i-1},\, t_i\right],$$

а следовательно

$$\varphi'(\tau_i) \le \max_{[t_{i-1},\, t_i]} \varphi'(t) < \varphi'(\tau_i) + \frac{\varepsilon}{3h(\beta-\alpha)},$$

$$\varphi'(\tau_i) \ge \min_{[t_{i-1},\, t_i]} \varphi'(t) > \varphi'(\tau_i) - \frac{\varepsilon}{3h(\beta-\alpha)}.$$

а) Если $f(\varphi(t)) \ge 0$, $t\in\left[t_{i-1},\, t_i\right]$, то $\overline{y}_i \ge \underline{y}_i \ge 0$, поэтому

$$\overline{z}_i = \sup_{[t_{i-1},\, t_i]} \left(f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\right) \le \sup_{[x_{i-1},\, x_i]} f(\varphi(t)) \max_{[t_{i-1},\, t_i]} \varphi'(t) <$$

$$< \overline{y}_i\left(\varphi'(\tau_i) + \frac{\varepsilon}{3h(\beta-\alpha)}\right) \le \overline{y}_i\,\varphi'(\tau_i) + \frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)},$$

$$\underline{z}_i = \inf_{[t_{i-1},\, t_i]} \left(f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\right) \ge \inf_{[t_{i-1},\, t_i]} f(\varphi(t)) \min_{[t_{i-1},\, t_i]} \varphi'(t) >$$

$$> \underline{y}_i\left(\varphi'(\tau_i) - \frac{\varepsilon}{3h(\beta-\alpha)}\right) \ge \underline{y}_i\,\varphi'(\tau_i) - \frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)};$$

б) если $f(\varphi(t)) \le 0$, $t\in\left[t_{i-1},\, t_i\right]$, то $\underline{y}_i \le \overline{y}_i \le 0$, поэтому

$$\overline{z}_i = \sup_{[t_{i-1},\, t_i]} f(\varphi(t)) \min_{[t_{i-1},\, t_i]} \varphi'(t) \le \overline{y}_i\ \varphi'(\tau_i),$$

$$\underline{z}_i = \inf_{[t_{i-1},\, t_i]} f(\varphi(t)) \max_{[t_{i-1},\, t_i]} \varphi'(t) \ge \underline{y}_i\ \varphi'(\tau_i);$$

в) если функция $f(\varphi(t))$ на отрезке $\left[t_{i-1},\, t_i\right]$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то $\underline{y}_i < 0 < \overline{y}_i$, поэтому

$$\overline{z}_i \le \overline{y}_i \max_{[t_{i-1},\, t_i]} \varphi'(t) < \overline{y}_i\left(\varphi'(\tau_i) + \frac{\varepsilon}{3h(\beta-\alpha)}\right) < \overline{y}_i\,\varphi'(\tau_i) + \frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)},$$

$$\underline{z}_i \geq \underline{y}_i \max_{[t_{i-1}, t_i]} \varphi'(t) > \underline{y}_i \left(\varphi'(\tau_i) + \frac{\varepsilon}{3h(\beta-\alpha)}\right) > \underline{y}_i \varphi'(\tau_i) + \frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)}.$$

Поскольку в каждом из разобранных случаев выполняются неравенства

$$\underline{y}_i \varphi'(\tau_i) - \frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)} < \underline{z}_i \leq \overline{z}_i < \overline{y}_i \varphi'(\tau_i) + \frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)},$$

то

$$\overline{S}_{\tilde{\Delta}}(f(\varphi)\varphi') = \sum_{i=1}^{n} \overline{z}_i \Delta t_i < \sum_{i=1}^{n} \left(\overline{y}_i \varphi'(\tau_i) + \frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)}\right) \Delta t_i = \overline{S}_{\Delta}(f) + \frac{\varepsilon}{3},$$

$$\underline{S}_{\tilde{\Delta}}(f(\varphi)\varphi') = \sum_{i=1}^{n} \underline{z}_i \Delta t_i > \sum_{i=1}^{n} \left(y_i \varphi'(\tau_i) + \frac{\varepsilon}{3(\beta-\alpha)}\right) \Delta t_i = \underline{S}_{\Delta}(f) - \frac{\varepsilon}{3}$$

и, окончательно,

$$\underline{S}_{\Delta}(f) - \frac{\varepsilon}{3} < \underline{S}_{\tilde{\Delta}}(f(\varphi)\varphi') \leq \overline{S}_{\tilde{\Delta}}(f(\varphi)\varphi') < \overline{S}_{\Delta}(f) + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Ввиду неравенства $\overline{S}_{\Delta}(f) - \underline{S}_{\Delta}(f) < \frac{\varepsilon}{3}$ отсюда следует, во-первых, что $\overline{S}_{\tilde{\Delta}}(f(\varphi)\varphi') - \underline{S}_{\tilde{\Delta}}(f(\varphi)\varphi') < \varepsilon$, а следовательно (в силу теоремы 1 из § 10) $f(\varphi(t))\varphi'(t) \in \Re[\alpha, \beta]$, и, во-вторых, что числа $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$ различаются между собой меньше, чем на (сколь угодно малое) число $\varepsilon > 0$, т.е. справедлива формула (***). Вывод этой формулы в случае *убывающей* функции $\varphi(t)$ на отрезке J (когда $J = [\beta, \alpha]$) можно провести либо путем практически дословного повторения предыдущих рассуждений (необходимые изменения связаны с тем, что на этот раз $\varphi'(t) \leq 0$ для любого $t \in J = [\beta, \alpha]$), либо основываясь на следующих двух наблюдениях:

1) условия $f(x) \in \Re[a, b]$ и $f(-x) \in \Re[-b, -a]$ эквивалентны, и $\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx$; для доказательства достаточно заме-

что каково бы ни было разбиение $\Delta = \Delta(x_0, x_1, ..., x_n)$ отрезка $[a, b]$, разбиение $\bar{\Delta} = \bar{\Delta}(\bar{x}_0, \bar{x}_1, ..., \bar{x}_n)$ отрезка $[-b, -a]$, образованное точками $\bar{x}_i = -x_{n-i}$, $i = 1, ..., n$, обладает тем свойством, что $\bar{S}_{\bar{\Delta}}(\bar{f}) = \bar{S}_{\Delta}(f)$, $\underline{S}_{\bar{\Delta}}(\bar{f}) = \underline{S}_{\Delta}(f)$, $\bar{f}(x) = f(-x)$ (рис. 39);

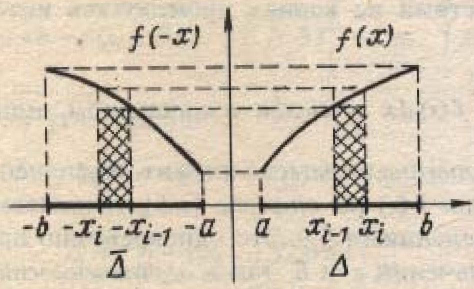


Рис. 39

2) если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условиям "а", "б" формулировки теоремы и является *убывающей* на отрезке J (в этом случае $J = [\beta, \alpha]$), то функция $\bar{\varphi}(t) = -\varphi(t)$ также обладает свойствами "а", "б" (с заменой в них отрезка $[a, b]$ на $[-b, -a]$ и условий $\varphi(\alpha) = a$ и $\varphi(\beta) = b$ на $\bar{\varphi}(\alpha) = -a$ и $\bar{\varphi}(\beta) = -b$) и является *возрастающей* на отрезке $J = [\beta, \alpha]$.

Объединяя два этих наблюдения и используя установленную выше справедливость формулы (***) для *возрастающих* функций $\bar{\varphi}(t)$, можно прийти к соотношению:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_\beta^\alpha f(-\bar{\varphi}(t))\,\bar{\varphi}'(t)\,dt =$$

$$= \int_\beta^\alpha f(\varphi(t))(-\varphi(t))'\,dt = -\int_\beta^\alpha f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt.$$

Формула замены переменного (***) установлена, таким образом, во всех случаях, предусмотренных условиями теоремы.

§ 21. Определение несобственных интегралов Римана с особенностями на концах промежутков интегрирования

Символ $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в своем изначальном, или, как принято говорить, *собственном* смысле служит обозначением *интеграла Римана функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$, понимаемого в соответствии с определениями § 9. Это одновременно предполагает как *конечность* значений a и b, так и *ограниченность* функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$: если хотя бы одно из чисел a или b *бесконечно,* то утрачивают смысл понятия сумм Дарбу (и интегральных сумм), на которых строится определение интеграла Римана $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, если же функция $f(x)$ *не ограничена* на отрезке $[a, b]$, то интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ не существует по теореме из § 9. Стремление распространить действие символа $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (как интеграла Римана) на важные для приложений случаи:

а) *бесконечных* значений a и b,

б) функций $f(x)$, *не ограниченных* на промежутке от a до b, приводит к выходящему за рамки определений § 9 понятию *несобственных интегралов Римана* путем придания символу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ так называемого *несобственного смысла.*

Идея определения несобственных интегралов Римана базируется на установленных в § 17 свойствах интегралов с переменными пределами интегрирования, точнее, на свойствах, сформулированных в виде следствия 2 из теоремы 1. Согласно этому утверждению, если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на отрезке $[a, b]$ $(f(x) \in \Re[a, b])$, то выполняются утверждения

$$\mathbf{A} = \forall \alpha\,(a < \alpha < b \to f(x) \in \Re[\alpha, b]) \wedge \exists I \left(I = \lim_{\alpha \to a+0} \int_{\alpha}^{b} f(x)\,dx \right),$$

$$\mathbf{B} = \forall \beta\,(a < \beta < b \to f(x) \in \Re[a, \beta]) \wedge \exists I \left(I = \lim_{\beta \to b-0} \int_{a}^{\beta} f(x)\,dx \right),$$

и (как следствие) утверждение

$$\mathbf{C} = \forall \alpha\, \forall \beta (a < \alpha < \beta < b \to f(x) \in \Re[\alpha, \beta]) \wedge$$

$$\wedge \exists I \left(I = \lim_{\substack{\alpha \to a+0 \\ \beta \to b-0}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \right).$$

В каждом из этих утверждений $I = \int_{a}^{b} f(x)\,dx$ (иначе говоря, роль числа I выполняет *интеграл Римана функции* $f(x)$ *на отрезке* $[a, b]$), а соотношение $I = \lim\limits_{\substack{\alpha \to a+0 \\ \beta \to b-0}} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$ в утверждении **C** означает, что

$$I = \lim_{\alpha \to a+0} \left(\lim_{\beta \to b-0} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \right) = \lim_{\beta \to b-0} \left(\lim_{\alpha \to a+0} \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \right) =$$

$$= \lim_{\alpha \to a+0} \int_{\alpha}^{c} f(x)\,dx + \lim_{\beta \to b-0} \int_{c}^{\beta} f(x)\,dx,$$

где c – произвольно взятая точка интервала (a, b). Последнее вытекает из установленного в § 15 *свойства аддитивности* интеграла Римана, примененного к точкам α, β, $c \in (a, b)$.

Следует еще раз подчеркнуть, что условие $f(x) \in \Re[a, b]$

(означающее существование числа $\int_a^b f(x)\,dx$ как интеграла Римана *в собственном смысле*) обеспечивает выполнение *всех трех* вышеприведенных утверждений **A**, **B**, **C** (в каждом из которых $I = \int_a^b f(x)\,dx$). Не исключено, однако, что *какое-то* из утверждений **A**, **B**, **C** может оказаться истинным даже если $f(x) \notin \mathfrak{R}[a, b]$, т.е. если величина $\int_a^b f(x)\,dx$ как интеграл Римана в смысле определений § 9 *не существует;* в этом случае число I, для которого верно *какое-то* из равенств

$$I = \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b f(x)\,dx, \qquad I = \lim_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\,dx, \qquad I = \lim_{\substack{\alpha \to a+0 \\ \beta \to b-0}} \int_\alpha^\beta f(x)\,dx,$$

и принимают за значение *несобственного интеграла Римана функции* $f(x)$ *на промежутке от* a *до* b с сохранением прежнего обозначения $I = \int_a^b f(x)\,dx$, в котором уже *допустимы значения* $a = -\infty$ и $b = +\infty$, равно как и *неограниченность* функции $f(x)$ при стремлении x к a и b (соответственно справа и слева). Следует еще раз подчеркнуть, что и то, и другое исключено, если символ $\int_a^b f(x)\,dx$ трактовать как интеграл Римана *в собственном смысле*

Примеры. 1. Функция $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, непрерывная на всей числовой оси, интегрируема по Риману на любом отрезке $[\alpha, \beta] \subset (-\infty, +\infty)$, и

$$\lim_{\substack{\alpha \to -\infty \\ \beta \to +\infty}} \int_\alpha^\beta \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{\alpha \to -\infty \\ \beta \to +\infty}} \left(\operatorname{arctg} x \Big|_{x=\alpha}^{\beta}\right) =$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} \operatorname{arctg} \beta - \lim_{\alpha \to -\infty} \operatorname{arctg} \alpha = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi,$$

таким образом для этой функции и значений $a = -\infty$ и $b = +\infty$ истинным оказывается утверждение С. В соответствии с только что принятым соглашением имеет место равенство $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi$, в котором левая часть понимается как *несобственный интеграл Римана* функции $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ на промежутке $(-\infty, +\infty)$ (рис. 40).

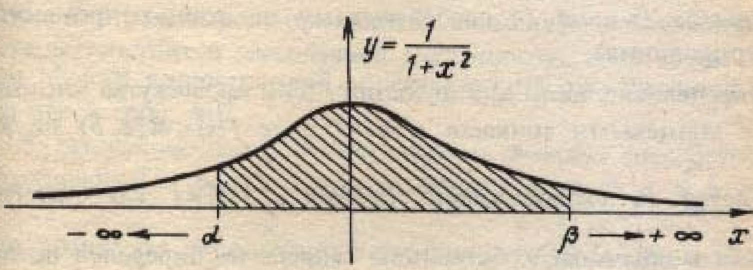


Рис. 40

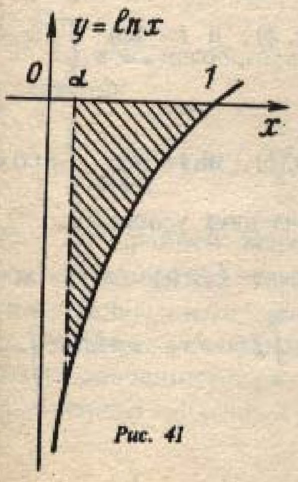


Рис. 41

2. Для функции $f(x) = \ln x$, непрерывной при $x > 0$ и имеющей *бесконечный* предел при $x \to 0+0$, величина $\int\limits_0^1 \ln x \, dx$ как *интеграл Римана в собственном смысле* не существует. Тем не менее $\ln x \in \in \mathfrak{R}[\alpha, 1]$ для любого $\alpha \in (0, 1)$, и

$$\lim_{\alpha \to 0+0} \int\limits_{\alpha}^{1} \ln x \, dx =$$

$$= \lim_{\alpha \to 0+0} \left(x \ln x \Big|_{x=\alpha}^{1} - \int_{\alpha}^{1} x \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{\alpha \to 0+0} (-\alpha \ln \alpha - (1-\alpha)) = -1$$

(была использована формула интегрирования по частям для функций $u(x) = \ln x$ и $v(x) = x$ на отрезке $[\alpha, 1]$). Это означает, что для функции $f(x) = \ln x$ и значений $a = 0$ и $b = 1$ выполняется утверждение A, так что в соответствии с принятым выше соглашением символ $\int_0^1 \ln x\, dx$ определен как *несобственный интеграл Римана*, и его значение равно -1 (рис. 41).

Предшествующие рассуждения этого параграфа можно резюмировать в виде следующего определения *несобственных интегралов Римана* (с особенностями на концах промежутка интегрирования).

Определение. Если для функции $f(x)$ и промежутка числовой оси с концевыми точками a, b условие $f(x) \in \mathfrak{R}[a, b]$ не выполняется (а следовательно символ $\int_a^b f(x)\, dx$ как интеграл Римана в обычном, собственном смысле не определен но при этом существует такое действительное или комплексное число I, что либо

1) $f(x) \in \mathfrak{R}[\alpha, b]$ при любом $\alpha \in (a, b)$, и $I = \lim\limits_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^b f(x)\, dx$,

либо

2) $f(x) \in \mathfrak{R}[a, \beta]$ при любом $\beta \in (a, b)$, и $I = \lim\limits_{\beta \to b-0} \int_a^\beta f(x)\, dx$,

либо (при невыполнении ни одного из двух условий)

3) $f(x) \in \mathfrak{R}[\alpha, \beta]$ для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, и $I =$

$$= \lim_{\substack{\alpha \to a+0 \\ \beta \to b-0}} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \left(= \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^c f(x)\, dx + \lim_{\beta \to b-0} \int_c^\beta f(x)\, dx, \quad c \in (a, b) \right),$$

(то функцию $f(x)$ называют *интегрируемой по Риману в несобственном смысле* на промежутке от a до b, а число I принимают за значение *несобственного интеграла Римана* $\int_a^b f(x)\,dx$ (с особенностями соответственно в *левой, правой* и в *обеих концевых точках* этого промежутка).

Замечание 1. Данное определение несобственных интегралов одновременно охватывает случаи:

а) *неограниченных промежутков интегрирования* (несобственных интегралов *1-го рода*), когда особенность точек a и b по отношению к символу $\int_a^b f(x)\,dx$ (иначе говоря, причина, по которой этот символ приходится понимать в несобственном смысле) состоит в *бесконечной удаленности* этих точек (одной или обеих); иллюстрацией может служить разобранный выше пример 1 (рис. 40);

б) *неограниченных подынтегральных функций* (несобственных интегралов *2-го рода*), когда особенность точек a и b (одной или обеих) по отношению к символу $\int_a^b f(x)\,dx$ проявляется в том, что в любой их окрестности функция $f(x)$ принимает сколь угодно большие (по модулю) значения (пример 2, рис. 41).

В случае несобственных интегралов *1-го рода* само их обозначение

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx, \quad \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx \quad (c\in\mathbb{R}), \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$$

(когда по крайней мере один из пределов интегрирования равен $\pm\infty$) свидетельствует о том, что речь идет исключительно об интегралах в *несобственном смысле*. Напротив, обозначение несобственных интегралов *2-го рода* внешне ничем не отличается от обозначения обычных интегралов Римана (т.е. интегралов в собственном смысле). Так, например, первый из двух символов

$$\int_0^1 \ln x\, dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 x \ln x\, dx$$

ввиду *неограниченности* подынтегральной функции можно трактовать лишь как *несобственный интеграл* (пример 2), второй же является *обычным интегралом Римана:* функция $f(x) = x \ln x$, $x \in (0, 1]$, после *доопределения* $f(0) = 0$ становится непрерывной, а следовательно интегрируемой по Риману на отрезке $[0, 1]$, поэтому (с учетом *соглашения,* принятого в § 13) $x \ln x \in \mathfrak{R}[0, 1]$.

З а м е ч а н и е 2. Ввиду свойства аддитивности интеграла Римана соотношение

$$I = \lim_{\substack{\alpha \to a+0 \\ \beta \to b-0}} \int_\alpha^\beta f(x)\, dx$$

равносильно тому, что

$$I = \lim_{\alpha \to a+0} \int_\alpha^c f(x)\, dx + \lim_{\beta \to b-0} \int_c^\beta f(x)\, dx,$$

когда c – произвольно взятая точка, промежуточная между a и b. Это означает, что символ $\int_a^b f(x)\, dx$ определен как несобственный интеграл Римана с особенностями в *обеих* концевых точках промежутка интегрирования в том и только в том случае, когда для произвольно взятой точки $c \in (a, b)$ определены *оба* символа $\int_a^c f(x)\, dx$ и $\int_c^b f(x)\, dx$, первый из которых имеет особенность только в точке a, а второй – только в точке b. При этом выполняется соотношение

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^c f(x)\, dx + \int_c^b f(x)\, dx, \tag{*}$$

справедливое также, если исходный несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ имеет особенность лишь в *одной* из точек a или b; в последнем случае из двух слагаемых в правой части равенства (*) только одно является несобственным интегралом, второе же определено как *обычный* интеграл Римана на отрезке. Отмеченный факт будет играть существенную роль в дальнейшем, поскольку, с одной стороны, он дает распространение *свойства аддитивности* (§ 15) на несобственные интегралы, а с другой – позволяет при изучении разнообразных вопросов, связанных с определением и условиями существования несобственных интегралов, ограничиться случаем, когда в качестве особой выступает лишь *одна* из концевых точек промежутка интегрирования.

З а м е ч а н и е 3. При определении несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с особенностью (к примеру) в точке b требование интегрируемости по Риману (в обычном смысле) функции $f(x)$ на любом отрезке $[a, \beta]$, $\beta \in (a, b)$, является необходимым *предварительным условием* существования рассматриваемого несобственного интеграла. Лишь при выполнении этого требования можно ставить вопрос о существовании конечного предела выражения $\int_a^\beta f(x)\,dx$ при $\beta \to b-0$ (или $\beta \to +\infty$, если $b = +\infty$), т.е., как принято говорить, о *сходимости* несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$. Если условие сходимости не выполнено (т.е. если величина $\int_a^\beta f(x)\,dx$ либо *не имеет никакого* предела при $\beta \to b-0$, либо этот предел оказывается *бесконечным*), то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ *расходится* (или является *расходящимся*) и его значение *не определено* (в случае, если $\lim_{\beta\to b-0}\int_a^\beta f(x)\,dx=\pm\infty$, иногда уточняют, что данный интеграл *расходится* к $\pm\infty$, обозначая этот факт равенством $\int_a^b f(x)\,dx=\pm\infty$). Например:

1) предварительное условие существования несобственного интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}dx$ – а в данном случае это интегрируемость по Риману (в собственном смысле) функции $f(x)=\frac{x}{x^2+1}$ *на любом отрезке* $[\alpha,\ \beta]\subset(-\infty,\ +\infty)$ – заведомо выполняется ввиду *непрерывности* этой функции *на всей числовой оси*, условие же сходимости, напротив, оказывается невыполненным, так как соотношение $\lim\limits_{\substack{\alpha\to-\infty\\ \beta\to+\infty}}\int_\alpha^\beta\frac{x}{x^2+1}dx=I$ не имеет места ни для конечного, ни для бесконечного числа I: достаточно заметить, что при стремлении α к $-\infty$, а β к $+\infty$ величина $\frac{\beta^2+1}{\alpha^2+1}$ может принимать значения как большие e^2, так и меньшие $\frac{1}{e^2}$, а следовательно величина

$$\int_\alpha^\beta\frac{x}{x^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_{x=\alpha}^{\beta}=\frac{1}{2}\ln\frac{\beta^2+1}{\alpha^2+1}$$

– значения как большие 1, так и меньшие – 1; таким образом, несобственный интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}dx$ является *расходящимся*, его значение *не определено;*

2) поскольку

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_0^{\beta}\frac{x}{x^2+1}\,dx=\lim_{\beta\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(\beta^2+1)=+\infty,$$

$\int\limits_0^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}\,dx=+\infty$, данный несобственный интеграл *расходится* к $+\infty$.

З а м е ч а н и е 4. Термин "несобственный интеграл 2-го рода" по отношению к символу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ с *конечными* точками a и b применим также в тех случаях, когда особенности данных точек по отношению к символу $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ проявляются в том, что каждый интервал $(a, a+\delta)$ или $(b-\delta, b)$, $\delta>0$, содержит *бесконечно много* значений x, *не принадлежащих области определения функции* $f(x)$, тогда как на любом отрезке $[\alpha, \beta]\subset(a, b)$ находится лишь *конечное* число таких значений. Как отмечалось в § 13, условие $f(x)\in\Re[a, b]$ в этом случае заведомо не выполняется, т.е. интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ в обычном (собственном) смысле не определен, однако при этом не исключено выполнение условия $f(x)\in\Re[\alpha, \beta]$ *для любого отрезка* $[\alpha, \beta]\subset(a, b)$, иначе говоря, *предварительного условия* существования несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, что само по себе позволяет ставить вопрос о *сходимости* этого интеграла, т.е. об интерпретации символа $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ как интеграла Римана *в несобственном смысле*. Иллюстрацией может служить уже обсуждавшийся в § 13 пример функции $f(x)=\dfrac{\sin\frac{\pi}{x}}{\sin\frac{\pi}{x}}$ на промежутке от 0 до 1: интеграл Римана $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin\frac{\pi}{x}}{\sin\frac{\pi}{x}}\,dx$ в обычном смысле не существует, но $\int\limits_\alpha^1 \dfrac{\sin\frac{\pi}{x}}{\sin\frac{\pi}{x}}\,dx=1-\alpha$ для любого $\alpha\in(0,1)$, поэтому *в несобственном смысле*

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\sin\frac{\pi}{x}}\,dx=\lim_{\alpha\to 0+0}\int\limits_\alpha^1 \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\sin\frac{\pi}{x}}\,dx=\lim_{\alpha\to 0+0}(1-\alpha)=1.$$

§ 22. Определение несобственных интегралов Римана с особенностями внутри промежутков интегрирования. Понятие главного значения расходящегося несобственного интеграла

Несобственными интегралами с особенностями *на концах* промежутков интегрирования отнюдь не исчерпывается все множество объектов, объединенных термином "несобственные интегралы" (даже если не выходить за рамки функций одного действительного переменного). Необозримое число задач как самого математического анализа, так и особенно его приложений приводит к интегралам (на ограниченных и неограниченных промежутках), требующим особого определения из-за наличия у подынтегральных функций особенностей *внутри* промежутков интегрирования (уточнение понятия особенности будет дано ниже). Следующее определение несобственных интегралов функций одного действительного переменного (опирающееся на определение предыдущего параграфа и одновременно являющееся его обобщением) допускает существование у подынтегральных функций особенностей не только в концевых, но также и в любом конечном числе внутренних точек прмежутков интегрирования, причем сами эти промежутки могут быть как ограниченными так и неограниченными.

Определение. Если для функции $f(x)$ и промежутка числовой оси с концевыми точками a, b (конечными или бесконечными) символ $\int_a^b f(x)\,dx$ как обычный интеграл Римана (т.е. в собственном смысле) не определен, но существует конечная система точек $\{c_0, c_1, \ldots, c_k\}$ с выполнением условий:

1) $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_{k-1} < c_k = b$,

2) каждая величина $\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx$, $i = 1, \ldots, k$, определена либо как обычный интеграл Римана на отрезке $[c_{i-1}, c_i]$, либо как несобственный интеграл Римана на промежутке от c_{i-1} до c_i с особенностями в одной или обеих этих точках (в соответствии с определением § 21), то говорят, что символ $\int_a^b f(x)\,dx$ определен (или существует) как *несобственный интеграл Римана* функции $f(x)$ на промежутке от a до b, (или что $\int_a^b f(x)\,dx$ есть *сходящийся несобственный интеграл*); его значение определяется равенством

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{c_0}^{c_1} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx. \qquad (**)$$

З а м е ч а н и е. Как следует из самого определения, система точек $\{c_0, c_1, \ldots, c_k\}$ со свойствами 1, 2 должна содержать как *обе концевые*, так и все те *внутренние* точки промежутка интегрирования, в которых подынтегральная функция имеет *особенность,* иначе говоря, все те точки $c \in (a, b)$, в любой окрестности которых либо

а) функция $f(x)$ является *неограниченной,* либо

б) в них содержится *бесконечно много* значений x, *не принадлежащих области определения* функции $f(x)$.

Сходимость несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ по определению равносильна сходимости *каждого* составляющего несобственного интеграла $\int_{c_{i-1}}^{c_i} f(x)\,dx$ в правой части соотношения (**), (напротив, его *расходимость* – расходимости *хотя бы одного* из этих составляющих) в смысле определения, данного в § 21. Следует, однако, иметь в виду, что система $\{c_0, c_1, \dots, c_k\}$ помимо необходимо принадлежащих ей *обеих концевых* и *всех внутренних особых* точек промежутка интегрирования может включать в себя также любое *конечное* число других точек этого промежутка, не являющихся особыми по отношению к символу $\int_a^b f(x)\,dx$. При исследовании сходимости некоторых несобственных интегралов такое расширение системы $\{c_0, c_1, \dots, c_k\}$ оказывается даже удобным, поскольку все сводится к исследованию сходимости несобственных интегралов, имеющих особенность только *в одной из концевых точек* промежутка интегрирования. Необходимо, однако, убедиться, что данное выше определение несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ *не зависит от выбора системы точек* $\{c_0, c_1, \dots, c_k\}$ со свойствами 1, 2. Для этого, взяв любую другую систему $\{c_0', c_1', \dots, c_m'\}$ с такими же свойствами, достаточно перенумеровать в порядке возрастания точки *объединения* множеств $\{c_0, c_1, \dots, c_k\}$ и $\{c_0', c_1', \dots, c_m'\}$, получив в результате этого *новую* систему $\{c_0'', c_1'', \dots, c_n''\}$ (рис. 42), которая, как следует из комментария к определению

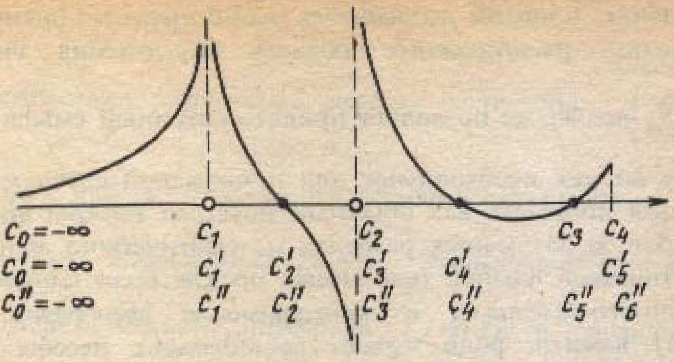


Рис. 42

§ 21, также обладает свойствами 1, 2. Остается воспользоваться *свойством аддитивности* (справедливым, как уже отмечалось в § 21, не только для обычных интегралов Римана, но и для несобственных интегралов с особенностями в концевых точках промежутков интегрирования), чтобы придти к равенствам

$$\int_{c_0}^{c_1} f(x)\,dx+\ldots+\int_{c_{k-1}}^{c_k} f(x)\,dx=\int_{c_0''}^{c_1''} f(x)\,dx+\ldots+\int_{c_{n-1}''}^{c_n''} f(x)\,dx=$$

$$=\int_{c_0'}^{c_1'} f(x)\,dx+\ldots+\int_{c_{m-1}'}^{c_m'} f(x)\,dx.$$

С одной стороны, эти равенства свидетельствуют о *независимости* выражения в правой части равенства (**) (а следовательно и данного определения несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$) от выбора *конкретной системы точек* $\{c_0, c_1,\ldots, c_k\}$ со свойствами 1 и 2, а с другой – о распространении *свойства аддитивности* на все несобственные интегралы (а не только на несобственные интегралы с особенностями в концевых точках промежутков интегрирования, о чем говорилось в § 21).

Введение понятия *сходящегося несобственного интеграла*, существенно расширяющее область определения символа $\int_a^b f(x)\,dx$, все же не позволяет придать разумный смысл этому символу во *всех* необходимых для приложений случаях, когда его нельзя понимать как обычный интеграл Римана функции на отрезке. В различных разделах математического анализа и математической физики (связанных прежде всего с *интегральными представлениями* и *интегральными преобразованиями функций*) важную роль играют *расходящиеся* несобственные интегралы $\int_a^b f(x)\,dx$, допускающие, однако, интерпретацию (или, как еще говорят, существующие) *в смысле главного значения*, или *в смысле Коши*. Речь идет о несобственных интегралах $\int_a^b f(x)\,dx$, где $-\infty \le a < b \le +\infty$, со следующим характером особенности функции $f(x)$ во *внутренней* точке c промежутка от a до b (или в *бесконечности*, если одновременно $a = -\infty$ и $b = +\infty$):

а) особенность в точке $c \in (a, b)$ (соответственно в бесконечности) явояется *неинтегрируемой* в том смысле, что при любом выборе значений α и β, $a \le \alpha < c < \beta \le b$, *оба символа* $\int_\alpha^c f(x)\,dx$ и $\int_c^\beta f(x)\,dx$ (соответственно оба символа $\int_{-\infty}^\alpha f(x)\,dx$ и $\int_\beta^{+\infty} f(x)\,dx$, α, $\beta \in \mathbb{R}$ в случае особенности в бесконечности) являются *расходящимися несобственными интегралами*, т.е. обе величины $\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx$ и $\int_{c+\delta}^\beta f(x)\,dx$, $\delta > 0$ (соответственно $\int_{-\Delta}^\alpha f(x)\,dx$ и $\int_\beta^\Delta f(x)\,dx$, $\Delta > 0$) по отдельности не имеют конечных пределов при $\delta \to 0+0$ $(\Delta \to +\infty)$;

б) существует *конечный предел* величины $\int\limits_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx$ при $\delta \to 0+0$ (соответственно величины $\int\limits_{-\Delta}^{\Delta} f(x)\,dx$ при $\Delta \to +\infty$), называемый *главным значением* (в смысле Коши) несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и обозначаемый v.p. $\int\limits_a^b f(x)\,dx$; таким образом:

$$\text{v.p.} \int\limits_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta \to 0+0} \left(\int\limits_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx \right)$$

в случае особенности в точке $c \in (a, b)$,

$$\text{v.p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{\Delta \to +\infty} \int\limits_{-\Delta}^{\Delta} f(x)\,dx$$

в случае особенности в бесконечности (v.p. – начальные буквы фр. valeur principale – главное значение).

Примеры. 1. Несобственный интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{x^2+1}\,dx$, как уже было установлено, является *расходящимся* (подынтегральная функция имеет *неинтегрируемую особенность* в бесконечности):

$$\lim_{\Delta \to +\infty} \int\limits_0^{\Delta} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{\Delta \to +\infty} \frac{1}{2} \ln(x^2+1)\Big|_{x=0}^{\Delta} = \lim_{\Delta \to +\infty} \frac{1}{2} \ln(\Delta^2+1) = +\infty,$$

$$\lim_{\Delta \to -\infty} \int\limits_{\Delta}^{0} \frac{x}{x^2+1}\,dx = \lim_{\Delta \to -\infty} \frac{1}{2} \ln(x^2+1)\Big|_{x=\Delta}^{0} = \lim_{\Delta \to -\infty} \left(-\frac{1}{2} \ln(\Delta^2+1) \right) = -\infty.$$

С другой стороны,

$$\lim_{\Delta\to+\infty}\int_{-\Delta}^{\Delta}\frac{x}{x^2+1}\,dx=\lim_{\Delta\to+\infty}\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\Big|_{x=-\Delta}^{\Delta}=0,$$

поэтому v.p. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{x^2+1}\,dx=0$.

2. Если $a<c<b$, то

$$\lim_{\delta\to0+0}\int_{a}^{c-\delta}\frac{dx}{x-c}=\lim_{\delta\to0+0}\ln|x-c|\Big|_{x=a}^{c-\delta}=\lim_{\delta\to0+0}\ln\frac{\delta}{c-a}=-\infty,$$

$$\lim_{\delta\to0+0}\int_{c+\delta}^{b}\frac{dx}{x-c}=\lim_{\delta\to0+0}\ln|x-c|\Big|_{x=c+\delta}^{b}=\lim_{\delta\to0+0}\ln\frac{b-c}{\delta}=+\infty.$$

Несобственный интеграл $\displaystyle\int_a^b\frac{dx}{x-c}$, таким образом, *расходится*, но

$$\text{v.p.}\int_a^b\frac{dx}{x-c}=\lim_{\delta\to0+0}\left(\int_a^{c-\delta}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\delta}^{b}\frac{dx}{x-c}\right)=$$

$$=\lim_{\delta\to0+0}\left(\ln\frac{\delta}{c-a}+\ln\frac{b-c}{\delta}\right)=\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

Чтобы оттенить различие между понятиями *главного значения* несобственного интеграла $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ и его значения *в обычном смысле* (например, применительно к случаю, когда промежутком интегрирования является *отрезок* $[a, b]$, а подынтегральная функция имеет единственную особенность в точке $c\in(a, b)$), достаточно дать следующую интерпретацию равенств

$$\text{v.p.}\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{\delta\to0+0}\left(\int_a^{c-\delta}f(x)\,dx+\int_{c+\delta}^{b}f(x)\,dx\right)$$

и $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0+0}\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\delta\to 0+0}\int_{c+\delta}^b f(x)\,dx,$$

(служащих определениями указанных значений), предварительно заменив в правой части второго равенства обозначение одного переменного δ на ε с целью подчеркнуть *независимость* предельных переходов в каждом из двух слагаемых (согласно определению сходящегося несобственного интеграла *оба предела* в этом равенстве должны существовать независимо друг от друга!):

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\delta\to 0+0}\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \lim_{\varepsilon\to 0+0}\int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx =$$

$$= \lim_{\substack{\delta\to 0+0\\ \varepsilon\to 0+0}}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right).$$

В соответствии с последним соотношением процедура нахождения значения $\int_a^b f(x)\,dx$ состоит в следующем:

а) *изолировании особенности* подынтегральной функции путем удаления из исходного промежутка интегрирования (в рассматриваемом случае – из отрезка $[a, b]$) любой достаточно малой окрестности особой точки – интервала $(c-\delta,\ c+\varepsilon)$, содержащего точку c и не выходящего за пределы отрезка $[a, b]$;

б) вычислении интеграла по оставшейся части промежутка интегрирования, если так назвать *сумму интегралов* (понимаемых в собственном смысле) по отрезкам $[a,\ c-\delta]$ и $[c+\varepsilon,\ b]$;

в) переходе в полученном выражении к пределу при $\delta\to 0+0$ и $\varepsilon\to 0+0$, т.е. *при стягивании в точку* c удаляемого интервала $(c-\delta,\ c+\varepsilon)$; существенно при этом, что требование *сходимости* несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ означает существование *конечного предела* выражения $\int_a^{c-\delta} f(x)\,dx +$

$+\int\limits_{c+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$ при стремлении положительных чисел δ и ε к нулю *независимо друг от друга,* что равносильно существованию конечных пределов для *каждого* из двух слагаемых в этом выражении *отдельно.*

Что же касается процедуры вычисления величины v.p. $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$, то формально она отличается от вышеприведенной лишь тем, что при изолировании особой точки c подынтегральной функции в качестве удаляемой окрестности берется *симметричный* (относительно этой точки) интервал $(c-\delta,\ c+\delta)$, концы которого при стягивании этого интервала в точку c остаются *равноудаленными* от нее. Отмеченное различие на самом деле оказывается весьма существенным: как иллюстрирует приведенный выше пример 2, выражение $\int\limits_{a}^{c-\delta} f(x)\,dx+\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)\,dx$ может иметь *конечный предел* при $\delta\to 0+0$ даже в тех случаях, когда *по отдельности* каждое его слагаемое конечного предела не имеет. Из этих рассуждений также следует, что понятие *главного значения* является содержательным лишь по отношению к *расходящимся* несобственным интегралам: если несобственный интеграл $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ (с особенностью либо в точке $c\in(a,\ b)$, либо в бесконечности) сходится, то величины v.p. $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ и $\int\limits_{a}^{b} f(x)\,dx$ совпадают.

§ 23. Критерий Коши сходимости несобственных интегралов. Признаки сравнения. Абсолютная и неабсолютная сходимость несобственных интегралов

Непосредственно из определений двух предыдущих параграфов вытекает, что для установления сходимости (или, наоборот, расходимости) *любого* несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$, $-\infty \le a < b \le +\infty$ (с любым *конечным множеством* особых точек на концах и внутри промежутка от a до b) вполне достаточно иметь критерий сходимости несобственных интегралов, имеющих лишь *одну* особую точку – на левом или на правом конце промежутка интегрирования. Поскольку варианты особенности на левом и на правом конце являются как бы зеркальными отражениями друг друга, достаточно ограничиться случаем несобственных интегралов $\int_a^b f(x)\,dx$ с особенностью в точке b (при этом возможны значения $-\infty < a < b \le +\infty$, тогда как в случае особенности в точке a возможными значениями являются $-\infty \le a < b < +\infty$).

Следующее утверждение, известное как *критерий Коши* сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с особенностью в точке b (а также его естественный аналог применительно к случаю особенности в точке a) фактически является лишь источником для получения других, более конкретных признаков сходимости несобственных интегралов.

Теорема. *В предположении, что выполнено предварительное условие существования несобственного интеграла* $\int_a^b f(x)\,dx$ *с особенностью в точке* b *(т.е. если величина* $\int_a^\beta f(x)\,dx$ *определена как интеграл Римана в собственном смысле для любого* $\beta \in (a, b)$*) сходимость несобственного интеграла* $\int_a^b f(x)\,dx$, *т.е. существование конечного предела величины* $\int_a^\beta f(x)\,dx$ *при* $\beta \to b-0$ *(соответственно при* $\beta \to +\infty$, *если* $b=+\infty$*), равносильна выполнению следующего условия Коши: для любого (сколь угодно малого) положительного числа* ε *должна существовать такая (зависящая от* ε*) левая полуокрестность* $U(b)$ *точки* b *(т.е. интервал или луч вида* (c, b)*), чтобы вне зависимости от выбора точек* β', $\beta'' \in U(b)$ *выполнялось неравенство* $\left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$; *в формульной записи условие Коши представимо в виде*

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists U(b)\, \forall \beta' \forall \beta'' \left(\beta' \in U(b) \wedge \beta'' \in U(b) \to \left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon \right),$$

или, что то же самое,

$$\forall \varepsilon > 0 \,\exists c\, \forall \beta' \forall \beta'' \left(c < \beta' < b \wedge c < \beta'' < b \to \left|\int_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon \right).$$

Доказательство. Выполнение предварительного условия существования несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ с особенностью в точке b означает, что величина $F(\beta) =$

$=\int\limits_a^\beta f(x)\,dx$ как функция переменного β определена для всех $\beta\in(a,b)$, следовательно *сходимость несобственного интеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ – это то же самое, что *существование конечного предела функции* $F(\beta)$ *при* $\beta\to b-0$ (*или* $\beta\to+\infty$, *если* $b=+\infty$). Последнее в силу соответствующего критерия Коши (§ 27 ИЛМА-1) равносильно выполнению условия

$$\forall\varepsilon>0\,\exists\,U(b)\,\forall\beta'\,\forall\beta''\,(\beta'\in U(b)\wedge\beta''\in U(b)\to|F(\beta')-F(\beta'')|<\varepsilon),$$

в точности совпадающего (ввиду соотношения $F(\beta)=\int\limits_a^\beta f(x)\,dx$ и свойства аддитивности интеграла Римана) с условием Коши в формулировке теоремы.

Следующие два утверждения, вытекающие из только что доказанной теоремы, обычно называют *признаками сравнения* для несобственных интегралов; существенно, что эти признаки применимы лишь в случае *неотрицательных* подынгральных функций.

Следствие 1. *Если выполнено предварительное условие существования несобственных интегралов* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *с особенностями в точке* b *(т.е. если обе функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *интегрируемы по Риману в обычном смысле на любом отрезке* $[a,\beta]$, $\beta\in(a,b)$) *и если* $0\le g(x)\le f(x)$ *для всех* x *из некоторой левой полуокрестности точки* b, *то из сходимости несобственного интеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *вытекает сходимость несобственного интеграла* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *(а следовательно из расходимости второго интеграла – расходимость первого).*

Данный факт непосредственно вытекает из только что доказанной теоремы, поскольку в силу соотношений $0 \le g(x) \le f(x)$ выполнение неравенства $\left|\int\limits_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx\right| < \varepsilon$ влечет выполнение неравенства $\left|\int\limits_{\beta'}^{\beta''} g(x)\,dx\right| < \varepsilon$.

Следствие 2. *Если выполнено предварительное условие существования несобственных интегралов* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *с особенностями в точке* b *(т.е. если* $f(x) \in \mathfrak{R}[a, \beta]$ *и* $g(x) \in \mathfrak{R}[a, \beta]$ *для любого* $\beta \in (a, b)$*), причем функции* $f(x)$ *и* $g(x)$ *в некоторой левой полуокрестности точки* b *принимают лишь неотрицательные значения и существует конечный и отличный от нуля предел отношения* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *при* $x \to b-0$ *(соответственно при* $x \to +\infty$*, если* $b = +\infty$*), то несобственные интегралы* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *и* $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ *либо оба сходятся, либо оба расходятся.*

Доказательство. Если $\lim\limits_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = h > 0$, то в некоторой левой полуокрестности точки b выполняется неравенство $\left|\frac{f(x)}{g(x)} - h\right| < \frac{h}{2}$, а следовательно (ввиду неотрицательности функций $f(x)$ и $g(x)$) неравенства $\frac{h}{2} g(x) < f(x) < \frac{3h}{2} g(x)$. В предположении сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^b g(x)\,dx$ (т.е. существования конечного предела величины $\int\limits_a^{\beta} g(x)\,dx$ при $\beta \to b-0$) сходится и несобственный интеграл $\int\limits_a^b \frac{3h}{2} g(x)\,dx$, а следовательно (согласно предыдущему утверждению) и несобственный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Обратно, в случае сходимости последнего интеграла сходятся соответственно интегралы $\int\limits_a^b \frac{2}{h} f(x)\,dx$ и $\int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Следствие 3. *При выполнении предварительного условия существования несобственного интеграла* $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ *его сходимость вытекает из сходимости несобственного интеграла* $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$, *причем* $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ *(значения подынтегральной функции могут быть как действительными, так и комплексными).*

Доказательство. Прежде всего следует отметить, что в силу теоремы 3 из § 14 (утверждающей для любого отрезка $[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$ справедливость импликации $f(x) \in \in \Re[\alpha, \beta] \to |f(x)| \in \Re[\alpha, \beta]$) выполнение предварительного условия существования несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ влечет выполнение этого же условия и в отношении несобственного интеграла $\int\limits_a^b |f(x)|\,dx$. То, что, напротив, из сходимости последнего вытекает сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$, является следствием *критерия Коши*, поскольку в силу предложения 3 из § 16 $\left|\int\limits_{\beta'}^{\beta''} f(x)\,dx\right| \le \left|\int\limits_{\beta'}^{\beta''} |f(x)|\,dx\right|$

(внешний знак модуля в правой части неравенства учитывает возможность значений $\beta' > \beta''$). Неравенство $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$ для *несобственных* интегралов является результатом предельного перехода (при $\beta \to b-0$) в неравенстве $\left|\int\limits_a^\beta f(x)\,dx\right| \le$ $\le \int\limits_a^\beta |f(x)|\,dx$, справедливом для обычных интегралов Римана в силу предложения 3 из § 16.

З а м е ч а н и е. Без предположения о выполнении предварительного условия существования несобственного интеграла $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ утверждение следствия 3 может оказаться неверным. Например, в случае функции

$$f(x) = \begin{cases} x^{-2}, & \text{если } x \text{ – рациональное число}, \quad x \ne 0, \\ -x^{-2}, & \text{если } x \text{ – иррациональное число}, \end{cases}$$

$$\int\limits_1^{+\infty} |f(x)|\,dx = \int\limits_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} \int\limits_1^{\beta} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_{x=1}^{\beta} = 1,$$

т.е. несобственный интеграл $\int\limits_1^{+\infty} |f(x)|\,dx$ сходится, говорить же о сходимости несобственного интеграла $\int\limits_1^{+\infty} f(x)\,dx$ вообще бессмысленно, так как *не выполнено предварительное условие* его существования: для произвольно взятого отрезка $[\alpha, \beta]$, $1 \le \alpha < \beta$, и любого его разбиения Δ выполняются соотношения $\underline{S}_\Delta(f) \le -\dfrac{\beta-\alpha}{\beta^2}$, $\overline{S}_\Delta(f) \ge \dfrac{\beta-\alpha}{\beta^2}$ (рис. 43), в силу которых $f(x) \notin \mathfrak{R}[\alpha, \beta]$.

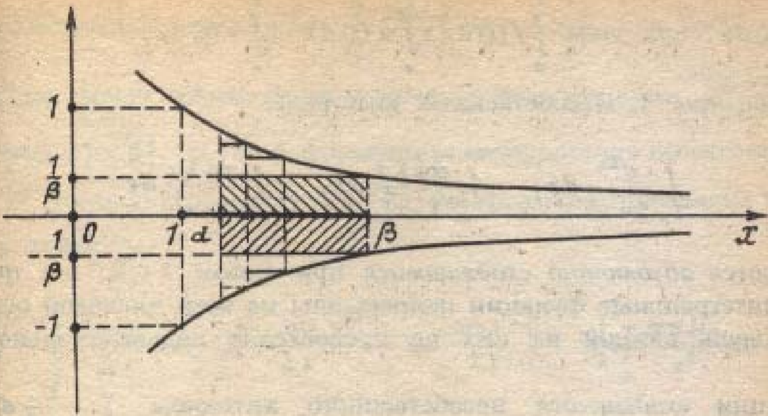


Рис. 43

Определение. Несобственный интеграл $\int_a^b f(x)\,dx$ называется:

а) *абсолютно сходящимся,* если сходятся оба несобственных интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ и $\int_a^b |f(x)|\,dx$;

б) *неабсолютно* (или *условно*) *сходящимся,* если сходится лишь первый из указанных интегралов.

Замечание. Содержательными понятия абсолютной или неабсолютной сходимости несобственного интеграла $\int_a^b f(x)\,dx$ являются лишь в том случае, когда функция $f(x)$ на промежутке от a до b принимает действительные значения *разных знаков* или же является *комплекснозначной.* Следует иметь в виду, что в силу определений § 9, 21, 22 существование интеграла Римана $\int_a^b f(x)\,dx$ (в собственном или несобственном смысле) для *комплекснозначной* функции $f(x) = u(x) + i\,v(x)$ равносильно существованию *обоих* интегралов $\int_a^b u(x)\,dx$ и

$\int\limits_a^b v(x)\,dx$, при этом $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^b u(x)\,dx + i\int\limits_a^b v(x)\,dx$.

Примеры. 1. Несобственные интегралы

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2}\,dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{1+x^2}\,dx, \qquad \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\lambda x}{1+x^2}\,dx$$

являются *абсолютно сходящимися* при любом $\lambda \in \mathbb{R}$: все три подынтегральные функции непрерывны на всей числовой оси, и модуль каждой из них не превосходит подынтегральной функции *сходящегося* несобственного интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ (§ 21, пример 1); согласно предыдущему замечанию и формуле Эйлера (ИЛМА-1, § 25, следствие 1)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{1+x^2}\,dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{1+x^2}\,dx + i\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin\lambda x}{1+x^2}\,dx.$$

2. Несобственный интеграл $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx$ при любом $\lambda \neq 0$ является *неабсолютно сходящимся*. Подынтегральная функция *непрерывна* на луче $(0, +\infty)$ и имеет *устранимый* разрыв в нуле, а поэтому (§ 13) является интегрируемой (по Риману) на любом отрезке $[0, \beta]$, $\beta > 0$. В силу *свойства аддитивности* интеграла Римана (§ 15) для любых значений $0 < a < \beta$ справедливо равенство

$$\int\limits_{0}^{\beta} \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = \int\limits_{0}^{a} \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx + \int\limits_{a}^{\beta} \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx,$$

показывающее, что доказательство сходимости несобственного интеграла $\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx$ сводится к установлению сходимости несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx$, $a > 0$, что технически проще ввиду возможности применения к функции $\frac{\sin \lambda x}{x}$ на отрезке $[a, \beta]$, $0 < a < \beta$ формулы *интегрирования по частям* из § 19 (тогда как на отрезке $[0, \beta]$ эта формула применена быть не может):

$$\int\limits_a^{\beta} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \int\limits_a^{\beta} \frac{(-\cos \lambda x)'}{\lambda x} dx = -\frac{\cos \lambda x}{\lambda x}\Bigg|_{x=a}^{\beta} - \frac{1}{\lambda}\int\limits_a^{\beta} \frac{\cos \lambda x}{x^2} dx.$$

Сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx$ вместе с неравенством $|\cos \lambda x| \le 1$ обеспечивают (в силу следствия 1) абсолютную сходимость несобственного интеграла $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x^2} dx$, а следовательно существование *конечного* предела величины $\frac{1}{\lambda}\int\limits_a^{\beta} \frac{\cos \lambda x}{x^2} dx$ при $\beta \to +\infty$. С учетом того, что $\lim\limits_{\beta \to +\infty} = \left(-\frac{\cos \lambda x}{\lambda x}\right)\Bigg|_{x=a}^{\beta} = \frac{\cos \lambda a}{\lambda a}$, существует *конечный* предел при $\beta \to +\infty$ величины $\int\limits_a^{\beta} \frac{\sin \lambda x}{x} dx$, иначе говоря, несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx$ *сходится.* Для доказательства того, что несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \left|\frac{\sin \lambda x}{x}\right| dx$ *расходится* (к $+\infty$), достаточно установить, что $\lim\limits_{\beta \to +\infty} \int\limits_a^{\beta} \left|\frac{\sin \lambda x}{x}\right| dx = +\infty$ для любого $a > 0$. Последнее вытекает из соотношений

$$\int_a^\beta \left|\frac{\sin\lambda x}{x}\right| dx \geq \int_a^\beta \frac{\sin^2\lambda x}{x}\,dx = \int_a^\beta \frac{1-\cos 2\lambda x}{2x}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_a^\beta \frac{1}{x}\,dx - \int_a^\beta \frac{1}{2\lambda x}(\sin 2\lambda x)'\,dx\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\beta - \ln a -\right.$$

$$\left.- \frac{\sin 2\lambda\beta}{2\lambda\beta} + \frac{\sin 2\lambda a}{2\lambda a} - \frac{1}{2\lambda}\int_a^\beta \frac{\sin 2\lambda x}{x^2}\,dx\right), \quad 0 < a < \beta, \quad \lambda \neq 0,$$

если учесть, что: а) величина $\frac{1}{2\lambda}\int_a^\beta \frac{\sin 2\lambda x}{x^2}\,dx$ имеет *конечный* предел при $\beta \to +\infty$ (ввиду сходимости несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\sin 2\lambda x}{x^2}\,dx$, устанавливаемой точно так же, как и для несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\cos 2\lambda x}{x^2}\,dx$), б) $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \frac{\cos 2\lambda x}{2\lambda\beta} = 0$, в) $\lim\limits_{\beta\to+\infty} \ln\beta = +\infty$.

3. Доказательство неабсолютной сходимости несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{x}\,dx$, $a > 0$, $\lambda \neq 0$, проводится так же, как и для несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx$ (пример 2). Напротив, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{x}\,dx$ (в отличие от $\int_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx$) оказывается *расходящимся* — из-за неинтегрируемости особенности функции $\frac{\cos\lambda x}{x}$ в нуле: если $\varepsilon \in \left(0, \frac{\pi}{3|\lambda|}\right)$, то $\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{3|\lambda|}} \frac{\cos\lambda x}{x}\,dx \geq \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{3|\lambda|}} \frac{dx}{2x} = \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{3|\lambda|\varepsilon}$, поэтому $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \int_\varepsilon^{\frac{\pi}{3|\lambda|}} \frac{\cos\lambda x}{x}\,dx = +\infty$, т.е. несобствен-

ный интеграл $\int\limits_0^{\frac{\pi}{3|\lambda|}} \frac{\cos\lambda x}{x}\,dx$ *расходится;* с учетом установленного в § 22 *свойства аддитивности* для *несобственных интегралов* отсюда следует, что расходится и интеграл $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\lambda x}{x}\,dx$.

4. Использование *формулы замены переменного* (§ 20) в интеграле Римана $\int\limits_\alpha^\beta \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx$ при $0<\alpha<\beta$ и $\lambda>0$ приводит к соотношениям:

$$\text{а)}\ \int\limits_\alpha^\beta \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx \overset{x=\frac{1}{t}}{=} \int\limits_{\frac{1}{\alpha}}^{\frac{1}{\beta}} t\sin\frac{\lambda}{t}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt = \int\limits_{\frac{1}{\beta}}^{\frac{1}{\alpha}} \frac{1}{t}\sin\frac{\lambda}{t}\,dt,$$

$$\text{б)}\ \int\limits_\alpha^\beta \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx \overset{x=\frac{t}{\lambda}}{=} \int\limits_{\frac{\alpha}{\lambda}}^{\frac{\beta}{\lambda}} \lambda\frac{\sin t}{t}\frac{1}{\lambda}\,dt = \int\limits_{\frac{\alpha}{\lambda}}^{\frac{\beta}{\lambda}} \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

$$\text{в)}\ \int\limits_\alpha^\beta \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx \overset{x=-t}{=} \int\limits_{-\alpha}^{-\beta} \frac{\sin(-\lambda t)}{-t}(-1)\,dt = \int\limits_{-\beta}^{-\alpha} \frac{\sin\lambda t}{t}\,dt$$

а последующий переход в них к пределу при $\alpha\to 0+0$ и $\beta\to+\infty$, возможный в силу установленной выше (пример 2) сходимости несобственного интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx$ – к равенствам:

$$\text{а)}\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{t}\sin\frac{\lambda}{t}\,dt = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx,$$

$$\text{б)}\ \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin\lambda x}{x}\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt,$$

в) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx,$

из которых, в частности, следует, что величина $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx$ не

зависит от $\lambda > 0$, и что $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \lambda x}{x} dx = 2\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Аналогично

$$\int_{a}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x} dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_{a}^{\beta} \frac{\cos \lambda x}{x} dx = \lim_{\beta \to +\infty} \int_{-a}^{-\beta} \frac{\cos(-\lambda t)}{-t} (-1)\, dt =$$

$$= \lim_{\beta \to +\infty} \int_{-\beta}^{-a} \frac{-\cos \lambda x}{x} dx = -\int_{-\infty}^{-a} \frac{\cos \lambda x}{x} dx, \quad a > 0.$$

С учетом расходимости несобственного интеграла $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x} dx$ (пример 3), формулы Эйлера $e^{i\lambda x} = \cos \lambda x + i \sin \lambda x$ (ИЛМА-1, § 25) и данного в § 22 определения главного значения расходящегося несобственного интеграла это приводит к соотношениям

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x} dx = \lim_{a \to 0+0} \left(\int_{-\infty}^{-a} \frac{\cos \lambda x}{x} dx + \int_{a}^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{x} dx \right) = 0,$$

$$\text{v.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\lambda x}}{x} dx = 2i \int_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx,$$

справедливым для любого $\lambda > 0$.

§ 24. Понятия множества нулевого протяжения и множества нулевой меры

Определение 1. Множество $E \subset \mathbb{R}$ называется *множеством нулевого протяжения* (или имеющим нулевое протяжение), если для любого (сколь угодно малого) положительного числа ε существует конечный набор интервалов $I_1=(a_1, b_1),..., I_k=(a_k, b_k)$, таких, что:

а) $E\subset\bigcup_{j=1}^{k} I_j$, т.е. каждая точка множества E принадлежит хотя бы одному из интервалов I_j, $j=1,...,k$ (или, как еще говорят, интервалы $I_1,...,I_k$ образуют *покрытие* множества E);

б) $\sum_{j=1}^{k}(b_j-a_j)<\varepsilon$, т.е. сумма длин интервалов $I_1,...,I_k$ меньше числа ε;

к множествам нулевого протяжения относят и пустое множество $\varnothing$.

Примеры. 1. Любое *конечное* множество $\{c_1,..., c_k\}\subset\mathbb{R}$ является множеством нулевого протяжения. (Для любого положительного числа ε интервалы $\left(c_1-\frac{\varepsilon}{3k}, c_1+\frac{\varepsilon}{3k}\right),...,\left(c_k-\frac{\varepsilon}{3k}, c_k+\frac{\varepsilon}{3k}\right)$ образуют покрытие множества $\{c_1,..., c_k\}$, а сумма длин этих интервалов равна $\frac{2}{3}\varepsilon$; рис. 44.)

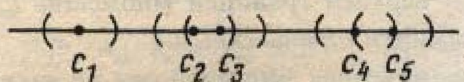


Рис. 44

2. Множество значений любой *сходящейся* последовательности $\{c_n\}$ действительных чисел является множеством нулевого протяжения. (Если $\lim_{n\to+\infty}c_n=c$, то для любого числа $\varepsilon>0$ интервал $\left(c-\frac{\varepsilon}{4}, c+\frac{\varepsilon}{4}\right)$ содержит все элементы последовательности $\{c_n\}$ с номерами $n\geq n_0$, где n_0 зависит от выбора ε; если

$n_0 = 1$, то *все* значения, c_n, $n = 1, 2, \ldots$, принадлежат интервалу $\left(c - \frac{\varepsilon}{4}, c + \frac{\varepsilon}{4}\right)$ длины $\frac{\varepsilon}{2}$, если же $n_0 > 1$, то свойствами "а" и "б" определения 1 обладает набор из n_0 интервалов $\left(c - \frac{\varepsilon}{4}, c + \frac{\varepsilon}{4}\right)$ и $\left(c_j - \frac{\varepsilon}{4n_0}, c_j + \frac{\varepsilon}{4n_0}\right)$, $j = 1, \ldots, n_0 - 1$; рис. 45.)

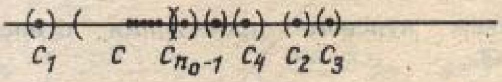


Рис. 45

3. *Неограниченные* множества $E \subset \mathbb{R}$ (в частности, множества значений *неограниченных* последовательностей действительных чисел) не являются множествами нулевого протяжения. (Если предположить, что множество E содержится в объединении *конечного* набора интервалов $(a_1, b_1), \ldots, (a_k, b_k)$, то *наименьшее* из чисел $a_1, \ldots, a_k$ будет нижней границей, а *наибольшее* из чисел $b_1, \ldots, b_k$ – верхней границей множества E, так что это множество оказывается *ограниченным*.)

4. Никакой *промежуток* числовой оси не является множеством нулевого протяжения. (Если промежуток $J \subset \mathbb{R}$ с концевыми точками a и b, $a < b$, содержится в объединении интервалов $I_1, \ldots, I_k$, то сумма длин этих интервалов заведомо не меньше числа $b - a$.)

З а м е ч а н и е. Строго говоря, последнее утверждение при кажущейся очевидности само требует доказательства; в связи с этим уместно подчеркнуть, что умение давать внятные обоснования (а случается, что и опровержения) так называемых "очевидных" фактов составляет необходимый элемент математического образования и является главным, что отличает в математике профессионала от любителя. Итак, пусть промежуток J с концевыми точками a и b (т.е. подмножество числовой оси вида $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$ или (a, b)), $a < b$, содержится в объеди-нении интервалов $I_1 = (a_1, b_1), \ldots, I_k = (a_k, b_k)$; в этом случае среди интервалов $I_1, \ldots, I_k$ есть по крайней мере один (можно считать, что это интервал I_1), концевые точки которого удовлетворяют соотношениям $a_1 \le a < b_1$; если при этом $b_1 \ge b$, то уже один лишь интервал I_1 имеет длину, не меньшую числа $b - a$, если же $b_1 < b$, то среди интервалов $I_2, \ldots, I_k$ по крайней мере один (можно считать, что это интервал I_2) имеет концевые точки, удовлетворяющие соотношениям $a_2 < b_1 < b_2$; если окажется, что $b_2 \ge b$, то в силу соотношений

$$(b_2 - a_2) + (b_1 - a_1) = b_2 + (b_1 - a_2) - a_1 > b - a$$

сумма длин интервалов I_1 и I_2 окажется большей числа $b - a$, если же $b_2 - b$, то среди оставшихся интервалов $I_3, \ldots, I_k$ найдется по крайней мере один такой (можно считать, что это интервал I_3), для которого $a_3 < b_2 < b_3$. Ввиду *конечности* системы $I_1, \ldots, I_k$ указанная процедура приводит к построению подсистемы интервалов $I_1 = (a_1, b_1), \ldots, I_m = (a_m, b_m)$, где $m \le k$, с выполнением соотношений $a_1 \le a$, $a_2 < b_1, \ldots, a_m < b_{m-1}$, $b \le b_m$ (рис. 46), из которых следует, что

$$(b_m - a_m) + \ldots + (b_1 - a_1) = b_m + (b_{m-1} - a_m) + \ldots + (b_1 - a_2) - a_1 > b - a,$$

и, таким образом, сумма длин интервалов $I_1, \ldots, I_m$ (т.е. части интервалов $I_1, \ldots, I_k$) оказывается большей числа $b - a$.

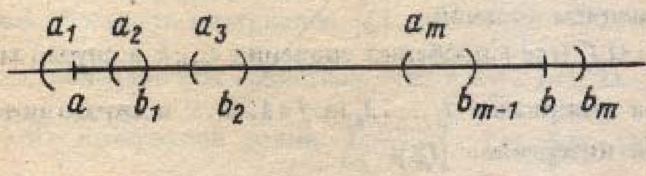


Рис. 46

Предложение 1. *а) Любое подмножество множества нулевого протяжения само является множеством нулевого протяжения; б) объединение двух (а поэтому и любого конечного числа) множеств нулевого протяжения также является множеством нулевого протяжения.*

Доказательство. Утверждение "а" непосредственно вытекает из определения 1. Пусть E_1 и E_2 — два *непустых* множества нулевого протяжения. Для сколь угодно малого положительного числа ε существуют покрытие множества E_1 конечным набором интервалов $I_1', \ldots, I_k'$, сумма длин которых меньше числа $\frac{\varepsilon}{2}$, и покрытие множества E_2 конечным набором интервалов $I_1'', \ldots, I_m''$, сумма длин которых также меньше числа $\frac{\varepsilon}{2}$; конечный набор интервалов $I_1', \ldots, I_k', \ I_1'', \ldots, I_m''$ образует покрытие множества $E_1 \cup E_2$, причем сумма длин этих интервалов меньше числа ε. Если $E_1 = \varnothing$ или $E_2 = \varnothing$, то утверждение "б" очевидно.

Понятие *множества нулевого протяжения,* введенное итальянским математиком Пеáно (Peano), 1858–1932, и французским математиком Жордáном (Jordan), 1838–1922, получило развитие в виде данного французским математиком Лебéгом (Lebesgue), 1875–1941, понятия *множества нулевой меры,* оказавшегося одним из самых фундаментальных и употребимых понятий в математике.

Определение 2. Множество $E \subset \mathbf{R}$ называется *множеством нулевой меры* (или *множеством меры нуль*), если для сколь угодно малого положительного числа ε существует конечный набор $I_1, \ldots, I_k$ или последовательность $\{I_j\}$ интервалов $I_j = (a_j, b_j)$ с выполнением условий:

а) $E \subset \bigcup\limits_j I_j$ (где j пробегает значения $1, \ldots, k$ в случае конечного набора интервалов $I_1, \ldots, I_k$ и $j = 1, 2, \ldots$ в случае последовательности интервалов $\{I_j\}$);

б) $\sum\limits_j (b_j - a_j) < \varepsilon$, т.е. сумма длин всех интервалов I_j (из

СОДЕРЖАНИЕ

ЛЕКЦИЯ 6

ЛЕКЦИЯ 7

ЛЕКЦИЯ 8

ЛЕКЦИЯ 9

ЛЕКЦИЯ 10