

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.Т. Сапунов

Прикладная теория упругости

Часть 1

Учебное пособие

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебного пособия для студентов высших
учебных заведений*

Москва 2008

УДК 539.3 (075)
ББК 22.251я7
С 19

Сапунов В.Т. **Прикладная теория упругости: Учебное пособие.**
Ч. 1. М.: МИФИ, 2008. – 232 с.

В книге на современном уровне изложены основы теории упругости, начиная с рассмотрения общих представлений и законов механики деформируемого твердого тела, получения и анализа определяющих уравнений и заканчивая решениями основных задач. Книга охватывает лишь часть разделов теории упругости: подробно рассмотрены задача Сен-Венана, плоская задача и осесимметричное нагружение оболочек вращения. Особое внимание уделено простоте изложения определяющих уравнений теории упругости и задачам, выявляющим особенности напряженно-деформированного состояния элементов конструкций. Изложение многих разделов сопровождается примерами и задачами; все решаемые задачи доведены до конечных формул и представляют интерес для практики инженерных расчетов.

Пособие рекомендовано для студентов старших курсов специальностей «Физика прочности» и «Основы конструирования физических установок», аспирантов и инженерно-технических работников, специализирующихся в области прочности и жесткости элементов конструкций.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной
образовательной программы

Рецензент д-р. техн. наук, проф. Е.М. Морозов (МИФИ)

ISBN 978 – 5 – 7262 – 0917 – 3

© Московский инженерно-физический институт
(государственный университет), 2008

Содержание

1. Введение	5
1.1. Расчетная модель тела в рамках механики деформируемого твердого тела	7
1.2. Методы решения задач механики деформируемого твердого тела	12
1.3. Три закона деформирования сплошного твёрдого тела	13
2. Закон равновесия. Теория напряжений	16
2.1. Напряженное состояние в точке	16
2.2. Дифференциальные уравнения равновесия элемента сплошного твердого тела	19
2.3. Граничные условия в напряжениях	22
2.4. Анализ напряженного состояния в точке	23
2.4.1. Преобразование компонентов напряженного состояния при замене системы прямоугольных координат	23
2.4.2. Исследование нормальных напряжений	25
2.4.3. Исследование касательных напряжений	30
2.4.4. Поверхности напряжений	35
2.4.5. Графическое исследование напряжений. Круги Мора	37
3. Закон сплошности. Теория деформаций	46
3.1. Деформированное состояние в точке. Зависимости Коши	46
3.2. Исследование деформированного состояния в точке	52
3.3. Определение перемещений по заданным деформациям. Уравнения совместности деформаций Сен-Венана	57
4. Физический закон. Обобщенный закон Гука	65
4.1. Работа упругих сил в твердом теле. Потенциал упругих сил	68
4.2. Линейный физический закон для изотропных материалов	71
4.3. Основные упругие постоянные	79
5. Уравнения и задачи упругого равновесия	85
5.1. Основные граничные задачи теории упругости	89
5.2. Уравнения теории упругости в перемещениях	90
5.3. Уравнения теории упругости в напряжениях	92
5.4. Общее решение дифференциальных уравнений равновесия	96
5.5. Приведение уравнений Ламе и Бельтрами – Митчелла к би-гармоническим уравнениям	97
5.6. Общее решение уравнений теории упругости в перемещениях (метод П. Ф. Папковича)	99
5.7. Пропорциональность перемещений, напряжений и деформаций действующей нагрузке	101
6. Постановка температурных задач линейной теории упругости	104

7. Постановка динамических задач линейной теории упругости	107
8. Криволинейные координаты	110
8.1. Уравнения линейной теории упругости в цилиндрических координатах	110
8.2. Уравнения линейной теории упругости в сферических координатах	112
9. Задача Сен-Венана	114
9.1. Общая постановка задачи Сен-Венана	114
9.2. Принцип Сен-Венана	116
9.3. Полуобратный метод Сен-Венана	118
9.4. Кручение призматических (цилиндрических) стержней	124
9.4.1. Решения задачи кручения призматических (цилиндрических) стержней	125
9.4.2. Использование функций комплексной переменной для решения задач кручения призматических стержней ...	136
9.4.3. Некоторые свойства результирующего касательного напряжения	138
9.4.4. Мембранная аналогия Прандтля	151
10. Кручение круглых валов переменного диаметра	161
11. Плоская задача теории упругости	167
11.1. Основные уравнения плоской деформации	167
11.2. Основные уравнения плоского напряженного состояния	171
11.3. Сопоставление уравнений плоской деформации и плоского напряженного состояния	174
11.4. Решение плоской задачи в напряжениях	175
11.5. Решение плоской задачи в напряжениях с помощью функции напряжений (функции Эри)	176
11.5.1. Свойства функции напряжений	178
11.6. Плоская задача в полярных координатах	182
11.6.1. Уравнения плоской задачи в полярных координатах	182
11.6.2. Общее решение осесимметричных задач	185
12. Осесимметричное нагружение оболочек вращения	209
12.1. Безмоментная теория осесимметрично нагруженных оболочек вращения	210
12.2. Моментная теория осесимметрично нагруженных оболочек вращения	213
12.2.1. Круговая цилиндрическая оболочка при осесимметричном нагружении.	216
Список литературы	231

1. Введение

Все твердые тела в той или иной мере обладают свойствами прочности и жесткости, т.е. способны в определенных пределах воспринимать воздействие внешних сил, не разрушаясь и не меняя существенным образом свои геометрические размеры.

Сопротивление материалов, теория упругости, теория пластичности, теория ползучести, строительная механика стержневых и пространственных тонкостенных систем, механика разрушения – все это науки о прочности и жесткости элементов инженерных конструкций. Конечная цель для всех этих дисциплин едина: получение методов расчета и определение необходимых, или как говорят, надежных размеров деталей машин и различных строительных сооружений.

Научные основы для достижения этой цели также едины и для сопротивления материалов, и для теории упругости (пластичности, ползучести), и для строительной механики, поскольку в них при разработке методов расчета конструкций принята одна и та же модель – сплошное твердое деформируемое тело. Такая модель аккумулирует в себе главные свойства, присущие всем конструкциям независимо от их формы и способов нагружения, и позволяет построить теорию на определенных законах.

Из единства модели следует единство понятий и принципов для всех рассматриваемых научных дисциплин. Различие между ними заключается, в первую очередь, в подходе к решению задач.

Сопротивление материалов имеет целью создать практически приемлемые, простые приемы расчета типичных, наиболее часто встречающихся элементов конструкций. Основное тело, изучаемое в сопротивлении материалов, – брус. Для него, когда его поперечные размеры достаточно малы по сравнению с продольным размером (когда брус относится к категории вытянутых стержней), в некоторых случаях деформирования применима гипотеза плоских сечений, что позволяет значительно упростить задачу.

В теории упругости определяющие уравнения составляются для произвольного сплошного деформируемого тела при произвольном нагружении и устанавливаются методы расчёта сплошных систем (массивов, оболочек, пластин). При этом уже неприменима ги-

потеза плоских сечений, поскольку требуется выполнять более строгие условия совместности деформаций и граничные условия. В связи с этим значительно усложняются исходные уравнения и, соответственно, необходимый для их решения математический аппарат, а результаты не приводятся к конечным формулам, как в сопротивлении материалов. Поэтому возможности практического использования методов теории упругости являются несколько ограниченными, но при этом достигается большая полнота анализа изучаемых явлений.

Теорию упругости принято делить на линейную и нелинейную. К линейной относят ту часть теории упругости, в которой деформирование тела описывается с помощью линейных уравнений. Получение линейных уравнений связано с допущениями о малости перемещений, поворотов, деформаций, позволяющими при составлении уравнений равновесия применять недеформированную схему тела, и с использованием линейного физического закона, известного как обобщенный закон Гука.

Имеет место деление теории упругости на математическую и техническую (или прикладную).

Математической теории упругости присуща, прежде всего, высокая математическая строгость составления уравнений, при которой не допускаются никакие искажения в исходных основах теории, никакие предположения, связанные с отклонениями от прямой математической схемы составления и решения уравнений; при этом, не считаясь со сложностью математического аппарата, добиваются так называемого точного или строгого решения.

В прикладной теории упругости наряду со строгими математическими требованиями обращается внимание на получение таких методов, которые оказались бы лучшими для решения практических задач. В связи с этим становится необходимым глубоко анализировать реальную физическую картину механического сопротивления конструкций, устанавливать главные и второстепенные факторы в этом сопротивлении и пренебрегать последними. Разумеется, введение дополнительных гипотез, принятие допущений, пренебрежение теми или иными величинами в уравнениях требуют убедительных обоснований, что обычно достигается проведением соответствующих экспериментов.

1.1. Расчетная модель тела в рамках механики деформируемого твердого тела

При проектировании любого объекта (машины, конструкции, узла и т.п.) одним из основных является вопрос о прочности и жесткости как объекта в целом, так и любого его элемента при заданных условиях нагружения. Легко видеть, что при имеющемся многообразии геометрических форм элементов конструкций и нагрузок, действующих на них, поставленная задача прочности и жесткости должна решаться для тела произвольной формы при произвольном внешнем нагружении.

Известно, что для оценки прочности тела необходимо определить внутренние силы (напряжения), возникающие в теле при действии на него внешнего нагружения. Оценивая внутренние силы, мы можем говорить о прочности – способности тела воспринимать внешние нагрузки, не разрушаясь.

Под жесткостью тела будем понимать его способность воспринимать внешние нагрузки, не меняя существенным образом свою первоначальную форму. Для оценки жесткости тела, очевидно, необходимо определить его деформации или перемещения точек.

Суммируя сказанное, можно утверждать, что мы ставим задачу об определении внутренних сил (напряжений), деформаций и перемещений для точек тела произвольной формы при его произвольном нагружении. При этом ясно, что при определении и напряжений, и деформаций (перемещений) необходимо учитывать, что реальные элементы конструкций выполняются из разных материалов. В поставленной задаче это обстоятельство должно быть отражено в форме разных возможностей (способностей) тел сопротивляться действию внешних сил (сопротивляться деформированию). Другими словами, при решении задачи должны быть учтены свойства реального материала элемента конструкции (рис. 1.1).

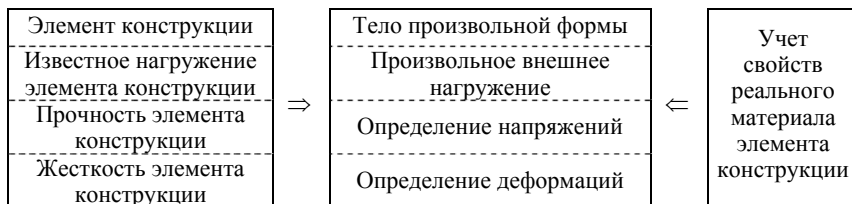


Рис. 1.1

Для решения поставленной задачи возможны два подхода:

- физический, дающий представление о поведении реальных объектов на основе анализа микроструктуры материала;
- феноменологический (механический), стремящийся найти адекватное математическое описание совокупности опытных данных по поведению объекта, устанавливаемых макроэкспериментом.

В дальнейшем будем использовать только феноменологический подход.

Отметим, что феноменологический подход для решения вопроса прочности и жесткости элементов конструкций реализован в сопротивлении материалов, теории упругости, теории пластичности, теории ползучести, строительной механике стержневых и пространственных тонкостенных систем, механике разрушения и других дисциплинах, которые по традиции излагаются, изучаются и применяются в настоящее время раздельно. Однако очевидно, что единый феноменологический подход к одной и той же задаче (задаче прочности и жесткости) должен обеспечиваться единой схемой решения поставленной задачи.

Возможность построения единой схемы решения дает единая расчетная модель тела, принятая в механике деформируемого твердого тела, являющаяся частью механики сплошных сред. Такой моделью является сплошное твердое деформируемое тело.

Свое понятие (определение) твердого тела дает теоретическая механика (раздел физики), где под твердым телом, в отличие от газов и жидкостей, подразумевается система неизменно связанных между собой материальных точек. Поскольку при действии внешних сил на такое тело расстояния между отдельными его точками не изменяются, то внутренние силы не входят в уравнения, получаемые для описания поведения такого тела. Строение тела при этом не имеет никакого значения – рассматриваемое тело, по смыслу, является абсолютно твердым (материальной точкой).

Ставя задачу об определении внутренних сил, необходимо ввести в рассмотрение способность твердого тела деформироваться, как процесс изменения взаимных расстояний между точками тела при получении ими перемещений. При этом твердое деформируемое тело должно рассматриваться уже как система бесконечно большого числа материальных точек, взаимодействующих между

собой определенным образом. Физическая точка зрения состоит в том, чтобы приписывать этим материальным точкам определенную индивидуальность, например, отождествляя их с реальными атомами или молекулами. Однако приходится признать, что на современном уровне наши знания еще недостаточны для построения механики деформируемого твердого тела, в которой было бы принято во внимание действительное строение реальных материалов.

Представление о деформируемом теле, как о сплошной среде, упрощает возможность математического описания поведения тела. Среду будем называть сплошной, если любой объем, выделенный из нее, содержит вещество, т.е. массу. Ясно, что такое представление о сплошной среде противоречит представлению об атомном строении вещества.

Понятие сплошной среды, в общем, не так просто, как может показаться на первый взгляд: можно строить разные модели сплошной среды, наделяя их разными свойствами. Простейшая модель (классическая) вводится следующим образом. Примем материальную точку за основное первичное понятие. В кинематике это понятие тождественно понятию геометрической точки. Точку можно представить сферой бесконечно малого радиуса. При стремлении радиуса к нулю единственной величиной, индивидуализирующей точку, остается радиус-вектор центра сферы (или координаты центра). Представляя себе некоторую замкнутую область пространства, заполненную непрерывно такими точками, получим модель сплошной среды. Если $x_i(0)$ – исходные координаты точки, то при движении среды (деформировании) они приобретают значения $x_i(t)$. Поведение среды будет полностью определено, если функции $x_i(t)$ для каждой точки известны. Как пример более сложной модели сплошной среды можно рассмотреть вариант, когда материальная точка представляется в форме бесконечно малого эллипсоида. Для индивидуализации точки такого рода нужно уже задать не только ее координаты, но и направления осей. Очевидно, что кинематика такой среды строится более сложным образом.

В дальнейшем будем опираться только на классическую модель сплошной среды. Забегая вперед, отметим, что математически условие сплошности для деформируемого тела выражается рядом

условий о непрерывности деформаций, перемещений и их производных и связи между ними.

Сплошную среду в дальнейшем будем считать однородной: свойства выделенных из нее одинаковых объемов одинаковы. Очевидно, что речь должна идти о свойствах, доступных определению средствами механического макроэксперимента. Кроме того, говоря об однородности или неоднородности, необходимо всегда уточнять, о каком масштабе идет речь. Введя представление о сплошности среды, уже допустили однородность на уровне размера, порядка атомного. Технический сплав (металл) состоит из зерен, размер которых бесконечно мал по сравнению с размерами изделий из этих сплавов. Соответственно, сплавы (металлы) можно считать однородной сплошной средой.

Итак, можем считать, что для дальнейшего рассмотрения в качестве модели принято однородное сплошное твердое деформируемое тело, где однородность, сплошность, твердость, деформируемость – свойства принятой модели реального тела (материала).

Можно утверждать, что перечисленных свойств недостаточно для описания поведения модели, адекватного поведению реального тела, поскольку здесь никак не отражены свойства, связанные с различной способностью разных материалов сопротивляться действию внешних сил.

Поскольку реальные тела реагируют на внешнее нагружение крайне сложным образом, естественно пытаться отразить не все наблюдаемые явления, связанные с проявлением свойств материала, а, наоборот, по возможности упростить их, выделяя только некоторые особенности, характерные для многих реальных тел в определенном интервале нагрузок или температур. В качестве таких свойств реальных материалов, прежде всего, можно назвать упругость (линейную и нелинейную), пластичность, ползучесть.

Легко видеть, что категория таких свойств как сплошность, твердость и деформируемость, неизменна в той мере, в какой неизменна сама модель сплошной среды, а категория свойств, связанных со способностью тела сопротивляться деформированию, может меняться нами в соответствии с тем, какие свойства реального тела (материала) можно считать определяющими в каждом отдельном случае.

Упругие деформации наблюдаются при относительно небольших значениях действующих нагрузок и определяются только их величиной. Если нагрузка невелика, то после ее снятия деформированное тело принимает первоначальную форму и размеры. Это свойство тел восстанавливать первоначальную форму и размеры после удаления нагрузок называется упругостью.

Пластические деформации зависят не только от величины действующих сил, но и от порядка их приложения (истории нагружения).

Ползучесть для конструкционных сталей наблюдается при повышенных температурах: для углеродистых сталей – при температуре 300 – 350 °С, для легированных – выше 400 °С.

Рассматриваемая модель может усложняться добавлением и некоторых других свойств. Например, наличие облучения материала потоком тепловых или быстрых нейтронов приводит к необходимости вводить такие свойства, как радиационная ползучесть, радиационный рост или распухание.

Если механические свойства образца, вырезанного из рассматриваемого материала, не зависят от его ориентации, материал называют изотропным (в противном случае – анизотропным). Поликристаллический металл при достаточно большом объеме (масштабный фактор) ведет себя как изотропное тело. В дальнейшем принятую расчетную модель тела будем наделять свойством изотропности.

Окончательно расчетную модель тела с позиций механики деформируемого тела можем представить в виде (рис. 1.2).

Очевидно, для детального исследования поведения материала в определенном интервале температур и нагрузок расчетную модель можно упростить, оставляя только одно из перечисленных свойств, например, упругость. Отметим, что этим самым предполагается независимость существования каждого из перечисленных свойств.

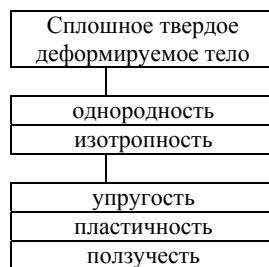


Рис. 1.2

1.2. Методы решения задач механики деформируемого твердого тела

Поставленная задача определения напряжений, деформаций и перемещений должна решаться для построенной модели тела с позиций принятого феноменологического (механического) подхода: для модели нужно найти адекватное математическое описание совокупности опытных данных, устанавливаемых макроэкспериментом для реального тела при его нагружении.

Предлагаемый способ решения задачи заключается в следующем. Пусть имеем совокупность опытных данных, определяющих поведение реальных элементов конструкций при определенных условиях нагружения. Необходимо, сформулировав на основе этих данных некоторые закономерности деформирования реальных объектов, применить их к расчетной модели и получить математическое описание поведения (процесса деформирования) принятой модели тела при тех же условиях нагружения.

Такой способ (метод) решения поставленной задачи носит название статико-кинематического. Статико-кинематический метод имеет своей основой следующие три закона деформирования сплошных твердых тел:

- закон равновесия;
- закон сплошности;
- физический закон.

Статико-кинематический метод рассматривает и описывает один отдельно взятый этап деформирования, которому соответствуют свои напряжения, деформации и перемещения.

Вторым методом, применяемым в механике деформируемого твердого тела для исследования деформирования расчетной модели, является энергетический метод. При использовании энергетического метода определяющие уравнения составляются не для одного (отдельного) этапа деформирования, а для описания процесса деформирования в определенном интервале.

Для описания процесса деформирования в целом требуются уже другие характеристики, а именно: работа внутренних сил, накапливаемая на протяжении изучаемого интервала деформирования тела, потенциальная энергия и т.п. При этом оперируют энергетически-

ми законами, в частности, механическим законом сохранения энергии.

Исторически статико-кинематический метод сложился раньше, чем энергетический, однако поскольку энергия является более общей характеристикой деформирования, из энергетического подхода вытекают многие положения статико-кинематического. На настоящее время более широкое применение при решении задач имеет энергетический метод, поскольку его реализация в численных методах более проста.

1.3. Три закона деформирования сплошного твёрдого тела

Законами деформирования сплошного твердого тела будем называть упомянутые выше закон сплошности, закон равновесия и физический закон. Каждый из этих законов выражается определенными зависимостями между напряжениями, перемещениями и деформациями тела. Эти зависимости, которые будут получены позднее, являются базисными (определяющими) зависимостями, т.е. такими, на которых основано решение задачи о деформировании сплошного твердого тела.

Закон равновесия сплошных твердых деформируемых тел отражает экспериментально известный факт, что при приложении к телу уравновешенной нагрузки (системы сил) оно имеет хотя бы одну форму равновесия. Закон равновесия для деформируемого тела определяется теми же уравнениями, что и для недеформируемого, но с тем отличием, что для деформируемого тела требуется выполнение условий равновесия для каждой частицы тела в отдельности. Здесь имеет место аналогия с изменяемой системой, для равновесия которой требуется равновесие каждого элемента системы.

Отметим, что при рассмотрении равновесия деформируемого тела должны рассматриваться два случая:

- равновесие внутренних частиц (элементарных объемов) тела, находящихся под действием только внутренних сил, определяемых в задаче;
- равновесие частиц, часть поверхности которых является поверхностью тела, находящихся, с одной стороны, под действием

внутренних сил, а с другой – под действием заданных внешних сил.

Естественно, уравнения равновесия в этих двух случаях будут разными. Кроме того, поскольку деформируемое тело имеет бесконечное число степеней свободы соответственно бесконечно большому числу своих перемещающихся внутренних частиц, закон равновесия для каждой из них будет представляться не алгебраическими, а дифференциальными уравнениями.

Уравнения равновесия элементарных объемов тела, примыкающих к поверхности тела, носят название граничных условий в напряжениях (поверхность тела – его граница).

Закон сплошности непосредственно вытекает из самой сущности модели сплошного твердого тела и приводит к получению уравнений, связывающих деформации и производные от перемещений. В дальнейшем эти уравнения будем называть зависимостями Коши.

Отметим, что и закон равновесия, и закон сплошности должны выполняться для сплошного твердого деформируемого тела независимо от его механических свойств (упругости, пластичности и т.п.).

Физический закон утверждает наличие связи между напряжениями и деформациями. Уравнения, полученные на основании физического закона, часто называют уравнениями механического состояния. Они должны отражать механические свойства реального материала, которые могут быть представлены либо физическими постоянными, либо функциями некоторых параметров. Очевидно, что уравнения механического состояния имеют разные формы в зависимости от того, какие свойства реального материала учитываются при рассмотрении вопросов прочности или жесткости элемента конструкции. Например, наделяя модель свойством упругости и не учитывая все остальные, будем иметь уравнения механического состояния в форме линейного физического закона (обобщенный закон Гука) с двумя упругими постоянными – модулем упругости и коэффициентом Пуассона.

Все сказанное можно представить в виде следующей схемы (рис. 1.3):



Рис. 1.3

Из приведенной схемы следует, что граничные условия в напряжениях не входят в систему уравнений, определяющих процесс деформирования расчетной модели тела. Данное обстоятельство обусловлено назначением граничных условий: обеспечить соответствие между внутренними силами, определяемыми введенными законами деформирования расчетной модели тела, и внешними, заранее известными (заданными). Естественно, удовлетворению граничных условий должно предшествовать отыскание искомых внутренних сил.

Можно сказать, что граничные условия отражают конкретные условия поставленной задачи, поскольку именно с их помощью в рассмотрение вводится заданная внешняя нагрузка и контур тела, и любая задача механики деформируемого твердого тела является граничной задачей.

Процедура решения поставленной задачи расчета на прочность и жесткость рассматриваемого элемента конструкции при использовании статико-кинематического метода будет следующей:

- выбор метода решения системы уравнений, описывающих проведение расчетной модели тела (например, аналитический или численный и т.п.);
- решение системы уравнений с отысканием напряжений, деформаций и перемещений;
- подчинение найденного решения граничным условиям и получение решения задачи о напряженно-деформированном состоянии

рассматриваемого элемента конструкции;

- выбор критериев прочности и/или жесткости и оценка работоспособности элемента конструкции.

Приведенная общая схема решения задачи прочности и жесткости для любого элемента конструкции определяет и место каждой дисциплины в рамках механики деформируемого твердого тела, и взаимосвязь между ними. Например, если наделить модель тела только свойством упругости, можно построить аппарат теории упругости. Аналогично строится аппарат теории пластичности или теории ползучести. Очевидно, что для этих трех дисциплин реализация законов равновесия и сплошности приводит к одним и тем же уравнениям; сохраняются и все понятия напряженного и деформированного состояний. Отличаться же построенные математические аппараты будут только уравнениями механического состояния, которые в каждом случае нужно получать отдельно. Решение, например, упруго-пластической задачи требует совместного применения аппаратов теории упругости и пластичности и стыковки полученных решений.

2. Закон равновесия. Теория напряжений

2.1. Напряженное состояние в точке

Прежде чем приступить к описанию равновесия бесконечно малой частицы (элемента объема) тела, нужно установить, для каких сил эти уравнения будут составляться, т.е. нам нужно знать, как охарактеризовать (какими неизвестными величинами) напряженное состояние этой частицы.

В механике сплошных сред различают силы двоякого рода:

- объемные силы, относимые к элементам объема (или массы) тела;

- поверхностные силы, действующие на элементы площади, которые можно выделить внутри тела или на его поверхности.

Принимается, что объемная сила, действующая на бесконечно малый элемент объема dV , имеет вид $\vec{F} dV$, где $\vec{F}$ – некоторый

конечный вектор, Φ – сила на единицу объема. Компоненты объемных сил, отнесенные к прямоугольным координатным осям, обычно обозначают через X , Y , Z .

Для поверхностных сил принимается, что сила, действующая на бесконечно малый элемент поверхности (бесконечно малую элементарную площадку) dF , имеет вид $\vec{p}_n dF$, где $\vec{p}_n$ – некоторый конечный вектор. Величина p_n – усилие, отнесенное к единице площади, или полное напряжение на площадке. Полные напряжения в пределах элементарной площадки можно считать постоянными.

Очевидно, что величина силы $\vec{p}_n$ зависит от ориентировки элементарной площадки в теле, которую можно охарактеризовать направлением внешней нормали $\vec{n}$. Компоненты поверхностной силы p_n , отнесенные к прямоугольным координатным осям, обычно обозначают как X_n , Y_n , Z_n .

Полное напряжение, действующее на координатной площадке с нормалью $\vec{x}$, можно разложить на две составляющие:

- нормальную составляющую σ , перпендикулярную к плоскости сечения;
- касательную составляющую τ , лежащую в плоскости сечения, которую можно еще раз разложить по направлениям координатных осей y , z .

Для обозначения нормальной составляющей (нормального напряжения) достаточно одного индекса, определяющего рассматриваемую площадку (индекс площадки – индекс ее внешней нормали). В данном случае имеем нормальное напряжение σ_x (рис. 2.1).

Касательные составляющие (касательные напряжения) необходимо обозначать двумя индексами: один должен определять площадку, а второй – направление напряжения (направление соответствующей координатной оси). В данном случае имеем касательные напряжения τ_{xy} и τ_{xz} .

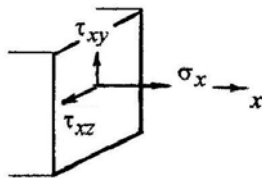


Рис. 2.1

Знаки напряжений на координатных площадках принимаются

согласно следующим правилам. Нормальное напряжение будем считать положительным, если оно является растягивающим (если его направление совпадает с направлением внешней нормали к площадке). Для касательных напряжений правило знаков вводится следующим образом: если нормаль к площадке совпадает с положительным направлением координатной оси, то положительные касательные напряжения будут направлены по положительным направлениям двух других координатных осей. На рис. 2.1 показаны положительные направления напряжений.

Через данную точку тела можно провести бесконечное множество площадок. Напряженное состояние в точке определим как совокупность напряжений, действующих на всех элементарных площадках, проходящих через рассматриваемую точку. Но хотя площадок, проходящих через данную точку, бесчисленное множество, нам не придется искать бесконечное множество неизвестных напряжений на них. Можно доказать, что

напряжение на произвольной площадке в точке тела определяется через составляющие полных напряжений, действующих на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через эту же точку.

Проведем через точку тела три координатные плоскости xy , yz , zx и четвертую плоскость с внешней нормалью $\vec{n}$ на бесконечно малом расстоянии h от рассматриваемой точки. Указанные плоскости определяют тетраэдр, показанный на рис. 2.2.

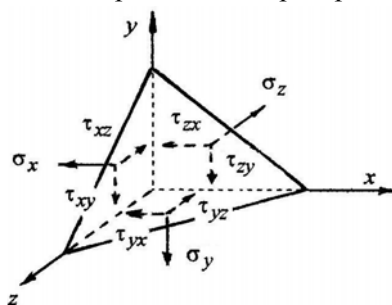


Рис. 2.2

Проведя разложение полных напряжений на трех координатных площадках, мы получим девять составляющих этих напряжений.

Полное напряжение p_n на наклонной площадке тетраэдра имеет составляющие по осям X_n , Y_n , Z_n .

Рассмотрим равновесие тетраэдра. Условие равенства нулю суммы проекций всех сил на координатную ось x будет иметь вид:

$$X_n dF - \sigma_x dF \cos(\vec{x}, \vec{n}) - \tau_{yx} dF \cos(\vec{y}, \vec{n}) - \tau_{zx} dF \cos(\vec{z}, \vec{n}) = 0$$

или

$$X_n = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n ,$$

где dF – площадь наклонной площадки тетраэдра; $\cos(\vec{x}, \vec{n}) = l$, $\cos(\vec{y}, \vec{n}) = m$, $\cos(\vec{z}, \vec{n}) = n$ – направляющие косинусы нормали $\vec{n}$.

Еще два условия равновесия $\sum Y = 0$ и $\sum Z = 0$ позволяют получить:

$$Y_n = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n ,$$

$$Z_n = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n .$$

Таким образом, составляющие полного напряжения на любой элементарной площадке в данной точке определяются через девять составляющих полных напряжений на координатных площадках, проходящих через эту же точку. Совокупность этих девяти напряжений будем называть тензором напряжений, а сами напряжения – компонентами тензора напряжений:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} .$$

Отметим, что тензором может быть не всякая совокупность элементов. Компоненты тензора должны обладать вполне определенными свойствами, которые мы будем рассматривать позже.

2.2. Дифференциальные уравнения равновесия элемента сплошного твердого тела

Рассмотрим бесконечно малый объем тела в форме прямоугольного параллелепипеда с размерами ребер dx , dy , dz . Начало ко-

ординат определяет вершину и положение параллелепипеда. Компоненты напряжений на трех координатных площадках, проходящих через начало координат, известны: σ_x , σ_y , τ_{xy} и т.д. Для описания равновесия параллелепипеда необходимо знать, какие напряжения действуют на его остальных трех площадках.

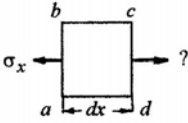


Рис. 2.3

Для простоты рассмотрим параллелепипед с напряжением σ_x , действующим на грани ab (рис. 2.3). Так как ребро dx определяет бесконечно малый линейный элемент, то напряжение на грани cd можно представить как сумму напряжения σ_x и малого приращения этого напряжения на отрезке от ab до cd : $\sigma_x + (\partial\sigma_x/\partial x)dx$. Рассуждая аналогичным образом, можно найти все напряжения на оставшихся трех гранях параллелепипеда (рис. 2.4).

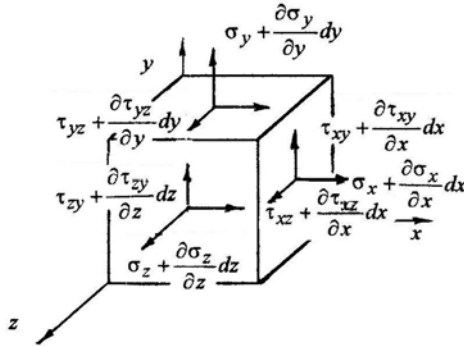


Рис. 2.4

Для параллелепипеда, как для пространственно нагруженного тела, должны записать шесть условий равновесия. Из условия равновесия $\sum X = 0$ (уравнения сил) следует:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz + \\ + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + X dx dy dz = 0 \quad .$$

Здесь X – компонента объемной силы. После некоторых преобразований уравнение приводится к виду:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \quad .$$

Записывая аналогичным образом условия $\sum Y = 0$ и $\sum Z = 0$, можем получить еще два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \quad , \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \quad . \end{aligned}$$

При составлении уравнений моментов $\sum M_x = 0$, $\sum M_y = 0$, $\sum M_z = 0$ начало координат целесообразно поместить в центре элементарного параллелепипеда. В этом случае из уравнений выпадут слагаемые, определяемые объемными силами и нормальными напряжениями. Условие $\sum M_x = 0$ позволяет получить следующее уравнение:

$$\begin{aligned} &\left(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} dy \right) dx dz \cdot \frac{dy}{2} + \tau_{yz} dx dz \cdot \frac{dy}{2} = \\ &= \left(\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} dz \right) dx dy \cdot \frac{dz}{2} + \tau_{zy} dx dy \cdot \frac{dz}{2} \quad . \end{aligned}$$

После приведения подобных членов и отбрасывания бесконечно малых второго порядка получаем, что $\tau_{yz} = \tau_{zy}$. Из условий $\sum M_y = 0$, $\sum M_z = 0$ аналогичным образом находим, что $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

Полученные соотношения определяют свойство парности или взаимности касательных напряжений. Соответственно, из девяти неизвестных напряжений независимыми является только шесть: тензор напряжений является симметричным относительно главной диагонали. Для нахождения напряжений имеется только три дифференциальных уравнения равновесия: задача определения напряжений в общем случае статически неопределима (шесть неизвестных – три уравнения).

2.3. Граничные условия в напряжениях

Граничные условия в напряжениях вытекают из условия равновесия элементов тела, выходящих какой-либо своей частью на поверхность. Соответственно, такой элемент должен находиться в равновесии, с одной стороны, под действием определяемых внутренних сил (напряжений), а с другой, – под действием внешних заданных сил.

Принято рассматривать элемент, выходящий на поверхность, в виде тетраэдра, наклонная грань которого, определяемая нормалью $\bar{n}$, совпадает с площадкой на поверхности тела, а остальные грани принадлежат координатным плоскостям. Равновесие такого элемента мы уже рассматривали, когда исследовали полные напряжения на наклонных площадках. Полученные уравнения равновесия по форме здесь остаются без изменения, только теперь вместо составляющих полного напряжения X_n, Y_n, Z_n должны ввести составляющие заданной внешней поверхностной силы $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$.

Итак, граничные условия в напряжениях записываются в форме:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ \bar{Y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ \bar{Z} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n.\end{aligned}$$

Граничные условия отражают конкретные условия задачи, так как с их помощью в задачу вводятся внешняя нагрузка и контур тела.

2.4. Анализ напряженного состояния в точке

2.4.1. Преобразование компонентов напряженного состояния при замене системы прямоугольных координат

Напряженное состояние в произвольной точке тела при данном выборе прямоугольной системы координат определяется шестью компонентами напряжений, действующими на трёх взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через эту точку и параллельных координатным плоскостям.

Если же в этой точке ввести другую («новую») систему координат, то напряженное состояние будет определяться шестью «новыми» компонентами напряжений, которые должны определяться через шесть «старых».

Обозначим старую координатную систему как x, y, z , а новую – x', y', z' . Соответственно, компоненты напряжений в старой системе будут $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ и т.д., а в новой – $\sigma_{x'}, \sigma_{y'}, \tau_{x'y'}$ и т.д.

Пусть ориентация осей x', y', z' относительно осей x, y, z задана направляющими косинусами, представленными в табл. 2.1.

Таблица 2.1

В этой таблице величины l_1, m_1, n_1 , например, определяют направляющие косинусы оси x' относительно осей x, y, z , т.е. $l_1 = \cos(\vec{x}', \vec{x})$ и т.д.

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_1	m_1	n_1
z'	l_1	m_1	n_1

Проекции полного напряжения на элементарной площадке, перпендикулярной к оси x' , на старые оси x, y, z можно вычислить по известным формулам:

$$X_{x'} = \sigma_x l_1 + \tau_{yx} m_1 + \tau_{zx} n_1 ,$$

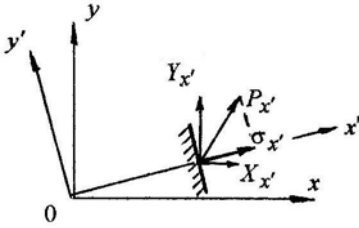
$$Y_{x'} = \tau_{xy} l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{zy} n_1 ,$$

$$Z_{x'} = \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} m_1 + \sigma_z n_1 .$$

Аналогично можем записать проекции полных напряжений, действующих на элементарных площадках, перпендикулярных осям y', z' .

Чтобы получить проекции полных напряжений, действующих на площадках, перпендикулярных к осям x' , y' , z' , на новые оси x' , y' , z' , воспользуемся тем, что проекция равнодействующей на какое-либо направление равна сумме проекций её компонентов на это же направление. Так, проектируя полное напряжение, действующее на элементарной площадке, перпендикулярной оси x' , на новые оси x' , y' , z' , получим:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= X_{x'} l_1 + Y_{x'} m_1 + Z_{x'} n_1, \\ \tau_{x'y'} &= X_{x'} l_2 + Y_{x'} m_2 + Z_{x'} n_3, \\ \tau_{x'z'} &= X_{x'} l_3 + Y_{x'} m_3 + Z_{x'} n_3.\end{aligned}$$



Действительно, для частного плоского случая (рис. 2.5), имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= X_{x'} l_1 + Y_{x'} m_1, \\ \tau_{x'y'} &= X_{x'} l_2 + Y_{x'} m_2.\end{aligned}$$

Рис. 2.5

Подстановка найденных ранее значений $X_{x'}$, $Y_{x'}$, $Z_{x'}$ в полученные соотношения приводит к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned}\sigma_{x'} &= \sigma_x l_1^2 + \sigma_y m_1^2 + \sigma_z n_1^2 + 2\tau_{xy} l_1 m_1 + 2\tau_{yz} m_1 n_1 + 2\tau_{zx} n_1 l_1, \\ \tau_{x'y'} &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (l_1 m_2 + m_1 l_2) + \\ &+ \tau_{yz} (m_1 n_2 + n_1 m_2) + \tau_{zx} (n_1 l_2 + l_1 n_2).\end{aligned}$$

Формулы для компонентов напряжений $\sigma_{y'}$, $\sigma_{z'}$, $\tau_{y'z'}$, $\tau_{z'x'}$ легко получить с использованием круговой замены индексов.

Отметим, что полученные соотношения отвечают формулам преобразования компонентов тензора второго ранга, симметрично-

го относительно главной диагонали, при замене системы прямоугольных координат. Соответственно, можно говорить о тензоре напряжений как о тензоре второго ранга, симметричном относительно главной диагонали.

2.4.2. Исследование нормальных напряжений

Интерес с точки зрения прочности представляет не полное напряжение на какой-либо площадке с нормалью $\vec{n}$, а его составляющие σ_n и τ_n (нормальное и касательное напряжения) и, в частности, экстремальные значения этих напряжений.

Покажем, что в точке тела существуют такие три взаимно перпендикулярные площадки, на которых нормальные напряжения принимают экстремальные (стационарные) значения, а касательные напряжения равны нулю.

Рассмотрим произвольную площадку с нормалью $\vec{n}$, имеющей направляющие косинусы l, m, n . Нормальное напряжение на этой площадке представляется в виде:

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl \quad .$$

Выписанное соотношение можно рассматривать как функцию трех переменных l, m, n , которые связаны между собой известной формулой $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Соответственно, чтобы найти стационарные значения функции $\sigma_n = \sigma_n(l, m, n)$, нужно решать задачу на условный экстремум.

Для решения поставленной задачи составляется вспомогательная функция

$$F(l, m, n, \lambda) = \sigma_n + \lambda(l^2 + m^2 + n^2 - 1) = \lambda(l^2 + m^2 + n^2 - 1) + \\ + \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl \quad ,$$

частные производные которой по переменным l, m, n приравняются нулю:

$$\partial F / \partial l = 2\sigma_x l + 2\tau_{xy} m + 2\tau_{zx} n + 2l\lambda = 0 \quad ,$$

$$\partial F / \partial m = 2\sigma_y m + 2\tau_{xy} l + 2\tau_{yz} n + 2m\lambda = 0 \quad ,$$

$$\partial F / \partial n = 2\sigma_z n + 2\tau_{yz} m + 2\tau_{zx} l + 2n\lambda = 0 \quad .$$

Полученные три уравнения вместе с условием $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ составляют полную систему уравнений для отыскания всех четырех неизвестных l , m , n и λ , определяющих стационарные значения функции F и, соответственно, нормального напряжения σ_n . Представленных условий экстремума достаточно, чтобы, не решая их, сделать некоторые выводы. Перепишем уравнения в форме:

$$(\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{zx} n) / l = -\lambda \quad ,$$

$$(\sigma_y m + \tau_{xy} l + \tau_{yz} n) / m = -\lambda \quad ,$$

$$(\sigma_z n + \tau_{yz} m + \tau_{zx} l) / n = -\lambda \quad .$$

Можно видеть, что числители полученных соотношений определяют составляющие полного напряжения X_n , Y_n , Z_n на рассматриваемой площадке и, таким образом, условия экстремума функции F приводятся к соотношениям

$$\frac{X_n}{l} = \frac{Y_n}{m} = \frac{Z_n}{n} = \text{const} \quad .$$

Полученные равенства показывают, что на площадке, где функция F (или нормальное напряжение σ_n) имеет стационарное значение, компоненты полного напряжения должны быть пропорциональны направляющим косинусам нормали к площадке.

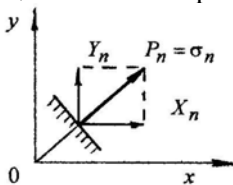


Рис. 2.6

Указанная ситуация реализуется, когда полное напряжение направлено по нормали к этой площадке (рис. 2.6). Действительно, в этом случае

$$X_n = \sigma_n l \quad , \quad Y_n = \sigma_n m \quad \Rightarrow \quad X_n / l = Y_n / m \quad .$$

Но если полное напряжение направлено по нормали к площадке, то на этой площадке касательное напряжение равно нулю.

Таким образом, мы доказали, что действительно существуют такие площадки, где нормальное напряжение имеет стационарное значение и где касательное напряжение равно нулю. Эти площадки называют главными площадками, а соответствующие нормальные напряжения – главными.

Теперь остается определить, сколько может быть главных площадок и, соответственно, главных нормальных напряжений в любой точке тела.

Пусть имеем главную площадку с нормалью $\vec{n}$ и направляющими косинусами l, m, n . Величина главного (полного) напряжения на ней равна σ . Запишем проекции этого напряжения на координатные оси.

С одной стороны, эти проекции можно определить непосредственно:

$$X_n = \sigma l, \quad Y_n = \sigma m, \quad Z_n = \sigma n.$$

С другой стороны, эти же проекции можем записать по известным формулам:

$$X_n = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n,$$

$$Y_n = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n,$$

$$Z_n = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n.$$

Из сопоставления приведенных соотношений следует, что

$$(\sigma_x - \sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0,$$

$$\tau_{xy}l + (\sigma_y - \sigma)m + \tau_{zy}n = 0,$$

$$\tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_z - \sigma)n = 0.$$

Полученную систему уравнений можно рассматривать как систему уравнений для отыскания направляющих косинусов l, m, n площадок, на которых действуют главные нормальные напряжения. Рассматриваемые уравнения являются линейными и однородными.

ными относительно неизвестных l , m , n , и могут дать решения, отличные от нуля, только в том случае, если определитель системы уравнений равен нулю (нулевое решение системы не рассматриваем, поскольку направляющие косинусы l , m , n связаны соотношением $l^2 + m^2 + n^2 = 1$). Вычисляя определитель системы и приравнивая его нулю, приходим к следующему уравнению относительно главного напряжения σ :

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0.$$

Полученное уравнение имеет три действительных и, в общем случае, три различных корня (соответствующее математическое доказательство имеется). Эти три корня определяют значения трех главных нормальных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 , которым соответствуют три группы направляющих косинусов l_i , m_i , n_i ($i = 1, 2, 3$) для трех главных площадок. В общем случае индексы 1, 2, 3 присваиваются главным напряжениям так, чтобы выполнялись неравенства $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

По определению главные нормальные напряжения так же, как и ориентация соответствующих им главных площадок, должны сохраняться в данной точке без изменения при любом преобразовании системы координат x, y, z . Следовательно, они обладают свойством инвариантности по отношению к выбору (или повороту) осей x, y, z . Для обеспечения указанного свойства необходимо, чтобы коэффициенты при σ в уравнении являлись инвариантами относительно ортогонального преобразования координат.

Выпишем эти коэффициенты, которые в дальнейшем будем называть инвариантами тензора напряжений:

$$\begin{aligned} I_{1\sigma} &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ I_{2\sigma} &= \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ I_{3\sigma} &= \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2. \end{aligned}$$

Первый из них называется линейным инвариантом, второй – квадратичным и третий – кубичным.

Значения направляющих косинусов l , m , n , определяющие одну из главных площадок, находим с помощью двух уравнений из системы и уравнения $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. Третье уравнение системы «пропадает» в силу равенства нулю определителя системы.

Исследования полученных значений l_i , m_i , n_i ($i = 1, 2, 3$) показывают, что главные площадки, соответствующие найденным главным напряжениям σ_i ($i = 1, 2, 3$) взаимно перпендикулярны.

Ортогональность главных площадок можно показать следующим образом. Для первой площадки имеем:

$$\begin{aligned}\sigma_1 l_1 &= \sigma_x l_1 + \tau_{yx} m_1 + \tau_{zx} n_1, \\ \sigma_1 m_1 &= \tau_{xy} l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{zy} n_1, \\ \sigma_1 n_1 &= \tau_{xz} l_1 + \tau_{yz} m_1 + \sigma_z n_1.\end{aligned}$$

Умножим первое уравнение на l_2 , второе – на m_2 , третье – на n_2 и сложим. Получим:

$$\begin{aligned}&\sigma_1 (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = \\ &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (m_1 l_2 + m_2 l_1) + \dots\end{aligned}$$

Аналогичная процедура для второй площадки, но с умножением первого уравнения на l_1 , второго – на m_1 , третьего – на n_1 , позволяет получить

$$\begin{aligned}&\sigma_2 (l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = \\ &= \sigma_x l_1 l_2 + \sigma_y m_1 m_2 + \sigma_z n_1 n_2 + \tau_{xy} (m_1 l_2 + m_2 l_1) + \dots\end{aligned}$$

Теперь вычтем из уравнения, полученного для первой площадки, уравнение, полученное для второй. Будем иметь:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)(l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2) = 0 \quad .$$

Поскольку в общем случае главные напряжения имеют разные значения, получаем, что

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0 \quad .$$

Известно, что данное условие определяет перпендикулярность двух прямых в пространстве, а в нашем случае – перпендикулярность двух главных площадок, что и требовалось доказать.

При совмещении направления осей координат с направлениями главных нормальных напряжений можем говорить о главных осях 1, 2, 3 тензора напряжений (обозначения для главных осей будем вводить по индексам главных напряжений).

В главных осях представления тензора напряжения и его инвариантов значительно упрощаются:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} I_{1\sigma} &= \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \quad , \\ I_{2\sigma} &= \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1 \quad , \\ I_{3\sigma} &= \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \quad . \end{aligned}$$

Не стоит, однако, думать, что напряженное состояние в главных осях определяется только тремя величинами: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Для перехода к главным осям необходимо располагать также значениями направляющих косинусов одной из главных площадок l, m, n , откуда следует, что и здесь число неизвестных равно шести.

В частных случаях главные напряжения могут принимать значения, равные нулю. По числу главных напряжений, отличных от нуля, различают три типа напряженного состояния в данной точке: одноосное, двухосное и трехосное.

2.4.3. Исследование касательных напряжений

Рассмотрим теперь вопрос об экстремальных значениях касательных напряжений. Будем считать, что координатные оси являются главными осями тензора напряжений. Рассмотрим произ-

вольную площадку с нормалью $\vec{n}$, которая имеет направляющие косинусы l, m, n с главными осями 1, 2, 3 соответственно. Касательное напряжение на этой площадке можем определить с помощью известной формулы $\tau_n^2 = p_n^2 - \sigma_n^2$.

Поскольку рассматриваем площадку в главных осях, касательные напряжения $\tau_{12}, \tau_{23}, \tau_{31}$ равны нулю. В таком случае составляющие полного напряжения p_n имеют следующие значения:

$$X_n = \sigma_1 l, \quad Y_n = \sigma_2 m, \quad Z_n = \sigma_3 n,$$

откуда следует, что

$$p_n^2 = (\sigma_1 l)^2 + (\sigma_2 m)^2 + (\sigma_3 n)^2.$$

Нормальное напряжение σ_n на этой же площадке определится формулой

$$\sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2.$$

С учетом соотношений, полученных для напряжений p_n и σ_n , касательное напряжения τ_n будет иметь вид:

$$\tau_n^2 = (\sigma_1 l)^2 + (\sigma_2 m)^2 + (\sigma_3 n)^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2.$$

Представленное соотношение позволяет рассматривать касательное напряжение τ_n как функцию переменных l, m, n и искать те площадки, на которых τ_n достигает экстремума. Так же, как и в случае определения экстремальных значений нормальных напряжений, нужно учесть, что направляющие косинусы связаны условием $l^2 + m^2 + n^2 = 1$.

Поставленную задачу будем решать, исключая с помощью имеющегося условия одну переменную и рассматривая τ_n уже как функцию только двух переменных. Так, например, исключая n , получим, что

$$\tau_n^2 = (\sigma_1^2 - \sigma_3^2)l^2 + (\sigma_2^2 - \sigma_3^2)m^2 + \sigma_3^2 - \left[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3 \right]^2 .$$

Дифференцируем полученное соотношение по l и по m . Соответственно имеем:

$$\begin{aligned} 2\tau_n \frac{\partial \tau_n}{\partial l} &= 2l(\sigma_1^2 - \sigma_3^2) - \\ &- 2 \left[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3 \right] \cdot 2l(\sigma_1 - \sigma_3) , \\ 2\tau_n \frac{\partial \tau_n}{\partial m} &= 2m(\sigma_2^2 - \sigma_3^2) - \\ &- 2 \left[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \sigma_3 \right] \cdot 2m(\sigma_2 - \sigma_3) . \end{aligned}$$

Деление на τ_n в полученных соотношениях возможно, так как значение $\tau_n = 0$ определяет главную площадку, свойства которой уже известны. Проведя некоторые преобразования, запишем теперь уравнения, определяющие условия экстремума функции τ_n :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tau_n}{\partial l} &= -\frac{2(\sigma_1 - \sigma_3)l}{\tau_n} \left[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right] = 0 , \\ \frac{\partial \tau_n}{\partial m} &= -\frac{2(\sigma_2 - \sigma_3)m}{\tau_n} \left[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \right] = 0 . \end{aligned}$$

Поскольку рассматриваем общий случай, когда σ_1 , σ_2 , σ_3 имеют неодинаковые значения, необходимые условия экстремума можно переписать в форме:

$$\begin{aligned} l \cdot \left[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right] &= 0 , \\ m \cdot \left[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \right] &= 0 . \end{aligned}$$

Полученная система уравнений имеет очевидное нулевое решение $l = m = 0$ и, соответственно, $n = \pm 1$, но это решение определяет главную площадку. Соответственно, ненулевые решения для переменных m и l удовлетворяют уравнениям:

$$\begin{aligned}(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} &= 0, \\(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 + \frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} &= 0.\end{aligned}$$

Для данной системы уравнений возможны три варианта решений:

$$1) l \neq 0, m = 0; \quad 2) l = 0, m \neq 0; \quad 3) l \neq 0, m \neq 0.$$

Отметим, что если рассматриваем решение 1, то нельзя пользоваться вторым уравнением, так как оно получено в предположении, что $m \neq 0$ (справедливо первое уравнение), а если рассматриваем решение 2, то нельзя пользоваться первым уравнением, так как оно получено в предположении, что $l \neq 0$ (справедливо второе уравнение). Решение $l \neq 0, m \neq 0$ приводит к условию $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$, но это частный случай, который не рассматриваем.

Рассмотрим вначале второй вариант решения $l = 0, m \neq 0$. Из второго уравнения будем иметь:

$$\begin{aligned}(\sigma_2 - \sigma_3)m^2 &= -\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2} \Rightarrow m^2 = -\frac{\sigma_3 - \sigma_2}{2(\sigma_2 - \sigma_3)} = \frac{1}{2} \Rightarrow \\&\Rightarrow m = \pm 1/\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Третий направляющий косинус находим из условия

$$n^2 = 1 - l^2 - m^2 \Rightarrow n = \pm 1/\sqrt{2}.$$

Считая площадку с найденными направляющими косинусами первой, определим на ней экстремальное (главное) значение τ_1 , используя исходное уравнение для τ_n^2 . Будем иметь:

$$\tau_1^2 = (\sigma_2 - \sigma_3)^2 / 4 \Rightarrow \tau_1 = \pm (\sigma_2 - \sigma_3) / 2 .$$

Рассматривая вариант решения $l \neq 0, m = 0$, получим вторую площадку с направляющими косинусами

$$l = \pm 1 / \sqrt{2} , \quad m = 0 , \quad n = \pm 1 / \sqrt{2} ,$$

на которой действует главное касательное напряжение

$$\tau_2 = \pm (\sigma_3 - \sigma_1) / 2 .$$

Если из уравнения для касательного напряжения τ_n^2 исключим не n , а m или l , то получим дополнительно ещё одно решение:

$$l = \pm 1 / \sqrt{2} , \quad m = \pm 1 / \sqrt{2} , \quad n = 0 \Rightarrow \tau_3 = \pm (\sigma_1 - \sigma_2) / 2 .$$

На основании полученных решений можем сделать следующий вывод:

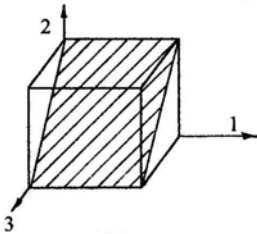


Рис. 2.7

главное касательное напряжение равно полуразности главных нормальных напряжений и принадлежит площадке, нормаль к которой перпендикулярна одной из главных осей и делит угол между двумя другими главными осями пополам (рис. 2.7).

Одно из этих главных касательных напряжений является наибольшим и равно по величине

$$\tau_{\max} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} = \left| \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \right| .$$

С помощью уравнения $\sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$ легко убеждаемся, что на тех площадках, где касательные напряжения достигают экстремума, нормальные напряжения отличны от нуля.

2.4.4. Поверхности напряжений

Вопрос о существовании главных площадок, главных напряжений, главных осей тензора напряжений и т.д. может быть решен с помощью так называемых поверхностей напряжений.

Рассмотрим площадку с нормалью $\vec{n}$, направление которой определяется направляющими косинусами l , m , n . Нормальное напряжение на этой площадке равно σ_n . Отложим на направлении нормали отрезок, величина которого равна $r = 1/\sqrt{|\sigma_n|}$ (рис. 2.8).

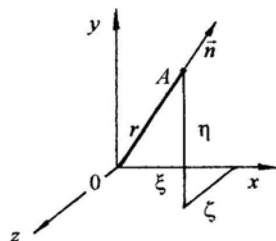


Рис. 2.8

Будем давать нормали все возможные направления (т.е. рассматривать все возможные площадки, проходящие через данную точку) и откладывать на этих нормалях соответствующие значения r . Очевидно, что конец отрезка r опишет какую-то поверхность. Получим уравнение этой поверхности.

Величина нормального напряжения определяется известной формулой:

$$\sigma_n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} l m + 2\tau_{yz} m n + 2\tau_{zx} n l .$$

Проекции отрезка r обозначим через ξ , η и ζ (одновременно можно считать что ξ , η и ζ – координаты конца отрезка r). Очевидно, что эти проекции (или координаты конца отрезка) равны:

$$\xi = r l = l / \sqrt{|\sigma_n|} , \quad \eta = r m = m / \sqrt{|\sigma_n|} , \quad \zeta = r n = n / \sqrt{|\sigma_n|} ,$$

откуда следует, что

$$l = \xi \sqrt{|\sigma_n|} , \quad m = \eta \sqrt{|\sigma_n|} , \quad n = \zeta \sqrt{|\sigma_n|} .$$

Подставляем значения l , m , n в формулу для напряжения σ_n . Будем иметь:

$$\sigma_x \xi^2 + \sigma_y \eta^2 + \sigma_z \zeta^2 + 2\tau_{xy} \xi \eta + 2\tau_{yz} \eta \zeta + 2\tau_{zx} \zeta \xi = \pm 1 .$$

Известно, что всякое уравнение второго порядка может быть приведено к каноническому виду, когда члены с произведениями координат отсутствуют. Координатные оси, в которых уравнение второго порядка имеют канонический вид, носят название главных осей. Для того чтобы полученное уравнение могло быть приведено к каноническому виду, необходимо, чтобы на площадках, нормальными к которым служат главные оси, касательные напряжения (как коэффициенты уравнения) были равны нулю. Этим самым утверждается, что в каждой точке тела есть три главные площадки с главными нормальными напряжениями.

Полученное уравнение определяет поверхность второго порядка, которая носит название поверхности напряжений Коши.

С помощью представления о поверхностях напряжений легко доказать одно из утверждений, которыми мы уже пользовались, а именно то, что значения главных напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 в общем случае различны.

Проведем через данную точку тела три главные оси и рассмотрим площадку с нормалью $\vec{n}$.

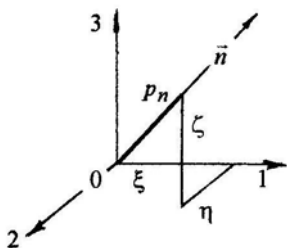


Рис. 2.9

Направление нормали, как обычно, задаем направляющими косинусами l , m , n . Проекции полного напряжения p_n как отрезка, отложенного по направлению нормали из начала координат, на главные оси (рис. 2.9), будут равны:

$$\xi = \sigma_1 l , \quad \eta = \sigma_2 m , \quad \zeta = \sigma_3 n .$$

Отсюда имеем:

$$l = \xi / \sigma_1 , \quad m = \eta / \sigma_2 , \quad n = \zeta / \sigma_3 .$$

Поскольку направляющие косинусы связаны между собой соотношением $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, уравнение поверхности напряжений будет иметь вид:

$$\frac{\xi^2}{\sigma_1^2} + \frac{\eta^2}{\sigma_2^2} + \frac{\zeta^2}{\sigma_3^2} = 1 \quad .$$

Полученное уравнение есть уравнение эллипсоида, который носит название эллипсоида Ламе (σ_1 , σ_2 , σ_3 – полуоси эллипсоида). Уравнение показывает, что в общем случае одно из главных напряжений имеет наибольшее значение, другое – наименьшее, а третье – промежуточное.

2.4.5. Графическое исследование напряжений. Круги Мора

Примем, что координатные оси совпадают с главными осями напряженного состояния. Для нормального напряжения σ_n на произвольной площадке имеем

$$\sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad .$$

Полное напряжение на этой же площадке мы можем записать, используя формулу

$$\sigma_n^2 + \tau_n^2 = (\sigma_1 l)^2 + (\sigma_2 m)^2 + (\sigma_3 n)^2 \quad .$$

Направляющие косинусы нормали к рассматриваемой площадке связаны соотношением

$$1 = l^2 + m^2 + n^2 \quad .$$

Полученные три уравнения можно рассматривать как систему уравнений, определяющих направляющие косинусы l , m , n для произвольной площадки. Решим полученную систему уравнений относительно этих неизвестных. Определим вначале направляющий косинус l , а для этого проведем следующие операции:

- умножим выражение для σ_n на сумму $(\sigma_2 + \sigma_3)$;
- полученное соотношение вычтем из уравнения для полного напряжения;

- к полученному результату прибавим третье уравнение, умноженное на $\sigma_2\sigma_3$.

Выполнение перечисленных операций позволяет получить следующее уравнение относительно направляющего косинуса l :

$$\tau_n^2 + \tau_n^2 - \sigma_n(\sigma_2 + \sigma_3) + \sigma_2\sigma_3 = (\sigma_1 l)^2 + (\sigma_2 m)^2 + (\sigma_3 n)^2 - (\sigma_2 + \sigma_3)(\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2) + \sigma_2\sigma_3(l^2 + m^2 + n^2) .$$

Действительно, после некоторых преобразований будем иметь:

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) = l^2 \cdot (\sigma_1 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_3) ,$$

откуда следует, что

$$l^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3)}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_1 - \sigma_2)} .$$

Аналогичным образом из начальной системы уравнений определяем соотношения для направляющих косинусов m^2 и n^2 :

$$m^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1)}{(\sigma_2 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_1)} ,$$

$$n^2 = \frac{\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2)}{(\sigma_3 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_2)} .$$

Направляющие косинусы l , m , n будут иметь действительные значения, если правые части полученных соотношений будут положительными.

Примем, что $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$. В этом случае $\sigma_1 - \sigma_2 > 0$, $\sigma_1 - \sigma_3 > 0$. Следовательно, чтобы значение l^2 было положительным, нужно чтобы выполнялось условие

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0 \quad .$$

Если принять σ_n за абсциссу, а τ_n — за ординату, то в системе координат « $\sigma - \tau$ » уравнение

$$\tau^2 + (\sigma - \sigma_2)(\sigma - \sigma_3) = 0$$

определяет окружность. Действительно, уравнение $x^2 + y^2 + 2mx + 2ny + q = 0$ определяет окружность радиусом $R = \sqrt{m^2 + n^2 - q}$ с координатами центра $x_0 = -m$ и $y_0 = -n$.

В нашем случае $R = (\sigma_2 - \sigma_3)/2$, $\sigma_0 = (\sigma_2 + \sigma_3)/2$ и $\tau_0 = 0$, т.е. центр окружности лежит на оси абсцисс, а сама окружность проходит через следующие две точки этой оси (рис. 2.10):

$$\tau = 0 \quad , \quad \sigma = \sigma_2 \quad ;$$

$$\tau = 0 \quad , \quad \sigma = \sigma_3 \quad .$$

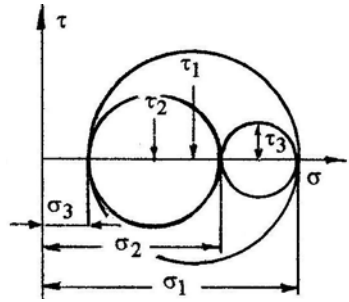


Рис. 2.10

Рассматриваемое условие $\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_2)(\sigma_n - \sigma_3) \geq 0$ определяет точки плоскости (σ, τ) , лежащие на этой окружности и вне нее.

Поскольку $\sigma_2 - \sigma_1 < 0$, $\sigma_2 - \sigma_3 > 0$, для того, чтобы значение m^2 было положительным, необходимо выполнить требование

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_3)(\sigma_n - \sigma_1) \leq 0 \quad .$$

Получаем новую окружность с центром на оси абсцисс, проходящую через точки σ_1 и σ_3 , лежащие на этой оси. Условие положительности m^2 определяет, что точки плоскости (σ, τ) лежат внутри этой окружности или на ней.

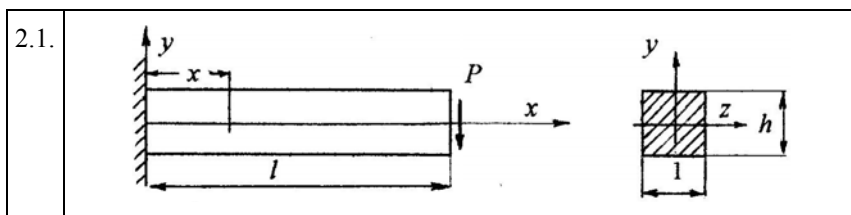
Наконец, для положительности значения n^2 необходимо, чтобы

$$\tau_n^2 + (\sigma_n - \sigma_1)(\sigma_n - \sigma_2) \geq 0 \quad .$$

Здесь имеем новую окружность, проходящую через точки σ_1 и σ_2 , лежащие на оси абсцисс. Условие положительности величины n^2 утверждает, что точки плоскости (σ, τ) должны лежать вне этой окружности или на ней.

Таким образом, для произвольной площадки, пересекающей все три главные оси, напряженное состояние представляется точкой, лежащей в области, ограниченной тремя окружностями (кругами Мора). Круговая диаграмма Мора подтверждает, что главных напряжений действительно может быть только три, и что величины экстремальных значений касательных напряжений действительно определяются полуразностями соответствующих главных напряжений.

Задачи



Брус прямоугольного поперечного сечения, жестко закрепленный с левой стороны, изгибается в плоскости xoy силой P , представленной в виде поверхностных сил, распределенных по торцу. Решение для напряжений, полученное в сопротивлении материалов, имеет вид:

$$\sigma_x = \frac{P(l-x)}{J_z} y \quad , \quad \tau_{xy} = -\frac{P}{2J_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \quad ,$$

$$\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \quad .$$

Проверить, удовлетворяются ли дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия. По какому закону должны быть распределены поверхностные силы на торце бруса, чтобы удовлетворялись граничные условия?

Подстановка имеющихся соотношений для компонентов напряжений в дифференциальные уравнения равновесия показывает, что эти уравнения удовлетворяются тождественно.

Граничные условия должны быть проверены для верхней ($y = h/2$) и нижней ($y = -h/2$) граней и правого торца $x = l$.

На верхней грани поверхностные силы отсутствуют, т.е. $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$, а направляющие косинусы нормали к площадке, расположенной на этой грани, имеют значения: $l = 0$, $m = 1$, $n = 0$. Подставим соотношения для напряжений, поверхностных сил и направляющих косинусов в первое граничное условие:

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \Rightarrow 0 = -\frac{P}{2J_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \Bigg|_{y=h/2} \equiv 0,$$

т.е. рассматриваемое граничное условие удовлетворяется. К аналогичному выводу приходим, проверяя оставшиеся два граничных условия.

Легко видеть, что и для нижней грани граничные условия удовлетворяются.

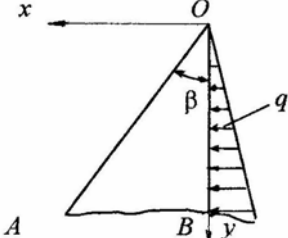
На торце бруса поверхностные силы представлены только неизвестным распределением силы P ($\bar{Y} = ?$, $\bar{X} = \bar{Z} = 0$). Направляющие косинусы нормали к площадке, расположенной на торце, имеют следующие значения: $l = 1$, $m = 0$, $n = 0$. Соответственно, первые два уравнения граничных условий принимают вид:

$$0 = \frac{P(l-x)}{J_z} y \Bigg|_{x=l} \equiv 0,$$

$$\bar{Y} = -\frac{P}{2J_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right) \Bigg|_{x=l} = -\frac{P}{2J_z} \left(\frac{h^2}{4} - y^2 \right).$$

Третье граничное условие удовлетворяется.

Соотношение, полученное для $\bar{Y}$, определяет закон распределения силы P на торце, при котором граничное условие на торце удовлетворяется.

2.2.		Записать граничные условия для линий OA и OB тела треугольной формы единичной толщины, к которому по линии OB приложена нагрузка $q = \gamma y$.
------	---	---

На линии (границе тела) OB ($x=0$) имеем, что $\bar{X} = \gamma y$, $\bar{Y} = 0$, а направляющие косинусы нормали к площадке, расположенной на этой линии, принимают следующие значения: $l = -1$, $m = 0$. Подставляя соотношения для поверхностных сил и направляющих косинусов в граничные условия, получим:

$$\gamma y = -\sigma_x \Big|_{x=0} ,$$

$$0 = \tau_{xy} \Big|_{x=0} .$$

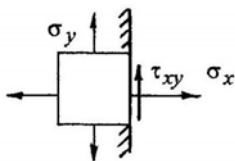


Рис. 2.11

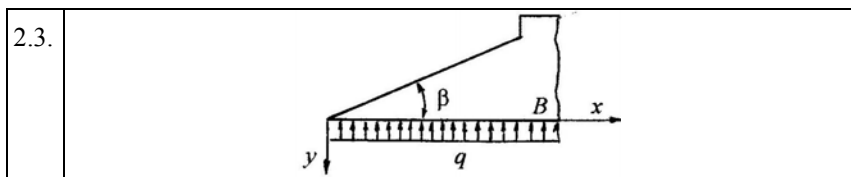
Эти же соотношения легко получить, исходя из физического смысла граничных условий.

Действительно, рассмотрение элемента тела, выходящего своей гранью на границу OB (рис. 2.11), показывает, что соответствие между внутренними и внешними силами на этой линии реализуется соотношениями, приведенными выше.

На линии (границе тела) OA ($x = y \tan \beta$) нагрузка отсутствует ($\bar{X} = \bar{Y} = 0$), а направляющие косинусы определяются соотношениями $l = \cos \beta$, $m = -\sin \beta$. Соответственно, граничные условия будут иметь вид:

$$0 = \sigma_x \cos \beta - \tau_{xy} \sin \beta ,$$

$$0 = \tau_{xy} \cos \beta - \sigma_y \sin \beta .$$



В консольном выступе фундамента, имеющем треугольную форму и находящемся под действием равномерного давления грунта q , определены напряжения:

$$\sigma_x = A \left(-\arctg \frac{y}{x} - \frac{xy}{x^2 + y^2} + C \right) , \quad \tau_{xy} = -A \frac{y^2}{x^2 + y^2} ,$$

$$\sigma_y = A \left(-\arctg \frac{y}{x} + \frac{xy}{x^2 + y^2} + B \right) , \quad \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 .$$

Определить постоянные A, B, C из граничных условий.

Запишем граничные условия для линий OA и OB :

- линия OA ($y = -x \operatorname{tg} \beta$) : $\bar{X} = \bar{Y} = 0$; $l = -\sin \beta$, $m = -\cos \beta$,

$$\sigma_x \sin \beta + \tau_{xy} \cos \beta = 0 \quad , \quad (1)$$

$$\tau_{xy} \sin \beta + \sigma_y \cos \beta = 0 \quad ; \quad (2)$$

- линия OB ($y = 0$) : $\bar{X} = 0$, $\bar{Y} = -q$; $l = 0$, $m = 1$,

$$\sigma_y = -q \quad , \quad (3)$$

$$\tau_{xy} = 0 \quad . \quad (4)$$

При $y = 0$ уравнение (4) удовлетворяется тождественно при любых значениях постоянной A , а уравнение (3) приводится к виду $AB = -q$, откуда следует $A = -q / B$.

Подставим формулы для напряжений (с учетом соотношения $y = -x \operatorname{tg} \beta$) в уравнение (1). Будем иметь:

$$A \left[-\operatorname{arctg}(-\operatorname{tg} \beta) - \frac{x(-x \operatorname{tg} \beta)}{x^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 \beta} + C \right] \sin \beta + \left(-A \frac{x^2 \operatorname{tg}^2 \beta}{x^2 + x^2 \operatorname{tg}^2 \beta} \right) \cos \beta = 0 \quad .$$

При преобразовании полученного уравнения учтем, что

$$\frac{\operatorname{tg}^2 \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \sin^2 \beta \quad , \quad \frac{\operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg}^2 \beta} = \sin \beta \cos \beta \quad .$$

Будем иметь:

$$A \left(\beta \sin \beta + \sin^2 \beta \cos \beta + C \sin \beta - \sin^2 \beta \cos \beta \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad C = -\beta \quad .$$

Преобразование уравнения (2) позволяет привести его к виду:

$$A \left(-\sin \beta \sin^2 \beta + \beta \cos \beta + B \cos \beta - \sin \beta \cos^2 \beta \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad B = \operatorname{tg} \beta - \beta \quad .$$

С учетом найденного значения постоянной B определяем постоянную A . Будем иметь:

$$A = -\frac{q}{\operatorname{tg}\beta - \beta}.$$

2.4.	Провести преобразования некоторых компонентов тензора напряжений, например σ_z и τ_{xy} , при повороте системы прямоугольных координат xyz вокруг оси y на 180° .
------	--

Указание. Использовать формулы преобразования компонентов напряженного состояния при переходе от одной системы прямоугольных координат к другой.

2.5.	Используя формулы для преобразования компонентов напряжений при переходе от одной прямоугольной системы координат к другой, показать, что чистый сдвиг может быть получен с помощью равномерного растяжения $(+q)$ и равномерного сжатия $(-q)$ в двух взаимно перпендикулярных направлениях.
------	---

Равномерное растяжение $(+q)$ и равномерное сжатие $(-q)$ в двух взаимно перпендикулярных направлениях реализуем в главной системе координат 1, 2, 3, принимая $\sigma_1 = q$, $\sigma_2 = 0$, $\sigma_3 = -q$. Будем считать, что чистый сдвиг реализуется в системе координат xyz , полученной из главной системы координат поворотом на угол α вокруг оси 2 (ось z совпадает с осью 2), на площадке, перпендикулярной оси x . Направляющие косинусы, определяющие положение осей x, y, z в системе координат 1, 2, 3, приведены в табл. 2.2.

Таблица 2.2

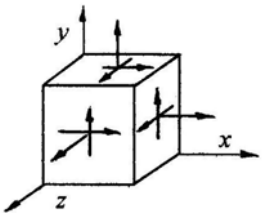
	1	2	3
x	$\cos\alpha$	0	$\sin\alpha$
y	$-\sin\alpha$	0	$\cos\alpha$
z	0	0	1

Учитывая значения направляющих косинусов, для напряжений на площадке, перпендикулярной оси x , имеем:

$$\sigma_x = \sigma_1 l_1^2 + \sigma_1 m_1^2 + \sigma_3 n_1^2 = q \cos^2 \alpha - q \sin^2 \alpha = 0,$$

$$\tau_{xy} = \sigma_1 l_1 l_2 + \sigma_1 m_1 m_2 + \sigma_3 n_1 n_2 = -q \cos \alpha \sin \alpha - q \sin \alpha \cos \alpha = \tau.$$

Из первого соотношения следует, что угол поворота должен быть равен $\alpha = \pi/4$, а из второго – значение касательного напряжения: $\tau = -q$.

2.6.		Задан тензор напряжений, все компоненты которого равны величине a. Определить тип напряженного состояния.
------	---	---

Тип напряженного состояния (одноосное, двухосное, трехосное) определяется числом главных нормальных напряжений, отличных от нуля.

Выпишем уравнение, определяющее главные нормальные напряжения:

$$\sigma^3 - J_{I\sigma}\sigma^2 + J_{II\sigma}\sigma - J_{III\sigma} = 0 \quad ,$$

где коэффициенты уравнения являются инвариантами тензора напряжений:

$$J_{I\sigma} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad ,$$

$$J_{II\sigma} = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \quad ,$$

$$J_{III\sigma} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \quad .$$

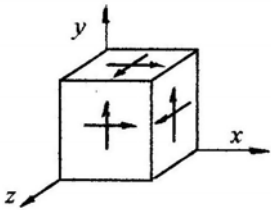
Вычислим коэффициенты уравнения (инварианты) в соответствии с условием задачи. Будем иметь:

$$J_{I\sigma} = 3a \quad , \quad J_{II\sigma} = J_{III\sigma} = 0 \quad .$$

Уравнение для определения главных нормальных напряжений принимает вид:

$$\sigma^3 - 3a\sigma^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = 3a \quad , \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad .$$

Следовательно, напряженное состояние – одноосное.

2.7.		Задан тензор напряжений, в котором все нормальные напряжения равны нулю, а касательные напряжения равны τ. Определить тип напряженного состояния.
------	---	--

Вычислим инварианты тензора напряжений в соответствии с условием задачи.

Будем иметь:

$$J_{I\sigma} = 0 \quad , \quad J_{II\sigma} = -3\tau^2 \quad , \quad J_{III\sigma} = 2\tau^3 \quad .$$

Уравнение, определяющее главные нормальные напряжения, принимает вид:

$$\sigma^3 - 3\tau^2\sigma - 2\tau^3 = 0 \quad .$$

Легко видеть, что значение $\sigma = 0$ корнем уравнения не является, и напряженное состояние – трехосное.

Определяя подбором один корень $\sigma_{ГЛ1} = -\tau$, приведем кубическое уравнение к квадратному, которое будет иметь вид:

$$\sigma_{ГЛ}^2 - 3\tau\sigma_{ГЛ} - 2\tau^2 = 0 \quad .$$

Решение этого уравнения позволяет получить еще два корня:

$$\sigma_{ГЛ2} = 2\tau \quad , \quad \sigma_{ГЛ3} = -\tau \quad .$$

Окончательно, для главных нормальных напряжений можем записать:

$$\sigma_1 = 2\tau \quad , \quad \sigma_2 = \sigma_3 = -\tau \quad .$$

3. Закон сплошности. Теория деформаций

3.1. Деформированное состояние в точке. Зависимости Коши

Под деформированием (деформацией) сплошного тела будем понимать процесс изменения положений точек тела, при котором изменяются взаимные расстояния между ними.

Из определения следует, что деформирование тела обусловлено взаимными перемещениями точек. Поэтому характеристики деформирования (деформации), в конечном счете, представляются через эти перемещения.

Под перемещением точки будем понимать вектор, имеющий своим началом исходное положение точки, а концом – положение, в которое точка приходит после деформации.

Проекции полного перемещения точки на координатные оси x , y , z обозначим через u , v , w .

Рассмотрим элемент тела в форме прямоугольного параллелепипеда, положение которого определяется точкой A , имеющей координаты x , y , z . Грани параллелепипеда параллельны координатным плоскостям, а ребра равны соответственно dx , dy , dz .

Будем решать поставленный вопрос о взаимосвязи между перемещениями и деформациями для каждой грани параллелепипеда в отдельности. В частности, рассмотрим грань параллелепипеда, лежащую в плоскости xy (рис. 3.1).

Для упрощения предположим, что деформация этой грани будет плоской, т.е. такой, при которой все точки, находящиеся первоначально в одной плоскости, остаются после деформации в той же плоскости. В этом случае $w=0$, а перемещения u и v будут функциями только x и y .

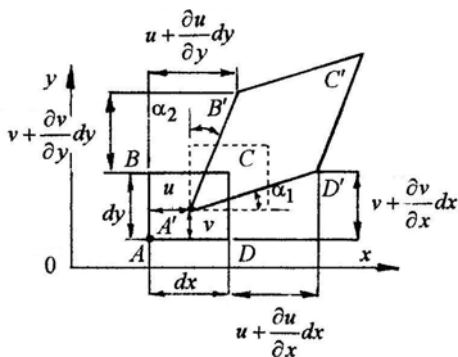


Рис. 3.1

Элемент $ABCD$ после деформации займет положение $A'B'C'D'$.

С геометрической точки зрения можно ввести в рассмотрение два типа деформации: изменение длины первоначально прямого отрезка и изменение величины прямого угла. В соответствии с этим в дальнейшем будем различать продольную (линейную) деформацию ϵ и деформацию сдвига (угловую деформацию) γ . Продольная деформация определяется как отношение изменения длины элементарного отрезка к его первоначальной длине. Индекс продольной (или линейной) деформации отрезка будем определять тем направлением, которое имел отрезок до деформации. Деформацию сдвига определим как изменение величины первоначально прямого угла. Очевидно, что деформация сдвига должна иметь два индекса (по направлениям двух отрезков, образующих первоначально прямой угол).

Определим продольную деформацию отрезка AD , параллельного оси x , длина которого до деформации равна dx .

После деформации точка A переходит в точку A' . Составляющие этого перемещения обозначим через u и v . Компоненты перемещения u и v есть непрерывные функции координат, поэтому мы вправе записать составляющие перемещения точки D в положение D' в виде величин $u + (\partial u / \partial x)dx$ и $v + (\partial v / \partial x)dx$. Поскольку исследуемый отрезок AD первоначально параллелен оси x , его продольную деформацию можем записать в виде:

$$\varepsilon_x = \frac{A'D' - AD}{AD}.$$

Длина отрезка AD равна dx . Длину отрезка $A'D'$ найдем по его проекциям:

- на ось x

$$dx + u + \frac{\partial u}{\partial x} dx - u = dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx ;$$

- на ось y

$$v + \frac{\partial v}{\partial x} dx - v = \frac{\partial v}{\partial x} dx .$$

Соответственно, квадрат длины отрезка $A'D'$ определится соотношением

$$(A'D')^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right)^2 .$$

Чтобы не иметь дело с корнями, перепишем исходное выражение для деформации ε_x в виде

$$(A'D')^2 = (1 + \varepsilon_x)^2 (dx)^2 .$$

Приравнивая друг другу два последних соотношения, получаем уравнение, определяющее продольную деформацию ε_x :

$$(1 + \varepsilon_x)^2 (dx)^2 = \left(dx + \frac{\partial u}{\partial x} dx \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx \right)^2 ,$$

откуда следует:

$$2\varepsilon_x + \varepsilon_x^2 = 2 \frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 .$$

Полученное соотношение допускает его линеаризацию и переход к геометрически линейной теории упругости. Действительно, принимая, что деформации и производные от перемещений малы, будем пренебрегать квадратами и произведениями этих величин по сравнению с самими величинами. Отбрасывая эти слагаемые второго порядка малости в полученном соотношении, находим, что

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} .$$

Аналогичные рассуждения относительно длины отрезка $A'B'$ позволяют получить, что

$$A'B' = dy + \frac{\partial v}{\partial y} dy ,$$

и вычислить продольную деформацию ε_y :

$$\varepsilon_y = \frac{A'B' - AB}{AB} \Rightarrow \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} .$$

Для того, чтобы определить деформацию сдвига, рассмотрим искажение первоначально прямого угла DAB (см. рис. 3.1). В на-

шем случае этот прямой угол составлен отрезками, параллельными осям x и y . Будем иметь:

$$\gamma_{xy} = \alpha_1 + \alpha_2 \quad .$$

Принятое допущение о малости деформаций дает нам возможность определить углы α_1 и α_2 по их тангенсам и получить для угловой деформации γ_{xy} следующее соотношение:

$$\gamma_{xy} = \frac{(\partial v / \partial x) dx}{dx + (\partial u / \partial x) dx} + \frac{(\partial u / \partial y) dy}{dy + (\partial v / \partial y) dy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad .$$

Очевидно, что если повторить подобные рассуждения для других граней прямоугольного параллелепипеда, можно получить компоненты деформации для трехмерной задачи:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad , \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \quad , \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad . \end{aligned}$$

Непосредственно из физического смысла деформаций сдвига можно утверждать, что

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \quad , \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \quad , \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} \quad .$$

Представления компонентов деформации через перемещения носят название зависимостей Коши.

Знаки деформаций будем определять следующим образом:

- деформация сдвига считается положительной, если происходит уменьшение первоначально прямого угла, и отрицательной, если этот угол увеличивается;

- линейная (продольная) деформация считается положительной, если происходит удлинение элемента, и отрицательной, если элемент укорачивается.

Полученные шесть компонентов деформации определяют так называемую «чистую» деформацию элемента. Такое определение введено, поскольку в общем случае при деформировании тела для его отдельного элемента возможны следующие варианты:

- поступательное перемещение элемента как целого;
- вращательное перемещение (поворот) элемента как целого;
- «чистая» деформация элемента.

Рассмотрим, что представляют собой первые два вида поведения элемента и выясним, можно ли их охарактеризовать через известные (заданные) функции перемещений u , v и w .

Чтобы определить поступательное движение (перемещение) какого-либо элемента тела как целого, достаточно задать перемещение одной его точки. У нас есть точка с заданными перемещениями – точка A . Значит компонентами поступательного перемещения элемента как целого будут значения u , v и w в точке A и, таким образом, дополнительных характеристик для определения этого вида перемещения элемента тела не требуется.

Поворот элементарного параллелепипеда в целом будем определять проекциями угла поворота его главной диагонали на координатные плоскости. Эти проекции равны углам поворота граней параллелепипеда в своих плоскостях, обозначаются как ω_x , ω_y , ω_z и носят название компонентов элементарного вращения.

Представим компоненты элементарного вращения через производные от перемещений u , v и w . Рассмотрим поворот одной грани – грани, лежащей в плоскости xy (рис. 3.2).

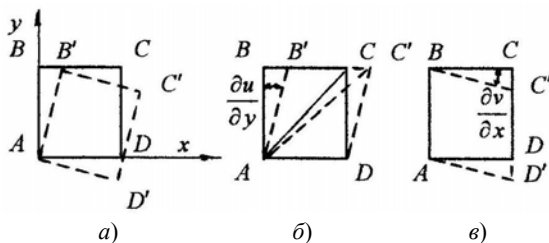


Рис. 3.2

Поворот осуществляется вокруг оси z , значит, это будет компонент элементарного вращения ω_z . Угол поворота грани опреде-

ляется углом поворота диагонали. При повороте грани как единого целого происходит поворот одновременно двух отрезков AB и AD (рис. 3.2, *a*).

Пусть у нас повернется только один отрезок AB (рис. 3.2, *б*), но при построении повернутого элемента учтем, что $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$ (нет линейных деформаций). Из рис. 3.2, *б* непосредственно видно, что $\angle CAC' = (1/2) \angle CDC'$ (угол CAC' вписанный, а CDC' – центральный). Но угол CDC' сам положительный (производная $\partial u / \partial y > 0$), а поворот отрезка отрицательный (принимая, что положительное вращение – против часовой стрелки). Итак, $\angle CAC' = - (1/2) \partial u / \partial y$.

Соответственно, рассмотрев поворот отрезка AD (рис. 3.2, *в*) получаем, что диагональ повернется на угол величиной $(1/2) \partial v / \partial x$ (здесь поворот отрицательный, как и для предыдущего случая, но и сам угол отрицательный, поскольку приращение ∂v отрицательное и производная $\partial v / \partial x < 0$).

Поскольку поворот обоих отрезков AB и AD осуществляется вместе, будем иметь:

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Рассматривая повороты граней в остальных двух координатных плоскостях, получим аналогичные соотношения:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right),$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

3.2. Исследование деформированного состояния в точке

Описание деформирования элемента тела в форме прямоугольного параллелепипеда привело к введению шести характеристик

деформирования (компонентов деформаций): ε_x , ε_y , ε_z , γ_{xy} , γ_{yz} , γ_{zx} , из которых первые три определяют линейную деформацию отрезков, параллельных координатным осям, а вторые три – изменение прямых углов, образованных такими отрезками и расположенных в координатных плоскостях.

Деформированное состояние в точке определяется совокупностью деформаций всех линейных элементов, проходящих через данную точку (здесь имеются в виду и линейные деформации, и деформации сдвига).

Можно показать, что линейная деформация произвольно ориентированного отрезка представляется шестью компонентами деформации прямоугольного параллелепипеда.

На произвольном направлении N возьмем отрезок AA_1 малой длины r (рис. 3.3). Линейная деформация ε_N отрезка AA_1 определяется соотношением:

$$\varepsilon_N = \frac{r_1 - r}{r},$$

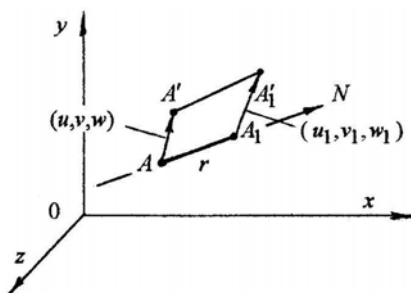


Рис. 3.3

где $r_1 = A'A_1'$ – длина отрезка AA_1 после деформации.

Свяжем деформацию ε_N с перемещениями точек A и A_1 . Пусть компоненты вектора перемещения точки A будут u , v и w . Тогда компоненты перемещения точки A_1 можно представить соотношениями:

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz = u + du, \\ v_1 &= v + \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz = v + dv, \\ w_1 &= w + \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz = w + dw. \end{aligned}$$

Проекции отрезка r на оси x, y, z равны dx, dy, dz . После деформации длина отрезка становится равной r_1 . Соответственно, проекции отрезка r_1 на оси будут определяться соотношениями:

$$dx + (u_1 - u), \quad dy + (v_1 - v), \quad dz + (w_1 - w) \quad .$$

Определяя длину отрезка r_1 по его проекциям на координатные оси, получим:

$$r_1^2 = [dx + (u_1 - u)]^2 + [dy + (v_1 - v)]^2 + [dz + (w_1 - w)]^2 \quad .$$

С другой стороны, длину отрезка r_1 можем найти из соотношения, определяющего линейную деформацию ε_N . Будем иметь:

$$r_1 = r(1 + \varepsilon_N) \quad .$$

Из сопоставления полученных соотношений следует уравнение, связывающее деформацию ε_N с приращениями перемещений:

$$r^2(1 + 2\varepsilon_N + \varepsilon_N^2) = (dx + du)^2 + (dy + dv)^2 + (dz + dw)^2 \quad .$$

Подставим сюда значения du, dv, dw и учтем, что деформации и производные от перемещений u, v, w малы (их квадратами и произведениями можно пренебречь по сравнению с первыми степенями). Будем иметь:

$$\begin{aligned} r^2(1 + 2\varepsilon_N) = & dx^2 + 2dx \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right) + dy^2 + \\ & + 2dy \left(\frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz \right) + dz^2 + \\ & + 2dz \left(\frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz \right) \quad . \end{aligned}$$

Полученное уравнение можно преобразовать, учитывая, что $r^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$. Кроме того, поскольку направление N задано направляющими косинусами l, m, n , то в этом случае

$$dx/r = l, \quad dy/r = m \quad \text{и т.д.}$$

Группируя соответствующим образом производные от перемещений и заменяя их на деформации в соответствии с зависимостями Коши, после всех преобразований получим

$$\varepsilon_N = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} l m + \gamma_{yz} m n + \gamma_{zx} n l.$$

Таким образом, линейная деформация в данной точке по любому направлению N представляется через шесть компонентов деформации прямоугольного параллелепипеда.

С помощью полученной формулы можно легко получить формулы преобразований линейных деформаций при переходе к новым координатным осям. Если мы введем новую координатную систему x', y', z' той же системой направляющих косинусов, как это делали для напряжений, то сразу можем записать:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{x'} &= \varepsilon_x l_1^2 + \varepsilon_y m_1^2 + \varepsilon_z n_1^2 + \gamma_{xy} l_1 m_1 + \gamma_{yz} m_1 n_1 + \gamma_{zx} n_1 l_1, \\ \varepsilon_{y'} &= \dots, \\ \varepsilon_{z'} &= \dots \end{aligned}$$

Сравним формулы преобразований для линейных деформаций с формулами преобразований для нормальных напряжений. Видим, что запись окажется аналогичной, если оперировать половинками деформаций сдвига, т.е. величинами

$$\gamma_{xy}/2, \quad \gamma_{yz}/2, \quad \gamma_{zx}/2.$$

Учитывая, что формулы преобразований линейных деформаций при переходе к новым координатным осям аналогичны соответст-

вующим формулам преобразований компонентов тензора напряжений, можем говорить о тензоре деформаций с учетом сделанного выше замечания относительно половинок деформаций сдвига:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{pmatrix} .$$

Так же, как и тензор напряжений, тензор деформаций является тензором второго ранга, симметричным относительно главной диагонали.

Дальнейшее исследование компонентов тензора деформаций (деформированного состояния) можно вести по той же схеме, что и для компонентов тензора напряжений. Очевидно, что результаты исследования будут аналогичны результатам, полученным ранее при исследовании напряжений (компоненты тензоров должны обладать одинаковыми свойствами). При исследовании получим:

- имеются три главные взаимно перпендикулярные оси линейных деформаций и соответственно им три главные линейные деформации $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$;

- на плоскостях, определяемых главными осями линейных деформаций, деформации сдвига равны нулю;

- имеются три главных сдвига $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, которые равны разностям главных линейных деформаций $\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2$;

- имеются три инварианта тензора деформаций:

$$I_{1\varepsilon} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 ,$$

$$I_{2\varepsilon} = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4}(\gamma_{xy}^2 - \gamma_{yz}^2 - \gamma_{zx}^2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 + \varepsilon_2 \varepsilon_3 + \varepsilon_3 \varepsilon_1 ,$$

$$I_{3\varepsilon} = \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4}(\gamma_{xy} \gamma_{yz} \gamma_{zx} - \varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \varepsilon_z \gamma_{xy}^2) = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 .$$

Линейный инвариант $I_{1\varepsilon}$ представляет собой относительное изменение объема. Это легко проверить, рассмотрев элемент, ребра которого до деформации равны dx , dy , dz . После деформации они будут равны соответственно $(1 + \varepsilon_1)dx$, $(1 + \varepsilon_2)dy$, $(1 + \varepsilon_3)dz$. Следовательно,

$$V + \Delta V = (1 + \varepsilon_1)(1 + \varepsilon_2)(1 + \varepsilon_3)dxdydz = (1 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)dxdydz.$$

Относительное изменение объема $\Delta V / V = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$. Для величины относительного изменения объема вводят обозначение θ ;

- возможно построение кругов Мора для деформированного состояния в точке. Точки области, ограниченной тремя кругами Мора, будут определять деформации всех линейных элементов, проходящих через данную точку.

3.3. Определение перемещений по заданным деформациям. Уравнения совместности деформаций Сен-Венана

Зависимости Коши дают возможность вычислять компоненты деформаций ε_x , ε_y , ... по заданным перемещениям u , v , w .

Поставим обратную задачу: вычислить компоненты перемещений u , v , w , если заданы компоненты деформаций как функции координат x , y , z .

Рассматривая зависимости Коши, легко убедиться, что произвольное задание компонентов деформаций не дает возможности однозначного определения компонентов перемещений, поскольку имеем шесть уравнений для отыскания трех искоемых функций. Необходимо, чтобы деформации удовлетворяли еще каким-то вполне определенным соотношениям (были связаны каким-то образом между собой) для того, чтобы задача имела единственное решение.

Этот вывод следует также и из следующего геометрического рассмотрения. Представим себе тело разбитым на бесконечно малые элементы, например кубики (не считая элементов, примкнув-

ших к границе). Если мы подвергнем наши кубики заданным произвольным деформациям и затем попытаемся их сложить так, чтобы грани, соприкасавшиеся до деформации, снова соприкасались, то это окажется невозможным. Это еще раз показывает, что компоненты деформаций должны удовлетворять некоторым соотношениям для того, чтобы была возможность деформирования тела без разрывов.

Данное утверждение докажем, решая поставленную задачу об отыскании компонентов перемещений по заданным компонентам деформаций.

Пусть V – односвязная область изменения переменных x, y, z , в которой заданы деформации и в которой ищутся перемещения u, v, w . Будем считать, что имеем точку области $M_0(x_0, y_0, z_0)$, для которой известны (заданы) компоненты перемещения u_0, v_0, w_0 и компоненты вращения $\omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0}$. Точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ – произвольная точка области. Наша задача – найти компоненты перемещения u_1, v_1, w_1 этой точки.

Пусть M_0M_1 определяет какую-либо линию, соединяющую точки M_0 и M_1 в области V . Поскольку точки M_0 и M_1 расположены на произвольном расстоянии друг от друга, для определения перемещения u_1 нужно брать интеграл, чтобы определить полное приращение функции u на пути интегрирования M_0M_1 :

$$u_1 = u_0 + \int_{M_0M_1} \left(\frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz \right).$$

Для решения поставленной задачи значения частных производных $\partial u / \partial x, \partial u / \partial y, \partial u / \partial z$ нужно представить через заданные компоненты деформаций, однако сразу это можно сделать только для производной $\partial u / \partial x$:

$$\partial u / \partial x = \varepsilon_x \quad .$$

Для двух других производных можем записать:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} - \omega_z \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \gamma_{zx} - \omega_y \quad .$$

Отметим, что последние два соотношения не решают полностью проблему представления частных производных $\partial u / \partial y$ и $\partial u / \partial z$ через заданные компоненты деформаций, однако позволяют разбить интеграл на два. Будем иметь:

$$u_1 = u_0 + \int_{M_0 M_1} \left(\varepsilon_x dx + \frac{1}{2} \gamma_{xy} dy + \frac{1}{2} \gamma_{zx} dz \right) + \int_{M_0 M_1} \left(-\omega_z dy + \omega_y dz \right) .$$

Первый интеграл уже состоит из заданных функций. Второй интеграл можем переписать в виде:

$$J_2 = \int_{M_0 M_1} \left(-\omega_z dy + \omega_y dz \right) = \int_{M_0 M_1} \left(\omega_z d(y_1 - y) - \omega_y d(z_1 - z) \right) .$$

Разбиваем интеграл на два и берем каждый из них по частям. В частности, для первого будем иметь:

$$\begin{aligned} \int_{M_0 M_1} \omega_z d(y_1 - y) &= \omega_z (y_1 - y) \Big|_{M_0}^{M_1} - \int_{M_0 M_1} (y_1 - y) d\omega_z = \\ &= -\omega_{z0} (y_1 - y_0) - \int_{M_0 M_1} (y_1 - y) d\omega_z . \end{aligned}$$

С учетом полученного результата для второго интеграла получаем:

$$\begin{aligned} J_2 &= \int_{M_0 M_1} \left(-\omega_z dy + \omega_y dz \right) = \omega_{y0} (z_1 - z_0) - \omega_{z0} (y_1 - y_0) - \\ &\quad - \int_{M_0 M_1} (y_1 - y) d\omega_z - (z_1 - z) d\omega_y . \end{aligned}$$

Можно видеть, что для вычисления интеграла J_2 необходимо знать значения приращений $d\omega_z$ и $d\omega_y$, для отыскания которых необходимо представить производные функций ω_z и ω_y через известные (заданные) компоненты деформации (или их производные). Оказывается, данная операция возможна. Например,

$$\begin{aligned}\omega_z &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) \Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} \right) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial \omega_z}{\partial x} = \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} .\end{aligned}$$

Аналогичным образом представляем производные $\partial \omega_z / \partial y$ и $\partial \omega_z / \partial z$. Можем получить:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega_z}{\partial y} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} , \\ \frac{\partial \omega_z}{\partial z} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} .\end{aligned}$$

С учетом найденных значений производных соотношение для приращения $d\omega_z$ принимает вид:

$$d\omega_z = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} \right) dx + \left(\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) dy + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) dz$$

и является известной функцией.

Значения производных функций ω_x и ω_y легко получить из выписанных соотношений круговой заменой индексов x, y, z .

Итак, для определения перемещения u_1 в точке M_1 окончательно имеем:

$$\begin{aligned}
u_1 = & u_0 + \omega_{y0} (z_1 - z_0) - \omega_{z0} (y_1 - y_0) + \\
& + \int_{M_0 M_1} \left(\varepsilon_x dx + \frac{1}{2} \gamma_{xy} dy + \frac{1}{2} \gamma_{zx} dz \right) - \\
& - \int_{M_0 M_1} (y_1 - y) d\omega_z - (z_1 - z) d\omega_y ,
\end{aligned}$$

где $d\omega_z$ и $d\omega_y$ – уже известные функции. Объединим теперь оба интеграла в один, собирая слагаемые при dx , dy , dz :

$$u_1 = u_0 + \omega_{y0} (z_1 - z_0) - \omega_{z0} (y_1 - y_0) + \int_{M_0 M_1} U_x dx + U_y dy + U_z dz .$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}
U_x = & \varepsilon_x + (y_1 - y) \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x} \right) + (z_1 - z) \left(\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial x} \right) , \\
U_y = & \frac{1}{2} \gamma_{xy} + (y_1 - y) \left(-\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial y} \right) + (z_1 - z) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) , \\
U_z = & \frac{1}{2} \gamma_{xz} + (y_1 - y) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) + (z_1 - z) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial x} \right) .
\end{aligned}$$

Совершенно аналогично можно записать соотношения, определяющие компоненты перемещений v_1 и w_1 в точке M_1 . Будем иметь:

$$\begin{aligned}
v_1 = & v_0 + \omega_{z0} (x_1 - x_0) - \omega_{x0} (z_1 - z_0) + \int_{M_0 M_1} V_x dx + V_y dy + V_z dz , \\
w_1 = & w_0 + \omega_{x0} (y_1 - y_0) - \omega_{y0} (x_1 - x_0) + \int_{M_0 M_1} W_x dx + W_y dy + W_z dz .
\end{aligned}$$

Полученные формулы определяют перемещения u_1 , v_1 и w_1 в любой произвольной точке M_1 тела, если заданы компоненты пе-

ремещения и компоненты вращения в точке M_0 и компоненты деформации во всей области, занятой телом. Однако нами до сих пор не решен вопрос об однозначности определения этих перемещений, который мы затронули в начале раздела.

Рассматривая полученные соотношения, легко видеть, что требование однозначности определения перемещений u_1, v_1, w_1 , по существу, сводится к требованию независимости криволинейных интегралов, имеющих место в формулах, от пути интегрирования.

Из теории криволинейных интегралов известно, что для того, чтобы криволинейный интеграл не зависел от пути интегрирования, необходимо выполнить определенные требования. В нашем случае, например, для интеграла

$$\int_{M_0 M_1} U_x dx + U_y dy + U_z dz$$

эти требования имеют вид:

$$\frac{\partial U_x}{\partial y} = \frac{\partial U_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial U_y}{\partial z} = \frac{\partial U_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial U_z}{\partial x} = \frac{\partial U_x}{\partial z}.$$

Подставляя в первое условие значения функций U_x и U_y , после некоторых простых преобразований приведем его к виду:

$$\begin{aligned} & (y_1 - y) \left(\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \right) + (z_1 - z) \left(\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y \partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial x \partial y} \right) = \\ & = (y_1 - y) \left(-\frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \right) + (z_1 - z) \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial z \partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial x^2} \right). \end{aligned}$$

Полученное равенство должно быть справедливо при любых значениях координат y_1 и z_1 , и поэтому оно разбивается на два условия и приводится к следующим двум уравнениям, связываю-

щим деформации:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} ,$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) .$$

Из остальных требований независимости интегралов от пути интегрирования следуют еще четыре (по два уравнения каждого типа) аналогичных независимых уравнения, однако их можно записать, используя круговую замену переменных x, y, z :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} ,$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x} ,$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) ,$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) .$$

Полученные соотношения носят название условий совместности (условий неразрывности) деформаций Сен-Венана. Именно этим соотношениям должны удовлетворять заданные компоненты деформации, чтобы по ним можно было бы однозначно определить перемещения.

При соблюдении условий совместности деформаций формулы для перемещений u_1, v_1, w_1 дают вполне определенные значения, не зависящие от пути интегрирования. При этом постоянные величины $u_0, v_0, w_0, \omega_{x0}, \omega_{y0}, \omega_{z0}$ остаются произвольными, и, из-

меняя эти постоянные, можем сообщить телу только «жесткое» перемещение как целого. Действительно, если мы к каким-либо найденным перемещениям u , v , w добавим, соответственно,

$$\bar{u} = u_0 + \omega_{y0}z - \omega_{z0}y \quad ,$$

$$v = v_0 + \omega_{z0}x - \omega_{x0}z \quad ,$$

$$\bar{w} = w_0 + \omega_{x0}y - \omega_{y0}x \quad ,$$

то эти добавки никаких дополнительных деформаций не вызовут. Очевидно, что в таком случае постоянные u_0 , v_0 , w_0 , ω_{x0} , ω_{y0} , ω_{z0} можно принять равными нулю без всякого ущерба для решения поставленной задачи.

Задачи

3.1.	Провести преобразования некоторых компонентов деформированного состояния, например, ε_z и γ_{xy} , при повороте системы прямоугольных координат xyz вокруг оси y на 180° .
------	--

Указание. Использовать формулы, аналогичные формулам преобразования компонентов напряженного состояния при переходе от одной системы прямоугольных координат к другой, с учетом отличия тензора деформаций от тензора напряжений.

3.2.	Деформированное состояние в точке задано следующими составляющими: $\varepsilon_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad , \quad \gamma_{xy} = -2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad ,$ $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad ,$ где $\varphi = \varphi(x, y)$. Выяснить, можно ли функцию φ считать произвольной функцией координат x, y?
------	---

Известно, что для однозначного определения поля перемещений по заданному полю деформаций необходимо, чтобы деформации отвечали условиям (уравнениям)

ям) совместности (неразрывности) деформаций Сен-Венана. Именно эти уравнения могут накладывать некоторые ограничения на деформации, и, следовательно, на функцию φ .

Первое из шести уравнений совместности (неразрывности) деформаций имеет вид:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}.$$

Подставляя в это уравнение соотношения для деформаций, получим:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0 \quad - \text{бигармоническое уравнение.}$$

Следовательно, функция φ должна быть бигармонической функцией.

4. Физический закон. Обобщенный закон Гука

В разделах 2 и 3 рассмотрены два закона деформирования тела: закон равновесия, освещающий статическую сторону задачи теории упругости, и закон сплошности, определяющий перемещения, деформации и связь между ними и освещающий задачу с геометрической точки зрения. Очевидно, что эти два закона не могут обеспечить решение задач теории упругости до тех пор, пока такие разнородные признаки изучаемого явления как внутренние силы (напряжения) и деформации не будут связаны физическим законом.

Вопрос о форме физического закона теории упругости поставим в самом общем виде. Не учитывая длительность деформирования (т.е. не учитывая реологических свойств материала), можем предположить зависимости типа

$$\begin{aligned} \sigma_x &= f_1(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) , \\ \sigma_y &= f_2(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) , \\ &\dots \\ \tau_{zx} &= f_6(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) . \end{aligned}$$

Конкретные представления физического закона возможны во многих вариантах. Они устанавливаются с помощью физических опытов для выбранного класса материалов. При этом возможны два пути:

- задаться из каких-либо соображений аналитическими соотношениями физического закона, а затем провести эксперименты для его проверки и определения некоторых коэффициентов, содержащихся в принятом аналитическом представлении закона;

- накопить экспериментальные данные, а затем, подвергнув их обработке, подобрать уравнения физического закона, в достаточной мере оправдывающиеся для определенного класса материалов.

Первый путь предпочтительнее, поскольку допускает общую теоретическую постановку задачи.

Поскольку разыскиваются зависимости физического характера, то математическая форма функций $f_1, \dots, f_6$ заранее ничем не обусловлена, и её можно выбрать по своему усмотрению: достаточно чтобы она соответствовала физическим условиям задачи, т.е. могла бы правильно отражать исследуемое физическое явление. Пользуясь этим, выберем наиболее простую математическую форму зависимостей физического закона – линейную:

$$\sigma_x = a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{yz} + a_{16}\gamma_{zx} \quad ,$$

$$\sigma_y = a_{21}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + a_{23}\varepsilon_z + a_{24}\gamma_{xy} + a_{25}\gamma_{yz} + a_{26}\gamma_{zx} \quad ,$$

$$\dots ,$$

$$\tau_{zx} = a_{61}\varepsilon_x + a_{62}\varepsilon_y + a_{63}\varepsilon_z + a_{64}\gamma_{xy} + a_{65}\gamma_{yz} + a_{66}\gamma_{zx} \quad .$$

В пользу выбранной линейной формы физического закона можно привести следующие доводы.

1. Можно утверждать, что линейная форма есть приближенная замена любых аналитических форм физического закона при условии малости деформаций.

Действительно, если разложить функции $\sigma_x, \sigma_y, \dots$, представленные в произвольной аналитической форме, в ряд Маклорена

(частный случай разложения в ряд Тейлора в нулевой точке), то с точностью до малых второго порядка будем иметь:

$$\sigma_x = (f_1)_0 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_x} \right)_0 \varepsilon_x + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \varepsilon_y} \right)_0 \varepsilon_y + \dots + \left(\frac{\partial f_1}{\partial \gamma_{zx}} \right)_0 \gamma_{zx} \dots$$

Такая запись справедлива, так как ограничиваемся случаем малых деформаций.

Сравнивая запись ряда Маклорена с принятыми линейными уравнениями для физического закона, видим, что в уравнениях отсутствуют свободные члены типа $(f_i)_0$ ($i = 1, 2, \dots, 6$). Введение таких слагаемых в уравнения физического закона приводит к наличию напряжений, отличных от нуля, при деформациях, равных нулю. Такое, в принципе, возможно (например, наличие в теле остаточных напряжений), но в теории упругости принимают гипотезу о естественном состоянии тела, считая, что при отсутствии деформаций в теле напряжения в нем равны нулю. Принятая гипотеза, естественно, лишает возможности рассмотрения в рамках теории упругости определенного класса задач.

Заметим, что коэффициенты в разложении считаем отличными от нуля, поскольку существование линейной зависимости для большинства материалов ясно обнаруживается простейшими экспериментами, например, при одноосном растяжении.

2. Многие материалы подчиняются линейному закону если не вплоть до разрушения, то хотя бы на некотором участке деформирования, имеющем большое значение для стадии эксплуатации.

3. Заданным деформациям в данной точке должна соответствовать одна единственная система напряжений и обратно (однозначность решения). Этому условию линейная форма физического закона удовлетворяет.

4. Линейный физический закон совместно с условием о малости деформаций обеспечивает линейную постановку задач теории упругости, что имеет существенное значение для получения более простых решений.

Уравнения физического закона содержат 36 коэффициентов a_{mn} , по смыслу являющихся упругими постоянными (характеристиками материала). Число упругих постоянных тела в общем случае, как видим, весьма велико, однако оно значительно сокращается, если ввести гипотезу о потенциале упругих сил (гипотезу об обратимости затраченной работы).

4.1. Работа упругих сил в твердом теле. Потенциал упругих сил

Вычислим работу внутренних упругих сил на возможных перемещениях.

Компоненты действительных перемещений обозначим через u , v , w , а компоненты возможных – через δu , δv , δw . Примем, что компоненты возможных перемещений являются малыми величинами, представляющими собой непрерывные функции x , y , z .

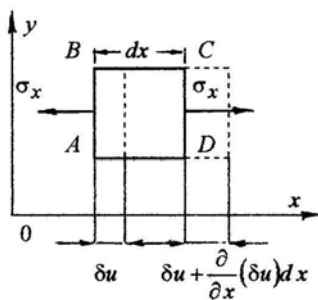


Рис. 4.1

Чтобы упростить рассуждения, будем рассматривать элемент упругого тела $dx dy dz$, находящегося под действием только одномерной системы внутренних сил (напряжений) σ_x (рис. 4.1).

Пусть грань AB получила возможное перемещение δu . Тогда соответствующее перемещение для грани DC определится соотношением

$$\delta u + \frac{\partial}{\partial x}(\delta u) dx \quad .$$

Полная работа внутренних сил σ_x на возможных перемещениях будет равна

$$\sigma_x \left(\delta u + \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} dx \right) dy dz - \sigma_x \delta u dy dz = \sigma_x \frac{\partial(\delta u)}{\partial x} dx dy dz \quad .$$

Поскольку оператор δ обладает теми же свойствами, что и оператор d , возможна перестановка оператора δ и оператора дифференцирования $\partial/\partial x$. В этом случае работа сил σ_x на возможных перемещениях может быть записана в виде

$$\delta A_1 = \sigma_x \delta \varepsilon_x dx dy dz \quad .$$

Аналогично определим работы, совершаемые остальными внутренними силами, распределенными по граням параллелепипеда. Суммируя все эти работы и относя их к единице объема, получим:

$$\delta A = \sigma_x \delta \varepsilon_x + \sigma_y \delta \varepsilon_y + \sigma_z \delta \varepsilon_z + \tau_{xy} \delta \gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta \gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta \gamma_{zx} \quad .$$

Введем теперь чрезвычайно важную в теории упругости гипотезу о потенциале упругих внутренних сил. Примем, что

работа внутренних сил полностью переходит в потенциальную энергию, накапливаемую телом при получении им упругих деформаций и возвращаемую им обратно в виде работы сил при снятии деформаций.

Очевидно, что введенная гипотеза верна лишь приблизительно, так как часть работы внутренних сил переходит в другие виды энергии (тепловую и электромагнитную), теряемые телом и не возвращаемые в виде работы упругих сил. Однако эти потери невелики, и в большинстве случаев ими можно пренебречь.

Потенциальная энергия есть следствие наличия деформаций и, соответственно, определяется только ими. Поэтому, если мы через W обозначим потенциальную энергию, отнесенную к единице объема тела в данной точке тела, то она является функцией компонентов деформаций:

$$W = W(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}) \quad .$$

Если мы даем телу упругие возможные перемещения, то согласно введенной гипотезе работа, совершаемая внутренними силами на этих перемещениях, должна полностью перейти в упругую энергию и дать ее приращение δW :

$$\delta A = \delta W \quad .$$

Приращение δW с точностью до малых второго порядка (с той же точностью, с какой определена работа δA) определяется соотношением:

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \delta \varepsilon_x + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} \delta \varepsilon_y + \dots + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \delta \gamma_{zx} \quad .$$

Равенство $\delta A = \delta W$ возможно только тогда, когда равны коэффициенты при вариациях $\delta \varepsilon_x, \delta \varepsilon_y, \dots, \delta \gamma_{zx}$:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \quad , \quad \tau_{xy} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \quad , \\ \sigma_y &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} \quad , \quad \tau_{yz} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \quad , \\ \sigma_z &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} \quad , \quad \tau_{zx} = \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \quad . \end{aligned}$$

Таким образом, введение гипотезы о потенциале внутренних упругих сил приводит к соотношениям, определяющим компоненты напряжений через частные производные от потенциальной энергии по соответствующим деформациям (формулы Грина).

Полученные соотношения позволяют значительно сократить число упругих постоянных в принятом линейном физическом законе. Перепишем одно из уравнений закона (второе) в следующем виде:

$$\frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} = \sigma_y = a_{21} \varepsilon_x + a_{22} \varepsilon_y + a_{23} \varepsilon_z + a_{24} \gamma_{xy} + a_{25} \gamma_{yz} + a_{26} \gamma_{zx} \quad .$$

Дифференцируя его, например по γ_{yz} , получим:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_y \partial \gamma_{yz}} = a_{25} \quad .$$

Эту же вторую производную мы можем получить другим путем, используя соответствующее уравнение линейного физического закона (для τ_{yz}), дифференцируя его по ε_y . Будем иметь:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{yz} \partial \varepsilon_y} = a_{52} \quad .$$

Поскольку значение второй производной для непрерывной функции не зависит от порядка дифференцирования, должны принять, что $a_{25} = a_{52}$.

Аналогичное утверждение можно доказать для любых двух коэффициентов:

$$a_{mn} = a_{nm} \quad .$$

Следовательно, с введением гипотезы о потенциале внутренних сил из рассматриваемых 36 упругих постоянных для определения остается только 21. Таким значительным количеством упругих постоянных может обладать лишь тело, имеющее различные упругие свойства в разных направлениях, или, как говорят, тело с универсальной (шаровой) анизотропией.

В дальнейшем будем рассматривать только однородные изотропные тела, для которых упругие коэффициенты в уравнениях физического закона не должны зависеть от ориентации осей координат относительно тела и от положения начала координат.

4.2. Линейный физический закон для изотропных материалов

Рассмотрение линейного закона в общей постановке позволило сделать вывод, что для однородного тела с универсальной анизотропией число упругих постоянных равно 21.

Для упругого изотропного тела, свойства которого одинаковы во всех направлениях (вводят иногда термин «тело с шаровой изотропией»), это число упругих постоянных может быть сокращено за счет того, что для такого тела введенные соотношения для напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \dots$ не должны меняться при любых преобразованиях рассматриваемой системы координат, несмотря на то, что преобразование системы координат (переход от одной системы координат к другой) ведет к преобразованиям компонентов и тензора напряжений, и тензора деформаций.

Примем, что координатные оси x, y, z являются главными осями деформаций. В этом случае

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \quad .$$

На основании принятых линейных уравнений физического закона можем записать, например

$$\tau_{yz} = a_{51}\varepsilon_x + a_{52}\varepsilon_y + a_{53}\varepsilon_z \quad .$$

Введем теперь новую координатную систему x', y', z' , получая ее из старой путем поворота вокруг оси z на 180° . Ось z' новой системы будет совпадать с осью z старой, а оси x' и y' будут иметь направления, противоположные направлениям осей x и y . Новая система координат также является главной системой деформаций.

Так как коэффициенты a_{51}, a_{52}, a_{53} не должны зависеть от выбора осей, можем записать:

$$\tau_{y'z'} = a_{51}\varepsilon_{x'} + a_{52}\varepsilon_{y'} + a_{53}\varepsilon_{z'} \quad .$$

Значения $\tau_{y'z'}, \varepsilon_{x'}, \varepsilon_{y'}, \varepsilon_{z'}$ можно найти по формулам преобразований, учитывая, что таблица направляющих косинусов в данном случае имеет вид (табл. 4.1):

Таблица 4.1

	x	y	z
x'	l_1	m_1	n_1
y'	l_2	m_2	n_2
z'	l_3	m_3	n_3

 $\Rightarrow$

	x	y	z
x'	-1	0	0
y'	0	-1	0
z'	0	0	1

В отношении $\tau_{y'z'}$ можем записать:

$$\tau_{y'z'} = \sigma_x l_2 l_3 + \sigma_y m_2 m_3 + \sigma_z n_2 n_3 + \tau_{xy} (l_2 m_3 + l_3 m_2) + \tau_{yz} (m_2 n_3 + m_3 n_2) + \tau_{zx} (l_2 n_3 + l_3 n_2) .$$

Подставляем значения направляющих косинусов и получаем

$$\tau_{y'z'} = -\tau_{yz} .$$

Даже не применяя формулы перехода от одной системы к другой, а используя только определения деформаций, можем записать:

$$\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x , \quad \varepsilon_{y'} = \varepsilon_y , \quad \varepsilon_{z'} = \varepsilon_z .$$

Действительно, линейная деформация ε_x есть относительное удлинение отрезка до деформации параллельного оси x , а поскольку отрезок параллелен оси x , то, очевидно, он параллелен и оси x' . Следовательно, $\varepsilon_{x'} = \varepsilon_x$ и т.д.

Равенство $\tau_{y'z'} = -\tau_{yz}$ можно также получить, используя правило знаков для касательных напряжений.

В системе x, y, z нормаль $\vec{n}$ по направлению совпадает с положительным направлением координатной оси y (рис.4.2). Следовательно, положительное напряжение τ_{yz} направлено по оси z . В системе x', y', z' нормаль $\vec{n}$ и ось y' имеют разные направления.

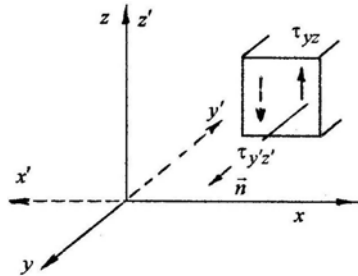


Рис. 4.2

Соответственно, положительное напряжение $\tau_{y'z'}$ направлено в отрицательную сторону оси z' .

Сопоставляя формулы для напряжений $\tau_{y'z'}$ и τ_{yz} , получаем:

$$a_{51}\varepsilon_x + a_{52}\varepsilon_y + a_{53}\varepsilon_z = -a_{51}\varepsilon_x - a_{52}\varepsilon_y - a_{53}\varepsilon_z \quad .$$

Очевидно, что это возможно, если $a_{51} = a_{52} = a_{53} = 0$, а значит $\tau_{yz} = 0$.

Точно так же доказываем, что $\tau_{xy} = \tau_{zx} = 0$, а это значит, что координатные оси x , y , z , которые введены как главные оси деформаций, для изотропного тела являются и главными осями напряжений. Таким образом, мы сократили число постоянных до шести, и попутно доказали, что для изотропного тела главные оси деформаций совпадают с главными осями напряжений.

В дальнейшем не будем различать главные оси деформаций и главные оси напряжений: и те, и другие будем называть главными осями.

Продолжаем считать, что координатные оси x , y , z совпадают с главными осями 1, 2, 3. На основании линейного физического закона для напряжения σ_1 можем записать:

$$\sigma_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2 + a_{13}\varepsilon_3 \quad .$$

Введем новую координатную систему $1'$, $2'$, $3'$, полученную из старой путем ее поворота на 90° вокруг оси 1. В новой системе должны иметь:

$$\sigma_{1'} = a_{11}\varepsilon_{1'} + a_{12}\varepsilon_{2'} + a_{13}\varepsilon_{3'} \quad ,$$

но очевидно, что в нашем случае

$$\sigma_1 = \sigma_{1'} \quad , \quad \varepsilon_1 = \varepsilon_{1'} \quad , \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{3'} \quad , \quad \varepsilon_3 = \varepsilon_{2'} \quad ,$$

откуда следует, что

$$a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2 + a_{13}\varepsilon_3 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{13}\varepsilon_2 + a_{12}\varepsilon_3 \quad .$$

Полученное равенство может быть выполнено только при условии, что $a_{12} = a_{13}$.

В этом случае

$$\sigma_1 = a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) = (a_{11} - a_{12})\varepsilon_1 + a_{12}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \quad .$$

Введем новые обозначения для упругих постоянных:

$$a_{12} = \lambda \quad , \quad a_{11} - a_{12} = 2\mu \quad .$$

С учетом введенных обозначений для напряжения σ_1 будем иметь:

$$\sigma_1 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_1 \quad ,$$

где $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ – относительное изменение объема.

Поскольку принятое к рассмотрению тело изотропно, формулы для напряжений σ_2 и σ_3 можем получить, используя круговую замену индексов 1, 2, 3.

Окончательно, линейный физический закон для однородного изотропного тела будет иметь вид:

$$\sigma_1 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_1 \quad ,$$

$$\sigma_2 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_2 \quad ,$$

$$\sigma_3 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_3 \quad .$$

Таким образом, получили, что линейный физический закон, связывающий главные нормальные напряжения с главными линейными деформациями, содержит две упругие постоянные λ и μ , которые носят название постоянных Ламе.

Для построения уравнений линейного физического закона в произвольной системе координат x, y, z используем следующий формальный подход. Составим квадратичную форму:

$$\sigma_1 (\xi')^2 + \sigma_2 (\eta')^2 + \sigma_3 (\zeta')^2 = \lambda \theta \left[(\xi')^2 + (\eta')^2 + (\zeta')^2 \right] + 2\mu \left[\varepsilon_1 (\xi')^2 + \varepsilon_2 (\eta')^2 + \varepsilon_3 (\zeta')^2 \right] \quad (4.1)$$

Очевидно, что построенная квадратичная форма (4.1) представляет формальную запись линейного физического закона в главной системе координат. Соответственно, для того, чтобы получить линейный физический закон в произвольной системе координат, достаточно от канонического вида квадратичных форм перейти к обычному.

Квадратичная форма типа $\sigma_1 (\xi')^2 + \sigma_2 (\eta')^2 + \sigma_3 (\zeta')^2$ может быть получена достаточно легко из следующих соображений.

Рассмотрим произвольную площадку с нормалью $\vec{n}$ в системе главных осей координат 1, 2, 3. Нормальное напряжение на этой площадке можно записать в форме:

$$\sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \quad .$$

Возьмем теперь вектор длиной p , направленный по нормали к площадке. Если ξ', η', ζ' – компоненты этого вектора, то

$$l = \xi' / p \quad , \quad m = \eta' / p \quad , \quad n = \zeta' / p \quad ,$$

что позволяет переписать соотношение для напряжения σ_n в виде

$$\sigma_n p^2 = \sigma_1 (\xi')^2 + \sigma_2 (\eta')^2 + \sigma_3 (\zeta')^2 \quad .$$

Аналогично, но теперь уже в произвольной системе координат x, y, z , когда проекции того же вектора будут равны ξ, η, ζ , имеем:

$$l' = \xi / p \quad , \quad m' = \eta / p \quad , \quad n' = \zeta / p$$

и, соответственно, соотношение для напряжения σ_n можем записать в виде:

$$\sigma_n p^2 = \sigma_x \xi^2 + \sigma_y \eta^2 + \sigma_z \zeta^2 + 2\tau_{xy} \xi \eta + 2\tau_{yz} \eta \zeta + 2\tau_{zx} \zeta \xi \quad .$$

Сравнивая две выписанные для $\sigma_n p^2$ зависимости, можно видеть, что квадратичная форма в главных осях $\sigma_1 (\xi')^2 + \sigma_2 (\eta')^2 + \sigma_3 (\zeta')^2$ при переходе к произвольной системе координат x, y, z принимает следующий вид:

$$\sigma_x \xi^2 + \sigma_y \eta^2 + \sigma_z \zeta^2 + 2\tau_{xy} \xi \eta + 2\tau_{yz} \eta \zeta + 2\tau_{zx} \zeta \xi \quad .$$

Тем самым вопрос о преобразовании левой части соотношения (4.1) при переходе к системе координат x, y, z решен. Посмотрим теперь, как преобразуется правая часть этого соотношения.

В первое слагаемое правой части входит величина $(\xi')^2 + (\eta')^2 + (\zeta')^2$ – квадрат длины рассматриваемого вектора. В новой системе координат его компонентами, как уже говорилось, будут величины ξ, η, ζ и квадрат его длины равен $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$. Отсюда сразу следует:

$$(\xi')^2 + (\eta')^2 + (\zeta')^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 \quad .$$

Что же касается величины $\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$, то поскольку это есть линейный инвариант тензора деформации, сразу пишем

$$\theta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad .$$

Второе слагаемое правой части $\varepsilon_1 (\xi')^2 + \varepsilon_2 (\eta')^2 + \varepsilon_3 (\zeta')^2$ представляет квадратичную форму того же типа, как ранее рассмотрен-

ная квадратичная форма для напряжений. Вспомнив, что преобразования для компонентов деформаций будут записываться аналогично, если ввести половинки деформаций сдвига, сразу имеем, что рассматриваемая квадратичная форма приводится к виду:

$$\varepsilon_x \xi^2 + \varepsilon_y \eta^2 + \varepsilon_z \zeta^2 + 2 \frac{\gamma_{xy}}{2} \xi \eta + 2 \frac{\gamma_{yz}}{2} \eta \zeta + 2 \frac{\gamma_{zx}}{2} \zeta \xi .$$

Окончательно, составленная нами квадратичная форма (4.1), представляющая линейный физический закон в главной системе координат, в системе координат x, y, z примет вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x \xi^2 + \sigma_y \eta^2 + \sigma_z \zeta^2 + 2\tau_{xy} \xi \eta + 2\tau_{yz} \eta \zeta + 2\tau_{zx} \zeta \xi = \lambda \theta (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \\ + 2\mu (\varepsilon_x \xi^2 + \varepsilon_y \eta^2 + \varepsilon_z \zeta^2 + \gamma_{xy} \xi \eta + \gamma_{yz} \eta \zeta + \gamma_{zx} \zeta \xi) . \end{aligned}$$

Полученное равенство справедливо для вектора произвольной длины, т.е. при любых значениях ξ, η, ζ . Следовательно, коэффициенты при одинаковых степенях $\xi^2, \eta^2, \dots, \zeta \xi$ должны быть равны между собой, и можем в таком случае записать:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x , & \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy} , \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_y , & \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz} , \\ \sigma_z &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_z , & \tau_{zx} &= \mu \gamma_{zx} . \end{aligned}$$

Полученные формулы и дают искомую зависимость между компонентами напряжения и компонентами деформации (линейный физический закон) в однородном изотропном теле в произвольной системе координат. Величины λ и μ (постоянные Ламе) представляют собой постоянные, характеризующие упругие свойства данного тела.

Разрешим полученные уравнения относительно компонентов деформации. Будем иметь:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_x - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_y + \sigma_z) , \\
\varepsilon_y &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_y - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_z + \sigma_x) , \\
\varepsilon_z &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_z - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_x + \sigma_y) , \\
\gamma_{xy} &= \frac{1}{\mu} \tau_{xy} , \quad \gamma_{yz} = \frac{1}{\mu} \tau_{yz} , \quad \gamma_{zx} = \frac{1}{\mu} \tau_{zx} .
\end{aligned}$$

Легко видеть, что для однозначного определения деформаций необходимо выполнение следующих условий: $3\lambda + 2\mu \neq 0$ и $\mu \neq 0$.

4.3. Основные упругие постоянные

Упругие свойства однородного изотропного тела (модели тела в теории упругости) характеризуются двумя упругими постоянными Ламе λ и μ . Чтобы иметь возможность определять эти постоянные из экспериментов, очевидно, необходимо выяснить физический смысл этих постоянных, а если это не удастся сделать, то физический смысл любых комбинаций этих постоянных. Желательно, конечно, чтобы эти упругие постоянные (или их комбинации) определялись из простейших экспериментов.

Рассмотрим частный случай напряженного состояния, когда компоненты напряжений имеют следующие значения:

$$\sigma_x = T = \text{const} , \quad \sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 .$$

Соответствующие им компоненты деформаций имеют вид:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot T , \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z = - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot T , \\
\gamma_{xy} &= \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 .
\end{aligned}$$

Предположим, что упругое тело, в котором реализовано данное напряженное состояние, есть тело цилиндрической (или призматической) формы с образующими, параллельными оси x , и основаниями, перпендикулярными к ней.

Используя граничные условия в напряжениях, по заданным компонентам напряжений восстановим внешние нагрузки, действующие на тело. Сразу можем записать, что на боковой поверхности поверхностные силы равны нулю, т.е. боковая поверхность свободна от нагрузок. Действительно, в общем случае

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n ,$$

$$\bar{Y} = \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n ,$$

$$\bar{Z} = \dots ,$$

но для боковой поверхности $l = 0$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ и $\bar{X} = \bar{Y} = \bar{Z} = 0$.

На основании, обращенном в сторону положительной оси x , будем иметь: $\bar{X} = T$, $\bar{Y} = \bar{Z} = 0$ ($l = 1$, $m = 0$, $n = 0$), а на другом основании: $\bar{X} = -T$, $\bar{Y} = \bar{Z} = 0$ ($l = -1$, $m = 0$, $n = 0$).

Очевидно, что если $T > 0$, то имеем задачу растяжения рассматриваемого тела в направлении оси x . При этом происходит удлинение цилиндра в продольном направлении и сжатие в поперечном. Это значит, что при $T > 0$ мы должны записать:

$$\varepsilon_x > 0 , \quad \varepsilon_y = \varepsilon_z < 0 .$$

Данное утверждение можно считать доказанным экспериментально. Также из эксперимента можно выявить наличие двух упругих постоянных материала:

$$E = \frac{T}{\varepsilon_x} \quad \text{и} \quad \nu = \left| \frac{\varepsilon_y}{\varepsilon_x} \right| = \left| \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_x} \right| .$$

Величина E носит название модуля упругости или модуля Юнга и определяется как отношение растягивающего напряжения к вызываемому им относительному продольному удлинению (или сжимающего напряжения к продольному относительному сжатию) при одноосном растяжении (сжатии).

Физическое значение величины ν (коэффициента Пуассона) следует из приведенных соотношений: отношение относительного поперечного сжатия к относительному продольному удлинению при растяжении (или отношение поперечного расширения к продольному сжатию при сжатии) есть величина постоянная, не зависящая от формы сечения растягиваемого стержня и от величины растягиваемого усилия.

Сопоставление соотношений, полученных экспериментально, и записанных ранее формул для ε_x , ε_y , ε_z , определяющих деформирование модели упругого тела при растяжении, позволяет получить:

$$\frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} = E \quad , \quad \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} = \nu \quad .$$

Полученные соотношения дают возможность выразить «старые» упругие постоянные λ и μ через «новые» E и ν :

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad ,$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad .$$

Аналогично модулю упругости E при растяжении вводят понятие модуля упругости при сдвиге (кручении) или модуля упругости второго рода как отношение касательного напряжения к соответствующей деформации сдвига, и вводят для него обозначение G . Из формул для угловых деформаций (деформаций сдвига) видим, что $G = \mu$.

Запишем уравнения физического закона, пользуясь новыми упругими характеристиками E и ν . Они будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad , \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)] \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \quad , \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] \quad , \quad \gamma_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx} \quad ,\end{aligned}$$

Выписанные соотношения часто называют обобщенным законом Гука.

Складывая первые три уравнения физического закона, получим следующую зависимость между относительным изменением объема и суммой нормальных напряжений:

$$\theta = (1 - 2\nu)(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / E \quad .$$

В случае равномерного гидростатического давления (сжатия) p имеем $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = -p$ и тогда

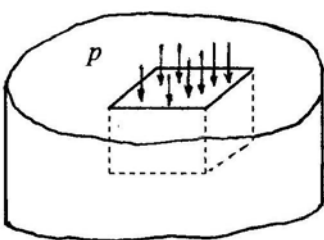
$$\theta = -\frac{3(1 - 2\nu)}{E} \cdot p \quad .$$

Полученная формула устанавливает связь между относительным изменением объема (объемной деформации) и гидростатическим давлением. Величину $K = E / 3(1 - 2\nu)$ называют модулем объемной деформации (модулем всестороннего сжатия). Очевидно, что при $p > 0$ происходит уменьшение объема, т.е. $K > 0$. Отсюда сразу следует, что для упругого тела коэффициент Пуассона всегда меньше $1/2$ ($\nu < 1/2$).

Модуль объемной деформации, представленный через постоянные Ламе, имеет вид

$$K = \lambda + \frac{2}{3}\mu .$$

Задачи

4.1.		Стальной кубик, вставленный плотно без зазоров в отверстие (паз) в массивной плите, вдавливается в нее давлением p. Принимая плиту абсолютно жесткой и полагая, что трение между гранями кубика и стенками паза отсутствует, найти давление на стенки паза.
------	---	---

Из физических соображений ясно, что если кубик считать недеформируемым (абсолютно жестким), то давление на стенки паза будет равно нулю. С другой стороны, давление на стенки паза было бы равно p , если бы материал кубика вел бы себя как несжимаемая жидкость. Очевидно, что эти две оценки являются крайними.

Для решения поставленной задачи необходимо привлечь уравнения физического закона, поскольку в решении должны фигурировать характеристики материала кубика.

Рассмотрим напряженное и деформированное состояние элемента, выделенного в кубике (рис. 4.3).

Можно утверждать, что грани элемента являются главными площадками, так как на них касательные напряжения равны нулю (трение между гранями кубика и стенками паза отсутствует). Поскольку давление на стенки паза по модулю должно быть меньше p , имеем $\sigma_3 = -p$. С другой стороны, принимая плиту абсолютно жесткой, получаем $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$.

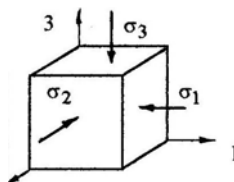


Рис. 4.3

Оставшиеся неизвестные параметры напряженного и деформированного состояния элемента $\sigma_1 = \sigma_2$ и ε_3 определим из уравнений физического закона:

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \nu(\sigma_2 + \sigma_3)] , \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \nu(\sigma_3 + \sigma_1)] , \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \nu(\sigma_1 + \sigma_2)] .\end{aligned}$$

Для определения напряжений $\sigma_1 = \sigma_2$ достаточно рассмотреть первое уравнение, откуда получаем:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_3 .$$

Анализ данного соотношения позволяет получить интервал изменения коэффициента Пуассона: $0 < \nu \leq 1/2$.

4.2.	Показать, что деформированное состояние $\varepsilon_x = -\varepsilon_y = A \sin 2\alpha$, $\gamma_{xy} = A \cos 2\alpha$, $\varepsilon_z = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$, где A – постоянная, эквивалентно простому сдвигу от τ .
------	--

Будем считать, в системе координат $\bar{x}o\bar{y}$ реализовано состояние простого (чистого) сдвига. Соответствующее деформированное состояние имеет вид: $\varepsilon_{\bar{x}} = \varepsilon_{\bar{y}} = 0$, $\gamma_{\bar{x}\bar{y}} = \gamma = \tau/\mu$.

Перейдем к новой системе координат xoy , повернутой относительно старой на угол α . Учитывая значения направляющих косинусов ($l_1 = \cos \alpha$, $m_1 = \sin \alpha$ для оси x ; $l_2 = -\sin \alpha$, $m_2 = \cos \alpha$ для оси y), деформированное состояние в новой системе координат будет определяться следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \varepsilon_{\bar{x}} l_1^2 + \varepsilon_{\bar{y}} m_1^2 + \gamma_{\bar{x}\bar{y}} l_1 m_1 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{\tau}{2\mu} \sin 2\alpha , \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_{\bar{x}} l_2^2 + \varepsilon_{\bar{y}} m_2^2 + \gamma_{\bar{x}\bar{y}} l_2 m_2 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_y = -\frac{\tau}{2\mu} \sin 2\alpha , \\ \gamma_{xy} &= \varepsilon_{\bar{x}} l_1 l_2 + \varepsilon_{\bar{y}} m_1 m_2 + \frac{\gamma_{\bar{x}\bar{y}}}{2} (l_1 m_2 + l_2 m_1) \quad \Rightarrow \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau}{2\mu} \cos 2\alpha .\end{aligned}$$

Полученное деформированное состояние эквивалентно простому сдвигу от τ и соответствует деформированному состоянию, заданному в условии задачи, при $A = \tau/2\mu$.

5. Уравнения и задачи упругого равновесия

Выпишем полную систему уравнений, вытекающих из трех законов деформирования сплошного твердого тела и определяющих решение задачи теории упругости.

А. Статические уравнения

1. Дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0.\end{aligned}$$

2. Граничные условия в напряжениях:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n, \\ \bar{Y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n, \\ \bar{Z} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n.\end{aligned}$$

В. Геометрические уравнения

3. Связь между перемещениями и деформациями (уравнения Коши):

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}, \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}.\end{aligned}$$

4. Уравнения совместности (неразрывности) деформаций (уравнения Сен-Венана):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad , \\ &\dots , \\ 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad , \\ &\dots \end{aligned}$$

С. Физические уравнения

5. Линейный физический закон:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] \quad , & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \quad , \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} \left[\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x) \right] \quad , & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz} \quad , \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} \left[\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y) \right] \quad , & \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx} \quad . \end{aligned}$$

или, в обратной форме:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x \quad , & \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy} \quad , \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_y \quad , & \tau_{yz} &= \mu \gamma_{yz} \quad , \\ \sigma_z &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_z \quad , & \tau_{zx} &= \mu \gamma_{zx} \quad . \end{aligned}$$

Напомним, что все приведенные уравнения получены в предположении малых деформаций. Это специально оговорено при получении уравнений Коши и линейного физического закона. Дифференциальные уравнения равновесия записаны для недеформированного элемента тела и, очевидно, могут считаться справедливыми только лишь в случае малых деформаций.

Рассматривая характеристики деформированного тела (перемещения, деформации и напряжения), в качестве независимых

можно выделить перемещения и напряжения, ибо деформации непосредственно связаны с перемещениями зависимостями Коши.

На этом основании можем систему основных уравнений привести к такому виду:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0.\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, & \tau_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \\ \sigma_y &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, & \tau_{yz} &= \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right), \\ \sigma_z &= \lambda \theta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z}, & \tau_{zx} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right).\end{aligned}\tag{5.2}$$

Девять уравнений (5.1) и (5.2) содержат девять неизвестных функций $u, v, w, \sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$. Для того, чтобы назвать систему уравнений (5.1) и (5.2) полной, мы должны убедиться, что эта система определяет упругое равновесие тела, если заданы внешние усилия и объемные силы.

Упругое равновесие тела считается известным, если известны компоненты напряжений, перемещений и деформаций в каждой его точке.

Для того, чтобы доказать, что имеющаяся система уравнений определяет упругое равновесие тела, нам нужно доказать, что эта система вообще имеет решение, т.е. что решение существует, и что оно единственное.

Существование решения доказано в настоящее время с полной математической строгостью при достаточно общих условиях, одна-

ко доказательство представляет большие трудности и требует применения самых сложных средств математического анализа. Если же рассматривать вопрос существования решения задач теории упругости с физической точки зрения, то он не представляет особого значения, так как очевидно, что любое сплошное тело, определенным образом нагруженное и закрепленное, должно иметь хотя бы одно положение равновесия (при условии, конечно, что возникающие в нем деформации не нарушают его сплошности). Поэтому сомнение в существовании решения уравнений теории упругости, по существу, означает сомнение в правильности этих уравнений в смысле соответствия их рассматриваемой физической задаче. Однако те рассуждения, с помощью которых основные уравнения были получены, опираются на вполне достоверные физические принципы, ввиду чего полученные уравнения полностью соответствуют рассматриваемой проблеме и, следовательно, не могут приводить к абсурдным результатам. Они обязаны давать решение любой конкретной задачи, имеющей реальный смысл и правильно поставленной (в смысле соответствия ее постановки исходным допущениям). Поэтому примем факт существования решения без доказательства и докажем, что существующее решение является единственным.

Будем считать, что под действием заданных поверхностных $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$ и объемных X , Y , Z сил имеем две различные системы компонентов напряжений σ'_{ij} и σ''_{ij} . Обе эти системы должны удовлетворять дифференциальным уравнениям равновесия и граничным условиям.

Почленным вычитанием соответствующих слагаемых упомянутых уравнений можем получить новую систему уравнений, в которую в качестве неизвестных входят разности напряжений ($\sigma'_{ij} - \sigma''_{ij}$) как некоторая новая система напряжений.

Однако, как показывают эти уравнения, новая система напряжений существует при отсутствии поверхностных и объемных сил, и поэтому она на основании гипотезы о естественном состоянии тела должна быть равна нулю, а в этом случае

$$\sigma'_{ij} = \sigma''_{ij} .$$

С математической точки зрения построенное доказательство базируется на линейности исходной системы уравнений и, соответственно, возможности вычитать (складывать) уравнения. С физической точки зрения эта процедура может привести к многозначности решения. В качестве примера можно рассмотреть задачу устойчивости (задачу Эйлера), когда при действии каждой из сил $p_1 < p_{кр}$ и $p_2 < p_{кр}$ имеем простое сжатие, а при действии их суммы $p_1 + p_2 > p_{кр}$ – потерю устойчивости.

Приведенное доказательство единственности решения задач теории упругости является неполным, так как здесь рассмотрена только статическая сторона вопроса. Общие доказательства единственности решения системы уравнений (5.1) и (5.2) можно найти в литературе.

5.1. Основные граничные задачи теории упругости

Поскольку любая задача теории упругости является граничной задачей, выделим следующие три типа граничных задач в зависимости от вида граничных условий.

1. Первая основная граничная задача:

найти упругое равновесие тела, если заданы внешние усилия, действующие на его поверхности.

По отношению к уравнениям (5.1) и (5.2) эта задача сводится к следующей: найти функции $u, v, w, \sigma_x, \sigma_y, \dots, \tau_{zx}$, удовлетворяющие уравнениям (5.1) и (5.2) в области, занятой телом, и граничным условиям на поверхности тела:

$$\bar{X} = f_1(x, y, z) \quad , \quad \bar{Y} = f_2(x, y, z) \quad , \quad \bar{Z} = f_3(x, y, z) \quad .$$

2. Вторая основная граничная задача:

найти упругое равновесие тела, если заданы смещения точек его поверхности.

В отношении уравнений (5.1) и (5.2) эта задача сводится к нахождению такого их решения, которое удовлетворяет на поверхности тела следующим граничным условиям:

$$u = \varphi_1(x, y, z) \quad , \quad v = \varphi_2(x, y, z) \quad , \quad w = \varphi_3(x, y, z) \quad .$$

3. Третья основная граничная задача – смешанная, когда на одной части поверхности заданы смещения, а на другой – внешние усилия.

5.2. Уравнения теории упругости в перемещениях

Система уравнений (5.1) и (5.2) однозначно определяет упругое равновесие тела, но содержит в качестве неизвестных одновременно и компоненты напряжений, и компоненты перемещений. Часто, однако, гораздо удобнее иметь дело с уравнениями, содержащими в качестве неизвестных или перемещения, или напряжения.

При получении уравнений теории упругости в перемещениях в качестве независимых переменных принимаются перемещения u, v, w . Очевидно, что при этом нет необходимости обращаться к уравнениям Коши, так как по этим уравнениям, если перемещения найдены, деформации всегда будут определены однозначно. Кроме того, нет необходимости обращаться к уравнениям совместности деформаций Сен-Венана, поскольку они нужны при определении компонентов перемещения через заданные компоненты деформации. Отсюда следует, что перемещения u, v, w нужно подбирать таким образом, чтобы были удовлетворены дифференциальные уравнения равновесия элемента.

Подставим значения напряжений в соответствии с физическим законом в форме Ламе (5.2) в уравнения равновесия (5.1). Рассмотрим первое уравнение равновесия. Будем иметь:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + X = 0$$

или

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + X = 0 \quad .$$

С введением в рассмотрение оператора Лапласа ∇^2 , первое уравнение равновесия приводится к виду:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = 0 \quad .$$

Второе и третье уравнения равновесия преобразуются аналогично, однако их можно записать, делая круговую замену индексов.

Полученные уравнения называют уравнениями равновесия в перемещениях или уравнениями Ламе.

Перемещения, найденные с помощью уравнений Ламе, должны подчиняться граничным условиям. При этом могут встретиться три варианта граничных условий в соответствии с классификацией граничных задач теории упругости:

- в рассматриваемой точке поверхности заданы значения всех трех компонентов перемещения (вторая основная граничная задача). Эти граничные условия можно использовать без преобразований;

- в рассматриваемой точке поверхности заданы три составляющие поверхностных сил $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$. Такие граничные условия нужно «перевести» в условия для перемещений:

$$\begin{aligned} \bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \bar{X} &= \lambda \theta l + 2\mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) m + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n \right] \quad . \end{aligned}$$

Остальные два граничных условия запишутся аналогично;

- смешанные граничные условия.

Отметим, что решение задачи теории упругости в перемещениях позволяет по найденным компонентам перемещения легко найти деформации (с помощью зависимостей Коши), а затем и напряжения (с помощью уравнений физического закона).

5.3. Уравнения теории упругости в напряжениях

Для решения задачи теории упругости в напряжениях, прежде всего, необходимо рассмотреть дифференциальные уравнения равновесия. Но если напряжения σ_{ij} удовлетворяют этим уравнениям, это еще не значит, что они определяют некоторое действительное напряженное состояние, поскольку необходимо, чтобы по этим напряжениям можно было бы найти однозначно компоненты перемещений u, v, w . А это возможно лишь только тогда, когда компоненты деформаций, соответствующие найденным напряжениям, будут удовлетворять условиям совместности деформаций Сен-Венана.

Таким образом, для решения задачи в напряжениях необходимо наряду с дифференциальными уравнениями равновесия использовать условия совместности деформаций, преобразованные с применением уравнений физического закона (с заменой компонентов деформаций на компоненты напряжений).

Выпишем два условия совместности деформаций Сен-Венана:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} ,$$

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) .$$

Уравнения физического закона, необходимые для замены компонентов деформаций на компоненты напряжений, запишем в форме:

$$\varepsilon_x = \frac{1+\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma ,$$

$$\dots ,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} ,$$

$$\dots ,$$

где $\sigma = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$.

Подставляем значения деформаций согласно приведенным формулам в первое выписанное уравнение совместности деформаций:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_x - \frac{\nu}{E} \sigma \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{1+\nu}{E} \sigma_y - \frac{\nu}{E} \sigma \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left[\frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} \right].$$

После некоторых преобразований получим:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} \right) = 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (5.3)$$

Второе выписанное уравнение совместности деформаций после аналогичных преобразований принимает вид

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} - \frac{\nu}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial z} \right). \quad (5.4)$$

Круговой подстановкой можем получить еще четыре подобных соотношения (по два каждого типа), соответствующих остальным условиям совместности.

Дальнейшие преобразования уравнения типа (5.3) проведем, заменяя касательное напряжение в правой части на нормальные, привлекая дифференциальные уравнения равновесия. С этой целью первое уравнение равновесия дифференцируем по x , а второе – по y . Полученные два уравнения складываем. Будем иметь:

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right) = - \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right).$$

Но на основании последнего уравнения равновесия, продифференцировав его по z , имеем, что

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right) = - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \frac{\partial Z}{\partial z} .$$

С учетом данного обстоятельства можем получить, что

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = - \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial Z}{\partial z} .$$

Подставляем полученное значение производной $\partial^2 \tau_{xy} / \partial x \partial y$ в преобразованное уравнение совместности (5.3). Учитывая, что $\sigma_x + \sigma_y = \sigma - \sigma_z$, и вводя обозначение оператора Лапласа ∇^2 , после несложных преобразований приводим уравнение (5.3) к виду:

$$\frac{1}{1+\nu} \nabla^2 \sigma - \nabla^2 \sigma_z - \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} = - \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial Z}{\partial z} .$$

Два аналогичных уравнения получаем круговой перестановкой индексов:

$$\frac{1}{1+\nu} \nabla^2 \sigma - \nabla^2 \sigma_x - \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} = - \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial X}{\partial x} ,$$

$$\frac{1}{1+\nu} \nabla^2 \sigma - \nabla^2 \sigma_y - \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} = - \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) + 2 \frac{\partial Y}{\partial y} .$$

Складывая все три полученных уравнения, получаем соотношение

$$\nabla^2 \sigma = - \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) ,$$

которое представляет интерес не только само по себе, но и позволяет привести полученные три уравнения к окончательному виду:

$$\begin{aligned}\nabla^2 \sigma_x + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial X}{\partial x} , \\ \nabla^2 \sigma_y + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Y}{\partial y} , \\ \nabla^2 \sigma_z + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial z^2} &= -\frac{\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) - 2 \frac{\partial Z}{\partial z} .\end{aligned}$$

Займемся теперь преобразованием трех оставшихся уравнений типа (5.4). Процедуру преобразований также проведем с использованием дифференциальных уравнений равновесия. Дифференцируем второе уравнение равновесия по z , третье по y и полученные соотношения суммируем. Будем иметь:

$$\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \tau_{zy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \tau_{xz}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \tau_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z \partial y} = - \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right) .$$

Сложим полученный результат с уравнением (5.4). После несложных преобразований получим:

$$\nabla^2 \tau_{yz} + \frac{1}{1+\nu} \frac{\partial^2 \sigma}{\partial y \partial z} = - \left(\frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} \right) .$$

Остальные два уравнения получим круговой подстановкой.

Уравнения в представленной форме впервые были получены Митчеллом. Аналогичные уравнения для случая, когда объемные силы равны нулю, были построены Бельтрами, и поэтому эти уравнения будем называть уравнениями Бельтрами – Митчелла.

Итак, решение задачи теории упругости в напряжениях сведено к отысканию шести напряжений как функций координат x, y, z , удовлетворяющих трем уравнениям равновесия, шести соотношениям Бельтрами – Митчелла и, кроме того, подчиняющихся заданным граничным условиям в каждой точке поверхности, ограничивающей тело.

Определив напряжения, можно с помощью уравнений физического закона определить деформации, причем найденные компоненты деформаций будут уже соответствовать условиям совместности Сен-Венана. А это означает, что по найденным компонентам деформации можно однозначно найти компоненты перемещения.

5.4. Общее решение дифференциальных уравнений равновесия

Решение задачи теории упругости в напряжениях требует совместного решения двух систем уравнений: дифференциальных уравнений равновесия и уравнений Бельтрами–Митчелла. Очевидно, что совместное решение этих уравнений сопряжено со значительными математическими трудностями.

Покажем, что система дифференциальных уравнений равновесия может быть решена в общем виде для случая, когда объемные силы равны нулю. Ясно, что наличие такого решения может облегчить дальнейшее решение задачи теории упругости в напряжениях, поскольку останется интегрировать только уравнения Бельтрами–Митчелла.

Одна из форм общего решения предложена Максвеллом. Пусть мы имеем три произвольные функции φ_1 , φ_2 , φ_3 переменных x , y , z . Введем касательные напряжения в следующем виде:

$$\tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial x \partial y}, \quad \tau_{yz} = -\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y \partial z}, \quad \tau_{zx} = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z \partial x}.$$

(одна формула получена из другой круговой заменой индексов). Подставим τ_{xy} и τ_{xz} в первое дифференциальное уравнение равновесия. Будем иметь:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{\partial^3 \varphi_3}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 \varphi_2}{\partial z^2 \partial x}.$$

Интегрируем полученное соотношение по переменной x , отбрасывая неизвестную функцию, поскольку она не играет никакой роли из-за достаточной произвольности трех исходных функций φ_1 , φ_2 , φ_3 . В результате имеем:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial z^2}.$$

Аналогичные формулы можно получить для напряжений σ_y и σ_z .

Проведенные преобразования показывают, что, представляя определенным образом компоненты напряжения через введенные функции φ_1 , φ_2 , φ_3 , можем удовлетворить дифференциальные уравнения равновесия. Отыскание самих функций связано уже с решением уравнений Бельтрами – Митчелла и с подчинением решения граничным условиям. Введенные функции φ_1 , φ_2 , φ_3 носят название функций напряжений Максвелла.

Аналогичным образом построено решение Морера. Он также рассматривает три произвольные функции координат x , y , z , но представляет через них нормальные напряжения, а соотношения для касательных находит из дифференциальных уравнений равновесия.

Решения Максвелла и Морера не являются единственно возможными. Общие решения дифференциальных уравнений равновесия в различных формах можно найти в литературе.

5.5. Приведение уравнений Ламе и Бельтрами – Митчелла к бигармоническим уравнениям

Уравнения Ламе и уравнения Бельтрами – Митчелла при отсутствии объемных сил могут быть приведены к бигармоническим уравнениям. Это утверждение, по сути, является утверждением, что все неизвестные величины в задаче теории упругости могут быть представлены бигармоническими функциями.

Рассмотрим первое из уравнений Ламе, которое при отсутствии объемных сил имеет вид:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0 \quad .$$

Применим к уравнению оператор Лапласа:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \theta + \mu \nabla^2 \nabla^2 u = 0 \quad .$$

Соотношение для функции $\nabla^2 \theta$ можем получить, используя те же уравнения Ламе. Дифференцируем первое уравнение по x , второе по y , третье по z и складываем. Легко видеть, что при отсутствии объемных сил получим:

$$(\lambda + 2\mu) \nabla^2 \theta = 0 \quad ,$$

т.е. для однородной задачи $\nabla^2 \theta = 0$ (θ – гармоническая функция). Отсюда сразу следует, что

$$\nabla^2 \nabla^2 u = 0 \quad .$$

Аналогичным образом получаем и два других бигармонических уравнения относительно перемещений v и w :

$$\nabla^2 \nabla^2 v = 0 \quad ,$$

$$\nabla^2 \nabla^2 w = 0 \quad .$$

Можем утверждать, что функции $u = \Phi_1(x, y, z)$, $v = \Phi_2(x, y, z)$, $w = \Phi_3(x, y, z)$ являются бигармоническими функциями.

Перейдем к уравнениям Бельтрами – Митчелла. При решении задачи теории упругости в напряжениях получили:

$$\nabla^2 \sigma = - \frac{1 + \nu}{1 - \nu} \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} \right) \quad .$$

При отсутствии объемных сил имеем, что $\nabla^2 \sigma = 0$ (σ – гармоническая функция). Применяя оператор Лапласа к каждому из уравнений Бельтрами – Митчелла, сразу же получаем, что

$$\nabla^2 \nabla^2 \sigma_x = 0 \quad \text{и т.д.}$$

Отметим, что приведение, например, уравнений Ламе к бигармоническим уравнениям и введение бигармонических функций Φ_1, Φ_2, Φ_3 не говорит о том, что эти функции произвольные: связь между ними определяется уравнениями Ламе.

5.6. Общее решение уравнений теории упругости в перемещениях (метод П. Ф. Папковича)

Приведение однородных уравнений Ламе к бигармоническим уравнениям позволяет говорить о построении общего решения с использованием бигармонических функций, связанных между собой. Соответственно, возникает вопрос о возможности построения решения этих уравнений с использованием функций более простого типа и при этом независимых друг от друга.

Введем вспомогательную функцию $\theta = \nabla^2 \psi$. Так как $\nabla^2 \theta = 0$, то ψ – бигармоническая функция. Подставим введенную функцию $\theta = \nabla^2 \psi$ в первое уравнение Ламе. Будем иметь:

$$\nabla^2 u + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \left[u + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x} \right] = 0 \quad .$$

Рассмотрев подобным образом оставшиеся два уравнения Ламе, можем утверждать, что функции

$$\Phi_x = u + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \Phi_y = v + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \Phi_z = w + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right) \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

являются произвольными гармоническими функциями, так как они удовлетворяют уравнениям Ламе, но не связаны между собой. Учитывая, что $1 + (\lambda/\mu) = 1/(1 - 2\nu)$, полученные соотношения можем переписать в виде:

$$\begin{aligned} u &= \Phi_x - \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \psi}{\partial x} , \\ v &= \Phi_y - \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \psi}{\partial y} , \\ w &= \Phi_z - \frac{1}{1 - 2\nu} \frac{\partial \psi}{\partial z} . \end{aligned}$$

По найденным значениям u , v , w определим относительное изменение объема θ :

$$\theta = \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} - \frac{1}{1 - 2\nu} \nabla^2 \psi .$$

Учитывая, что функция ψ введена посредством соотношения $\theta = \nabla^2 \psi$, получим следующее уравнение для определения этой би-гармонической функции:

$$\frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} = \frac{2(1 - \nu)}{1 - 2\nu} \nabla^2 \psi .$$

Простой подстановкой легко убедиться, что если мы возьмем ψ в виде

$$\psi = \frac{1 - 2\nu}{4(1 - \nu)} (\Phi_0 + x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z) ,$$

то уравнение удовлетворяется (здесь Φ_0 – произвольная гармоническая функция). Зная теперь значение функции ψ , находим, что

$$\begin{aligned}
u &= \Phi_x - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial x} (\Phi_0 + x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z) , \\
v &= \Phi_y - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial y} (\Phi_0 + x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z) , \\
w &= \Phi_z - \frac{1}{4(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial z} (\Phi_0 + x\Phi_x + y\Phi_y + z\Phi_z) .
\end{aligned}$$

Итак, общее решение однородных уравнений Ламе представлено через четыре произвольные, независимые друг от друга гармонические функции. Приведенная форма общего решения однородных уравнений Ламе принадлежит Папковичу П.Ф.

Анализ полученных соотношений показывает, что функция Φ_0 может быть удалена из рассмотрения без ограничения общности решения.

Формулы Папковича П.Ф. дают общее решение уравнений Ламе, но решение задачи теории упругости на этом не исчерпывается – необходимо подчинить это решение конкретным граничным условиям.

В настоящее время общие решения используются чаще всего при решении трехмерных задач теории упругости.

5.7. Пропорциональность перемещений, напряжений и деформаций действующей нагрузке

Будем считать, что задача определения упругого равновесия при действии нагрузок X, Y, Z и $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ решена: получено решение уравнений Ламе u, v, w , удовлетворяющее заданным граничным условиям в напряжениях.

Примем, что значения действующих поверхностных и объемных сил изменились пропорционально одному и тому же параметру $\lambda > 1$:

$$\begin{aligned}
X' &= \lambda X, \quad Y' = \lambda Y, \quad Z' = \lambda Z, \\
\bar{X}' &= \lambda \bar{X}, \quad \bar{Y}' = \lambda \bar{Y}, \quad \bar{Z}' = \lambda \bar{Z}.
\end{aligned}$$

Посмотрим, как при этом изменятся перемещения, напряжения и деформации.

Сразу же видно, что в силу линейности и уравнений Ламе, и граничных условий, они будут удовлетворяться, если положить

$$u' = \lambda u, \quad v' = \lambda v, \quad w' = \lambda w, \quad ,$$

где u, v, w – перемещения, соответствующие «старой» внешней нагрузке. Следовательно, перемещения изменились пропорционально изменению внешней нагрузки.

Очевидно, что использование полученного результата в зависимостях Коши, а затем и в уравнениях линейного физического закона позволяет сделать вывод о пропорциональности и деформаций, и напряжений действующей внешней нагрузке.

Другим важным следствием линейности уравнений теории упругости является так называемый принцип независимости действия внешних сил (или принцип наложения).

Предположим, что нам известны перемещения точек u', v', w' некоторого упругого тела, соответствующие приложенным внешним силам $X', Y', Z', \bar{X}', \bar{Y}', \bar{Z}'$, а также другие перемещения u'', v'', w'' , соответствующие другой внешней нагрузке $X'', Y'', Z'', \bar{X}'', \bar{Y}'', \bar{Z}''$.

Принцип независимости действия сил утверждает, что в рамках линейной теории упругости, перемещения

$$u = u' + u'', \quad v = v' + v'', \quad w = w' + w'', \quad ,$$

соответствующие суммарной нагрузке

$$\begin{aligned} X &= X' + X'' , & Y &= Y' + Y'' , & Z &= Z' + Z'' , \\ \bar{X} &= \bar{X}' + \bar{X}'' , & \bar{Y} &= \bar{Y}' + \bar{Y}'' , & \bar{Z} &= \bar{Z}' + \bar{Z}'' , \end{aligned}$$

также являются решением уравнений Ламе и граничных условий.

С математической точки зрения построение доказательства базируется на возможности суммировать почленно уравнения Ламе и граничные условия в напряжениях, что позволительно в силу ли-

нейности рассматриваемых уравнений. С физической точки зрения, как уже отмечалось, эта процедура может привести к многозначности решения (например, задача Эйлера). В дальнейшем задачи, не отвечающие принципу независимости действия сил, рассматривать не будем.

Рассмотренные принципы в некоторых случаях позволяет свести решение сложной задачи линейной теории упругости к решению двух или нескольких более простых задач.

Пусть, например, известно решение задачи о растяжении квадратной пластины, имеющей круговое отверстие, силами p , равномерно распределенными по двум её кромкам (рис. 5.1, а).

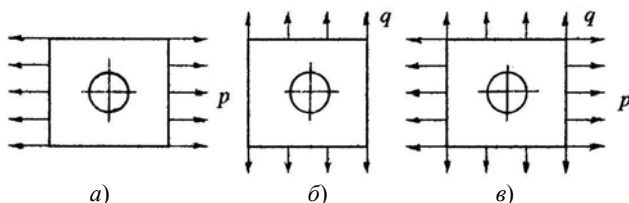


Рис. 5.1

В силу пропорциональности перемещений напряжений и деформаций действующим внешним нагрузкам из этого решения сразу можно получить решение задачи о сжатии той же пластины силами q , равномерно распределенными по двум противоположным кромкам (рис. 5.1, б). Для этого нужно ввести параметр $\lambda = -q/p$. Далее, воспользовавшись принципом наложения, можно построить решение задачи о напряжениях в квадратной пластине, подвергающейся одновременно и растяжению, и сжатию (рис. 5.1, в).

Пользуясь принципом независимости действия сил, неоднородную задачу теории упругости (задачу с объемными силами, отличными от нуля) можно свести к однородной (с объемными силами, равными нулю). Действительно, решение неоднородной системы уравнений Ламе можем записать в виде:

$$u = u_0 + \tilde{u} \quad , \quad v = v_0 + \tilde{v} \quad , \quad w = w_0 + \tilde{w} \quad ,$$

где u_0 , v_0 , w_0 – общее решение однородных уравнений Ламе; $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ – произвольное частное решение неоднородных уравне-

ний Ламе, не отвечающее (не подчиняющееся) граничным условиям рассматриваемой задачи.

Во многих задачах частные решения находятся сравнительно просто (примеры можно найти в литературе). Тогда решение всей задачи сводится к отысканию функций u_0 , v_0 , w_0 , удовлетворяющим однородным уравнениям Ламе и граничным условиям.

Граничные условия для перемещений u_0 , v_0 , w_0 находим из граничных условий для u , v , w , подставляя в них значения $u = u_0 + \tilde{u}$, ... Так, например, если на поверхности Ω граничные условия заданы в виде $u = 0$, $v = 0$, $w = 0$, то граничные условия для u_0 , v_0 , w_0 будут иметь вид $u_0 = -\tilde{u}$, $v_0 = -\tilde{v}$, $w_0 = -\tilde{w}$ на той же поверхности.

6. Постановка температурных задач линейной теории упругости

Предположим, что до деформирования точки тела имели температуру T_0 , а после деформирования – температуру T_1 (T_0 и T_1 – функции координат x , y , z).

Будем считать, что разность температур $T = T_1 - T_0$ такова, что не меняет механических свойств материала. Это означает, что если провести механические испытания образца на растяжение при температуре T_0 , а затем при T_1 , то значения упругих постоянных E и ν получатся в обоих случаях одинаковые.

Учитывая принятое предположение, можно утверждать, что единственным следствием нагрева (с точки зрения влияния на деформирование тела) будет возникновение дополнительных деформаций, обусловленных всесторонним тепловым расширением. Эти деформации накладываются на упругие и должны быть учтены при формулировке задачи.

В соответствии с этим утверждением можем записать:

$$\varepsilon_x = \tilde{\varepsilon}_x + \bar{\varepsilon}_x, \quad \varepsilon_y = \tilde{\varepsilon}_y + \bar{\varepsilon}_y, \quad \varepsilon_z = \tilde{\varepsilon}_z + \bar{\varepsilon}_z,$$

где $\tilde{\varepsilon}_x$, $\tilde{\varepsilon}_y$, $\tilde{\varepsilon}_z$ – упругие деформации, т.е. деформации, вызванные приложенными внешними нагрузками; $\bar{\varepsilon}_x$, $\bar{\varepsilon}_y$, $\bar{\varepsilon}_z$ – деформации, обусловленные объемным расширением тела в результате изменения температуры. Очевидно, что температурные деформации можно определить следующими соотношениями:

$$\begin{aligned}\bar{\varepsilon}_x &= \bar{\varepsilon}_y = \bar{\varepsilon}_z = \alpha T, \\ \bar{\gamma}_{xy} &= \bar{\gamma}_{yz} = \bar{\gamma}_{zx} = 0.\end{aligned}$$

Упругие деформации будут подчиняться одному и тому же физическому закону как при температуре T_1 , так и при температуре T_0 (в силу принятого допущения). Поэтому для суммарных деформаций линейный физический закон можно записать в форме:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)] + \alpha T, & \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu (\sigma_z + \sigma_x)] + \alpha T, & \gamma_{yz} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{yz}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)] + \alpha T, & \gamma_{zx} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{zx}.\end{aligned}$$

Соответственно, соотношения физического закона в форме Ламе принимают вид

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda \theta + 2\mu \varepsilon_x - (2\mu + 3\lambda) \cdot \alpha T, \\ &\dots, \\ \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy}, \\ &\dots\end{aligned}$$

Будем далее считать, что компоненты полной деформации связаны с компонентами полного перемещения обычными соотношениями Коши.

Дифференциальные уравнения равновесия объемного элемента остаются без изменения, и, таким образом, полная система уравне-

ний для решений температурной задачи теории упругости определена.

Решим поставленную температурную задачу в перемещениях. Следуя общей схеме получения уравнений в перемещениях, уравнения Ламе получим в виде:

$$\begin{aligned}(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + F_x &= 0 \quad , \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + F_y &= 0 \quad , \\(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + F_z &= 0 \quad ,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}F_x &= X - (2\mu + 3\lambda) \cdot \alpha \frac{\partial T}{\partial x} \quad , \\F_y &= Y - (2\mu + 3\lambda) \cdot \alpha \frac{\partial T}{\partial y} \quad , \\F_z &= Z - (2\mu + 3\lambda) \cdot \alpha \frac{\partial T}{\partial z} \quad .\end{aligned}$$

Таким образом, если считать температуру нагрева заданной функцией координат точек, то учет нагрева при решении задачи в перемещениях формально сводится к появлению в уравнениях Ламе дополнительной объемной силы, которая в каждой точке тела будет пропорциональна градиенту температуры.

Посмотрим, какой вид будут иметь граничные условия на тех участках поверхности тела, где заданы внешние силы. Для этого соответствующим образом преобразуем граничные условия:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \quad , \\ \bar{Y} &= \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \quad , \\ \bar{Z} &= \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \quad ,\end{aligned}$$

подставляя напряжения, представленные через перемещения. Будем иметь:

$$\begin{aligned}\bar{F}_x &= \lambda \theta l + 2\mu \left[\frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) m + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) n \right], \\ \bar{F}_y &= \dots, \\ \bar{F}_z &= \dots\end{aligned}$$

Здесь введены обозначения:

$$\begin{aligned}\bar{F}_x &= \bar{X} + (2\mu + 3\lambda) \cdot \alpha T l, \\ \bar{F}_y &= \bar{Y} + (2\mu + 3\lambda) \cdot \alpha T m, \\ \bar{F}_z &= \bar{Z} + (2\mu + 3\lambda) \cdot \alpha T n.\end{aligned}$$

Видим, что в граничных условиях появились дополнительные слагаемые, которые могут рассматриваться как фиктивная нагрузка, распределенная на тех участках поверхности, где граничные условия формулируются в напряжениях. Что касается участков поверхности тела, где заданы перемещения, то для них формулировка граничных условий остается прежней.

Тот факт, что изменение температуры формально эквивалентно появлению дополнительных внешних объемных и поверхностных сил, говорит о том, что путем только одного нагрева (или охлаждения) упругого тела можно вызвать в нем напряжения.

Методы решения температурных задач теории упругости не отличаются от методов решения статических задач, так как изменения, как мы видим, вносятся только в свободные члены уравнений.

7. Постановка динамических задач линейной теории упругости

В динамических задачах компоненты перемещения, деформаций и напряжений представляют собой функции не только координат x , y , z , но и времени t .

Получение уравнений динамики упругого тела особого затруднения не представляет. Эти уравнения могут быть получены сразу из уравнений статики на основании принципа Даламбера: для этого достаточно переписать уравнения статики, добавив к объемным силам силы инерции.

Компоненты силы инерции, приложенной к элементу объема dV , имеющему массу $dm = \rho dV$, где ρ – плотность материала, отнесенные к единице объема, имеют вид:

$$-\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad -\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad -\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

где $\partial^2 u / \partial t^2, \dots$ – компоненты ускорения точки (элементарного объема).

Присоединяя силы инерции к объемной силе и внося их в уравнения равновесия, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y &= \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}. \end{aligned}$$

Уравнения физического закона, очевидно, остаются без изменения, так как объемные силы в них не фигурируют. То же самое можно сказать и об уравнениях Коши, и о граничных условиях в напряжениях.

При решении динамических задач теории упругости удобнее пользоваться уравнениями в перемещениях, процедура получения которых остается прежней. Будем иметь:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} ,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + Y = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} ,$$

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + Z = \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} .$$

Динамические задачи можно ставить совершенно аналогично тем основным граничным задачам, которые были сформулированы для статического нагружения. Существенным отличием динамических задач будет то, что к граничным условиям мы еще должны, присоединить так называемые «начальные условия», определяющие значения перемещений и скоростей смещений точек тела в «начальный» момент времени t_0 .

Например, первая основная граничная задача должна быть сформулирована следующим образом:

найти перемещения $u(x, y, z, t)$, $v(x, y, z, t)$, $w(x, y, z, t)$, удовлетворяющие уравнениям Ламе, граничным условиям $\bar{X} = f_1$, $\bar{Y} = f_2$, $\bar{Z} = f_3$ на поверхности тела во все моменты времени $t > t_0$ и начальным условиям $u = u_0$, $v = v_0$, $w = w_0$, $\partial u / \partial t = \dot{u}_0$, $\partial v / \partial t = \dot{v}_0$, $\partial w / \partial t = \dot{w}_0$ в области, занятой телом, при $t = t_0$.

Здесь f_1 , f_2 , f_3 – функции, заданные на поверхности тела, зависящие в общем случае от времени t и определяющие граничные условия; u_0 , v_0 , w_0 , $\dot{u}_0$, $\dot{v}_0$, $\dot{w}_0$ – функции координат x , y , z , определяющие начальные условия.

Совершенно аналогично формулируются вторая и третья основные граничные задачи.

Методы решения динамических задач линейной теории упругости существенно отличаются от методов решения статических (температурных) задач, поскольку силы инерции, присоединяемые к объемным силам, заранее не известны.

8. Криволинейные координаты

Использование прямоугольной (декартовой) системы координат в механике деформируемого твердого тела наиболее удобно с точки зрения простоты процедуры получения формул, а также с точки зрения простоты вида этих формул. Однако многие задачи решаются значительно проще, если использовать криволинейную систему координат, специально подобранную для конкретной задачи.

Общим правилом, которым при этом следует руководствоваться, является следующее: криволинейные координаты следует выбрать таким образом, чтобы границы рассматриваемого тела входили в число координатных поверхностей. В этом случае наиболее просто формулируются граничные условия задачи, что во многих случаях облегчает построение решения.

На практике обычно используют криволинейные ортогональные системы координат, поскольку применение неортогональных криволинейных координат приводит, как правило, к весьма громоздким уравнениям, затрудняющим построение решения.

Из ортогональных криволинейных координат наиболее часто применяются цилиндрические и сферические координаты, удобные при рассмотрении тел со сферическими или круговыми (цилиндрическими) границами.

8.1. Уравнения линейной теории упругости в цилиндрических координатах

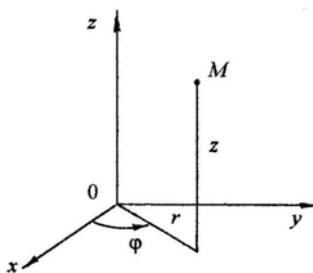


Рис. 8.1

Произвольная точка M в цилиндрической системе координат может быть зафиксирована путем задания (рис. 8.1):

- расстояния от точки M до оси z , которое обозначаем через r ;
- угла φ между перпендикуляром, опущенным из M на ось z и полуплоскостью xz ;
- координаты z , определяющей положение основания этого перпендикуляра на оси z .

Величины r , φ , z являются координатами точки в цилиндрической системе координат.

Координатными поверхностями системы координат будут:

- семейство коаксиальных (соосных) цилиндров, общая ось которых совпадает с осью z ;
- семейство полуплоскостей, имеющих границей ось z ;
- семейство плоскостей, перпендикулярных к оси z .

Соответственно, координатными линиями будут:

- лучи, перпендикулярные к оси (линии r);
- направляющие цилиндров (линии φ);
- образующие цилиндров (линии z).

Уравнения теории упругости в цилиндрической системе координат имеют вид:

- уравнения равновесия

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{1}{r} (\sigma_r - \sigma_\varphi) + F_r &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2}{r} \tau_{r\varphi} + F_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \tau_{rz} + F_z &= 0,\end{aligned}$$

где F_r , F_φ , F_z – проекции объемной силы на оси r , φ , z ;

- уравнения Коши

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \gamma_{r\varphi} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{v}{r}, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \right), & \gamma_{\varphi z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z};\end{aligned}$$

- уравнения физического закона

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_r, & \tau_{r\varphi} &= \mu\gamma_{r\varphi}, \\ \sigma_\varphi &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_\varphi, & \tau_{\varphi z} &= \mu\gamma_{\varphi z}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z, & \tau_{zr} &= \mu\gamma_{zr},\end{aligned}$$

где $\theta = \varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + \varepsilon_z$;

- граничные условия в напряжениях

$$\begin{aligned}\bar{F}_r &= \sigma_r l + \tau_{\varphi r} m + \tau_{zr} n, \\ \bar{F}_\varphi &= \tau_{r\varphi} l + \sigma_\varphi m + \tau_{z\varphi} n, \\ \bar{F}_z &= \tau_{rz} l + \tau_{\varphi z} m + \sigma_z n,\end{aligned}$$

где $\bar{F}_r$, $\bar{F}_\varphi$, $\bar{F}_z$ – проекции поверхностной силы на оси r , φ , z .

Отметим, что уравнения линейного физического закона и граничных условий в напряжениях сохраняют свою форму.

8.2. Уравнения линейной теории упругости в сферических координатах

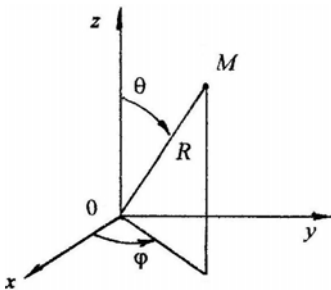


Рис. 8.2

Положение произвольной точки M в сферической системе координат может быть определено (рис. 8.2):

- расстоянием R от начала координат, находящегося на оси z ;
- углом θ , образуемым вектором $\bar{R}$ с осью z ;
- углом φ , образуемым плоскостью, заключающей в себе прямые R и z , и полуплоскостью xz .

Величины R , θ , φ являются координатами точки в сферической системе координат.

Координатными поверхностями рассматриваемой системы координат будут:

- семейство концентрических сферических поверхностей с центром в начале координат;
- семейство круговых конусов с общей вершиной в начале координат;
- семейство полуплоскостей, имеющих границей ось z .

Координатными линиями сферической системы координат являются:

- полупрямые (лучи) выходящие из начала координат (линии R);
- меридианы сферических поверхностей (линии θ);
- параллели этих поверхностей (линии φ).

Уравнения теории упругости в сферической системе координат имеют вид:

- уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_R}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tau_{R\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial \theta} + \frac{2\sigma_R - \sigma_\varphi - \sigma_\theta + \tau_{R\theta} \operatorname{ctg} \theta}{R} + F_R &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\varphi R}}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\varphi\theta}}{\partial \theta} + \frac{3\tau_{R\varphi} + 2\tau_{\varphi\theta} \operatorname{ctg} \theta}{R} + F_\varphi &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{R\theta}}{\partial R} + \frac{1}{R \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{3\tau_{R\theta} + (\sigma_\theta - \sigma_\varphi) \operatorname{ctg} \theta}{R} + F_\theta &= 0, \end{aligned}$$

где F_R, F_φ, F_θ – проекции объемной силы на направления R, φ, θ ;

- уравнения Коши

$$\begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial u}{\partial \theta} + w \right), & \gamma_{\theta\varphi} &= \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial \theta} - v \operatorname{ctg} \theta \right), \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \operatorname{ctg} \theta + w \right), & \gamma_{\varphi R} &= \frac{1}{R} \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial R}, \\ \varepsilon_R &= \frac{\partial w}{\partial R}, & \gamma_{\theta R} &= \frac{1}{R} \left(\frac{\partial w}{\partial \theta} - u \right) + \frac{\partial u}{\partial R}, \end{aligned}$$

где u – перемещение в направлении θ , v – φ , w – R .

Уравнения физического закона и граничные условия в напряжениях сохраняют свою форму и записываются аналогично тому, как это делалось раньше для прямоугольных и цилиндрических координат.

9. Задача Сен-Венана

Задача Сен-Венана о равновесии упругого призматического (цилиндрического) стержня, находящегося под действием произвольной нагрузки, заданной на его торцах, является одной из важнейших задач теории упругости. Ее решение дает возможность оценить точность элементарной теории изгиба стержней, рассматривающейся в сопротивлении материалов, и исследовать проблему кручения стержней, которая не может быть решена методами сопротивления материалов.

9.1. Общая постановка задачи Сен-Венана

Рассмотрим однородный изотропный брус, ограниченный цилиндрической (призматической) поверхностью и двумя плоскостями, нормальными к оси бруса. Поверхность бруса будем называть боковой поверхностью, а плоскости, нормальные оси бруса – основаниями или торцами бруса.

Будем считать, что объемные силы отсутствуют, что боковая поверхность бруса свободна от нагрузок и что к его основаниям приложены внешние усилия, удовлетворяющие условиям равновесия абсолютно твердого тела (под действием этих сил тело находится в равновесии). Направим ось z параллельно образующей боковой поверхности, а плоскость xu расположим на одном из оснований бруса, которое будем называть "нижним основанием". Верхнее основание будет расположено на высоте $z = l$, где l – длина бруса.

Определение упругого равновесия бруса при указанных условиях сводится к следующей математической задаче: найти напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ и перемещения u, v, w , удовлетворяющие в области V , занятой телом, дифференциальным уравнениям равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

и уравнениям линейного физического закона в форме:

$$\sigma_x = \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \tau_{xy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad ,$$

$$\sigma_y = \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \tau_{yz} = \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad ,$$

$$\sigma_z = \lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \quad , \quad \tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad ,$$

где $\vartheta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$ – относительное изменение объема.

Решение уравнений должно быть подчинено следующим граничным условиям:

- на боковой поверхности

$$\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = 0 \quad ,$$

$$\tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = 0 \quad ,$$

$$\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = 0 \quad ;$$

- на верхнем основании

$$\bar{X} = \tau_{zx} \quad , \quad \bar{Y} = \tau_{zy} \quad , \quad \bar{Z} = \sigma_z \quad .$$

В такой постановке задача Сен-Венана до сих пор не решена, но оказывается, что для практических надобностей в большинстве случаев нет потребности (и даже не имеет смысла) ставить задачу с такой полнотой – задачу можно существенно упростить.

9.2. Принцип Сен-Венана

Важным средством для упрощения задач теории упругости является так называемый "принцип Сен-Венана", который можно сформулировать следующим образом:

если к небольшому участку поверхности тела приложена совокупность усилий, статически эквивалентная нулю, то эта система усилий не оказывает заметного влияния на упругое равновесие частей тела, удаленных от упомянутого участка.

Принцип Сен-Венана можно представить другой формулировкой:

если некоторая система внешних сил, действующих на малой площадке поверхности тела, будет заменена другой системой внешних сил, статически эквивалентной первой и распределенной на той же площадке, то такая замена не вызовет заметного изменения в упругом равновесии частей тела, удаленных от упомянутой площадки.

Приведенная формулировка утверждает, что поля напряжений, перемещений и деформаций, соответствующие двум упомянутым системам внешних сил, будут отличаться друг от друга только в непосредственной близости от района действий сил.

Под термином "малая площадка" следует понимать площадку, пренебрежительно малую по сравнению со всей площадью поверхности тела. Кроме того, ее наибольший линейный размер не должен существенно превосходить наименьшего характерного размера тела. Например, если идет речь о пластине или оболочке, то, очевидно, что наименьший характерный размер – толщина; если речь идет о стержне, то наименьший характерный размер – наименьший размер поперечного сечения.

Значение принципа Сен-Венана в теории упругости состоит в том, что он позволяет заменить нагрузку, заданную на ограничен-

ном участке поверхности, другой нагрузкой (статически эквивалентной предыдущей), что во многих случаях значительно упрощает задачу и ее математическое решение.

Принцип Сен-Венана до сих пор не имеет исчерпывающего теоретического обоснования. Поэтому на принцип Сен-Венана следует смотреть как на положение, выдвинутое скорее физическими, нежели математическими соображениями, и с этих позиций к нему в каждом конкретном случае нужно и подходить.

Посмотрим, что дает применение этого принципа в задаче Сен-Венана.

Будем считать стержень достаточно длинным и, следовательно, площадь его торца малой по сравнению с боковой поверхностью. При выбранной координатной системе на торце $z = l$ будут действовать напряжения σ_z , τ_{zx} , τ_{zy} , которые в соответствии с граничными условиями должны быть равны составляющим поверхностной нагрузки $\bar{X}$, $\bar{Y}$, $\bar{Z}$, заданным на торце (рис. 9.1).

Принцип Сен-Венана позволяет утверждать, что теперь достаточно равенства компонентов главного вектора и главного момента заданной поверхностной нагрузки и внутренних сил:

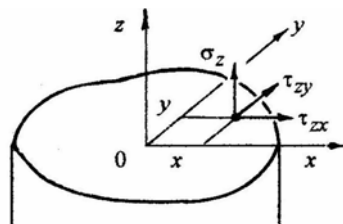


Рис. 9.1

$$P_x = \iint \bar{X} d\Omega = \iint \tau_{zx} d\Omega ,$$

$$P_y = \iint \bar{Y} d\Omega = \iint \tau_{zy} d\Omega ,$$

$$P_z = \iint \bar{Z} d\Omega = \iint \sigma_z d\Omega ,$$

$$M_x = \iint \bar{Z} y d\Omega = \iint \sigma_z y d\Omega ,$$

$$M_y = -\iint \bar{Z} x d\Omega = -\iint \sigma_z x d\Omega ,$$

$$M_z = \iint (\bar{Y} x - \bar{X} y) d\Omega = \iint (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) d\Omega .$$

За точку приведения здесь взят центр тяжести поперечного сечения (оси центральные). Интегрирование проводится по площади торца. Что же касается главного вектора и главного момента сил, действующих на противоположный торец $z = 0$, то они однозначно определяются из условий равновесия стержня как целого.

Можно утверждать, что все системы нагрузок, для которых левые части приведенных равенств одинаковы, будут вызывать в стержне одинаковые поля напряжений и деформаций (за исключением тех областей стержня, которые непосредственно прилегают к торцам). Этим самым мы можем вместо заданной нагрузки рассматривать любую другую, ей статически эквивалентную, выбранную из соображений удобства решения.

Для дальнейшего упрощения задачи Сен-Венана воспользуемся принципом независимости действия сил, который в данной задаче позволяет рассматривать по отдельности системы нагрузок, статически эквивалентные каждой из шести компонент главного вектора и главного момента. При этом компоненте P_z будет соответствовать растяжение (или сжатие) стержня вдоль его оси; компонентам P_x и P_y – изгиб стержня поперечными силами, приложенными в плоскостях торцов; компонентам M_x и M_y – изгиб стержня парами сил, и, наконец, компоненте M_z – кручение стержня.

Таким образом, применение принципа Сен-Венана и принципа независимости действия сил позволяет избежать решения задачи Сен-Венана в общей постановке и рассматривать эту задачу как сумму четырех задач, составляющих основу курса сопротивления материалов.

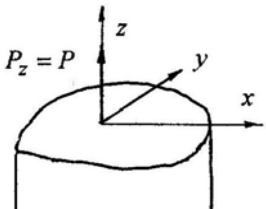
9.3. Полуобратный метод Сен-Венана

Введя принцип Сен-Венана в рассматриваемую задачу, получаем, что должны заботиться только о том, чтобы главный вектор и главный момент внешних и внутренних усилий, приложенных к основаниям бруса, имели заданные (равные) значения. Действительное же распределение напряжений на основаниях практически не влияет на напряженно-деформированное состояние части бруса, удаленные от оснований: имеем так называемое "смягчение"

граничных условий. Таким образом, появляется довольно широкий произвол в выборе решения. Этим обстоятельством можно воспользоваться следующим образом: задаться формой решения, т.е. некоторыми качественными закономерностями для напряжений, так чтобы можно было получить на основаниях бруса систему напряжений, статически эквивалентную системе внешних усилий. Затем, руководствуясь уже математическим аппаратом теории упругости, нужно проверить, не противоречат ли принятые закономерности соответствующим уравнениям и из последних найти количественные характеристики решения.

Формой решения конкретной задачи упругости следует задаваться, исходя из физических соображений, поскольку любая задача теории упругости является, по существу, физической задачей. Такой метод решения задач теории упругости впервые применил Сен-Венан, и этот метод носит название полуобратного метода Сен-Венана.

Задачи

9.1.		На торце бруса приложена система сил, главный вектор которой направлен по оси z ($P_x = P_y = 0$, $P_z = P$), а главный момент равен нулю. Определить напряжения в брус (стержне).
------	---	--

Поставленная задача в соответствии с принципом Сен-Венана является задачей растяжения стержня продольной силой, решение которой будем строить, используя полуобратный метод Сен-Венана. В соответствии с идеей метода, необходимо подобрать такое «качественное» распределение напряжений $\sigma_z, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ на торце, которое было бы статически эквивалентно главному вектору и главному моменту заданных поверхностных сил или, другими словами, отвечало следующим интегральным граничным условиям на торце бруса:

$$\begin{aligned}
 P_x &= \iint \tau_{zx} d\Omega = 0, & M_x &= \iint \sigma_z y d\Omega = 0, \\
 P_y &= \iint \tau_{zy} d\Omega = 0, & M_y &= -\iint \sigma_z x d\Omega = 0, \\
 P_z &= \iint \sigma_z d\Omega = P, & M_z &= \iint (\tau_{zy} x - \tau_{zx} y) d\Omega = 0.
 \end{aligned}$$

В качестве такого распределения напряжений в поставленной задаче можно предложить простейшее:

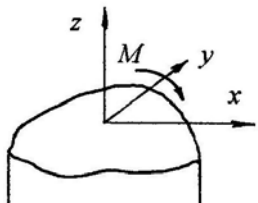
$$\sigma_z = \sigma_0 = \text{const}, \quad \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$

Действительно, в этом случае интегральные граничные условия на торце бруса удовлетворяются при $\sigma_0 = P/\Omega$ (статические моменты $\iint y d\Omega$ и $\iint x d\Omega$ равны нулю, поскольку координатные оси – центральные).

Считая теперь распределение напряжений на торце справедливым для всего бруса, добавим остальные напряжения, принимая их равными нулю, т.е. решение поставленной задачи будем искать в виде:

$$\sigma_z = P/\Omega, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$

Задача решается в напряжениях, следовательно необходимо проверить, удовлетворяются ли дифференциальные уравнения равновесия, уравнения Бельтрами – Митчелла и граничные условия на боковой поверхности бруса. Непосредственная проверка показывает, что все перечисленные уравнения удовлетворяются, и принятая система напряжений является решением задачи о растяжении стержня продольной силой.

9.2.		На торце бруса приложена система сил, статически эквивалентная паре сил с моментом $M_y = M$. Определить в брус (стержне) напряжения, деформации и перемещения.
------	---	---

Поставленную задачу изгиба стержня парой (задачу чистого изгиба), как и задачу о растяжении стержня продольной силой, будем решать в напряжениях по-лоубратным методом Сен-Венана, принимая решение в форме:

$$\sigma_z = ax + by, \quad \sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0.$$

Непосредственной проверкой можно убедиться, что принятая система напряжений не противоречит ни дифференциальным уравнениям равновесия, ни уравнениям Бельтрами – Митчелла, ни граничным условиям на боковой поверхности бруса. Остается только убедиться, что эта система напряжений соответствует заданной поверхностной нагрузке на торце бруса при надлежащем выборе постоянных a и b .

Из шести интегральных граничных условий на торце бруса три уравнения удовлетворяются тождественно за счет напряжений, принятых равными нулю.

Рассматривая оставшиеся, будем иметь:

$$\begin{aligned} P_z &= \iint \sigma_z d\Omega = a \iint x d\Omega + b \iint y d\Omega \equiv 0 \quad , \\ M_x &= \iint \sigma_z y d\Omega = a \iint xy d\Omega + b \iint y^2 d\Omega = aJ_{xy} + bJ_x = 0 \quad , \\ M_y &= -\iint \sigma_z x d\Omega = -a \iint x^2 d\Omega - b \iint xy d\Omega = -aJ_y - bJ_{xy} = M \quad , \end{aligned}$$

где J_x , J_y , J_{xy} — осевые и центробежный момент инерции сечения. Для определения постоянных a и b имеем, таким образом, два уравнения:

$$\begin{aligned} aJ_{xy} + bJ_x &= 0 \quad , \\ aJ_y + bJ_{xy} &= -M \quad . \end{aligned}$$

Решение этих уравнений позволяет получить:

$$a = \frac{J_x}{J_x J_y - J_{xy}^2} \cdot M \quad , \quad b = \frac{J_{xy}}{J_x J_y - J_{xy}^2} \cdot M \quad .$$

Если оси x и y считать главными центральными осями инерции сечения, то центробежный момент J_{xy} равен нулю и соотношения для постоянных a и b существенно упрощаются: $a = -M/J_y$, $b = 0$. В этом случае для напряжения σ_z будем иметь:

$$\sigma_z = -\frac{M}{J_y} x \quad .$$

Для определения деформаций воспользуемся уравнениями линейного физического закона (обобщенного закона Гука). Получим:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_y = -\frac{\nu}{E}(ax + by) \quad , \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}(ax + by) \quad , \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Для определения перемещений u , v , w по известным деформациям будем использовать полученные ранее соотношения:

$$\begin{aligned}
u &= \int_{M_0 M_1} \left[\varepsilon_x dx + \left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} - \omega_z \right) dy + \left(\frac{1}{2} \gamma_{zx} + \omega_y \right) dz \right] , \\
v &= \int_{M_0 M_1} \left[\left(\frac{1}{2} \gamma_{xy} + \omega_z \right) dx + \varepsilon_y dy + \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz} - \omega_x \right) dz \right] , \\
w &= \int_{M_0 M_1} \left[\left(\frac{1}{2} \gamma_{zx} - \omega_y \right) dx + \left(\frac{1}{2} \gamma_{yz} + \omega_x \right) dy + \varepsilon_z dz \right] .
\end{aligned}$$

В выписанных соотношениях компоненты элементарного вращения ω_x , ω_y , ω_z являются неизвестными функциями, но для их определения можно использовать имеющиеся соотношения, связывающие производные от компонентов вращения через производные от деформаций. В частности, для производных функции ω_x имеем:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \omega_x}{\partial x} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) = 0 , \\
\frac{\partial \omega_x}{\partial y} &= \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_y}{\partial z} = 0 , \\
\frac{\partial \omega_x}{\partial z} &= \frac{\partial \varepsilon_z}{\partial y} - \frac{1}{2} \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial z} = \frac{b}{E} .
\end{aligned}$$

Таким образом, определение функции ω_x сводится к ее отысканию по трем известным частным производным:

$$\omega_x = \int_{M_0 M_1} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} dx + \frac{\partial \omega_x}{\partial y} dy + \frac{\partial \omega_x}{\partial z} dz \right) .$$

Отметим, что однозначное определение функции трех переменных по ее трем известным частным производным возможно только тогда, когда соответствующее подынтегральное выражение является полным дифференциалом (условие независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования). В рассматриваемом случае это требование сводится к одновременному выполнению трех следующих равенств:

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) , \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right) , \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \omega_x}{\partial x} \right) .$$

Легко убедиться, что приведенные равенства выполняются, и вычисление криволинейного интеграла приводит к следующему результату:

$$\omega_x = bz / E \quad .$$

По приведенной схеме определяются и оставшиеся компоненты элементарного вращения:

$$\omega_y = -az / E \quad , \quad \omega_z = -v(ay - bx) / E \quad .$$

С учетом известных значений деформаций и найденных значений ω_y и ω_z соотношение для определения перемещения u будет иметь вид:

$$u = \int_{M_0 M_1} \left[-\frac{v}{E}(ax + by)dx + \frac{v}{E}(ay - bx)dy - \frac{a}{E}zdz \right] \quad .$$

Принимая за точку M_0 начало координат и учитывая, что интеграл не зависит от пути интегрирования, его вычисление проведем по следующей схеме:

$$u = -\frac{v}{E} \int_0^x axdx + \frac{v}{E} \int_0^y (ay - bx)dy - \frac{a}{E} \int_0^z z dz \Rightarrow u = -\frac{a}{2E} z^2 - \frac{v}{E} \left[\frac{a}{E} (x^2 - y^2) + bxy \right] \quad .$$

Аналогичным образом вычисляем перемещения v и w . Будем иметь:

$$v = -\frac{b}{2E} z^2 - \frac{v}{E} \left[axy - \frac{b}{E} (x^2 - y^2) \right] \quad ,$$

$$w = \frac{1}{E} (ax + by) z \quad .$$

Если считать оси x и y главными центральными осями инерции сечения, то соотношения для перемещений принимают вид:

$$u = \frac{M}{2EJ_y} \left[z^2 + v(x^2 - y^2) \right] \quad ,$$

$$v = \frac{v}{E} \frac{M}{J_y} xy \quad ,$$

$$w = -\frac{1}{E} \frac{M}{J_y} xz \quad .$$

Соотношения, определяющие перемещения u , v и w , позволяют проверить исходные положения (гипотезы) сопротивления материалов, закладываемые в решение задачи о чистом изгибе бруса.

Действительно, легко видеть, что в плоскости $x=0$ имеем $v=w=0$, а $u \neq 0$, т.е. плоскость $x=0$ является нейтральной плоскостью бруса при чистом изгибе.

Формула для перемещения w показывает, что при фиксированном поперечном сечении $z = \text{const}$ перемещение является линейной функцией, из чего следует, что каждое такое сечение остается плоским, как и предполагается в сопротивлении материалов.

9.4. Кручение призматических (цилиндрических) стержней

Для задачи кручения внешние усилия, приложенные к основаниям, статически эквивалентны парам сил, действующим в плоскостях оснований. Будем считать, что момент пары, действующей в верхнем основании, положителен ($M_z = M > 0$) – момент закручивает стержень против часовой стрелки, если смотреть с конца оси z . Задачу будем решать в перемещениях полуобратным методом Сен-Венана.

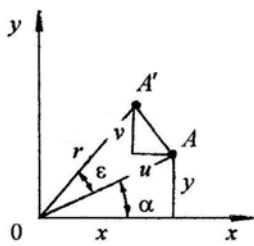


Рис. 9.2

Будем считать, что все поперечные сечения скручиваемого стержня остаются плоскими и поворачиваются (каждое сечение в своей плоскости) вокруг оси z на некоторый малый угол ε (рис. 9.2). Если нижнее основание считать неподвижным (закрепленным), то угол ε прямо пропорционален расстоянию z от рассматриваемого сечения до

нижнего основания, т.е. $\varepsilon = \tau z$, где $\tau = \text{const}$ – относительный угол закручивания или угол взаимного поворота поперечных сечений, отстоящих друг от друга на единицу высоты. Отметим, что введенные предположения о характере деформирования стержня используются в сопротивлении материалов при решении задачи о кручении круглого стержня.

Реализация гипотезы плоских сечений позволяет записать перемещения точек скручиваемого стержня. Действительно, полное перемещение точки A равно $AA' = r\varepsilon$. Составляющие полного перемещения u и v можем записать в виде:

$$u = -r\varepsilon \sin \alpha = -\varepsilon y, \quad v = r\varepsilon \cos \alpha = \varepsilon x$$

(перемещение u отрицательно, поскольку оно направлено в сторону, обратную положительному направлению оси x).

Таким образом, при сделанных предположениях имеем:

$$u = -\tau z y, \quad v = \tau z x, \quad w = 0.$$

Уравнение Ламе для принятых значений перемещений u, v, w удовлетворяются тождественно.

Для проверки граничных условий на поверхности бруса определим напряжения. Будем иметь:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0; \\ \tau_{xy} = 0, \quad \tau_{yz} = \mu \tau x, \quad \tau_{zx} = -\mu \tau y.$$

Рассматривая граничные условия на боковой поверхности (на контуре поперечного сечения), легко получить, что первые два уравнения тождественно удовлетворяются, а третье приводится к виду

$$xm - yl = 0.$$

Можно убедиться, что полученное условие выполняется только для кругового цилиндра (задача сопротивления материалов). Очевидно, что введенные предложения о характере деформирования стержня слишком ограничивают круг задач.

9.4.1. Решение задачи кручения призматических (цилиндрических) стержней

Решение задачи кручения с помощью функции кручения (функции депланации)

Предположим теперь, что сечения не остаются плоскими, а искривляются, но при этом все сечения искривляются одинаково. Та-

кое предположение ведет, очевидно, к следующим выражениям для перемещений:

$$u = -\tau z y \quad , \quad v = \tau z x \quad , \quad w = \tau \varphi(x, y) \quad ,$$

где функция $\varphi(x, y)$ представляет собой форму искривленной поверхности поперечного сечения и носит название функции кручения или функции депланации (множитель τ введен для удобства).

Проверим, удовлетворяются ли при принятой форме решения уравнения Ламе:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u = 0$$

...

Поскольку $\vartheta = (\partial u / \partial x) + (\partial v / \partial y) + (\partial w / \partial z)$, то уравнения Ламе принимают вид:

$$\nabla^2 u = \nabla^2 v = \nabla^2 w = 0 \quad .$$

Первые два уравнения удовлетворяются тождественно, а третье переходит в уравнение относительно функции кручения φ :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \quad ,$$

т.е. функция φ должна быть гармонической функцией двух переменных x и y в области, занятой телом. Так как φ не зависит от переменной z , то для ее отыскания достаточно рассматривать поперечное сечение нашего призматического стержня, но не весь стержень.

Посмотрим теперь, как выполняются граничные условия на поверхности стержня. Эти граничные условия записаны в напряжениях, поэтому предварительно находим сами напряжения:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0, \quad \tau_{xy} = 0, \\ \tau_{yz} = \mu\tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right), \quad \tau_{zx} = \mu\tau \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right).$$

Первые два граничных условия на боковой поверхности или на контуре поперечного сечения L (поскольку перешли к рассмотрению только поперечного сечения) удовлетворяются тождественно, а третье приводится к виду:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} - y \right) l + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + x \right) m = 0 \quad \text{на } L.$$

Полученное равенство перепишем в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} l + \frac{\partial \varphi}{\partial y} m = yl - xm \quad \text{на } L.$$

Если учесть, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x} l + \frac{\partial \varphi}{\partial y} m = \frac{\partial \varphi}{\partial n}$ — производная по нормали (здесь n — внешняя нормаль к контуру L), то окончательно граничное условие получаем в следующем виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = yl - xm \quad \text{на } L.$$

Таким образом, удовлетворение уравнений Ламе и граничных условий на боковой поверхности приводит к следующим требованиям к функции φ :

функция φ должна быть гармонической функцией в области, ограниченной поперечным сечением тела, и на контуре этого поперечного сечения ее нормальная производная должна принимать заранее заданное значение.

Известно, что эти два требования определяют так называемую "задачу Неймана", которая и состоит в нахождении в данной облас-

ти гармонической функции по заданным граничным значениям ее нормальной производной.

Задача Неймана имеет решение, значит, можем считать, что функция φ определена. Отметим, что в задаче Неймана решение определяется с точностью до произвольной постоянной. В поставленной задаче эта постоянная определяет лишь жесткое поступательное перемещение бруса в направлении оси z и может быть принята равной нулю.

Определением функции $\varphi(x, y)$ задача не закончена, поскольку еще нужно проверить, удовлетворяются ли при найденном значении $\varphi(x, y)$ граничные условия на торцах скручиваемого стержня.

Формулы для напряжений показывают, что на основаниях (торцах) стержня действуют только касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} . Следовательно, нам нужно проверить выполнение следующих трех условий:

$$\begin{aligned} P_x &= \iint \tau_{zx} d\Omega = 0 \quad , \\ P_y &= \iint \tau_{zy} d\Omega = 0 \quad , \\ M_z &= \iint (\tau_{zy}x - \tau_{zx}y) d\Omega = M \quad . \end{aligned}$$

Рассмотрим первое из этих уравнений, переписав его в виде:

$$P_x = \iint \left[\tau_{zx} + x \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} \right) \right] dx dy$$

или

$$P_x = \iint \left[\frac{\partial}{\partial x} (x\tau_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y} (x\tau_{zy}) \right] dx dy \quad .$$

Такая запись формально возможна, поскольку $\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0$ – дифференциальное уравнение равновесия в форме уравнения Ламе

удовлетворено выбором функции $\varphi(x, y)$ как гармонической функции.

Преобразуем выписанное соотношение, используя формулу Остроградского – Грина и проводя некоторые простые преобразования. Будем иметь:

$$\begin{aligned} P_x &= \iint_L \left[\frac{\partial}{\partial x} (x\tau_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y} (x\tau_{yz}) \right] dx dy = \oint_L (-x\tau_{zy} dx + x\tau_{zx} dy) = \\ &= \oint_L x \left(-\tau_{zy} \frac{dx}{ds} + \tau_{zx} \frac{dy}{ds} \right) ds = x \oint_L (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m) ds = 0 \quad . \end{aligned}$$

Легко видеть, что приведенными преобразованиями граничное условие на торце сведено к граничному условию на контуре поперечного сечения, которое считаем уже удовлетворенным. Аналогичными преобразованиями можно показать, что и $P_y = 0$.

Последнее из рассматриваемых граничных условий на торце можем переписать в виде:

$$\begin{aligned} M &= \iint \left[\mu\tau \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x \right) x - \mu\tau \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y \right) y \right] dx dy = \\ &= \mu\tau \iint \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial\varphi}{\partial y} - y \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dx dy = \tau D \quad , \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$D = \mu \iint \left(x^2 + y^2 + x \frac{\partial\varphi}{\partial y} - y \frac{\partial\varphi}{\partial x} \right) dx dy \quad .$$

Легко видеть, что величина D имеет физический смысл жесткости при кручении. При известной функции $\varphi(x, y)$ величина D всегда может быть определена. Можно показать, что в общем случае $D > 0$.

Граничное условие будет удовлетворено, если $\tau = M / D$ и, тем самым, задача решена полностью.

**Решение задачи кручения с помощью функции,
сопряженной функции кручения**

При решении задачи кручения иногда удобнее вместо функции кручения $\varphi(x, y)$ вводить в рассмотрение сопряженную с ней гармоническую функцию $\psi(x, y)$, которая связана с функцией $\varphi(x, y)$ соотношениями Коши – Римана:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Отметим, что соотношения Коши – Римана определяют функцию $\psi(x, y)$ при заданной функции φ с точностью до произвольной постоянной.

Перейдем в граничных условиях от функции $\varphi(x, y)$ к функции $\psi(x, y)$. Предположим для большей общности, что рассматриваемый брус может содержать продольные цилиндрические полости, так что граница области (поперечного сечения) L может состоять из нескольких простых замкнутых контуров $L_1, L_2, \dots, L_{m+1}$, последний из которых охватывает все предыдущие. За положительное направление обхода контура L_k примем такое направление, при котором область S_k , ограниченная контуром L_k , должна оставаться слева. Тогда для любого контура будем иметь: $l = dy/ds, m = -dx/ds$.

Граничное условие для функции кручения $\varphi(x, y)$ у нас было записано в виде

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = yl - xm \quad \text{на } L$$

или

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} l + \frac{\partial \varphi}{\partial y} m = yl - xm \quad \text{на } L.$$

Подставим в граничное условие значения l и m и заменим функцию $\varphi(x, y)$ на функцию $\psi(x, y)$. Будем иметь:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = y \frac{dy}{ds} + x \frac{dx}{ds} \Rightarrow \frac{d\psi}{ds} = \frac{d}{ds} \left[\frac{1}{2} (x^2 + y^2) \right] \text{ на } L.$$

Из полученного уравнения следует, что

$$\psi = \frac{1}{2} (x^2 + y^2) + C_k \text{ на контуре } L_k,$$

где C_k ($k = 1, 2, \dots, m+1$) – постоянные, имеющие разные значения на разных контурах.

Предположим, что постоянным C_k даются какие-либо определенные значения. В этом случае задача отыскания функции $\psi(x, y)$ есть задача отыскания гармонической функции по заданным ее значениям на контуре. Такая задача носит название задачи Дирихле, и она всегда имеет решение с точностью до постоянной. Тем самым мы можем произвольно распоряжаться только одной постоянной, например C_{m+1} , поскольку сама функция $\psi(x, y)$, как решение задачи Дирихле, определена с точностью до постоянной. Все остальные постоянные должны иметь вполне определенные (неизвестные пока) значения.

Найдя функцию $\psi(x, y)$, мы по условиям Коши – Римана можем найти и функцию $\varphi(x, y)$. Но дело в том, что если постоянные C_k были выбраны наугад, то функция φ может оказаться многозначной. Таким образом, постоянные C_k ($k = 1, 2, \dots, m$) могут быть определены из условия однозначности функции φ .

Из приведенных рассуждений следует, что в случае многосвязной области лучше оперировать непосредственно с функцией φ , а не с функцией ψ . В случае же односвязной области, ограниченной одним простым замкнутым контуром L , в граничном условии для функции ψ будет фигурировать только одна постоянная, которую можно фиксировать произвольно. Однозначность функции φ будет

обеспечена.

Касательные напряжения τ_{yz} и τ_{zx} можно определить не только через функцию $\varphi(x, y)$, но и через функцию $\psi(x, y)$ с использованием условий Коши – Римана:

$$\tau_{zx} = \mu\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} - y \right) , \quad \tau_{yz} = -\mu\tau \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} - x \right) .$$

Решение задачи кручения с помощью функции напряжений

Отметим, что два рассмотренных варианта решения задачи кручения призматических (цилиндрических) стержней представляют решение в перемещениях. Однако достаточно часто поставленную задачу удобно решать в напряжениях с использованием функции напряжений.

Решение задачи теории упругости в напряжениях требует совместного рассмотрения дифференциальных уравнений равновесия и уравнений Бельтрами – Митчелла. Понятие о функциях напряжений (Максвелла, Морера, Галеркина и др.) вводится при построении общего решения дифференциальных уравнений равновесия. Напряжения (общее решение) представляются через функции напряжений так, чтобы уравнения равновесия удовлетворялись тождественно. Отыскание функций напряжений связано уже с решением уравнений Бельтрами – Митчелла и с подчинением решения граничным условиям.

Выпишем уравнения, определяющие решение задачи кручения в напряжениях:

- дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 ;$$

- уравнения Бельтрами – Митчелла

$$\nabla^2 \tau_{zx} = 0 , \quad \nabla^2 \tau_{zy} = 0 ;$$

- граничное условие на контуре поперечного сечения

$$\tau_{zx}l + \tau_{zy}m = 0 \quad \text{на} \quad L \quad .$$

Функцию напряжения $\Phi(x, y)$, которую в рассматриваемой задаче называют функцией напряжения Прандтля, введем следующим образом:

$$\tau_{zx} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \quad \tau_{zy} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad ,$$

удовлетворив тем самым дифференциальное уравнение равновесия.

Уравнения Бельтрами – Митчелла позволяют получить уравнение, определяющее функцию напряжения Φ :

$$\begin{aligned} \nabla^2 \tau_{zx} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial y} (\nabla^2 \Phi) = 0 \\ \nabla^2 \tau_{zy} = 0 &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} (\nabla^2 \Phi) = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \Phi = A = \text{const} \quad .$$

Значение постоянной A определим, привлекая к рассмотрению уравнения физического закона и зависимости Коши. Будем иметь:

$$\tau_{zx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad , \quad \tau_{zy} = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad .$$

Вводя в представленные соотношения функцию напряжений и учитывая известные формулы для перемещений $u = -\tau_{zy}$ и $v = \tau_{zx}$, получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \mu \left(-\tau_{zy} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \quad , \quad \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -\mu \left(\tau_{zx} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \quad .$$

Дифференцируя первое из этих соотношений по y , а второе по x и

складывая их, будем иметь:

$$\nabla^2 \Phi = -2\mu\tau \quad .$$

Из сравнения двух соотношений, определяющих величину $\nabla^2 \Phi$, получаем следующее значение постоянной A :

$$A = -2\mu\tau \quad .$$

Легко видеть, что в приведенных рассуждениях принципиально ничего не изменится, если функцию напряжений $\Phi(x, y)$ ввести соотношениями:

$$\tau_{zx} = \mu\tau \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \quad \tau_{zy} = -\mu\tau \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad ,$$

но в этом случае функция напряжений $\Phi(x, y)$ будет определяться уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -2 \quad .$$

В дальнейшем будем использовать именно эту форму записи соотношений.

Отметим, что функция напряжений $\Phi(x, y)$ для решения задачи кручения призматических стержней введена независимо от построенных ранее решений с использованием функции кручения $\phi(x, y)$ и сопряженной ей функции $\psi(x, y)$. Однако поскольку все рассматриваемые функции определяют решение одной и той же задачи, формальную связь между ними можно ввести соотношением

$$\Phi(x, y) = \psi(x, y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \quad .$$

Поскольку функция $\psi(x, y)$ является гармонической, для опре-

деления функции напряжений имеем уравнение Лапласа: $\nabla^2 \Phi = -2$. Касательные напряжения также представляются уже известными соотношениями:

$$\tau_{zx} = \mu \tau \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad , \quad \tau_{zy} = -\mu \tau \frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad .$$

Граничное условие на контуре поперечного сечения с учетом соотношений для напряжений τ_{zx} и τ_{zy} принимает вид:

$$\mu \tau \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} l - \frac{\partial \Phi}{\partial x} m \right) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} = 0 \Rightarrow \frac{d\Phi}{ds} = 0 \quad \text{на } L \quad ,$$

откуда для многосвязного контура следует:

$$\Phi = C_k \quad \text{на контуре } L_k \quad ,$$

где C_k ($k = 1, 2, \dots, m+1$) – постоянные, имеющие разные значения на разных контурах.

Жесткость при кручении D при введении функции напряжения $\Phi(x, y)$ определяется следующим уравнением:

$$D = 2\mu \left(C_1 \Omega_1 + C_2 \Omega_2 + \dots + C_{m+1} \Omega_{m+1} \right) + 2\mu \iint \Phi d\Omega' \quad ,$$

где C_k ($k = 1, 2, \dots, m+1$) – постоянные; $\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_{m+1}$ – площади, ограниченные контурами $L_1, L_2, \dots, L_{m+1}$; $d\Omega'$ – элемент площади поперечного сечения скручиваемого стержня.

В случае односвязной области имеем один контур, причем соответствующая ему постоянная может быть принята равной нулю. В этом случае

$$D = 2\mu \iint \Phi d\Omega' \quad .$$

Итак, задача кручения призматических стержней может быть сведена либо к задаче Неймана (относительно функции кручения $\varphi(x, y)$), либо к задаче Дирихле (относительно функции $\psi(x, y)$, сопряженной функции кручения), либо к задаче отыскания функции напряжения $\Phi(x, y)$.

9.4.2. Использование функций комплексной переменной для решения задач кручения призматических стержней

Связь, которая существует между функцией кручения $\varphi(x, y)$ и сопряженной с ней функцией $\psi(x, y)$, определяющей контур поперечного сечения, позволяет использовать при решении частных задач кручения следующий прием.

Рассмотрим какую-либо аналитическую функцию $f(z)$ комплексной переменной $z = x + iy$. Для любой аналитической функции $f(z)$ возможно разделение мнимой и действительной части, т.е. всегда можно записать, что

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \quad .$$

Функции u и v – гармонические, сопряженные, удовлетворяющие соотношениям Коши – Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad .$$

Легко видеть, что пары функций φ, ψ и u, v в математическом отношении представляют собой одно и то же. Отсюда вытекает возможность использования функций u, v при решении задач кручения. Если уравнение

$$v(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C$$

определяет какую-либо замкнутую кривую, то это будет контур поперечного сечения скручиваемого стержня (принято $v = \psi$), а функция u будет функцией кручения для этого стержня ($u = \varphi$).

Возможен и обратный вариант, т.е. принять в качестве функции кручения функцию v ($v = \varphi$). Тогда контур поперечного сечения скручиваемого стержня (если он замкнут) должен определиться из уравнения

$$-u(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C.$$

Действительно, подставляя соотношение $v = \varphi$ в соотношения Коши – Римана, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}.$$

Те же самые соотношения Коши – Римана для функций φ и ψ имеют вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Сравнивая эти две записи, получаем $u = -\psi$.

Предлагаемый прием использования произвольной аналитической функции $f(z)$ для решения задач кручения призматических стержней имеет очевидный недостаток, а именно то, что здесь нет возможности распорядиться по своему усмотрению выбором контура поперечного сечения. Однако данный прием полезен, когда необходимо получить сведения, относящиеся к достаточно широкому классу поперечных сечений. Этот прием был впервые использован Сен-Венаном, и его называют методом Сен-Венана с использованием аналитических функций комплексного переменного.

9.4.3. Некоторые свойства результирующего касательного напряжения

Результирующее касательное напряжение определяется векторной суммой касательных напряжений τ_{zx} и τ_{zy} . Соответственно, величина этого напряжения равна:

$$T = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} \quad .$$

Теорема о максимальном значении результирующего касательного напряжения

Теорема о максимальном значении результирующего касательного напряжения формулируется следующим образом:

результирующее касательное напряжение, возникающее при кручении, достигает своего наибольшего значения на контуре поперечного сечения стержня (на его боковой поверхности).

Для доказательства используем известную в математике теорему, утверждающую, что если некоторая функция U , имеющая непрерывные вторые производные в области S , удовлетворяет неравенству $\nabla^2 U > 0$, то эта функция может достигнуть наибольшего значения только на границе области S .

Рассмотрим функцию

$$T^2 = \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = \mu^2 \tau^2 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] \quad .$$

с позиции только что процитированной теоремы. Вычислим

$$\nabla^2 (T^2) = \mu^2 \tau^2 \nabla^2 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] = \mu^2 \tau^2 \nabla^2 f \quad ,$$

где введенная функция $f(x, y)$ определяется квадратной скобкой в

приведенной записи. Легко получить:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x} &= 2 \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right), \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^2 \partial y} \right], \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= 2 \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial y^3} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x \partial y^2} \right].\end{aligned}$$

Соответственно, применение оператора Лапласа к функции $f(x, y)$ приводит к следующему результату:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &= 2 \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right) \right].\end{aligned}$$

Два последних слагаемых в соотношении для $\nabla^2 f$ равны нулю, так как $\nabla^2 \Phi = -2$. Окончательно получим, что

$$\nabla^2 (T^2) = 2\mu^2 \tau^2 \left[\left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$

Полученное соотношение нулю равняться не может, так как согласно уравнению $\nabla^2 \Phi = -2$ одновременно обе вторые производные в нуль обратиться не могут.

Таким образом, можем утверждать, что во всей области, ограни-

ченной поперечным сечением стержня, имеем:

$$\nabla^2(T^2) > 0 \quad .$$

Следовательно, функция T^2 и результирующее касательное напряжение T могут достигнуть своего максимального значения только на границе области, что, собственно, нам и нужно доказать.

Теорема о циркуляции вектора результирующего касательного напряжения (теорема Бредта)

Вычислим циркуляцию вектора результирующего касательного напряжения на площадках, перпендикулярных к оси скручиваемого стержня. Циркуляцию вычислим вдоль произвольной замкнутой кривой $\bar{L}$, проходящей внутри области, занятой поперечным сечением стержня, двигаясь против часовой стрелки:

$$\oint_{\bar{L}} \vec{T} dr = \oint_{\bar{L}} (\tau_{zx} dx + \tau_{zy} dy) \quad .$$

Подставим значения напряжений через функцию кручения $\varphi(x, y)$. Будем иметь:

$$\oint_{\bar{L}} \vec{T} dr = \mu\tau \oint_{\bar{L}} (-y dx + x dy) + \mu\tau \oint_{\bar{L}} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) \quad .$$

Второй интеграл в данном соотношении равен нулю, поскольку подынтегральная функция является полным дифференциалом однозначной функции кручения $\varphi(x, y)$.

Рассмотрим теперь оставшийся интеграл (первое слагаемое). Известно, что интеграл такого типа определяет удвоенную площадь, ограниченную контуром $\bar{L}$, а именно:

$$\oint_{\bar{L}} (-y dx + x dy) = 2\bar{\Omega} \quad .$$

Окончательно для циркуляции вектора результирующего касательного напряжения можем записать, что

$$\oint_{\bar{L}} \vec{T} dr = 2\mu\tau\bar{\Omega} \quad .$$

Полученная формула и составляет содержание теоремы Бредта о циркуляции результирующего касательного напряжения при кручении.

Теорема Бредта справедлива как для односвязных, так и для многосвязных контуров, независимо от того, охватывает ли контур интегрирования $\bar{L}$ внутреннюю границу области или нет, и может быть использована для отыскания постоянных C_k ($k=1, 2, \dots, m$), которые входят в граничные условия для функций $\psi(x, y)$ и $\Phi(x, y)$ в случае многосвязных контуров.

Представим циркуляцию касательного напряжения через функцию напряжения $\Phi(x, y)$. Будем иметь:

$$\oint_{\bar{L}} \vec{T} dr = -\mu\tau \oint_{\bar{L}} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \bar{l} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \bar{m} \right) ds = -\mu\tau \oint_{\bar{L}} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}} ds \quad ,$$

где $\bar{l}$ и $\bar{m}$ — направляющие косинусы внешней нормали $\bar{n}$ к контуру интегрирования $\bar{L}$. Применяя теорему Бредта, получаем:

$$- \oint_{\bar{L}} \frac{\partial \Phi}{\partial \bar{n}} ds = 2\bar{\Omega} \quad .$$

Очевидно, что если будем брать в качестве путей интегрирования внутренние границы поперечного сечения $L_1, L_2, \dots, L_m$, то для контура L_k можем записать, что

$$\oint_{L_k} \frac{\partial \Phi}{\partial n_k} ds = -2\Omega_k \quad ,$$

где n_k – внешняя нормаль к контуру L_k , а Ω_k – площадь, ограниченная контуром L_k . Полученные m уравнений определяют постоянные C_k ($k = 1, 2, \dots, m$), и, таким образом, функция напряжения $\Phi(x, y)$ полностью определена.

Задачи

9.3.	Задача о кручении стержня с круглым поперечным сечением
------	---

Поставленную задачу будем решать с использованием функции кручения $\varphi = \varphi(x, y)$.

Напомним, что определение функции кручения $\varphi = \varphi(x, y)$ сводится к решению задачи отыскания гармонической функции по значениям ее нормальной производной на контуре поперечного сечения (к решению задачи Неймана):

$$\begin{aligned}\nabla^2 \varphi &= 0, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial n} &= y l - x m \quad \text{на } L.\end{aligned}$$

Для круглого сечения имеем, что $y l - x m = 0$ на L , и в этом случае решением задачи Неймана будет постоянная величина $\varphi = \text{const}$. Однако поскольку $\varphi = \text{const}$ определяет перемещение стержня как целого в направлении оси z , принимаем значение постоянной равным нулю, т.е. решением рассматриваемой задачи будет функция кручения $\varphi = 0$.

Соответственно, сразу можем записать:

$$\begin{aligned}u &= -\tau y z, \quad v = \tau x z, \quad w = 0; \\ \tau_{zx} &= -\mu \tau y, \quad \tau_{zy} = \mu \tau x; \\ D &= \mu \iint (x^2 + y^2) dx dy = \mu J_p; \\ \tau &= M / D = \frac{M}{\mu J_p}.\end{aligned}$$

Результирующее касательное напряжение в произвольной точке поперечного сечения стержня определится соотношением:

$$T = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2} = \mu \tau \sqrt{x^2 + y^2} = \mu \tau r,$$

или, с учетом значения τ ,

$$T = \frac{M}{J_p} r \quad ,$$

где r — расстояние от оси стержня до рассматриваемой точки.

Результирующее касательное напряжение действует в направлении касательной к окружности радиуса r (мембранная аналогия) и имеет на этой окружности постоянное значение. Своего максимального значения результирующее касательное напряжение достигает на контуре поперечного сечения скручиваемого стержня при $r = R$:

$$T_{\max} = \frac{M}{J_p} R = \frac{M}{W_p} \quad ,$$

где W_p — полярный момент сопротивления.

9.4.	Задача о кручении стержня с эллиптическим поперечным сечением
------	---

а). Решение с использованием функции напряжений.

Контур L эллиптического поперечного сечения стержня представим уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b) \quad .$$

Уравнения, определяющие решение задачи кручения с использованием функции напряжений $\Phi(x, y)$, имеют вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= -2 \quad , \\ \Phi &= 0 \quad \text{на} \quad L \quad . \end{aligned}$$

Граничное условие на контуре поперечного сечения стержня легко выполнить, задав функцию напряжений в форме:

$$\Phi = A \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \quad ,$$

где A — постоянная, значение которой определим, подставляя принятое соотношение для $\Phi(x, y)$ в дифференциальное уравнение $\nabla^2 \Phi = -2$. Будем иметь:

$$2A \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = -2 \quad \Rightarrow \quad A = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

Окончательно, для функции напряжений получаем:

$$\Phi = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right).$$

Касательные напряжения определим по известным формулам:

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= \mu \tau \frac{\partial \Phi}{\partial y} = 2\mu \tau A \frac{y}{b^2}, \\ \tau_{zy} &= -\mu \tau \frac{\partial \Phi}{\partial x} = -2\mu \tau A \frac{x}{a^2}. \end{aligned}$$

Соответственно, результирующее касательное напряжение будет иметь вид:

$$T = 2\mu \tau |A| \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}} \quad \Rightarrow \quad T = \frac{2\mu \tau |A|}{ab} \sqrt{\frac{b^2 x^2}{a^2} + \frac{a^2 y^2}{b^2}}.$$

Можно показать, что результирующее касательное напряжение достигает максимальных значений на концах малой оси эллипса ($x=0, y=b$). В этих точках имеем:

$$T_{\max} = \frac{2\mu \tau |A|}{b} = 2\mu \tau \frac{a^2 b}{a^2 + b^2}.$$

Жесткость при кручении определим по полученной ранее формуле:

$$D = 2\mu \iint \Phi \, dx \, dy \quad \Rightarrow \quad D = 2\mu A \iint \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) dx \, dy \quad \Rightarrow \quad D = \mu \pi \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

и, тем самым, степень закручивания τ известна: $\tau = M / D$.

Для определения перемещения w необходимо найти функцию кручения

$\varphi = \varphi(x, y)$, предварительно отыскав сопряженную ей гармоническую функцию $\psi(x, y)$, которая, в свою очередь, связана с функцией напряжений следующим соотношением:

$$\Phi(x, y) = \psi(x, y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \Rightarrow \psi(x, y) = \Phi(x, y) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Вычислим производные функции кручения $\varphi = \varphi(x, y)$, используя соотношение Коши – Римана. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} + y = A \frac{2y}{b^2} + y, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} - x = -A \frac{2x}{a^2} - x. \end{aligned}$$

Однозначное определение функции кручения $\varphi = \varphi(x, y)$ по ее производным возможно только при выполнении условия

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right).$$

Легко проверить, что указанное равенство выполняется, и уже по стандартной процедуре для функции кручения получаем:

$$\varphi = \int_0^M \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy \right) = - \int_0^y \left(\frac{2A}{a^2} + 1 \right) x dy = - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} x y.$$

Соответственно, для перемещения $w = \tau \varphi(x, y)$ имеем:

$$w = - \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} \tau x y.$$

б). Показать, что для решения задачи о кручении стержня эллиптического поперечного сечения функцию кручения можно взять в виде $\varphi = Axy$, где A – постоянная подлежащая определению.

При решении задачи о кручении стержня эллиптического поперечного сечения функция $\varphi = Axy$ будет функцией кручения (депланации) только при выполнении двух условий:

- функция должна отвечать уравнению Лапласа $\nabla^2 \varphi = 0$;
- функция должна удовлетворять граничному условию

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} l + \frac{\partial \varphi}{\partial y} m = y l - x m$$

на контуре поперечного сечения $(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1$.

Проверим оба упомянутые условия. Легко видеть, что уравнение Лапласа удовлетворяется при любом значении постоянной A , а граничное условие позволяет записать ее в виде:

$$A = \frac{y l - x m}{y l + x m} = \frac{y dy + x dx}{y dy - x dx}.$$

При преобразованиях учтено, что $l = dy/ds$, $m = -dx/ds$.

Граничное условие должно выполняться на контуре, где связь между переменными x и y можно представить в виде соотношения $y^2/b^2 = 1 - (x^2/a^2)$, откуда можно получить:

$$y dy = -(b/a)^2 x dx.$$

С учетом полученного соотношения для постоянной A получаем:

$$A = -\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}.$$

Таким образом, при найденном значении постоянной A функция $\varphi = Axy$ будет функцией кручения при решении задачи о кручении стержня эллиптического поперечного сечения.

9.5.	Дана аналитическая функция комплексной переменной $W(z) = Az^2$ (A – постоянная подлежащая определению). Принимая мнимую часть $W(z)$ за функцию кручения, выяснить, какому поперечному сечению скручиваемого стержня она соответствует.
------	---

Выделим вещественную и мнимую часть функции $W(z)$. Будем иметь:

$$W(z) = A(x + iy)^2 = A(x^2 - y^2) + i \cdot 2Axy.$$

Поскольку по условию задачи за функцию кручения принимается мнимая часть функции $W(z)$, то контур поперечного сечения стержня должен определяться уравнением

$$-A(x^2 - y^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C, \quad ,$$

где C , так же, как и A , — постоянная, подлежащая определению.

Перепишем предполагаемое уравнение контура в виде

$$\frac{x^2}{-C/\left(A + \frac{1}{2}\right)} + \frac{y^2}{C/\left(A - \frac{1}{2}\right)} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad - \text{уравнение эллипса},$$

где введены новые постоянные:

$$a^2 = -C/\left(A + \frac{1}{2}\right), \quad b^2 = C/\left(A - \frac{1}{2}\right).$$

Полагая для определенности $a > b$, из условия, что a^2 и b^2 — положительные величины, получаем, что $C < 0$ и $(-1/2) < A < 0$ (отметим, что при $A = 0$ имеем уравнение окружности).

Определение постоянных A и C через постоянные a и b позволяет получить:

$$A = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}, \quad C = -\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

9.6.	Дана аналитическая функция комплексной переменной $W(z) = Az^3$ (A — постоянная подлежащая определению). Принимая мнимую часть $W(z)$ за функцию кручения, выяснить, какому поперечному сечению скручиваемого стержня она соответствует.
------	---

Выделим вещественную и мнимую часть функции $W(z)$. Будем иметь:

$$W(z) = A(x + iy)^3 = A(x^3 - 3xy^2) + i \cdot A(3x^2y - y^3).$$

Поскольку по условию задачи за функцию кручения принимается мнимая часть функции $W(z)$, то контур поперечного сечения стержня должен

определяться уравнением

$$-A(x^3 - 3xy^2) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + C, \quad ,$$

где C , так же, как и A , – постоянная, подлежащая определению.

Перепишем предполагаемое уравнение контура в виде

$$B(x^3 - 3xy^2) + x^2 + y^2 = D.$$

Представленное уравнение определяет полную гиперболу третьего порядка. Не останавливаясь на математических преобразованиях, отметим, что при надлежащем выборе постоянных B и D уравнение можно представить в виде:

$$B(x-a)(x-b+y\sqrt{3})(x-b-y\sqrt{3})=0.$$

Связь между «старыми» постоянными B и D и «новыми» постоянными a и b легко получить, сравнивая коэффициенты уравнений при одинаковых степенях переменных. Будем иметь:

$$B = 1/3a, \quad D = 4a^2/3, \quad b = -2a.$$

Оставляя постоянной a за параметр, предполагаемое уравнение контура в приводим к виду

$$(x-a)(x+y\sqrt{3}+2a)(x-y\sqrt{3}+2a)=0.$$

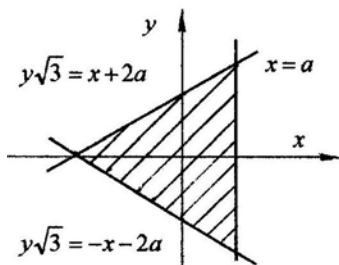


Рис. 9.3

Полученное уравнение определяет три прямых, ограничивающих замкнутую область в форме равностороннего треугольника (рис. 9.3). Соответственно, функции

$$\varphi = A(3x^2y - y^3) \quad \text{и} \quad \psi = -A(x^3 - 3xy^2),$$

где $A = 2B = 1/6a$, являются решением задачи о кручении стержня, поперечное сечение которого

есть упомянутый равностороннего треугольник.

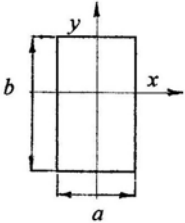
Приведем некоторые соотношения, определяющие некоторые конечные результаты решения данной задачи:

- жесткость при кручении $D = (9\sqrt{3}/5)\mu a^4;$

- результирующее касательное напряжение

$$T = \frac{\mu\tau}{a} \sqrt{y^2(x-a)^2 + (x^2 + 2ax - y^2)/4} ;$$

- максимальное результирующее касательное напряжение $T_{\max} = 3\mu\tau a/2$ имеет место на контуре поперечного сечения в середине каждой стороны.

9.7.		Задача о кручении стержня с прямоугольным поперечным сечением
------	---	---

Поставленную задачу будем решать с применением функции напряжений. Уравнения, определяющие решение задачи кручения с использованием функции напряжений $\Phi(x, y)$, имеют вид:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Phi &= -2 , \\ \Phi &= 0 \quad \text{на} \quad L . \end{aligned}$$

Представим правую часть уравнения Пуассона в виде ряда Фурье в интервале $-a/2 \leq x \leq a/2$. Будем иметь:

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \lambda_n x , \quad \lambda_n = \frac{(2n+1)\pi}{a} .$$

Разделяя переменные, решение уравнения будем искать в форме

$$\Phi(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi_n(y) \cos \lambda_n x .$$

После подстановки функции напряжений $\Phi(x, y)$ в принятой форме в дифференциальное уравнение, будем иметь:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{d^2 \Phi_n}{dy^2} - \lambda_n^2 \Phi_n \right] \cos \lambda_n x = -\frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cos \lambda_n x .$$

Из сравнения коэффициентов рядов в правой и левой части уравнения следует дифференциальное уравнение относительно функции $\Phi_n(y)$:

$$\frac{d^2 \Phi_n}{dy^2} - \lambda_n^2 \Phi_n = -\frac{8}{\pi} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Общее решение полученного неоднородного уравнения складывается из известного общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного:

$$\Phi_n(y) = A_n \operatorname{ch} \lambda_n y + B_n \operatorname{sh} \lambda_n y + \frac{8}{\pi \lambda_n^2} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Значения постоянных A_n и B_n определим из граничных условий для функции $\Phi(x, y)$ на прямых ($x = \pm a/2$, $y = \pm b/2$), определяющих контур поперечного сечения. Граничное условие на прямых $x = \pm a/2$ удовлетворяется тождественно за счет того, что $\cos \lambda_n x|_{x=\pm a/2} \equiv 0$, а на прямых $y = \pm b/2$ переходит в условие $\Phi_n(\pm b/2) = 0$, откуда следует:

$$B_n = 0, \\ A_n = -\frac{8}{\pi \lambda_n^2} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda_n b/2)} = -\frac{8a^2}{\pi^3} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cdot \frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda_n b/2)}.$$

Таким образом, решение задачи о кручении стержня с прямоугольным поперечным сечением с использованием функции напряжений $\Phi(x, y)$ имеет вид:

$$\Phi(x, y) = \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \lambda_n y}{\operatorname{ch}(\lambda_n b/2)} \right] \cos \lambda_n x.$$

Полученное соотношение для функции напряжений можно записать в виде суммы двух рядов, причем первый ряд в интервале $-a/2 \leq x \leq a/2$ представляется в конечном виде:

$$\frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cos \lambda_n x = \frac{a^2}{4} - x^2.$$

Окончательно, решение задачи о кручении стержня с прямоугольным поперечным сечением с использованием функции напряжений $\Phi(x, y)$ имеет вид:

$$\Phi(x, y) = \frac{a^2}{4} - x^2 - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{ch} \lambda_n y}{\operatorname{ch}(\lambda_n b/2)} \cos \lambda_n x \quad .$$

Запишем формулы для касательных напряжений:

$$\begin{aligned} \tau_{zx} &= -\mu \tau \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\operatorname{sh} \lambda_n y}{\operatorname{ch}(\lambda_n b/2)} \cos \lambda_n x \quad , \\ \tau_{zy} &= 2\mu \tau x - \mu \tau \frac{8a}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} \frac{\operatorname{ch} \lambda_n y}{\operatorname{ch}(\lambda_n b/2)} \sin \lambda_n x \quad . \end{aligned}$$

Результирующее касательное напряжений принимает максимальное значение в точках $x = \pm a/2$, $y = 0$.

Вычисление жесткости при кручении приводит к следующему результату:

$$D = 8\mu \int_0^{a/2} \left[\int_0^{b/2} \Phi(x, y) dy \right] dx = \mu \frac{a^3 b}{3} \left[1 - \frac{192a}{b\pi^5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\operatorname{th}(\lambda_n b/2)}{(2n+1)^5} \right] \quad .$$

По известной схеме, воспользовавшись соответствующими формулами, трудно получить функцию кручения $\varphi = \varphi(x, y)$ и перемещение $w = \tau \varphi(x, y)$:

$$w = \tau \left[xy - \frac{8a^2}{\pi^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \frac{\operatorname{sh} \lambda_n y}{\operatorname{ch}(\lambda_n b/2)} \sin \lambda_n x \right] \quad .$$

Отметим, что сходимость рядов, определяющих решение поставленной задачи, достаточно высока, так что при удержании только первого члена ряда погрешность не превысит одного процента.

Отдельного внимания заслуживает вариант, когда $b \gg a$. В этом частном случае имеем, что

$$D = \mu \frac{a^3 b}{3} \quad , \quad \tau_{zx} = 0 \quad , \quad \tau_{zy} = 2\mu \tau x \quad .$$

9.4.4. Мембранная аналогия Прандтля

Мембранная аналогия Прандтля для односвязных профилей

Рассмотрим абсолютно гибкую пластину (мембрану), натянутую на плоский контур L и находящуюся под действием распределен-

ной по ее поверхности нормальной нагрузки $p(x, y)$. Равновесие такой мембраны описывается дифференциальным уравнением

$$\nabla^2 w = -p(x, y)/T_0 ,$$

где T_0 – натяжение мембраны, а w – прогиб мембраны. Прогиб w должен быть найден при граничном условии:

$$w = 0 \quad \text{на} \quad L ,$$

причём контур мембраны L считаем односвязным.

Сравним уравнение прогибов мембраны и уравнение для функции напряжений $\Phi(x, y)$ в задаче кручения и, соответственно, граничное условие для w и граничное условие для $\Phi(x, y)$. Можно видеть, что задача о кручении стержня односвязного профиля может быть сопоставлена с задачей о равновесии мембраны, натянутой на контур, идентичный контуру поперечного сечения стержня, и нагруженной равномерным нормальным давлением p_0 . Если при этом отношение давления p_0 к натяжению в мембране T_0 равно $2m$ ($p_0/T_0 = 2m$), то $\Phi = w/m$, где $\Phi(x, y)$ – значение функции кручения в рассматриваемой точке поперечного сечения стержня, а $w(x, y)$ – прогиб мембраны в соответствующей точке ее поверхности. Из всего этого следует, что задача кручения стержня односвязного профиля может быть экспериментально решена путем измерения прогибов равномерно нагруженной мембраны.

Используя зависимость $\Phi = w/m$, можем получить сразу, что жесткость стержня на кручение определится формулой

$$D = 2\mu \iint \Phi(x, y) d\Omega' = \frac{2\mu}{m} V ,$$

где V – объем, ограниченный поверхностью изогнутой мембраны и плоскостью ее опорного контура L .

Использование мембранной аналогии для построения картины напряженного состояния при кручении призматических стержней

Мембранная аналогия может быть использована не только для численного определения напряжений; она дает также наглядную картину напряженного состояния закрученного стержня.

Рассмотрим некоторую точку, лежащую на поверхности мембраны. Проведем через эту точку горизонтальную плоскость. Прогиб вдоль горизонтали является постоянным, так что можно записать:

$$\partial w / \partial s = 0 \quad .$$

Пользуясь аналогией, записываем для задачи о кручении, что $\partial \Phi / \partial s = 0$ для линии $\Phi(x, y) = \text{const}$. С учетом значения производной $\partial \Phi / \partial s$ будем иметь:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\mu \tau} (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{zn} = 0 \quad .$$

Полученное соотношение показывает, что полное (результатирующее) касательное напряжение направлено по касательной к линии $\Phi(x, y) = \text{const}$. Отсюда следует, что линии равного прогиба в задаче о мембране определяют линии (траектории) результирующих касательных напряжений.

Если провести аналогичные преобразования для производной $\partial \Phi / \partial n$, то получим:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} l + \frac{\partial \Phi}{\partial y} m = -\frac{1}{\mu \tau} (\tau_{zy} l - \tau_{zx} m) \quad .$$

Сравним два полученных соотношения:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \frac{1}{\mu \tau} (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m) = 0 \quad ,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} = \frac{1}{\mu\tau} (\tau_{zx}m - \tau_{zy}l) \neq 0 \quad .$$

Рассматривая эти соотношения как два уравнения относительно касательных напряжений, можем получить, что

$$\tau_{zx} = \mu\tau \frac{\partial \Phi}{\partial n} m \quad , \quad \tau_{zy} = -\mu\tau \frac{\partial \Phi}{\partial n} l \quad .$$

Определяя результирующее касательное напряжение, получим:

$$T = \mu\tau \left| \frac{\partial \Phi}{\partial n} \right| \quad ,$$

а с учетом мембранной аналогии можем записать, что

$$T = \frac{\mu\tau}{m} \cdot \frac{\partial w}{\partial n} \quad .$$

Из полученного соотношения для результирующего касательного напряжения следует, что его величина определяется уклоном мембраны по нормали к горизонтали. Рассмотрение изогнутой поверхности мембраны показывает, что наибольший уклон имеет место на контуре. Отсюда можно заключить, что наибольшее значение касательных напряжений будет в точках контура поперечного сечения стержня, что было уже доказано ранее.

Мембранная аналогия Прандтля для многосвязных профилей

Решение задачи кручения для стержня с многосвязным поперечным сечением определяется уравнением Пуассона

$$\nabla^2 \Phi = -2 \quad ,$$

граничными условиями

$$\Phi = C_k \text{ на контуре } L_k (k=1, 2, \dots, m) ,$$

и уравнениями для определения постоянных C_k :

$$\oint_{L_k} \frac{\partial \Phi}{\partial n_k} ds = -2 \Omega_k .$$

Рассмотрим постановку соответствующей задачи о мембране. Граничные условия в этой задаче будут иметь вид

$$w = m C_k \text{ на контуре } L_k (k=1, 2, \dots, m) .$$

Отметим, что число постоянных C_k равно $m+1$, но одной из них, а именно $(m+1)$ -й, мы уже распорядились: приняли ее равной нулю, что соответствует условию закрепления внешнего контура. Для остальных контуров в соответствии с выписанными граничными условиями имеем, что точки контура должны получить поступательные перемещения. Величины этих перемещений, очевидно, будут определяться величиной постоянных C_k .

Перепишем условия для определения постоянных C_k в задаче кручения в соответствующие условия в задаче о мембране (относительно функции прогибов w). Будем иметь:

$$- \oint_{L_k} \frac{\partial w}{\partial n_k} ds = 2 m \Omega_k$$

или, с учетом значения параметра $2m = p_0 / T_0$,

$$- \oint_{L_k} \frac{\partial w}{\partial n_k} T_0 ds = p_0 \Omega_k .$$

В полученном соотношении величина $T_0 \frac{\partial w}{\partial n_k}$ – сила, отнесенная к единице длины контура L_k , перпендикулярная к плоскости контура и действующая на него со стороны мембраны. Соответственно, интеграл $\oint_{L_k} T_0 \frac{\partial w}{\partial n_k} ds$ представляет суммарную нагрузку на этот контур со стороны мембраны. Равенство этой нагрузки нагрузке $p_0 \Omega_k$ определяет равновесие невесомого диска, ограниченного контуром L_k . Таким образом, задача о мембране, соответствующая задаче кручения стержня с многосвязным поперечным сечением может быть поставлена следующим образом (рис. 9.4):

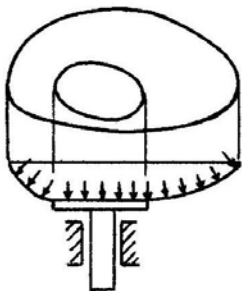


Рис. 9.4

- контур мембраны должен быть идентичен (или подобен) внешнему контуру поперечного сечения стержня;

- внутренние контуры должны быть имитированы абсолютно жесткими плоскими невесомыми дисками (вырезанными по форме внутренних контуров и прикрепленными к мембране так, чтобы свободная от дисков поверхность имела вид исследуемого многосвязного профиля);

- диски должны иметь свободу перемещения только в направлении, перпендикулярном к их плоскостям.

В таком случае прогиб мембраны будет пропорционален функции кручения (в соответствующей точке), а линии равного прогиба будут идентичны (или подобны) траекториям результирующих касательных напряжений.

Эксперимент такого рода (с многосвязным профилем) осуществить не так просто, если ставить целью получение достаточно точных в количественном отношении результатов. Однако аналогия Прандтля придает вопросу кручения большую наглядность, что зачастую существенно облегчает решение задачи.

Задачи

9.8.	Кручение односвязных тонкостенных профилей, составленных из прямоугольных полос
------	---

Речь идет не только о стержнях, сваренных из прямоугольных полос, но и о прокатных профилях (швеллеры, двутавры и т.п.), которые имеют переменные толщины стенок и полок, но в первом приближении их можно рассматривать как стержни, составленные из прямоугольных полос, усредняя при расчете упомянутые толщины.

Рассмотрим задачу о кручении стержня с поперечным сечением в форме двутавра, используя представления мембранной аналогии Прандтля.

Наряду с мембраной I (рис. 9.5, а), натянутой на контур, идентичный контуру скручиваемого стержня, рассмотрим мембраны II, III и IV (рис. 9.5, б), контуры которых идентичны контурам прямоугольников, образующих в совокупности двутавр.

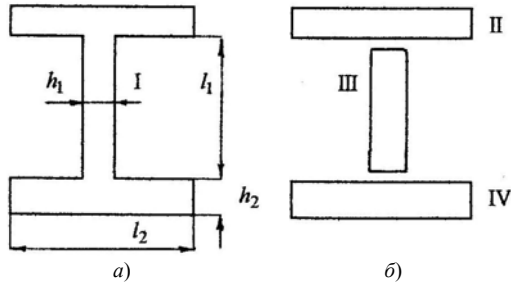


Рис. 9.5

Очевидно, что при равных давлениях на все четыре мембраны и при их равных натяжениях, прогибы точек мембран II, III и IV будут достаточно близки к прогибам соответствующих точек мембраны I за исключением двух небольших областей, примыкающих к точкам перехода полок в стенки.

На этом основании можно утверждать, что объем, заключенный между изогнутой поверхностью мембраны I и плоскостью ее опорного контура, приблизительно равен сумме аналогичных объемов для мембран II, III и IV. Следовательно, жесткость при кручении стержня с поперечным сечением в форме двутавра можно определить как сумму жесткостей при кручении его полок и стенки, рассматриваемых как прямоугольные полосы:

$$D_I = D_{II} + D_{III} + D_{IV} = (\mu/3) \sum_{i=1}^3 l_i h_i^3.$$

Легко показать, что стержни рассматриваемого типа невыгодны при кручении, поскольку их жесткость значительно уступает, например, жесткости стержня с круговым поперечным сечением той же площади. Однако если решить задачу о кручении стержня тонкостенного открытого профиля, предположив, что **депланация на торцах запрещена**, то жесткость при кручении получится гораздо боль-

шей, чем результат, следующий из формулы типа $D = (\mu/3) \sum_{i=1}^3 l_i h_i^3$.

Такой вид кручения носит название «стесненного» кручения в отличие от рассмотренного ранее «чистого» кручения, когда торцы деформируются так же, как и все остальные поперечные сечения.

Отметим, что на практике условия закрепления торцов скручиваемых стержней всегда (в большей или меньшей мере) «запрещают» деформацию. Для нетонкостенных стержней с односвязным сечением различие в решениях «стесненного» и «чистого» кручения практически отсутствует, а для стержней тонкостенного открытого профиля это различие существенно. Теория «стесненного» кручения стержней детально разработана В.З. Власовым.

9.9.	Кручение тонкостенных стержней двухсвязного профиля (кручение тонкостенных труб)
------	--

Рассмотрим поставленную задачу, используя представления мембранной аналогии Прандтля (рис. 9.6).

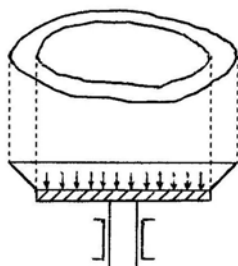


Рис. 9.6

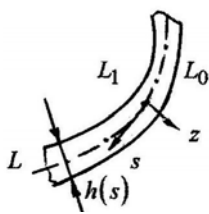


Рис. 9.7

Нетрудно видеть, что прогиб мембраны будет определяться в основном нагрузкой, передаваемой на нее со стороны диска. Что касается нагрузки, действующей на мембрану непосредственно, то ее влиянием можно пренебречь, поскольку площадь диска значительно превосходит площадь поверхности мембраны. В этом случае изогнутую поверхность мембраны можно рассматривать как коническую, принимая тем самым линейную зависимость между прогибом и расстоянием между рассматриваемой точкой и внешним контуром (расстояние отсчитывается по нормали к контуру).

Соответственно, в задаче кручения можно утверждать, что функция напряжений Φ является линейной функцией расстояния z , отсчитываемого по нормали к линии L (рис. 9.7). Принимая, что на внешнем контуре L_0 ($z = h/2$) функция напряжений равна нулю, а на внутреннем L_1 ($z = -h/2$) — постоянной C_1 , можем записать:

$$\Phi(z, s) = \frac{C_1}{h} \left(\frac{h}{2} - z \right).$$

Значение постоянной C_1 определим, используя соотношение, предназначенное именно для этой цели:

$$-\int_L \frac{\partial \Phi}{\partial z} ds = \int_L \frac{C_1}{h(s)} ds = 2\Omega \quad \Rightarrow \quad C_1 = 2\Omega / \int_L \frac{ds}{h(s)} ,$$

где Ω – площадь, ограниченная контуром L . Отметим, что в рамках погрешности излагаемого решения имеем, что $\Omega \approx \Omega_0 \approx \Omega_1$.

Для определения жесткости при кручении воспользуемся формулой, учитывающей, что в рассматриваемой задаче имеем двухсвязный контур:

$$D = 2\mu C_1 \Omega + 2\mu \iint \Phi d\bar{\Omega} ,$$

где $d\bar{\Omega} = dz ds$ – элемент площади поперечного сечения скручиваемого стержня. Подставляя соотношение для функции напряжений Φ , после вычисления соответствующего интеграла получим:

$$D = 2\mu C_1 \left(\Omega + \frac{1}{2} \int_L h(s) ds \right) \Rightarrow D = 2\mu C_1 \Omega \Rightarrow D = 4\mu \Omega^2 / \int_L \frac{ds}{h(s)} .$$

Результирующее касательное напряжение определим, используя известную формулу:

$$T = \mu \tau \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right| = 2\mu \tau \Omega / h(s) \int_L \frac{ds}{h(s)} .$$

Подставляя в полученное соотношение степень закручивания $\tau = M/D$ и жесткость при кручении D , окончательно для результирующего касательного напряжения будем иметь:

$$T = M / 2h(s) \Omega .$$

Полученный результат показывает, что результирующее касательное напряжение не меняется по толщине тонкостенной трубы при ее кручении. Отметим, что данное утверждение следует из введенной линейной зависимости функции напряжений Φ от переменной z .

9.10.	Решить задачу кручения тонкостенного стержня с коробчатым поперечным сечением $a \times a$ при постоянной толщине сечения h . Найти степень закручивания и максимальное результирующее напряжение.
-------	--

Для решения поставленной задачи воспользуемся соотношениями, полученными при решении задачи 9.9.

Легко видеть, что при постоянной толщине поперечного сечения результирующее касательное напряжение одинаково во всех его точках:

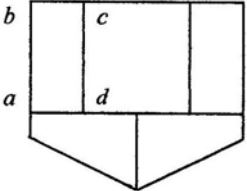
$$T = M / 2h(s)\Omega = M / 2a^2h \quad .$$

При определении степени закручивания учтем, что

$$D = 4\mu\Omega^2 / \int_L \frac{ds}{h(s)} \Rightarrow D = \mu ah \quad .$$

Будем иметь:

$$\tau = M / D \Rightarrow \tau = M / \mu ah \quad .$$

9.11.		Кручение тонкостенного замкнутого профиля с многосвязным контуром
-------	---	---

Решение задачи о кручении тонкостенного замкнутого профиля с многосвязным контуром проведем на примере, показанном на рисунке. Однако прежде чем переходить непосредственно к решению, преобразуем формулы для результирующего касательного напряжения T и степени закручивания τ , определяющие задачу о кручении тонкостенной трубы.

В частности, результирующее касательное напряжение, которое определено соотношением $T = M / 2h(s)\Omega$, перепишем в форме

$$M = 2T'\Omega \quad , \quad (1)$$

где $T' = Th(s)$ – поток касательных напряжений (усилие). Полученное уравнение является уравнением равновесия, из которого отыскивается неизвестная величина T' .

Степень закручивания определяется известным соотношением $\tau = M / D$, которое с учетом значений жесткости при кручении D и момента M приводится к виду:

$$M \int_L \frac{ds}{h(s)} = 4\mu\tau\Omega^2 \Rightarrow 2T'\Omega \int_L \frac{ds}{h(s)} = 4\mu\tau\Omega^2 \Rightarrow T' \int_L \frac{ds}{h(s)} = 2\mu\tau\Omega \quad . \quad (2)$$

Легко видеть, что уравнение (2) представляет циркуляцию потока касательных напряжений по контуру. Таким образом, уравнения (1) и (2) определяют решение задачи о кручении тонкостенного профиля с двухсвязным контуром (определяют неизвестные T' и τ).

Обобщим полученный результат на случай тонкостенного профиля с многосвязным контуром, показанным на рис. 9.8. В сечении имеется пять внутренних замкнутых контуров и, соответственно, пять неизвестных потоков касательных напряжений T'_i ($i=1, 2, \dots, 5$), действующих в стенках, образующих контуры. Шестой неизвестной величиной будет степень закручивания τ .

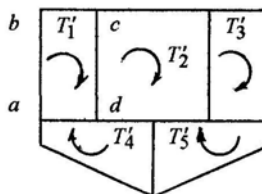


Рис. 9.8

Для определения перечисленных шести неизвестных можем записать уравнение равновесия (уравнение моментов внешних и внутренних сил) и пять уравнений циркуляции потоков касательных напряжений по пяти внутренним контурам.

Уравнение равновесия в рассматриваемой задаче принимает форму:

$$M = 2 \sum_{i=1}^5 T'_i \Omega_i .$$

Уравнение циркуляции для первого контура $abcd$ будет иметь вид:

$$T'_1 \left(\frac{s_{ab}}{h_{ab}} + \frac{s_{bc}}{h_{bc}} \right) + (T'_1 - T'_2) \frac{s_{cd}}{h_{cd}} + (T'_1 - T'_4) \frac{s_{ad}}{h_{ad}} = 2\mu\tau\Omega_1 ,$$

где s_{ab} , h_{ab} и т.д. — длина и толщина соответствующего участка контура (предполагается, что в пределах рассматриваемого участка контура его толщина постоянна).

Отметим, что рассматриваемое сечение имеет ось симметрии, так что $T'_1 = T'_3$ и $T'_4 = T'_5$, и число неизвестных сокращается до четырех: для решения задачи достаточно составить уравнения циркуляции для контуров 1, 2 и 4.

10. Кручение круглых валов переменного диаметра

Предложенная к решению задача не входит в задачу Сен-Венана, в которой рассматриваются тела цилиндрической или призматической формы. Однако поскольку задача о кручении круглых валов переменного диаметра представляет практический

интерес, метод ее решения рассмотрим отдельно.

Поскольку здесь имеем дело с телом вращения, воспользуемся цилиндрическими координатами r, θ, z , принимая, что ось z является осью вала.

Выпишем все уравнения, определяющие упругое равновесие рассматриваемого тела:

- дифференциальные уравнения равновесия (при отсутствии объемных сил)

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{(\sigma_r - \sigma_\theta)}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0,\end{aligned}$$

- уравнения Коши (u, v, w – перемещения в направлениях r, θ, z)

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r}, \\ \varepsilon_\varphi &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \theta} + u \right), & \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{zr} &= \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z};\end{aligned}$$

- уравнения физического закона

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \lambda \vartheta + 2\mu \varepsilon_r, & \tau_{r\theta} &= \mu \gamma_{r\theta}, \\ \sigma_\theta &= \lambda \vartheta + 2\mu \varepsilon_\theta, & \tau_{\theta z} &= \mu \gamma_{\theta z}, \\ \sigma_z &= \lambda \vartheta + 2\mu \varepsilon_z, & \tau_{zr} &= \mu \gamma_{zr},\end{aligned}$$

где $\vartheta = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z$.

Будем считать, что сечения, перпендикулярные к оси вала, остаются плоскими и что перемещение точки любого поперечного сечения направлено вдоль касательной к окружности, проходящей через эту точку. Если учесть, что перемещение v не может зависеть от переменной θ из-за осевой симметрии задачи, принятые допущения позволяют записать следующие соотношения для перемещений: $u = w = 0$, $v = v(r, z)$.

Отметим, что в задаче о кручении круглого вала *постоянного диаметра* перемещение в направлении касательной к окружности пропорционально расстоянию от оси вала r ($\bar{u}, \bar{v}$ – перемещения в направлениях x, y ; $\bar{u} = -\tau z y$, $\bar{v} = \tau z x \Rightarrow \bar{u}^2 + \bar{v}^2 = v = \tau z r$), что соответствует представлению о прямых (неискривляющихся) радиусах. В поставленной задаче вводится произвольная зависимость от радиуса r , что определяет искривление радиусов поперечных сечений в процессе деформирования.

Введенное поле перемещений $u = w = 0$, $v = v(r, z)$ позволяет определить поле деформаций:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = \gamma_{zr} = 0 \quad ,$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} \quad , \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z}$$

и поле напряжений:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{zr} = 0 \quad ,$$

$$\tau_{r\theta} \neq 0 \quad , \quad \tau_{\theta z} \neq 0 \quad .$$

Поставленную задачу будем решать в напряжениях с применением функции напряжений.

Рассмотрение дифференциальных уравнений равновесия показывает, что из трех уравнений остается только одно

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad ,$$

которое можно представить в виде:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \tau_{r\theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(r^2 \tau_{\theta z} \right) = 0 \quad .$$

Функция напряжений $\varphi = \varphi(r, z)$ вводится так, чтобы удовлетворить дифференциальное уравнение равновесия:

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad , \quad \tau_{\theta z} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad .$$

Уравнение, определяющее функцию напряжений, должны получить из уравнений Бельтрами – Митчелла. Поскольку в рассматриваемой задаче имеем достаточно простые поля деформаций и напряжений, получим вначале условие совместности деформаций, исключая перемещение v из соотношений для деформаций $\gamma_{r\theta}$ и $\gamma_{\theta z}$. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} = r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{v}{r} \right) \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{\partial v}{\partial z} = r \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{v}{r} \right) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\gamma_{r\theta}}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\gamma_{\theta z}}{r} \right) = 0 \quad .$$

Переходя в условия совместности деформаций к напряжениям и подставляя затем их значения через функцию напряжений, приходим к уравнению, определяющему функцию напряжений:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r^3} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad .$$

Из граничных условий в напряжениях на боковой поверхности вала остается только одно уравнение:

$$\tau_{r\theta} l + \tau_{z\theta} n = 0 \quad .$$

Направляющие косинусы нормали к площадке, расположенной на боковой поверхности скручиваемого вала, определим следующим образом (рис. 10.1):

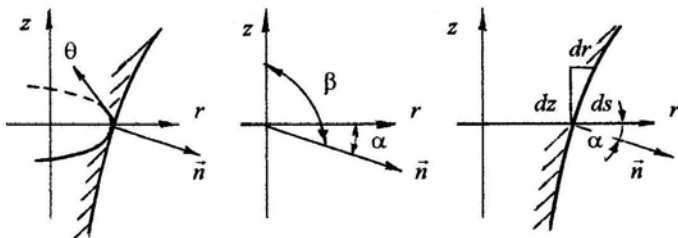


Рис. 10.1

Непосредственно из рис. 10.1 для направляющих косинусов имеем:

$$l = \cos(-\alpha) = \cos \alpha = dz / ds \quad ,$$

$$n = \cos(-\beta) = \cos(90 + \alpha) = -\sin \alpha = -dr / ds \quad .$$

Соответственно, граничное условие на боковой поверхности вала (на его контуре или на образующей) для функции напряжений будет иметь вид:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \frac{dz}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{ds} = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi = \text{const} \quad .$$

Таким образом, решение задачи о кручении круглых валов переменного диаметра сводится к отысканию функции напряжений φ , удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

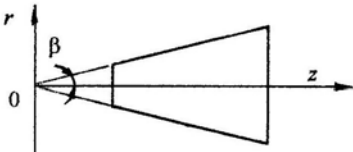
и граничному условию $\varphi = \text{const}$ на контуре вала.

Значение крутящего момента в произвольном поперечном сечении легко вычислить:

$$M = \int_0^a \tau_{z\theta} \cdot r \cdot 2\pi r dr = 2\pi \int_0^a \frac{\partial \varphi}{\partial r} dr = 2\pi \varphi \Big|_0^a = 2\pi [\varphi(a, z) - \varphi(0, z)] \quad .$$

Для решения задач, с которыми приходится сталкиваться на практике, обычно применяют численные методы.

Задача

10.1.		Решить задачу о кручении вала конической формы
-------	---	--

Напомним, что задача о кручении круглых валов переменного диаметра (тел вращения) сводится к отысканию функции напряжений $\varphi = \varphi(r, z)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \frac{3}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

и граничному условию $\varphi = \text{const}$ на контуре вала.

Значение крутящего момента в произвольном поперечном сечении при найденной функции напряжений определяется соотношением

$$M = 2\pi [\varphi(a, z) - \varphi(0, z)] \quad .$$

Уравнение контура вала конической формы имеет вид:

$$z / \sqrt{r^2 + z^2} = \cos \beta \quad ,$$

причем отношение, фигурирующее в левой части уравнения, является величиной постоянной. Соответственно, если функцию напряжений φ строить как функцию этого отношения, то граничное условие на контуре $\varphi = \text{const}$ будет удовлетворено.

Легко проверить, что функция

$$\varphi = C \left[\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right)^3 \right] ,$$

где C – постоянная, удовлетворяет дифференциальному уравнению, определяющему функцию напряжений φ . Постоянную C определим, считая, что значение крутящего момента в произвольном поперечном сечении задано. В этом случае будем иметь:

$$M = 2\pi C \left[\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} - \frac{1}{3} \left(\frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)^3 - 1 + \frac{1}{3} \right] \Rightarrow C = -\frac{3M}{2\pi (2 - 3\cos\beta + \cos^3\beta)} .$$

Вычисление касательных напряжений приводит к следующим соотношениям:

$$\tau_{r\theta} = -\frac{Cr^2}{(r^2 + z^2)^{5/2}} , \quad \tau_{\theta z} = -\frac{Crz}{(r^2 + z^2)^{5/2}} ,$$

где постоянная C определяется вышеприведенной формулой.

11. Плоская задача теории упругости

Под плоской задачей теории упругости понимают совокупность двух родственных в математическом отношении задач:

- задачи о плоском деформированном состоянии (о плоской деформации);
- задачи о плоском напряженном состоянии.

11.1. Основные уравнения плоской деформации

Будем считать, что тело находится в состоянии плоской деформации, параллельной плоскости xu , если компонента полного перемещения w равна нулю, а компоненты u и v являются функциями переменных x и y :

$$u = u(x, y) , \quad v = v(x, y) , \quad w = 0 .$$

В этом случае деформации ε_x , ε_y и γ_{xy} будут функциями переменных x и y :

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad ,$$

а деформации ε_z , γ_{yz} и γ_{zx} – равны нулю. Соответственно, зависимости Коши будут представлены только тремя вышеприведенными уравнениями.

При имеющих место деформациях, из шести уравнений совместности деформаций Сен-Венана удовлетворяются тождественно пять. Оставшееся уравнение связывает деформации, отличные от нуля:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad .$$

Запишем уравнения линейного физического закона. Отметим, что соотношение $\varepsilon_z = 0$ позволяет исключить напряжение σ_z из этих уравнений и, соответственно, из числа определяемых неизвестных. Действительно,

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = \nu(\sigma_y + \sigma_x) \quad .$$

С учетом соотношения, полученного для напряжения σ_z , уравнение, определяющее деформацию ε_x , принимает вид:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_x = \frac{1 - \nu^2}{E} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1 - \nu} \sigma_y \right) \quad .$$

Введем следующие обозначения:

$$E^* = E / (1 - \nu^2) , \quad \nu^* = \nu / (1 - \nu) \Rightarrow G^* = G .$$

В этом случае для деформации ε_x имеем:

$$\varepsilon_x = (\sigma_x - \nu^* \sigma_y) / E^* .$$

Преобразуя с учетом введенных обозначений соотношения для ε_y и γ_{xy} , уравнения линейного физического закона получим в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \nu^* \sigma_y) / E^* , \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \nu^* \sigma_x) / E^* , \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G^* , \end{aligned}$$

где величины E^* и ν^* можно рассматривать как некоторые новые значения упругих постоянных.

Уравнения линейного физического закона в форме Ламе для плоской деформации имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda \vartheta + 2\mu \varepsilon_x , \\ \sigma_y &= \lambda \vartheta + 2\mu \varepsilon_y , \\ \tau_{xy} &= \mu \gamma_{xy} . \end{aligned}$$

Поскольку напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} являются функциями только переменных x и y , из трех дифференциальных уравнений равновесия остается только два:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0 , \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0 , \end{aligned}$$

причем в этих уравнениях требуется, чтобы составляющие X и Y объемной силы были функциями переменных x и y . Третье уравнение равновесия переходит в условие $Z = 0$: составляющая Z объемной силы должна быть равна нулю.

Таким образом, получена полная система уравнений, определяющая решение задачи о плоской деформации (плоском деформированном состоянии). Отметим, однако, что вопрос о возможности реализации плоской деформации, т.е. для какой формы тела и при каком его нагружении имеет место плоская деформация, пока остается открытым.

Будем считать, что рассматриваем длинное тело цилиндрической или призматической формы с основаниями (торцами), перпендикулярными к его оси, которую примем за ось z .

Предположим, что на боковой поверхности тела действуют внешние поверхностные силы, равномерно распределенные по длине тела и перпендикулярные к его боковой поверхности, т.е. $\bar{X} = \bar{X}(x, y)$, $\bar{Y} = \bar{Y}(x, y)$, $\bar{Z} = 0$. Будем считать, что аналогичным условиям отвечают и объемные силы: $X = X(x, y)$, $Y = Y(x, y)$, $Z = 0$. При таких предположениях относительно формы тела и его нагружении можно считать, что все поперечные сечения находятся в условиях плоского деформированного состояния.

Поскольку все определяемые величины, характеризующие плоскую деформацию, являются функциями переменных x и y , граничные условия на боковой поверхности сводятся к соответствующим условиям на контуре поперечного сечения:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m, \\ \bar{Y} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m.\end{aligned}$$

Граничные условия на торцах тела определяются наличием напряжения σ_z . Принимая, что площадь торца мала по сравнению с общей поверхностью тела (используя принцип Сен-Венана), эти условия запишем в интегральной форме:

$$N_z = \iint_F \sigma_z dF \quad ,$$

$$M_x = \iint_F \sigma_z y dF \quad ,$$

$$M_y = \iint_F \sigma_z x dF \quad .$$

Отметим, что наличие напряжения σ_z и, соответственно, нагрузки N_z , M_x , M_y на торцах определяется постановкой задачи о плоской деформации, поскольку именно наличие нагрузки на торцах обеспечивает условие $\varepsilon_z = 0$. Однако принимая во внимание принцип независимости действия сил, задачу можно решать для данного тела при заданных нагрузках $\bar{X}$ и $\bar{Y}$ на боковой поверхности и нулевых нагрузках на торцах – в этом случае говорят об обобщенной плоской деформации. Соответственно, решение задачи о плоской деформации получим добавлением известных решений задач о растяжении (N_z) и чистом изгибе (M_x , M_y).

11.2. Основные уравнения плоского напряженного состояния

В задаче о плоском напряженном состоянии будем рассматривать упругое тело в форме тонкой пластины постоянной толщины h , нагруженное по боковой поверхности силами, параллельными плоскости пластины и распределенными симметрично относительно ее срединной плоскости, которую совместим с координатной плоскостью $x y$. Будем считать, что объемные силы отвечают аналогичным условиям.

Торцы (основания) пластины $z = \pm h/2$ свободны от нагрузки.

Граничные условия на торцах в поставленной задаче принимают вид:

$$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0 \quad \text{при} \quad z = \pm h/2 .$$

Если пластину считать тонкой, то при рассматриваемом нагружении с достаточной степенью точности можно принять напряжения σ_z , τ_{zx} и τ_{zy} равными нулю во всех точках пластины. Остальные компоненты тензора напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} можно считать функциями только переменных x и y , усреднив их по толщине пластины. Такое напряженное состояние пластины будем называть плоским напряженным состоянием. Очевидно, что при нагрузке на боковой поверхности, не меняющейся по толщине, процедуру усреднения напряжений можно опустить.

Отметим, что при плоском напряженном состоянии имеем $\sigma_z = 0$, а $\varepsilon_z \neq 0$ (в отличие от плоской деформации, где $\varepsilon_z = 0$, а $\sigma_z \neq 0$). Наличие поперечной деформации ε_z влечет за собой искривление плоских оснований пластины, однако, поскольку задача симметрична, точки срединной плоскости после деформирования пластины остаются на месте. Данное обстоятельство позволяет утверждать, что при малой толщине пластины перемещение w будет весьма мало и что изменения перемещений u и v по толщине будут незначительны. Соответственно, можно считать, что перемещения u и v являются функциями только переменных x и y .

Дифференциальные уравнения равновесия в задаче о плоском напряженном состоянии принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0.\end{aligned}$$

Граничные условия на боковой поверхности сводятся к соответствующим условиям на контуре поперечного сечения:

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m, \\ \bar{Y} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m.\end{aligned}$$

Отметим, что использование соотношения $\sigma_z = 0$ в уравнениях линейного физического закона позволяет исключить деформацию ε_z из этих уравнений и, соответственно, из числа определяемых неизвестных. Действительно, можем получить, что

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \Rightarrow \varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) .$$

Для определения оставшихся деформаций ε_x , ε_y и γ_{xy} ($\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$) имеем следующие три уравнения физического закона:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) , \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) , \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{xy} . \end{aligned}$$

Использование соотношения $\sigma_z = 0$ в уравнениях линейного физического закона в форме Ламе позволяет получить деформацию ε_z в следующей форме:

$$\sigma_z = \lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) + 2\mu\varepsilon_z = 0 \Rightarrow \varepsilon_z = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) .$$

Преобразованные уравнения физического закона будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \lambda^* \vartheta^* + 2\mu\varepsilon_x , \\ \sigma_y &= \lambda^* \vartheta^* + 2\mu\varepsilon_y , \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} , \end{aligned}$$

где $\vartheta^* = \varepsilon_x + \varepsilon_y \neq \vartheta$; $\lambda^* = 2\lambda\mu/(\lambda + 2\mu)$ – некоторая новая упругая постоянная.

Зависимости Коши в рассматриваемой задаче будут представлены тремя уравнениями:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad .$$

Рассмотрение условий совместности деформаций Сен-Венана приводит к уравнению, связывающему деформации, отличные от нуля, а именно:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

и к дополнительным условиям относительно вида функции ε_z :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y} = 0 \quad .$$

Последние три соотношения определяют деформацию ε_z как линейную функцию переменных x и y , что входит в некоторое противоречие с полученными ранее соотношениями:

$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y)$. Тем не менее, учитывая малость деформации ε_z , будем считать эти требования выполненными.

11.3. Сопоставление уравнений плоской деформации и плоского напряженного состояния

Из сравнения уравнений, определяющих решения задач о плоской деформации и плоском напряженном состоянии, следует, что в математическом плане эти уравнения идентичны. В дальнейшем будем говорить об уравнениях *плоской задачи* теории упругости и ее решении, при необходимости различая задачи о плоской дефор-

мации и плоском напряженном состоянии по тем признакам, которые указывались при построении соответствующих уравнений.

11.4. Решение плоской задачи в напряжениях

Общая схема решения задачи теории упругости в напряжениях рассмотрена в разделе 5. Следуя этой схеме, построим соответствующее решение плоской задачи.

Для получения полной системы уравнений в напряжениях к дифференциальным уравнениям равновесия необходимо добавить условие совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} ,$$

преобразованное с использованием уравнений физического закона

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \sigma_y) , \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \sigma_x) , \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \nu)}{E} \tau_{xy} . \end{aligned}$$

После преобразований условие совместности деформаций будет иметь вид:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \nu \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) = 2(1 + \nu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} .$$

Полученное соотношение упростим, заменив в его правой части касательное напряжение τ_{xy} на нормальные напряжения σ_x и σ_y . Для этой цели используем уравнения равновесия. Дифференцируя первое из них по переменной x , а второе – по переменной y и

складывая их, получим

$$2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial X}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial y} .$$

После некоторых преобразований будем иметь:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) ,$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

Таким образом, решение плоской задачи в напряжениях сведено к решению трех следующих уравнений:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X = 0 ,$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 ,$$

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = -(1 + \nu) \left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} \right) .$$

Полученное решение должно быть подчинено граничным условиям.

11.5. Решение плоской задачи в напряжениях с помощью функции напряжений (функции Эри)

Систему трех уравнений в напряжениях, полученную для решения плоской задачи, легко свести к одному уравнению относительно функции напряжений $\varphi = \varphi(x, y)$, полагая, что объемные силы X и Y равны нулю.

Действительно, если ввести функцию напряжений соотношениями

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \quad , \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \quad , \quad \tau_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \quad ,$$

то дифференциальные уравнения равновесия удовлетворяются тождественно, а третье уравнение при подстановке в него значений напряжений переходит в бигармоническое уравнение

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0 \quad .$$

Соответственно, граничные условия в напряжениях на контуре поперечного сечения переходят в граничные условия для функции напряжений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} m &= \bar{X} \quad , \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m &= \bar{Y} \quad . \end{aligned}$$

Таким образом, решение плоской задачи в напряжениях сведено к определению бигармонической функции $\varphi = \varphi(x, y)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям на контуре поперечного сечения тела.

Отметим, что в определяющие уравнения не входят упругие постоянные материала. Данное обстоятельство позволило М. Леви в свое время сформулировать теорему:

распределение напряжений в плоской задаче при заданном нагружении на контуре является одинаковым для всех изотропных материалов.

Дж. Митчелл показал, что теорема справедлива всегда для поперечного сечения в форме односвязной области, а для сечения в

форме многосвязной области – только лишь в случае, когда главные векторы внешних сил, приложенных к каждому контуру, равны нулю.

Теорема Леви – Митчелла является основой оптического метода исследования напряжений в элементах конструкций, поскольку позволяет изучать напряженное состояние на моделях из материалов, оптически чувствительных к возникающим в них напряжениям.

11.5.1. Свойства функции напряжений

Решение плоской задачи в напряжениях сведено к отысканию бигармонической функции $\varphi = \varphi(x, y)$, удовлетворяющей заданным граничным условиям на контуре поперечного сечения тела. Поскольку напряженное состояние определяется вторыми производными функции напряжений, очевидно, что функция $\varphi_1(x, y) = \varphi(x, y) + ax + by + c$ при любых значениях постоянных a, b, c также будет функцией напряжений для данной задачи.

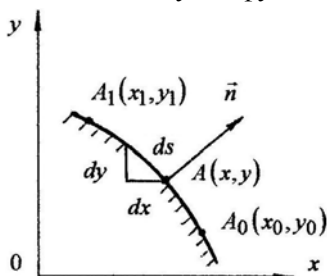


Рис. 11.1

Имеющимся произволом в выборе постоянных a, b, c распорядимся для задания в некоторой точке $A_0(x_0, y_0)$, находящейся на контуре односвязного поперечного сечения тела (рис. 11.1), нулевых значений функции напряжений и ее первых производных:

$$(\varphi)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_0 = 0, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_0 = 0.$$

Определим значения функции напряжений и ее первых производных в точке $A_1(x_1, y_1)$, также расположенной на контуре поперечного сечения. При движении от точки A_0 к точке A_1 выбираем положительное направление обхода контура, при котором тело остается слева.

Поскольку рассматриваемые точки находятся на контуре поперечного сечения, для решения поставленного вопроса воспользуемся граничными условиями для функции напряжений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} m &= \bar{X} \ , \\ -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m &= \bar{Y} \ ,\end{aligned}$$

которые с учетом значений направляющих косинусов ($l = dy/ds$, $m = -dx/ds$) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dy}{ds} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) \frac{dx}{ds} &= \bar{X} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) = \bar{X} \ , \\ -\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{dy}{ds} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) \frac{dx}{ds} &= \bar{Y} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) = -\bar{Y} \ .\end{aligned}$$

Интегрируя полученные соотношения на интервале от $S=0$ до $S=S_1$, где $S_1 = A_0 A_1$, находим значения первых производных функции напряжений в точке A_1 :

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_1 &= \int_0^{S_1} \bar{X} ds = R_x \ , \\ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_1 &= -\int_0^{S_1} \bar{Y} ds = -R_y \ ,\end{aligned}$$

где R_x и R_y – проекции на оси x и y главного вектора внешней нагрузки, приложенной к участку контура $A_0 A_1$.

Запишем теперь производную функции напряжений $\varphi(x, y)$ по переменной s . Будем иметь:

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y} \frac{dy}{ds} \Rightarrow \frac{d\varphi}{ds} = -\frac{dx}{ds} \int_0^S \bar{Y} ds + \frac{dy}{ds} \int_0^S \bar{X} ds .$$

Для получения значения функции напряжений в точке A_1 интегрируем выписанное соотношение по частям:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \int_0^{S_1} \left[-\frac{dx}{ds} \int_0^S \bar{Y} ds + \frac{dy}{ds} \int_0^S \bar{X} ds \right] ds = \left[-x \int_0^S \bar{Y} ds + y \int_0^S \bar{X} ds \right]_0^{S_1} - \\ &- \int_0^{S_1} (-x \bar{Y} + y \bar{X}) ds = \int_0^{S_1} [(y_1 - y) \bar{X} - (x_1 - x) \bar{Y}] ds = M_1 . \end{aligned}$$

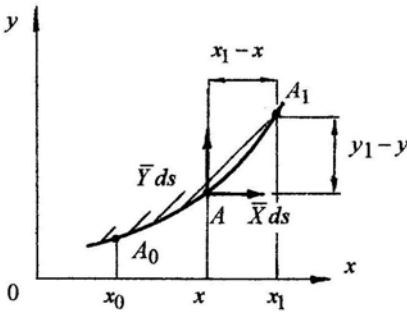


Рис. 11.2

В полученном соотношении подынтегральное выражение определяет момент внешней нагрузки, действующей на элементе дуги контура ds относительно точки A_1 (рис. 11.2), причем момент, вращающий против часовой стрелки, считается положительным.

Следовательно, значение функции напряжений в точке A_1 контура равно моменту нагрузки, приложенной к участку контура A_0A_1 , относительно точки A_1 .

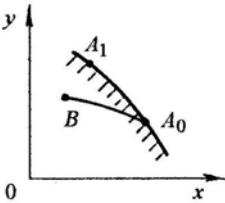


Рис. 11.3

Приведенные рассуждения применимы и для определения значений функции напряжений и ее первых производных в любой внутренней точке B (рис. 11.3). Однако в этом случае должны говорить о части тела, расположенной слева от A_0B , и об упругих внутренних силах, приложенных к линии A_0B .

Во многих случаях удобнее пользоваться более общими формулами, определяющими функцию напряжений и ее первые производные на контуре односвязного поперечного сечения, в системе координат, связанной с направлениями нормали и касательной в данной точке контура (рис. 11.4). В этом случае имеем:

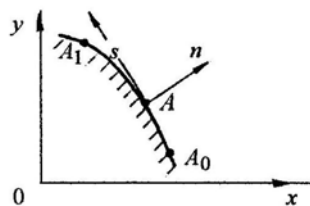


Рис. 11.4

$$(\varphi)_1 = M_1, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s} \right)_1 = R_n, \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_1 = -R_s.$$

Здесь R_n , R_s – проекции главного вектора внешней нагрузки, действующей на участке контура A_0A_1 на направления внешней нормали и касательной к контуру; M_1 – момент этой же внешней нагрузки относительно точки A_1 (знаки взяты для положительного обхода контура).

Представленные зависимости, определяющие функцию напряжений и ее первые производные в произвольной точке контура односвязного поперечного сечения, по смыслу являются граничными условиями для функции напряжений $\varphi(x, y)$. Можно показать, что из трех условий независимыми являются только два, а именно: $(\varphi)_1 = M_1$ и $(\partial \varphi / \partial n)_1 = -R_s$. Действительно, здесь достаточно вспомнить, что соотношение $(\varphi)_1 = M_1$ получено интегрированием производной $\partial \varphi / \partial s$. Таким образом, решение плоской задачи с использованием граничных условий в полученной форме сводится к отысканию бигармонической функции $\varphi(x, y)$ по значениям этой функции и ее производной по нормали к контуру поперечного сечения, заданным на контуре.

Для односвязной области главный вектор и главный момент нагрузки, приложенной к контуру, равны нулю. Следовательно, значения функции напряжений φ и ее нормальной производной $\partial \varphi / \partial n$ после обхода контура возвращаются к исходным нулевым значениям – функция напряжений в этом случае однозначна.

Если же рассматриваемая область (поперечное сечение тела) многосвязная, то значения φ и $\partial\varphi/\partial n$ после обхода какого-либо из контуров будут совпадать с исходными (не обязательно нулевыми, поскольку задание нулевых значений функции напряжений и ее первых производных возможно только на одном из контуров), только в том случае, если внешняя нагрузка на этом контуре статически эквивалентна нулю. В противном случае при обходе контура φ и $\partial\varphi/\partial n$ получают приращения – функция напряжений для многосвязной области может быть многозначной.

Отметим, что многозначность функции напряжений не означает многозначность напряжений – в принципе, любая гармоническая функция определяет действительное напряженное состояние, однако при этом перемещения в случае многосвязной области могут быть многозначными.

11.6. Плоская задача в полярных координатах

Во многих случаях решение плоской задачи строится проще, если вместо прямоугольной системы координат применять подобранную соответствующим образом систему криволинейных координат. В частности, для тел, имеющих круговое очертание (круговые диски и кольца, толстостенные трубы и т.п.) удобно использовать цилиндрическую (полярную) систему координат.

11.6.1. Уравнения плоской задачи в полярных координатах

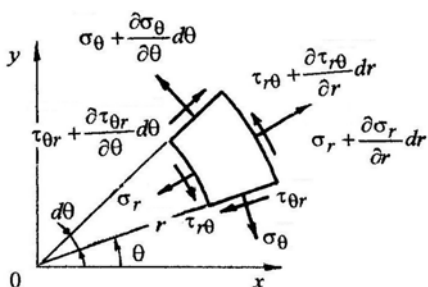


Рис. 11.5

Координаты точки в полярной системе координат будем определять радиусом r и углом θ (рис. 11.5). Из компонентов тензора напряжений в уравнения войдут σ_r , σ_θ и $\tau_{r\theta}$. Деформированное состояние в точке будет определяться деформациями ε_r , ε_θ , $\gamma_{r\theta}$ и

перемещениями u и v . Все перечисленные величины являются функциями переменных r и ϑ .

Выпишем уравнения, определяющие решение плоской задачи в полярных координатах:

- дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + F_r = 0 ,$$

$$\frac{\partial \tau_{r\vartheta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\vartheta}{\partial \vartheta} + 2 \frac{\tau_{r\vartheta}}{r} + F_\vartheta = 0 ,$$

где F_r и F_ϑ – проекции объемной силы на направления r и ϑ ;

- зависимости Коши

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} ,$$

$$\varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \vartheta} ,$$

$$\gamma_{r\vartheta} = \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r} ;$$

- условие совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\vartheta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \varepsilon_\vartheta}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{r^2 \partial \vartheta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial r} = \frac{\partial^2 \gamma_{r\vartheta}}{r \partial r \partial \vartheta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \gamma_{r\vartheta}}{\partial \vartheta} ;$$

- уравнения линейного физического закона

$$\varepsilon_r = (\sigma_r - \nu \sigma_\vartheta) / E ,$$

$$\varepsilon_\vartheta = (\sigma_\vartheta - \nu \sigma_r) / E ,$$

$$\gamma_{r\vartheta} = \tau_{r\vartheta} / G ;$$

- граничные условия на боковой поверхности (на контуре поперечного сечения)

$$\bar{F}_r = \sigma_r l + \tau_{r\vartheta} m ,$$

$$\bar{F}_\vartheta = \tau_{r\vartheta} l + \sigma_\vartheta m ,$$

где $\bar{F}_r$ и $\bar{F}_\vartheta$ – проекции внешней поверхностной нагрузки на направления r и ϑ .

В полярной системе координат так же, как и в прямоугольной, при отсутствии объемных сил решение плоской задачи в напряжениях сводится к решению одного уравнения относительно функции напряжений. Получение «разрешающего» уравнения в полярной системе координат ведется в той же последовательности:

- в уравнении совместности деформаций деформации заменяются на напряжения с использованием линейного физического закона;

- вводится функция напряжений $\varphi(r, \vartheta)$ так, чтобы удовлетворить тождественно дифференциальные уравнения равновесия:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \vartheta^2} ,$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} ,$$

$$\tau_{r\vartheta} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \vartheta} ;$$

- напряжения, представленные через функцию напряжений, вводятся в преобразованное уравнение совместности деформаций.

Окончательным результатом будет бигармоническое уравнение относительно функции напряжений $\varphi(r, \vartheta)$

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0 ,$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}$ – оператор Лапласа в полярных координатах.

Решение бигармонического уравнения должно быть подчинено граничным условиям на контуре поперечного сечения тела.

11.6.2. Общее решение осесимметричных задач

В случае круговой (осевой) симметрии тела и приложенной нагрузки параметры напряженно-деформированного состояния не будут зависеть от переменной ϑ . В этом случае плоская задача из двумерной переходит в более простую одномерную, которая описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0 \quad .$$

Раскрывая операторы Лапласа, будем иметь:

$$\frac{d^4 \varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad .$$

Некоторая сложность в решении полученного уравнения заключается в том, что его коэффициенты являются переменными величинами, однако введение новой переменной $t = \ln r$ позволяет перейти к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами. Будем иметь:

$$\frac{d^4 \varphi}{dt^4} - 4 \frac{d^3 \varphi}{dt^3} + 4 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = 0 \quad .$$

Соответствующее характеристическое уравнение имеет вид:

$$k^2(k^2 - 2)^2 = 0 \quad .$$

Вычисляя корни характеристического уравнения, получим:

$$k_{1,2} = 0, \quad k_{3,4} = 2, \quad$$

что позволяет записать общее решение дифференциального уравнения в следующей форме

$$\varphi = C_1 t e^{2t} + C_2 e^{2t} + C_3 t + C_4.$$

Переходя к исходной переменной r , получаем искомое общее решение осесимметричной плоской задачи:

$$\varphi = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4.$$

Этот же результат может быть получен непосредственным интегрированием исходного дифференциального уравнения. Действительно, оператор Лапласа допускает его запись в форме

$$\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} \right).$$

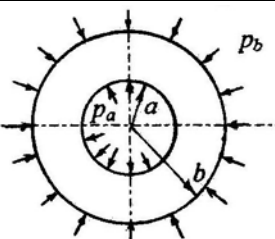
Следовательно, само бигармоническое уравнение можно представить в виде

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) \right] \right\} = 0.$$

Последовательное интегрирование уравнения приводит к тому же виду функции напряжений.

Постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 должны быть найдены из граничных условий в каждой конкретной задаче.

Задачи

11.1.		Нагружение толстостенного цилиндра равномерным внутренним и внешним давлением (задача Ламе)
-------	---	--

Рассматриваемая задача является осесимметричной, поэтому для ее решения можно использовать функцию напряжений в виде:

$$\varphi = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 \quad .$$

Данной функции напряжений отвечает следующее поле напряжений:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} = C_1 (1 + 2 \ln r) + 2C_2 + \frac{C_3}{r^2} \quad ,$$

$$\sigma_\theta = \frac{d^2\varphi}{dr^2} = C_1 (3 + 2 \ln r) + 2C_2 - \frac{C_3}{r^2} \quad ,$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad .$$

Отметим, что равенство нулю касательных напряжений предопределяется осесимметричностью задачи.

Постоянные интегрирования должны быть определены из граничных условий для напряжений, которые в данной задаче принимают форму:

- при $r = a$ $\sigma_r = -p_a$, $\tau_{r\theta} = 0$;

- при $r = b$ $\sigma_r = -p_b$, $\tau_{r\theta} = 0$.

Поскольку граничные условия для касательного напряжения $\tau_{r\theta}$ удовлетворяются тождественно при любых значениях постоянных, имеем всего два уравнения для трех неизвестных. Сложившаяся ситуация показывает, что рассматриваемая задача описывается разрешающим уравнением (относительно функции напряжений φ) меньшего порядка, чем в общем случае. Напомним, что в общем случае при решении плоской задачи в полярных координатах для определения функции напряжений получили дифференциальное уравнение четвертого порядка.

Выпишем уравнения, определяющие решение осесимметричной задачи:

- дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad ;$$

- зависимости Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} \quad , \quad \varepsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad ;$$

- уравнения линейного физического закона

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \quad ,$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \quad .$$

Построение решения в напряжениях с применением функции напряжений проведем по стандартной схеме.

Получим условие совместности деформаций, исключая перемещение u из зависимостей Коши. Будем иметь

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\theta) - \varepsilon_r = 0 \quad \Rightarrow \quad r \frac{d\varepsilon_\theta}{dr} + \varepsilon_\theta - \varepsilon_r = 0 \quad .$$

Подставляя в полученное уравнение значения деформаций в соответствии с линейным физическим законом, получим

$$r \frac{d\sigma_\theta}{dr} - r\nu \frac{d\sigma_r}{dr} + (1 + \nu)(\sigma_\theta - \sigma_r) = 0 \quad .$$

Введение функции напряжений φ в предложенном ранее виде

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} \quad , \quad \sigma_\theta = \frac{d^2\varphi}{dr^2}$$

позволяет удовлетворить уравнение равновесия и из преобразованного условия совместности деформаций получить дифференциальное уравнение *третьего* порядка

$$\frac{d^3\varphi}{dr^3} + \frac{1}{r} \frac{d^2\varphi}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{d\varphi}{dr} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\varphi}{dr} \right) \right] = 0 \quad .$$

Последовательное интегрирование уравнения позволяет определить функцию

напряжений в виде

$$\varphi = \bar{C}_1 r^2 / 4 + \bar{C}_2 \ln r + \bar{C}_3$$

или, в старых обозначениях,

$$\varphi = C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 .$$

Получили, что для рассматриваемой задачи постоянная C_1 отсутствует, т.е. $C_1 = 0$, и из двух граничных условий остается определить постоянные C_2 и C_3 .

Отметим, что решение поставленной задачи в напряжениях с применением функции напряжений можно свести и к дифференциальному уравнению *второго* порядка. Действительно, дифференциальное уравнение равновесия можно переписать в виде

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\theta = 0 ,$$

что позволяет ввести функцию напряжений в более простой форме:

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r} , \quad \sigma_\theta = \frac{d\varphi}{dr} .$$

Соответственно, для определения функции напряжений получаем дифференциальное уравнение *второго* порядка:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\varphi) \right] = 0 .$$

Решение полученного уравнения приводит к несколько иной форме функции напряжений, но напряженное состояние, ей соответствующее, будет тем же самым:

$$\begin{aligned} \varphi = \frac{A_1 r}{2} + \frac{A_2}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{r^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{r^2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_r &= 2C_2 + \frac{C_3}{r^2} , \\ \sigma_\theta &= 2C_2 - \frac{C_3}{r^2} . \end{aligned} \end{aligned}$$

Определение двух постоянных C_2 и C_3 из граничных условий приводит к следующему результату:

$$2C_2 = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \quad , \quad C_3 = \frac{(p_b - p_a) a^2 b^2}{b^2 - a^2} \quad .$$

Если длина цилиндра остается постоянной и деформация ε_z равна нулю (условие плоской деформации), то имеет место нормальное напряжение σ_z

$$\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\theta) = 2\nu \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} = \text{const} \quad ,$$

которое приводится к продольной силе

$$N_z = 2\pi \int_a^b \sigma_z r dr = 2\pi \nu (p_a a^2 - p_b b^2) \quad .$$

Если торцы цилиндра могут свободно смещаться, то в этом случае имеет место деформация $\varepsilon_z = \text{const}$. Величина деформации ε_z будет определяться из условия $\sigma_z = 0$, откуда следует:

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \quad .$$

Если под давлением находится замкнутый цилиндрический сосуд (толстостенная труба с днищами), то продольная сила, определяемая давлениями на днища, будет равна:

$$N'_z = \pi (p_a a^2 - p_b b^2) \quad .$$

Сравнение соотношений для N_z и N'_z показывает, что задача о толстостенной трубе с днищами будет задачей о плоской деформации, если материал трубы имеет коэффициент Пуассона $\nu = 0,5$.

В частном случае, когда давление p_b равно нулю, соотношения для напряжений принимают вид:

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) \quad , \quad \sigma_\theta = \frac{p_a a^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) \quad .$$

Распределение напряжений по толщине цилиндра для этого случая показано на рис. 11.6. Отметим, что напряжение $(\sigma_\theta)_{\max}$ по величине всегда больше внутреннего давления p_a . Опасные точки расположены на внутренней поверхности цилиндра.

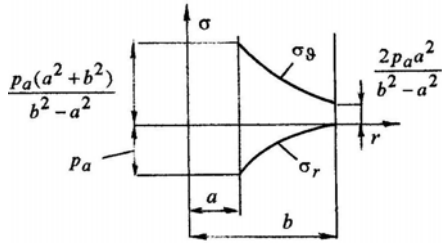


Рис. 11.6

1.2.	Соединения цилиндров с натягом (соединения цилиндров с использованием горячей посадки или запрессовки)
------	--

Предположим, что после соединения с натягом двух цилиндров, изготовленных из разных материалов (E_1, ν_1 и E_2, ν_2), радиусы внутреннего цилиндра оказываются равными a и b , а наружного – b и c . Случай $a=0$ определяет горячую посадку (запрессовку) цилиндра на вал. Радиальное давление между цилиндрами будем считать равным p .

Если разъединить цилиндры, то внутренний цилиндр будет стремиться расширяться, а наружный – сжаться. Очевидно, что для определения изменения радиусов (для определения радиальных перемещений точек поверхностей цилиндров) необходимо иметь решение задачи о толстостенном цилиндре в перемещениях.

Решение в напряжениях задачи о нагружении толстостенного цилиндра равномерным внутренним p_a и внешним давлением p_b имеет вид:

$$\sigma_r = 2C_2 + \frac{C_3}{r^2}, \quad \sigma_\theta = 2C_2 - \frac{C_3}{r^2},$$

где

$$2C_2 = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2}, \quad C_3 = \frac{(p_b - p_a) a^2 b^2}{b^2 - a^2}.$$

Для определения перемещения $u = u(r)$ воспользуемся зависимостями Коши, переписав их с учетом уравнений линейного физического закона. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\theta) \Rightarrow Eu = 2C_2 r (1 - \nu) - \frac{C_3 (1 + \nu)}{r} + C; \\ \frac{u}{r} &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \nu \sigma_r) \Rightarrow Eu = 2C_2 r (1 - \nu) - \frac{C_3 (1 + \nu)}{r}. \end{aligned}$$

Из сравнения полученных соотношений следует $C = 0$, и для описания радиальных перемещений точек цилиндра имеем следующую функцию:

$$Eu = 2C_2 r(1 - \nu) - \frac{C_3(1 + \nu)}{r}.$$

Теперь используем представленное соотношение для описания расширения внутреннего цилиндра. Принимая $p_a = 0$, $p_b = -p$ и $r = b$, найдем увеличение его внешнего радиуса. Будем иметь

$$u_1 = \frac{1}{E_1} \cdot \frac{pb}{b^2 - a^2} \left[(1 + \nu_1)a^2 + (1 - \nu_1)b^2 \right],$$

где E_1, ν_1 относятся к материалу внутреннего цилиндра.

Заменяя теперь в формулах для постоянных C_2 и C_3 радиусы a, b , соответственно, на b, c и принимая в этих формулах $p_a = -p$, $p_b = 0$ и $r = c$, найдем радиальное перемещение точек внутренней поверхности наружного цилиндра:

$$u_2 = -\frac{1}{E_2} \cdot \frac{pb}{c^2 - b^2} \left[(1 + \nu_2)c^2 + (1 - \nu_2)b^2 \right],$$

где E_2, ν_2 относятся к материалу наружного цилиндра.

Полученные соотношения для u_1 и u_2 позволяют определить величину *диаметрального* натяга δ , при котором радиальное давление между цилиндрами равно p . В частности, если оба цилиндра выполнены из одного и того же материала, будем иметь:

$$\frac{\delta}{2} = u_1 - u_2 = \frac{2b^3(c^2 - a^2)}{(b^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \cdot \frac{p}{E}.$$

В случае цилиндра, посаженного на сплошной вал, принимаем $a = 0$, и полученная формула преобразуется к виду

$$\delta = \frac{4bc^2}{(c^2 - b^2)} \cdot \frac{p}{E}.$$

Отметим, что приведенный расчет справедлив в рамках линейной теории упругости.

Будем считать, что напряженное состояние диска при его равномерном вращении полностью определяется центробежными силами. В этом случае задача становится осесимметричной: касательное напряжение $\tau_{r\vartheta}$ равно нулю, а нормальные напряжения σ_r и σ_ϑ не зависят от переменной ϑ .

Центробежная сила является объемной силой. Соответственно, дифференциальное уравнение равновесия принимает вид:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} + \rho\omega^2 r = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}(r\sigma_r) - \sigma_\vartheta + \rho\omega^2 r = 0,$$

где $\rho\omega^2 r$ — центробежная сила; ρ — плотность материала диска; ω — его угловая скорость вращения. Введение функции напряжений φ в виде

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r}, \quad \sigma_\vartheta = \frac{d\varphi}{dr} + \rho\omega^2 r^2$$

позволяет удовлетворить уравнение равновесия.

Исключая перемещение u из зависимостей Коши, будем иметь условие совместности деформаций в уже известном виде:

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\vartheta) - \varepsilon_r = 0 \quad \Rightarrow \quad r \frac{d\varepsilon_\vartheta}{dr} + \varepsilon_\vartheta - \varepsilon_r = 0.$$

Преобразование полученного уравнения с учетом соотношений линейного физического закона и формул, вводящих функцию напряжений, позволяет получить разрешающее уравнение для функции напряжений φ :

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\varphi) \right] = -(3+\nu)\rho\omega^2 r.$$

Прямое интегрирование этого уравнения приводит к следующему результату:

$$\varphi = \frac{A_1 r}{2} + \frac{A_2}{r} - (3+\nu)\rho\omega^2 \frac{r^3}{8} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{r^2} - \frac{3+\nu}{8}\rho\omega^2 r^2, \\ \sigma_\vartheta &= \frac{A_1}{2} - \frac{A_2}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8}\rho\omega^2 r^2. \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования определим из граничных условий отдельно для сплошного диска и диска с круговым отверстием.

Сплошной диск. Поскольку напряжения в центре диска должны быть конечными, следует принять $A_2 = 0$. Вторая постоянная A_1 находится из граничного условия на внешнем радиусе $r = b$:

$$\sigma_r|_{r=b} = 0 \Rightarrow A_1 = \frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 b^2.$$

С учетом значений постоянных A_1 и A_2 соотношения для напряжений принимают вид:

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2), \quad \sigma_\vartheta = \frac{\rho \omega^2}{8} [(3+\nu)b^2 - (1+3\nu)r^2].$$

Оба напряжения имеют равные наибольшие значения в центре диска:

$$\sigma_r|_{r=0} = (\sigma_r)_{\max} = \sigma_\vartheta|_{r=0} = (\sigma_\vartheta)_{\max} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2.$$

Диск с круговым отверстием. Поскольку оба контура ($r = a$ и $r = b$) свободны от внешних сил, граничные условия имеют вид:

$$\sigma_r|_{r=a} = 0, \quad \sigma_r|_{r=b} = 0,$$

откуда следует

$$\frac{A_1}{2} = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (a^2 + b^2), \quad A_2 = -\frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 a^2 b^2.$$

Окружное напряжение σ_ϑ имеет наибольшее значение на внутреннем контуре, где оно равно:

$$\sigma_\vartheta|_{r=a} = (\sigma_\vartheta)_{\max} = \frac{3+\nu}{4} \rho \omega^2 b^2 \left(1 + \frac{1-\nu}{3+\nu} \cdot \frac{a^2}{b^2} \right).$$

Если круговое отверстие в диске мало, так что величиной $(1-\nu)a^2/(3+\nu)b^2$ можно пренебречь по сравнению с единицей, то $(\sigma_\vartheta)_{\max}$ для диска с отверстием будет в два раза больше, чем для сплошного диска: малое отверстие является концентратором напряжений.

Радиальное напряжение достигает наибольшего значения в точках $r = \sqrt{ab}$.

11.4.	Напряжения во вращающихся цилиндрах (валах)
-------	---

Задача о напряжениях во вращающихся цилиндрах (валах) является задачей о плоском деформированном состоянии. Соответственно, если для вращающегося сплошного диска соотношения для напряжений имеют вид:

$$\sigma_r = \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2) \quad , \quad \sigma_\vartheta = \frac{\rho \omega^2}{8} [(3+\nu)b^2 - (1+3\nu)r^2] \quad ,$$

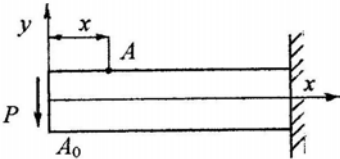
то для получения таких же соотношений в задаче о вращающемся сплошном вале необходимо вместо действительной упругой постоянной ν ввести фиктивную упругую постоянную $\nu^* = \nu/(1-\nu)$. Будем иметь:

$$\sigma_r = \frac{3+\nu^*}{8} \rho \omega^2 (b^2 - r^2) \Rightarrow \sigma_r = \frac{1}{8} \cdot \frac{3-2\nu}{1-\nu} \rho \omega^2 (b^2 - r^2) \quad ;$$

$$\sigma_\vartheta = \frac{\rho \omega^2}{8} [(3+\nu^*)b^2 - (1+3\nu^*)r^2] \Rightarrow \sigma_\vartheta = \frac{1}{8} \cdot \frac{\rho \omega^2}{1-\nu} [(3-2\nu)b^2 - (1+2\nu)r^2] \quad .$$

Напомним, что в задаче о плоской деформации напряжение $\sigma_z = \nu(\sigma_r + \sigma_\vartheta)$ отлично от нуля. В задаче о вращающемся сплошном вале для σ_z получим:

$$\sigma_z = \frac{\nu \rho \omega^2}{4(1-\nu)} [(3-2\nu)b^2 - 2r^2] \quad .$$

11.5.		Изгиб консоли силой P , приложенной на конце
-------	--	---

Построим решение с использованием свойств функции напряжений $\varphi(x, y)$.

Будем считать, что для точки $A_0 (y = -h/2)$ функция напряжений и ее производная по переменной y равны нулю, т.е.

$$A_0 (y = -h/2) : \quad \varphi = 0 \quad , \quad \partial \varphi / \partial y = 0 \quad .$$

Тогда для точки $A (y = h/2)$, учитывая, что направление обхода контура балки отрицательное, будем иметь:

$$A(y = h/2) : \quad \varphi = -Px \quad , \quad \partial\varphi/\partial y = 0 \quad .$$

При таких значениях функции напряжений и ее производной по переменной y на контуре естественно пытаться разыскивать саму функцию в виде

$$\varphi(x, y) = f(y)x \quad .$$

Подставляя функцию напряжений в бигармоническое уравнение, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f(y)$, решение которого приводит к следующему результату:

$$x \frac{d^4 f}{dy^4} = 0 \quad \Rightarrow \quad f(y) = a_1 y^3 + a_2 y^2 + a_3 y + a_4 \quad .$$

Постоянные интегрирования должны быть определены из граничных условий, которые для функции $f(y)$ перепишутся в форме:

$$\begin{aligned} y = h/2 : \quad f &= -P \quad , \quad df/dy = 0 \quad ; \\ y = -h/2 : \quad f &= 0 \quad , \quad df/dy = 0 \quad . \end{aligned}$$

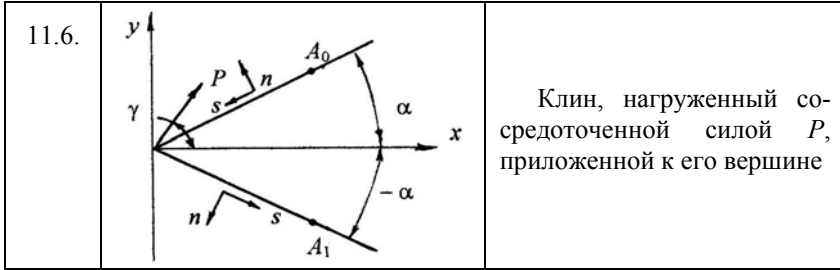
Подставляя значения функции $f(y)$ и ее производной в представленные соотношения, для определения постоянных получаем следующие уравнения:

$$\begin{aligned} a_1 \frac{h^3}{8} + a_2 \frac{h^2}{4} + a_3 \frac{h}{2} + a_4 &= -P \quad , \\ -a_1 \frac{h^3}{8} + a_2 \frac{h^2}{4} - a_3 \frac{h}{2} + a_4 &= 0 \quad , \\ 3a_1 \frac{h^2}{4} + 2a_2 \frac{h}{2} + a_3 &= 0 \quad , \\ 3a_1 \frac{h^2}{4} - 2a_2 \frac{h}{2} + a_3 &= 0 \quad . \end{aligned}$$

Из третьего и четвертого уравнений следует, что $a_2 = 0$, а $a_3 = -a_1 \frac{3h^2}{4}$. Первые два уравнения дают $a_4 = -P/2$ и $a_1 = -2P/h^3$, что позволяет получить $a_3 = 3P/2h$.

С учетом найденных значений постоянных функция напряжений принимает вид:

$$\varphi = -\frac{P}{2} \left(1 - \frac{3y}{h} + \frac{4y^3}{h^3} \right) x \quad .$$



Построим решение в полярной системе координат с использованием свойств функции напряжений $\varphi(r, \theta)$.

Будем считать, что для точки $A_0 (\theta = \alpha)$ верхней грани клина функция напряжений и ее производная по нормали равны нулю, т.е.

$$A_0 (\theta = \alpha): \quad \varphi = 0 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} l + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} m = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \quad .$$

Здесь учтено, что направляющие косинусы для нормали к верхней грани клина имеют значения $l = 0$, $m = 1$.

Соответственно, для точки $A_1 (\theta = -\alpha)$ будем иметь:

$$A_1 (\theta = -\alpha): \quad \varphi = -Pr \sin(\alpha + \gamma) \quad , \quad -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = -P \cos(\alpha + \gamma) \quad .$$

Здесь учтено, что направляющие косинусы для нормали к нижней грани клина имеют значения $l = 0$, $m = -1$.

При таких значениях функции напряжений и ее производной по нормали на контуре естественно пытаться разыскивать саму функцию в виде

$$\varphi(r, \theta) = r f(\theta) \quad .$$

Подставляя функцию напряжений в бигармоническое уравнение, получим обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $f(\theta)$:

$$\frac{d^4 f}{d\theta^4} + 2 \frac{d^2 f}{d\theta^2} + f = 0 \quad .$$

Решение соответствующего характеристического уравнения $(k^2 + 1)^2 = 0$ дает кратные корни $k_{1,2} = i$, $k_{3,4} = -i$, что позволяет записать решение дифференциального уравнения для функции $f(\theta)$ в форме:

$$f(\theta) = C_1 \cos \theta + C_2 \sin \theta + C_3 \theta \cos \theta + C_4 \theta \sin \theta \quad .$$

Постоянные интегрирования могут быть найдены непосредственно из граничных условий, выписанных для функции напряжений на гранях клина при $\theta = \pm \alpha$, однако возможен и другой путь: определить напряжения по найденной функции напряжений и найти постоянные, удовлетворяя граничные условия в напряжениях.

Рассмотрим второй вариант. Напряженное состояние в данной задаче определяется только двумя постоянными:

$$\begin{aligned} \sigma_r = -\frac{2C_3}{r} \sin \theta + \frac{2C_4}{r} \cos \theta \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \sigma_r = (A \sin \theta + B \cos \theta) / r \quad , \\ \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad . \end{aligned}$$

Граничные условия в напряжениях на гранях клина при $\theta = \pm \alpha$ принимают вид

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm \alpha$$

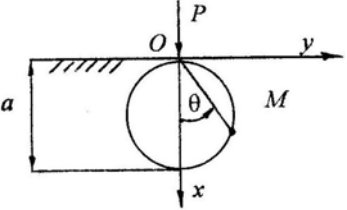
и удовлетворяются тождественно при любых значениях постоянных A и B . Однако в рассматриваемой задаче имеют место еще два интегральных граничных условия в вершине клина, позволяющих трактовать приложенную систему распределенных нагрузок как сосредоточенную силу. Эти условия представляют собой условия равновесия части клина, отсеченной дугой радиуса r :

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r r d\theta \cos \theta = -P \cos \gamma \quad , \\ \int_{-\alpha}^{\alpha} \sigma_r r d\theta \sin \theta = -P \sin \gamma \quad . \end{aligned}$$

Определение постоянных A и B из интегральных граничных условий в вершине клина приводит к следующим результатам:

$$A = -\frac{P \sin \gamma}{2\alpha - \sin 2\alpha} \quad , \quad B = -\frac{2P \cos \gamma}{2\alpha + \sin 2\alpha} \quad .$$

Отметим, что в соответствии с принципом Сен-Венана построенное решение пригодно, начиная с некоторых значений радиуса r (при $r \rightarrow 0$ напряжение $\sigma_r \rightarrow \infty$).

11.7.		Задача о нагружении упругой полуплоскости сосредоточенной силой P (задача Фламана)
-------	---	--

Поставленная задача является частным случаем задачи о клине, нагруженном сосредоточенной силой, приложенной к его вершине. Действительно, если в задаче о клине принять $\alpha = \pi/2$ и $\gamma = 0$, то получаем задачу Фламана, решение которой будет иметь вид:

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi r}, \quad \sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0.$$

Характерной особенностью напряженного состояния в рассматриваемой задаче является наличие окружностей равных напряжений: напряжение в любой точке окружности произвольного радиуса a есть величина постоянная. Действительно, для точки M имеем

$$\sigma_r = -\frac{2P \cos \theta}{\pi OM} = -\frac{2P \cos \theta}{\pi a \cos \theta} = -\frac{2P}{\pi a} = \text{const}.$$

При исследовании плоского напряженного состояния прозрачных моделей оптическим методом задача Фламана часто используется для демонстрации локального характера напряжений от действия сосредоточенной силы (значения напряжений быстро убывают по мере удаления от точки приложения силы) и подтверждения принципа Сен-Венана (действительное напряжение под силой неопределенно и граничное условие может быть выполнено только интегрально).

11.8.	Клин, нагруженный сосредоточенным моментом M , приложенным к его вершине
-------	--

Решение построим в полярной системе координат с использованием свойств функции напряжений $\varphi(r, \theta)$ с обозначениями и по схеме, предложенными при рассмотрении задачи о клине, нагруженном сосредоточенной силой, приложенной к его вершине.

Запишем граничные условия на верхней и нижней гранях клина для функции напряжений и ее производной по нормали. Принимая, что момент M , приложенный к вершине клина, направлен по часовой стрелке, будем иметь:

$$\theta = \alpha : \quad \varphi = 0 \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \quad .$$

$$\theta = -\alpha : \quad \varphi = -M \quad , \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = 0 \quad .$$

При таких значениях функции напряжений и ее производной по нормали на контуре естественно пытаться разыскивать саму функцию в виде $\varphi = \varphi(\theta)$.

Подставляя функцию напряжений в бигармоническое уравнение, получим:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^4 \varphi}{d\theta^4} + 4 \frac{d^2 \varphi}{d\theta^2} = 0 \quad .$$

Решение соответствующего характеристического уравнения $k^2(k^2 + 4) = 0$ дает корни $k_{1,2} = 0$, $k_3 = 2i$, $k_4 = -2i$, что позволяет записать решение дифференциального уравнения для функции напряжений в форме:

$$\varphi(\theta) = C_1 + C_2 \theta + C_3 \cos 2\theta + C_4 \sin 2\theta \quad .$$

Напряженное состояние в данной задаче определяется соотношениями:

$$\sigma_r = -\frac{4}{r^2} (C_3 \cos 2\theta + C_4 \sin 2\theta) \quad ,$$

$$\sigma_\theta = 0 \quad ,$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{1}{r^2} (C_2 - 2C_3 \sin 2\theta + 2C_4 \cos 2\theta) \quad .$$

Граничные условия в напряжениях на гранях клина принимают вид

$$\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad \theta = \pm \alpha$$

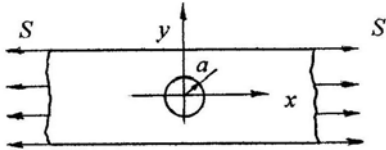
и удовлетворяются при $C_3 = 0$ и $C_2 = -2C_4 \cos 2\alpha$, что позволяет переписать соотношения для напряжений в виде:

$$\sigma_r = -\frac{4C_4}{r^2} \sin 2\theta \quad \Rightarrow \quad \sigma_r = -\frac{2A}{r^2} \sin 2\theta \quad ,$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{2C_4}{r^2}(\cos 2\theta - \cos 2\alpha) \quad \Rightarrow \quad \tau_{r\theta} = \frac{A}{r^2}(\cos 2\theta - \cos 2\alpha) \quad .$$

Однако в рассматриваемой задаче имеет место еще одно интегральное граничное условие в вершине клина (условие равновесия части клина, отсеченной дугой радиуса r), позволяющее трактовать приложенную систему распределенных нагрузок как сосредоточенный момент (принцип Сен-Венана). Применение этого условия для определения постоянной A дает:

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} \tau_{r\theta}(r d\theta)r = M \quad \Rightarrow \quad A \int_{-\alpha}^{\alpha} (\cos 2\theta - \cos 2\alpha) d\theta \quad \Rightarrow \quad A = \frac{M}{\sin 2\alpha - 2\alpha \cos 2\alpha} \quad .$$

11.9.		Растяжение полосы с круговым отверстием (задача Кирша)
-------	---	--

При растяжении полосы, не имеющей отверстия, ее напряженное состояние можно записать в виде:

$$\sigma_x^0 = S \quad , \quad \sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0 \quad ,$$

что соответствует следующей функции напряжений:

$$\varphi^0 = S y^2 / 2 \quad .$$

Поскольку в задаче предполагается наличие кругового отверстия, в дальнейшем будем использовать полярную систему координат. Соответственно, в полярной системе координат напряженное состояние полосы без отверстия будет определяться соотношениями:

$$\varphi^0 = S r^2 \sin^2 \theta / 2 \quad \Rightarrow \quad \varphi^0 = S r^2 (1 - \cos 2\theta) / 4 \quad ;$$

$$\sigma_r^0 = S (1 + \cos 2\theta) / 2 \quad ,$$

$$\sigma_\theta^0 = S (1 - \cos 2\theta) / 2 \quad ,$$

$$\tau_{r\theta}^0 = -(S/2) \sin 2\theta \quad .$$

Если же в растянутой сплошной полосе сделать отверстие, то, очевидно, что

напряжения, вызванные наличием отверстия, будут иметь локальный характер, а на достаточно большом расстоянии от отверстия напряжения будут такими же, как и в сплошной полосе. Исходя из этих соображений, в поставленной задаче функцию напряжений будем разыскивать в форме:

$$\varphi = f_1(r) + f_2(r) \cos 2\theta \quad ,$$

выполняя следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} - \text{при } r = a : \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0 \quad ; \\ - \text{при } r \rightarrow \infty : \quad \sigma_r = \sigma_r^0 \quad , \quad \sigma_\theta = \sigma_\theta^0 \quad , \quad \tau_{r\theta} = \tau_{r\theta}^0 \quad . \end{aligned}$$

Для отыскания функций $f_1(r)$ и $f_2(r)$ подставим функцию напряжений φ в бигармоническое уравнение. Поскольку полученное уравнение должно удовлетворяться при любых значениях угла θ , оно распадается на два отдельных дифференциальных уравнения относительно $f_1(r)$ и $f_2(r)$:

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 f_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d f_1}{dr} \right) = 0 \quad , \\ \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{4}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 f_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d f_2}{dr} - \frac{4 f_2}{r^2} \right) = 0 \quad . \end{aligned}$$

Первое из полученных уравнений уже рассматривалось при рассмотрении плоской осесимметричной задачи, и его общее решение имеет вид:

$$f_1(r) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 \quad .$$

Раскрывая второе уравнение, будем иметь:

$$\frac{d^4 f_2}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3 f_2}{dr^3} - \frac{9}{r^2} \frac{d^2 f_2}{dr^2} + \frac{9}{r^3} \frac{d f_2}{dr} = 0 \quad .$$

С применением подстановки $t = \ln r$ уравнение относительно функции $f_2(r)$ приводится к обыкновенному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами

$$\frac{d^4 f_2}{dt^4} - 4 \frac{d^3 f_2}{dt^3} - 4 \frac{d^2 f_2}{dt^2} + 16 \frac{d f_2}{dt} = 0 \quad .$$

Рассмотрение соответствующего характеристического уравнения позволяет определить его корни ($k_1 = 0$, $k_2 = 4$, $k_3 = 2$, $k_4 = -2$) и записать решение дифференциального уравнения относительно функции $f_2(r)$ в форме:

$$f_2(t) = C_5 e^{2t} + C_6 e^{4t} + C_7 e^{-2t} + C_8 \Rightarrow f_2(r) = C_5 r^2 + C_6 r^4 + C_7 r^{-2} + C_8 .$$

Таким образом, с учетом найденных функций $f_1(r)$ и $f_2(r)$ функция напряжений принимает вид:

$$\varphi(r, \theta) = C_1 r^2 \ln r + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 + (C_5 r^2 + C_6 r^4 + C_7 r^{-2} + C_8) \cos 2\theta .$$

Значения постоянных, входящих в решение, должны быть найдены из граничных условий в напряжениях.

Выпишем соотношения, определяющие напряженное состояние в данной задаче. Будем иметь:

$$\sigma_r = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} = C_1 (1 + 2 \ln r) + 2C_2 + \frac{C_3}{r^2} - \left(2C_5 + \frac{6C_7}{r^4} + \frac{4C_8}{r^2} \right) \cos 2\theta ,$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} = C_1 (3 + 2 \ln r) + 2C_2 - \frac{C_3}{r^2} + \left(2C_5 + 12C_6 r^4 + \frac{6C_7}{r^4} \right) \cos 2\theta ,$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left(2C_5 + 6C_6 r^2 - \frac{6C_7}{r^4} - \frac{2C_8}{r^2} \right) \sin 2\theta .$$

Поскольку напряжения должны быть конечными при $r \rightarrow \infty$, необходимо потребовать, чтобы постоянные C_1 и C_6 были равны нулю ($C_1 = C_6 = 0$). Для определения остальных пяти постоянных имеем пять уравнений, следующих из граничных условий:

$$\sigma_r(a) = 0 \Rightarrow 2C_2 + \frac{C_3}{a^2} - \left(2C_5 + \frac{6C_7}{a^4} + \frac{4C_8}{a^2} \right) \cos 2\theta = 0 ,$$

$$\tau_{r\theta}(a) = 0 \Rightarrow \left(2C_5 - \frac{6C_7}{a^4} - \frac{2C_8}{a^2} \right) \sin 2\theta = 0 ,$$

$$\sigma_r(\infty) = \sigma_r^0 \Rightarrow 2C_2 - 2C_5 \cos 2\theta = S (1 + \cos 2\theta) / 2 ,$$

$$\sigma_\theta(\infty) = \sigma_\theta^0 \Rightarrow 2C_2 + 2C_5 \cos 2\theta = S (1 - \cos 2\theta) / 2 ,$$

$$\tau_{r\theta}(\infty) = \tau_{r\theta}^0 \Rightarrow 2C_5 \sin 2\theta = -(S/2) \sin 2\theta .$$

Из последнего пятого уравнения следует $C_5 = -S/4$. Третье и четвертое уравнения являются линейно зависимыми и позволяют определить только одну постоянную $C_2 = S/4$. Первое и второе уравнения должны удовлетворяться при любых значениях переменной θ , и поэтому распадаются на три уравнения:

$$\begin{aligned} 2C_2 + \frac{C_3}{a^2} &= 0, \\ 2C_5 + \frac{6C_7}{a^4} + \frac{4C_8}{a^2} &= 0, \\ 2C_5 - \frac{6C_7}{a^4} - \frac{2C_8}{a^2} &= 0. \end{aligned}$$

Решением полученных уравнений будут следующие значения оставшихся постоянных:

$$C_3 = -Sa^2/2, \quad C_8 = Sa^2/2, \quad C_7 = -Sa^4/4.$$

Подставляя значения найденных постоянных в соотношения для напряжений, будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \frac{S}{2} \left(1 + \frac{a^2}{r^2} \right) - \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} \right) \cos 2\theta, \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{S}{2} \left(1 - \frac{3a^4}{r^4} + \frac{2a^2}{r^2} \right) \sin 2\theta. \end{aligned}$$

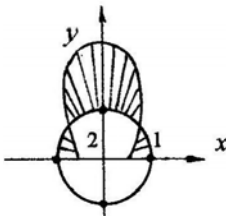


Рис. 11.7

Покажем распределение напряжений по контуру кругового отверстия (рис. 11.7). Напряжения в точках контура определяются соотношениями:

$$\sigma_\theta(a, \theta) = S(1 - 2\cos 2\theta), \quad \sigma_r = \tau_{r\theta} = 0.$$

Приведенная эпюра $\sigma_\theta(a, \theta)$ показывает, что в точках 1 контура отверстия ($\theta = 0$) имеют место напряжения сжатия $\sigma_\theta = -S$, а в точках 2 ($\theta = \pi/2$) – напряжения растяжения $\sigma_\theta = 3S$.

Характер изменения напряжения σ_θ по мере удаления от контура отверстия вдоль оси y (от точки 2) проследим, построив эпюру по соотношению:

$$\sigma_\theta\left(r, \frac{\pi}{2}\right) = \frac{S}{2} \left(2 + \frac{a^2}{r^2} + \frac{3a^4}{r^4} \right).$$

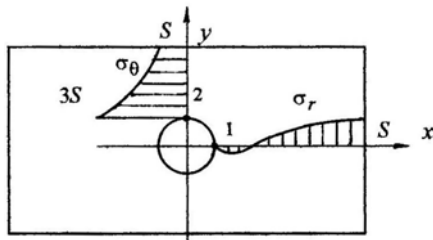


Рис. 11.8

Построенная эпюра $\sigma_\theta(r, \pi/2)$ показывает локальный характер влияния отверстия на распределение напряжений в полосе (рис.11.8). Действительно, с увеличением расстояния r от точки 2 величина напряжения σ_θ быстро уменьшается от значения $3S$, так что на расстоянии примерно пяти радиусов она практически не отличается от S . Отметим, что расстояние, равное пяти радиусам, можно рассматривать как бесконечно большое, поскольку в этом случае напряженное состояние полосы не будет отличаться от напряженного состояния плоскости.

Построение эпюры напряжений $\sigma_r(r, 0)$ показывает, что в точке $r = \sqrt{6/5} a$ имеет место сжимающее напряжение $\sigma_r = -S/24$.

Рассмотренная задача (задача Кирша) является характерным примером влияния концентратора напряжений (в данном случае – малого кругового отверстия), наличие которого приводит к значительным локальным (местным) напряжениям, быстро затухающим по мере удаления от него. Обычно локальные напряжения характеризуют коэффициентом концентрации напряжений k , представляющим собой отношение наибольшего местного напряжения к номинальному напряжению, вычисленному в предположении, что концентратор отсутствует. В рассматриваемом случае $k = 3S/S = 3$. Отметим, что наличие концентраторов напряжений ведет не только к повышению напряжений вблизи них, но и к изменению характера напряженного состояния элемента конструкции.

Представленное выше решение задачи Кирша позволяет легко получить решение задачи о растяжении пластины с малым круговым отверстием в двух взаимно перпендикулярных направлениях.

Построение решения покажем на примере напряжения σ_r . При растяжении пластины усилиями S в направлении оси x для напряжения σ_r получили:

$$\sigma_r = \frac{S}{2} \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) + \frac{S}{2} \left(1 + \frac{3a^4}{r^4} - \frac{4a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta.$$

При растяжении пластины усилиями S в направлении оси y напряжение σ_r будет определяться этой же формулой, но с заменой угла θ на угол $\theta + (\pi/2)$. Суммирование напряжений в соответствии с принципом суперпозиции приводит к

соотношению:

$$\sigma_r = S \left(1 - \frac{a^2}{r^2} \right) ,$$

Так же легко можно построить решение задачи о растяжении пластины усилиями S в направлении оси x и сжатии усилиями $(-S)$ в направлении оси y .

11.10.	Тонкий круговой диск при неравномерном распределении температуры.
--------	---

Рассмотрим частный случай, когда температура является функцией только радиуса r , т.е. случай осесимметричного плоского напряженного состояния.

Основные уравнения, определяющие поставленную задачу, имеют вид:

- дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\vartheta}{r} = 0 ;$$

- зависимости Коши

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} , \quad \varepsilon_\vartheta = \frac{u}{r} ;$$

- уравнения линейного физического закона

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \nu \sigma_\vartheta) + \alpha T , \\ \varepsilon_\vartheta &= \frac{1}{E} (\sigma_\vartheta - \nu \sigma_r) + \alpha T . \end{aligned}$$

Представление дифференциального уравнения равновесия в форме

$$\frac{d}{dr} (r \sigma_r) - \sigma_\vartheta = 0$$

позволяет ввести функцию напряжений φ в следующем виде:

$$\sigma_r = \frac{\varphi}{r} , \quad \sigma_\vartheta = \frac{d\varphi}{dr} .$$

Условие совместности деформаций получим, исключая перемещение u из зависимостей Коши. Будем иметь:

$$\frac{d}{dr}(r\varepsilon_\vartheta) - \varepsilon_r = 0 \quad \Rightarrow \quad r \frac{d\varepsilon_\vartheta}{dr} + \varepsilon_\vartheta - \varepsilon_r = 0 \quad .$$

Преобразование полученного уравнения с учетом соотношений линейного физического закона и формул, вводящих функцию напряжений, позволяет получить для функции напряжений φ дифференциальное уравнение *второго* порядка:

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} = -\alpha E \frac{dT}{dr} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\varphi) \right] = -\alpha E \frac{dT}{dr} \quad .$$

Последняя запись дифференциального уравнения, определяющего функцию напряжений, позволяет непосредственное интегрирование. Будем иметь:

$$\varphi = -\frac{\alpha E}{r} \int_a^r T(r) r dr + \frac{C_1 r}{2} + \frac{C_2}{r} \quad .$$

Для диска с центральным отверстием нижний предел интегрирования a соответствует значению внутреннего радиуса, для сплошного диска должны принять $a = 0$.

По известным формулам определим напряжения. Получим:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{\varphi}{r} = -\frac{\alpha E}{r^2} \int_a^r T(r) r dr + \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{r^2} \quad , \\ \sigma_\theta &= \frac{d\varphi}{dr} = \alpha E \left(\frac{1}{r^2} \int_a^r T(r) r dr - T \right) + \frac{C_1}{2} - \frac{C_2}{r^2} \quad . \end{aligned}$$

Постоянные интегрирования определим отдельно для диска с отверстием и сплошного диска.

Диск с отверстием. Граничные условия в данной задаче имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r|_{r=a} &= 0 & \Rightarrow & \quad \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{a^2} = 0 \quad , \\ \sigma_r|_{r=b} &= 0 & & \quad \frac{C_1}{2} + \frac{C_2}{b^2} = \frac{\alpha E}{b^2} \int_a^b T(r) r dr \quad . \end{aligned}$$

Решение уравнений относительно постоянных C_1 и C_2 позволяет получить:

$$C_2 = -\frac{\alpha a^2 E}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr, \quad \frac{C_1}{2} = -\frac{\alpha E}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr.$$

Подставим полученные значения постоянных в соотношения для напряжений. После некоторых преобразований будем иметь:

$$\sigma_r = \frac{\alpha E}{r^2} \left[\frac{r^2 - a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr - \int_a^r T(r) r dr \right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{\alpha E}{r^2} \left[\frac{r^2 + a^2}{b^2 - a^2} \int_a^b T(r) r dr + \int_a^r T(r) r dr - T(r) r^2 \right].$$

В частном случае $T = \text{const}$ получим ожидаемый результат: $\sigma_r = \sigma_\theta = 0$.

Сплошной диск. Соотношения, определяющие напряжения в сплошном диске, легко получить, положив $a = 0$ в формулах для напряжений в диске с отверстием. В этом случае имеем:

$$\sigma_r = \alpha E \left[\frac{1}{b^2} \int_0^b T(r) r dr - \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr \right],$$

$$\sigma_\theta = \alpha E \left[\frac{1}{b^2} \int_0^b T(r) r dr + \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr - T(r) \right].$$

Этот же результат получим, если постоянные C_1 и C_2 будем определять непосредственно для сплошного диска, принимая $C_2 = 0$ (напряжения в центре диска должны быть конечными) и выполняя граничное условие $\sigma_r|_{r=b} = 0$.

Обратим внимание на необходимость дополнительного исследования соотношений для напряжений, поскольку напряжения σ_r и σ_θ сохраняют неопределенность при $r \rightarrow 0$ за счет второго слагаемого. Раскрывая эту неопределенность, будем иметь:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{r^2} \int_0^r T(r) r dr = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int_0^r T(r) r dr}{r^2} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dr} \left(\int_0^r T(r) r dr \right)}{\frac{d}{dr} (r^2)} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{T(r) r}{2r} = \frac{T(0)}{2}.$$

Легко видеть, что упомянутая неопределенность – кажущаяся, поскольку температура в центре диска всегда конечна.

12. Осесимметричное нагружение оболочек вращения

В теории упругости оболочкой называют тело, заключенное между двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми, именуемое в дальнейшем толщиной оболочки h , мало по сравнению с прочими его размерами. Вообще говоря, толщина оболочки может быть переменной величиной, однако среди реальных конструкций в подавляющем большинстве встречаются оболочки, толщина которых постоянна. В дальнейшем будем рассматривать именно такие оболочки.

Поверхность, делящую толщину оболочки пополам, называют срединной поверхностью. Геометрия оболочки будет полностью определена, если задана форма срединной поверхности и толщина оболочки.

В зависимости от толщины оболочки делятся на тонкие и толстые. К тонким оболочкам, которые и будем рассматривать в дальнейшем, обычно относят такие, у которых отношение толщины h и минимального радиуса кривизны R определяется значением $h/R \leq 1/10$. Следует отметить, что это значение имеет условно-ориентировочный характер.

Наиболее важный случай оболочек – оболочки вращения, срединная поверхность которых образуется от вращения плоской кривой вокруг оси, лежащей в ее плоскости и не пересекающей эту кривую.

Для оболочки вращения положение произвольной точки на срединной поверхности определяется пересечением меридиана и параллели (рис. 12.1). В качестве криволинейных координат удобно выбрать углы ϑ и φ . Угол ϑ лежит в плоскости параллели и отсчитывается от некоторой заданной меридианной плоскости. Угол φ образуется направлением нормали к срединной поверхности и

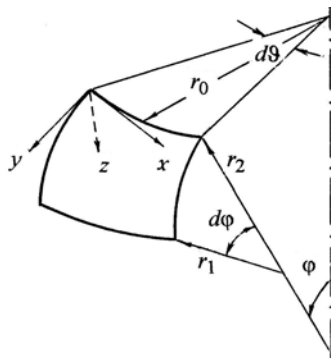


Рис. 12.1

осью вращения. Положительная координата z отсчитывается по внутренней нормали к срединной поверхности в рассматриваемой точке. Соответственно, элемент срединной поверхности оболочки вращения вырезается двумя меридианными плоскостями, проходящими через ось вращения, и двумя коническими поверхностями, перпендикулярными к меридианным плоскостям.

Прямоугольную систему координат обычно вводят следующим образом: ось x направляют по касательной к параллельному кругу, ось y – по касательной к меридиану, а ось z оставляют нормальной к срединной поверхности.

Меридианная плоскость и коническая поверхность, перпендикулярная к ней, определяют плоскости главных радиусов кривизны r_1 и r_2 в некоторой точке срединной поверхности оболочки. Радиус параллельного круга обозначим через r_0 . Длины встречающихся в точке M сторон выделенного элемента срединной поверхности будут равны $r_1 d\varphi$ и $r_0 d\vartheta$ или $r_2 \sin \varphi d\vartheta$.

12.1. Безмоментная теория осесимметрично нагруженных оболочек вращения

При расчетах на прочность тонких оболочек используются различные теории. Самой простой из них является безмоментная теория оболочек. Безмоментная теория строится на основе допущения, что при расчете оболочки можно пренебречь изгибающими моментами и перерезывающими силами, действующими в нормальных сечениях, и, соответственно, связанными с ними напряжениями, принимая во внимание только лишь напряжения растяжения, обусловленные деформацией срединной поверхности оболочки. При этом срединная поверхность подвергается равномерной деформации, а так как толщина оболочки мала, можно считать, что растягивающие напряжения распределены по толщине равномерно. При таком упрощении задача об определении напряжений в оболочке становится статически определимой и легко решается.

Условия применимости безмоментной теории для расчета тонких оболочек формулируются в виде следующих критериев безмоментности напряженного состояния:

- края оболочки должны быть свободны от изгибающих моментов и перерезывающих сил, а их повороты и нормальные прогибы не должны быть стеснены;

- радиусы кривизны, граничный контур, толщина оболочки, компоненты поверхностной и краевой нагрузок должны быть плавными функциями.

При составлении уравнений равновесия элемента оболочки вращения примем во внимание, что в теории тонких пластин и оболочек принято оперировать не напряжениями, а результирующими силами и моментами, отнесенными к единице длины сечения.

Безмоментное напряженное состояние в оболочке реализуется, если известны меридиональное N_1 , окружное N_2 и сдвигающее S усилия (рис. 12.2). Поскольку в безмоментной теории полагается, что напряжения распределяются по толщине равномерно, связь между напряжениями и рассматриваемыми усилиями определится соотношениями:

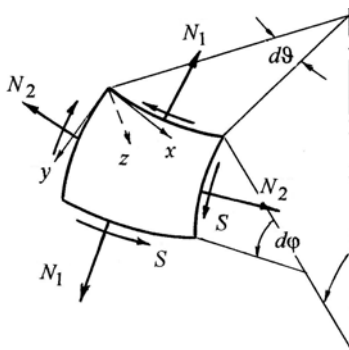


Рис. 12.2

$$N_1 = \sigma_m h \quad , \quad N_2 = \sigma_t h \quad , \quad S = \tau h \quad .$$

Будем полагать, что произвольная внешняя нагрузка, отнесенная к единице площади срединной поверхности и имеющая составляющие q_x , q_y , q_z по координатным осям xyz , непрерывно распределена по поверхности оболочки.

Выполнение условий равновесия элемента оболочки вращения приводит к трем дифференциальным уравнениям (два уравнения сил и уравнение моментов) относительно определяемых усилий N_1 , N_2 и S . Соответствие числа уравнений числу неизвестных указывает на то, что задача определения усилий в безмоментной оболочке является статически определимой.

Если нагрузка, приложенная к оболочке вращения осесиммет-

рична (симметрична относительно оси вращения), то разрешающие уравнения безмоментной теории существенно упрощаются.

Не останавливаясь на процедуре получения уравнений равновесия элемента оболочки вращения и на их последующих математических преобразованиях, приведем эти уравнения при осесимметричном нагружении оболочки в готовом виде. Будем иметь:

$$\frac{N_1}{r_1} + \frac{N_2}{r_2} = q_z \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_m}{r_1} + \frac{\sigma_t}{r_2} = \frac{p}{h} \quad (\text{уравнение Лапласа}),$$

$$2\pi r_0 N_1 \sin \varphi = P \quad \Rightarrow \quad 2\pi r_0 \sigma_m h \sin \varphi = P \quad .$$

Здесь $q_z = p$ – внутреннее давление, являющееся функцией координаты, отсчитываемой вдоль оси вращения; P – равнодействующая всей внешней нагрузки, приложенной к части оболочки, определяемой углом φ .

Широкое использование безмоментной теории оболочек объясняется не только относительной простотой ее математического аппарата, но и тем, что она вполне удовлетворительно описывает работу различных конструкций, реализованных в форме тонких оболочек, при достаточно широком классе внешних воздействий.

Безмоментное напряженное состояние является технически наиболее выгодным вследствие равномерности работы материала оболочки. Поэтому сформулированные выше условия применимости безмоментной теории следует рассматривать как «прочностные» рекомендации при проектировании тонкостенных конструкций. Конечно, не всегда они могут быть выполнены либо в силу назначения конструкции, либо в силу других соображений (технология, габариты, экономика), но они являются тем «идеалом», к которому следует стремиться. Обычно конструктивными решениями удается добиться работы основной части оболочки в безмоментном напряженном состоянии, локализуя моментное напряженное состояние в зоне, примыкающей к краю оболочки (краевой эффект). Для расчета краевого эффекта необходимо использовать моментную теорию тонких оболочек, построение которой проведем для симметрично нагруженных оболочек вращения.

12.2. Моментная теория осесимметрично нагруженных оболочек вращения

Из осевой симметрии задачи следует, что по сторонам элемента оболочки, расположенным в меридиональных плоскостях, будут действовать только нормальные напряжения, которые сводятся к результирующей силе $N_2 r_1 d\varphi$ и результирующему моменту $M_2 r_1 d\varphi$, причем и сила, и

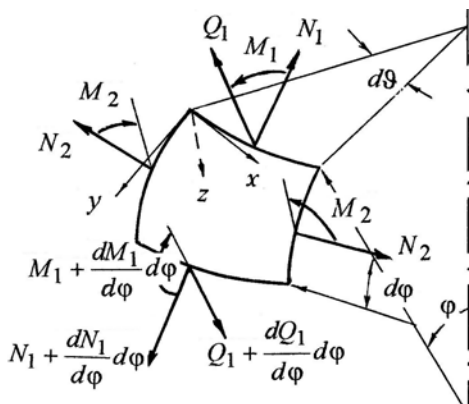


Рис. 12.3

момент не будут зависеть от угла ϑ , определяющего положение меридианов (рис. 12.3).

На сторонах элемента оболочки, перпендикулярных к меридианам и определяемых углом φ , также будут действовать нормальные напряжения, сводящиеся к результирующей силе $N_1 r_2 \sin\varphi d\vartheta$ и результирующему моменту $M_1 r_2 \sin\varphi d\vartheta$. Из касательных напряжений на этих сторонах останутся (из-за осесимметричности оболочки и нагрузки) только такие, которые сводятся к результирующей силе $Q_1 r_2 \sin\varphi d\vartheta$, направленной по нормали к срединной поверхности оболочки. С изменением угла φ значения N_1 , M_1 и Q_1 могут меняться.

Будем полагать, что произвольная внешняя нагрузка имеет составляющие q_y и q_z .

Рассмотрение равновесия элемента оболочки, находящегося под действием всех приложенных нагрузок, показывает, что три уравнения равновесия будет удовлетворяться тождественно, а оставшиеся три (два уравнения сил относительно осей y и z и уравнение моментов относительно оси x) принимают следующий вид:

$$\frac{1}{r_1} \frac{d}{d\varphi} (N_1 r_0) - N_2 \cos \varphi - \frac{r_0 Q_1}{r_1} + r_0 q_y = 0 \quad ,$$

$$\frac{r_0}{r_1} N_1 + N_2 \sin \varphi + \frac{1}{r_1} \frac{d}{d\varphi} (r_0 Q_1) + r_0 q_z = 0 \quad ,$$

$$\frac{1}{r_1} \frac{d}{d\varphi} (M_1 r_0) - M_2 \cos \varphi - r_0 Q_1 = 0 \quad .$$

В представленные три уравнения равновесия входят пять неизвестных величин (три силы и два момента), однако перерезывающая сила Q_1 может быть исключена из рассмотрения с использованием третьего уравнения. Тем не менее задача остается статически неопределимой, т.е. полученной системы уравнений недостаточно, и для решения задачи необходимо привлекать зависимости Коши и уравнения линейного физического закона.

Зависимости Коши, полученные для представления деформаций произвольного трехмерного упругого тела в криволинейной системе координат, довольно громоздки, и пользоваться ими трудно. Однако возможно построение упрощенной (технической или прикладной) моментной теории осесимметрично нагруженных тонких оболочек вращения за счет введения следующих допущений (гипотез Кирхгофа – Лява), учитывающих особенности поведения рассматриваемых оболочек под нагрузкой:

- прямолинейный элемент, нормальный к срединной поверхности до деформации, остается прямолинейным и нормальным к деформированной срединной поверхности;

- нормальные напряжения на площадках, параллельных срединной поверхности, пренебрежимо малы по сравнению с прочими напряжениями.

Введение указанных допущений дает возможность пренебречь деформациями сдвига в плоскостях нормальных сечений и линейной деформацией в направлении толщины оболочки. Кроме того, принимая во внимание осесимметричность задачи, дополнительно будем иметь, что перемещение v в окружном направлении равно нулю. Окончательно, связь между деформациями и перемещениями (зависимости Коши) в рассматриваемой задаче принимают вид:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{10} - z\kappa_1 \quad , \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{20} - z\kappa_2 \quad ,$$

где введены следующие обозначения:

$$\varepsilon_{10} = \frac{1}{r_1} \left(\frac{\partial u_0}{\partial \varphi} - w_0 \right) \quad , \quad \varepsilon_{20} = \frac{u_0}{r_0} \cos \varphi - \frac{w_0}{r_2} \quad ,$$

$$\kappa_1 = \frac{1}{r_1} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{u_0}{r_1} + \frac{1}{r_1} \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right) \quad , \quad \kappa_2 = \frac{\cos \varphi}{r_0 r_1} \left(u_0 + \frac{\partial w_0}{\partial \varphi} \right) \quad .$$

В приведенных соотношениях $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ – деформации произвольных элементов оболочки; $\varepsilon_{10}, \varepsilon_{20}$ – деформации элементов срединной поверхности оболочки; κ_1, κ_2 – изменения кривизны в меридианном и перпендикулярном ему направлениях; u_0, v_0 – перемещения точек срединной поверхности.

Напряженное и деформированное состояния оболочки связаны уравнениями линейного физического закона:

$$\sigma_1 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_1 + \nu \varepsilon_2) \quad , \quad \sigma_2 = \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_2 + \nu \varepsilon_1) \quad .$$

Переходя от напряжений к усилиям и моментам, получим следующие соотношения:

$$N_1 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{10} + \nu \varepsilon_{20}) \quad ,$$

$$N_2 = \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_{20} + \nu \varepsilon_{10}) \quad ,$$

$$M_1 = -D (\kappa_1 + \nu \kappa_2) \quad ,$$

$$M_2 = -D (\kappa_2 + \nu \kappa_1) \quad ,$$

где $D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2)$ – цилиндрическая жесткость оболочки.

Таким образом, к двум уравнениям равновесия с четырьмя неизвестными N_1 , M_1 и N_2 , M_2 добавили четыре уравнения для этих усилий и моментов с четырьмя неизвестными деформациями срединной поверхности оболочки и изменениями кривизн (ε_{10} , ε_{20} , κ_1 , κ_2) и четыре уравнения, связывающие деформации срединной поверхности оболочки и изменения кривизн с перемещениями точек срединной поверхности (еще две неизвестные u_0 , v_0). Тем самым, имеем полную систему уравнений для отыскания всех неизвестных величин, определяющих решение поставленной задачи. В дальнейшем при рассмотрении подобных систем уравнений индекс "0", определяющий величины, относящиеся к срединной поверхности оболочки, будем опускать.

12.2.1. Круговая цилиндрическая оболочка при осесимметричном нагружении

Для круговой цилиндрической оболочки постоянной толщины, нагруженной симметрично относительно оси, систему определяющих уравнений и их решение можно существенно упростить.

Выберем координатную систему так, чтобы координата x отсчитывалась вдоль образующей, φ – в окружном направлении, а z – вдоль нормали к срединной поверхности оболочки (рис. 12.4).

Радиус цилиндра считаем равным a .

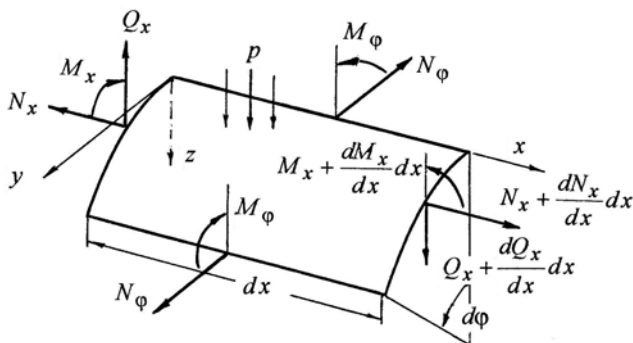


Рис. 12.4

Нагружение цилиндра реализуем приложением только поперечной нагрузки $q_z = p$ ($q_y = 0$) – давления, нормального к срединной поверхности оболочки.

Для получения определяющих уравнений в рассматриваемом случае воспользуемся соответствующими уравнениями, записанными для осесимметрично нагруженных оболочек вращения, переходя к принятым здесь обозначениям (индексы "1" и "2" заменяя на индексы "x" и "φ") и учитывая, что $1/r_1 = 0$, $r_2 = a$, $\varphi = \pi/2$ и $r_1 d\varphi \Rightarrow dx$.

С учетом всего сказанного дифференциальные уравнения равновесия принимают вид:

$$\begin{aligned}\frac{dN_x}{dx} &= 0 \quad , \\ N_\varphi + a \frac{dQ_x}{dx} + ap &= 0 \quad , \\ \frac{dM_x}{dx} - Q_x &= 0 \quad .\end{aligned}$$

Соответственно, уравнения, связывающие деформации и изменения кривизн, приводятся к виду:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{du}{dx} \quad , \quad \varepsilon_\varphi = -\frac{w}{a} \quad , \\ \kappa_1 &= \frac{d^2 w}{dx^2} \quad , \quad \kappa_2 = 0 \quad .\end{aligned}$$

Переходя к усилиям и моментам, получим следующие соотношения:

$$N_x = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dx} - \nu \frac{w}{a} \right) \quad , \quad N_\varphi = \frac{Eh}{1-\nu^2} \left(-\frac{w}{a} + \nu \frac{du}{dx} \right) \quad ,$$

$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} \Rightarrow Q_x = \frac{dM_x}{dx} = -D \frac{d^3 w}{dx^3} ,$$

$$M_\phi = -D \nu \frac{d^2 w}{dx^2} \Rightarrow M_\phi = \nu M_x .$$

Первое из дифференциальных уравнений равновесия показывает, что в рассматриваемой задаче продольные усилия N_x , определяющие растяжение оболочки, постоянны. В дальнейшем будем полагать, что они равны нулю ($N_x = 0$). Если же возникает необходимость учесть их отличие от нуля, то деформации и напряжения, обусловленные этими усилиями, могут быть вычислены отдельно и суммированы с деформациями и напряжениями, вызванными поперечной нагрузкой p . С другой стороны, приняв $N_x = 0$, из соотношения для усилия N_x находим:

$$\frac{du}{dx} = \nu \frac{w}{a} ,$$

что, в свою очередь, позволяет записать соотношение для усилия N_ϕ в виде:

$$N_\phi = -\frac{E h w}{a} .$$

Возвращаясь к дифференциальным уравнениям равновесия, можно видеть, что второе и третье уравнения сводятся к одному:

$$\frac{d^2 M_x}{dx^2} + \frac{1}{a} N_\phi = -p .$$

Подставляя в полученное уравнение соотношения для N_ϕ и M_x , приходим к обыкновенному дифференциальному уравнению

четвертого порядка с постоянными коэффициентами:

$$D \frac{d^4 w}{dx^4} + \frac{Eh}{a^2} w = p \quad \Rightarrow \quad \frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = p/D \quad ,$$

где введено обозначение $\beta^4 = Eh / 4a^2 D = 3(1 - \nu^2) / a^2 h^2$.

Таким образом, получили, что решение задачи о круговой цилиндрической оболочке постоянной толщины, нагруженной симметрично относительно оси, сводится к интегрированию неоднородного дифференциального уравнения прогибов.

Общее решение соответствующего однородного уравнения будет иметь вид:

$$\bar{w} = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad .$$

Отметим, что соотношение типа $C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x$ можно представить в виде $A \cos(\beta x + \theta)$, где A и θ – постоянные.

Общее решение неоднородного уравнения запишем в форме:

$$w = \bar{w} + w_1 \quad ,$$

где w_1 – частное решение неоднородного дифференциального уравнения прогибов, определяемое характером распределения нагрузки p . В частности, при $p = \text{const}$ имеем, что $w_1 = pa^2 / Eh$.

Четыре постоянные интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 должны быть найдены из четырех граничных условий на концах (краях) оболочки (по два условия на каждом краю).

Представим наиболее часто встречающиеся граничные условия на краю оболочки:

- край оболочки жестко закреплен (заделан)

$$w = 0 \quad , \quad \frac{dw}{dx} = 0 \quad ;$$

- край оболочки шарнирно оперт

$$w = 0, \quad M_x = 0 \Rightarrow d^2 w / dx^2 = 0 ;$$

- край оболочки свободен

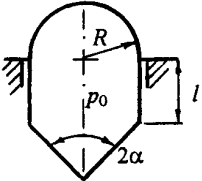
$$M_x = 0 \Rightarrow d^2 w / dx^2 = 0 ,$$

$$Q_x = 0 \Rightarrow Q_x = -D \frac{d^3 w}{dx^3} \Rightarrow \frac{d^3 w}{dx^3} = 0 ;$$

- край оболочки нагружен силой Q_0 и моментом M_0

$$D \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0, \quad -D \frac{d^3 w}{dx^3} = Q_0 .$$

Задачи

12.1.		Считая емкость невесомой, определить напряжения в ее сечениях.
-------	---	---

По условию задачи собственным весом оболочки пренебрегаем и, соответственно, реакция опоры равна нулю.

Для решения задачи используем безмоментную теорию осесимметрично нагруженных оболочек вращения.

Нормальные напряжения σ_m и σ_t будем определять, рассекая оболочку в ее сферической, цилиндрической и конической частях.

Сферическая часть.

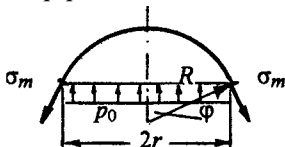


Рис. 12.5

Условие равновесия рассматриваемой отсеченной части оболочки (рис.12.5) имеет вид:

$$(\sigma_m \cdot 2\pi r \cdot \delta) \sin \phi = p_0 \cdot \pi r^2 .$$

Учитывая, что $r = R \sin \phi$, и решая уравнение

относительно напряжения σ_m , получим:

$$\sigma_m = p_0 R / 2\delta \quad .$$

Для определения σ_t используем уравнение Лапласа при $\rho_m = \rho_t = R$ и найденном значении σ_m . Будем иметь:

$$\sigma_t = p_0 R / 2\delta \quad .$$

Цилиндрическая часть.

Условие равновесия оставленной части оболочки (рис.12.6) запишем в форме

$$\sigma_m \cdot 2\pi R \cdot \delta = p_0 \cdot \pi R^2 \quad ,$$

откуда находим:

$$\sigma_m = p_0 R / 2\delta \quad .$$

Из уравнения Лапласа при $\rho_m = \infty$, $\rho_t = R$ получаем:

$$\sigma_t = p_0 R / \delta \quad .$$

Коническая часть.

Условие равновесия оставленной части оболочки (рис.12.7) имеет вид:

$$(\sigma_m 2\pi r \delta) \cos \alpha = \pi r^2 p_0 \quad .$$

Определяя из уравнения напряжение σ_m и учитывая, что $r = z \operatorname{tg} \alpha$ ($0 \leq z \leq R$), получим

$$\sigma_m = p_0 z \operatorname{tg} \alpha / 2\delta \cos \alpha \quad .$$

Решая уравнение Лапласа относительно σ_t при $\rho_m = \infty$, $\rho_t = r / \cos \alpha$, будем иметь:

$$\sigma_t = p_0 z \operatorname{tg} \alpha / \delta \cos \alpha \quad .$$

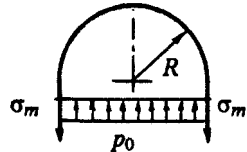


Рис. 12.6

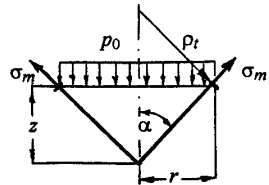


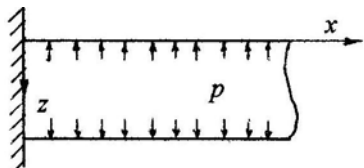
Рис. 12.7

Результаты определения напряжений в сечениях рассматриваемого резервуара сведен в табл. 12.1.

Таблица 12.1

Напряжения	Сфера	Цилиндр	Конус	
			напряжения в произвольном сечении	наибольшие напряжения
σ_m	$p_0 R / 2\delta$	$p_0 R / 2\delta$	$p_0 z \operatorname{tg} \alpha / 2\delta \cos \alpha$	$p_0 R / \sqrt{2} \delta$
σ_t	$p_0 R / 2\delta$	$p_0 R / \delta$	$p_0 z \operatorname{tg} \alpha / \delta \cos \alpha$	$\sqrt{2} p_0 R / \delta$

Опасным является сечение в конической части резервуара при $z = R$. Напряженное состояние — двухосное: $\sigma_1 = \sqrt{2} p_0 R / \delta$, $\sigma_2 = p_0 R / \sqrt{2} \delta$, $\sigma_3 = 0$.

12.2.		Изгиб длинной цилиндрической оболочки, жестко закрепленной по краю, нагруженной равномерным внутренним давлением p
-------	---	--

Напомним, что решение задачи о круговой цилиндрической оболочке постоянной толщины h , нагруженной симметрично относительно оси, сводится к интегрированию неоднородного дифференциального уравнения прогибов, решение которого в данном случае принимает форму:

$$w = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) - \frac{p a^2}{E h}.$$

Здесь принято во внимание, что для больших значений переменной x (оболочка длинная) прогиб должен быть конечным ($C_1 = C_2 = 0$), а частное решение неоднородного дифференциального уравнения прогибов, определяемое внутренним давлением p , имеет вид $w_1 = -p a^2 / E h$.

Край оболочки жестко закреплен (заделан). Соответственно, постоянные C_3 и C_4 должны быть найдены из следующих граничных условий:

$$w|_{x=0} = 0, \quad \left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0.$$

Решение соответствующих уравнений относительно C_3 и C_4 позволяет получить:

$$C_3 = C_4 = pa^2 / Eh \quad .$$

Таким образом, прогиб оболочки определяется соотношением

$$w = \frac{pa^2}{Eh} \left[e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x) - 1 \right] \quad .$$

С увеличением переменной x значение прогиба стремится к величине $\delta = pa^2 / Eh$, что соответствует изменению (увеличению) длины радиуса при свободных торцах оболочки. Действительно, в соответствии с соотношениями безмоментной теории имеем: $\sigma_\varphi = pa / h$, $\delta / a = \sigma_\varphi / E \Rightarrow \delta = pa^2 / Eh$ (знак « - » для перемещения w показывает, что оно направлено обратно положительному направлению оси z). Данное обстоятельство подчеркивает локальный характер полученного решения и позволяет провести оценку протяженности зоны краевого эффекта или, другими словами, определить длину оболочки, при которой взаимным влиянием краев можно пренебречь. В этом случае оболочку можно считать длинной. Общепринятыми являются следующие оценки:

- если приемлема 10 % -ная погрешность расчета, то оболочку можно считать длинной при $\beta L > 2 \xrightarrow{v=0,3} L > 1,5\sqrt{Rh}$ (L, R, h – длина, радиус и толщина оболочки);

- если приемлема 5 % -ная погрешность расчета, то оболочку можно считать длинной при $\beta L > 3 \xrightarrow{v=0,3} L > 2,35\sqrt{Rh}$.

Вычисление изгибающего момента M_x и перерезывающей силы Q_x в закреплении (рис.12.8) позволяет получить:

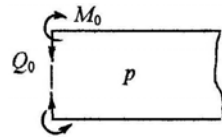


Рис. 12.8

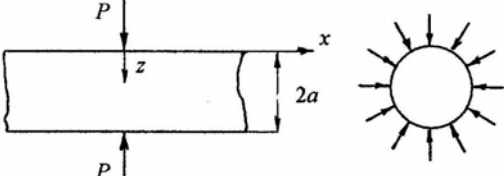
$$M_x = -D \frac{d^2 w}{dx^2} \quad \Rightarrow \quad M_x \Big|_{x=0} = M_0 = \frac{p}{2\beta^2} \quad ;$$

$$Q_x = D \frac{d^3 w}{dx^3} \quad \Rightarrow \quad Q_x \Big|_{x=0} = Q_0 = -\frac{p}{\beta} \quad .$$

Определение наибольших напряжений изгиба $(\sigma_x)_{\max}$ в закреплении приводит к следующему результату:

$$\sigma_x = \frac{12M_x}{h^3} z \Rightarrow (\sigma_x)_{\max} = \frac{12M_0}{h^3} \frac{h}{2} \xrightarrow{v=0,3} (\sigma_x)_{\max} = 3,63 \frac{pa}{2h} .$$

Полученное значение $(\sigma_x)_{\max}$ существенно превосходит соответствующее значение напряжения $\sigma_x = \sigma_m = pa/2h$, следующего из расчета по безмоментной теории, что подчеркивает необходимость учета краевого эффекта при расчете тонкостенных оболочек.

12.3.		Изгиб длинной цилиндрической оболочки нагрузкой, равномерно распределенной по круговому сечению
-------	---	---

В силу симметрии задачи будем рассматривать половину цилиндра, расположенную справа от оси z . Отметим, что каждая половина цилиндра воспринимает половину внешней нагрузки, и поэтому при $x=0$ имеем $Q_0 = -P/2$.

Примем во внимание, что для больших значений переменной x (оболочка длинная) прогиб должен быть конечным ($C_1 = C_2 = 0$). Кроме того, поскольку в рассматриваемой задаче давление, распределенное по поверхности оболочки отсутствует, частное решение уравнения прогибов, определяемое этим давлением, имеет вид $w_1 = 0$. Соответственно, общее решение уравнения прогибов принимает форму:

$$w = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) .$$

Для длинного цилиндра функция w должна быть симметрична относительно оси z . Данное требование определяет граничное условие для половины цилиндра: в сечении $x=0$ производная dw/dx должна быть равна нулю.

Таким образом, для отыскания постоянных C_3 и C_4 имеем следующие граничные условия:

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = 0 ,$$

$$Q_x|_{x=0} = Q_0 = -D \left. \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=0} = -\frac{P}{2} .$$

Выполняя граничные условия, получим:

$$C_3 = C_4 = \frac{P}{8\beta^3 D} \quad .$$

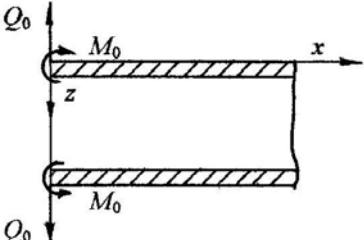
Окончательно, соотношение, определяющее прогиб оболочки при приложении нагрузки, равномерно распределенной по круговому сечению, имеет вид:

$$w = \frac{P e^{-\beta x}}{8\beta^3 D} (\cos \beta x + \sin \beta x) \quad .$$

Наибольший прогиб и наибольший изгибающий момент имеют место при $x = 0$:

$$w_{\max} = \frac{P}{8\beta^3 D} = \frac{Pa^2}{2Eh} \cdot \beta \quad , \quad (M_x)_{\max} = \frac{P}{4\beta} \quad .$$

Легко установить, что всеми величинами, определяемыми в рассматриваемой задаче, можно пренебречь при $x \geq \pi/\beta$, что означает локальный характер действия приложенной нагрузки и соответствует общей оценке протяженности зоны краевого эффекта $\beta L/2 > \pi$, где L — длина оболочки.

12.4.		Изгиб длинной цилиндрической оболочки нагрузкой, равномерно распределенной по краю
-------	--	--

Общее решение уравнения прогибов имеет вид:

$$w = e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) \quad .$$

При заданном нагружении края оболочки $x = 0$ постоянные интегрирования C_3 и C_4 должны быть найдены из следующих граничных условий:

$$\left. -D \frac{d^2 w}{dx^2} \right|_{x=0} = M_0 \quad , \quad \left. -D \frac{d^3 w}{dx^3} \right|_{x=0} = Q_0 \quad .$$

Подставляя значения производных функции w в граничные условия и проводя соответствующие преобразования, получим:

$$C_3 = -\frac{Q_0 + M_0\beta}{2\beta^3 D} \quad , \quad C_4 = -\frac{M_0}{2\beta^2 D} \quad .$$

Подставим значения постоянных C_3 и C_4 в соотношение для прогиба w . Будем иметь:

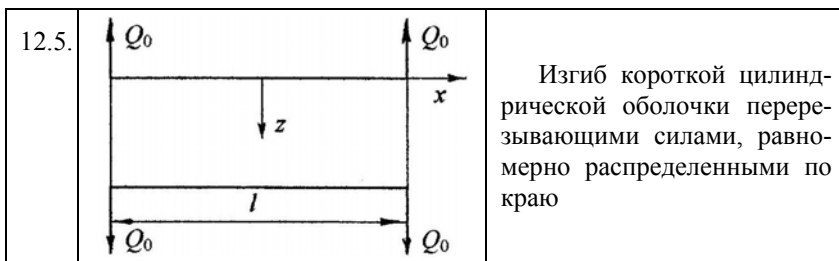
$$w = \frac{e^{-\beta x}}{2\beta^3 D} [\beta M_0 \sin \beta x - (\beta M_0 + Q_0) \cos \beta x] \quad .$$

Наибольший прогиб имеет место на загруженном торце при $x = 0$:

$$w|_{x=0} = w_{\max} = -\frac{1}{2\beta^3 D} (\beta M_0 + Q_0) \quad ,$$

где знак « $-$ » показывает, что прогиб направлен в сторону, обратную направлению оси z . Угол поворота сечения (наклон) при $x = 0$ определится соотношением:

$$\left. \frac{dw}{dx} \right|_{x=0} = \frac{1}{2\beta^2 D} (2\beta M_0 + Q_0) \quad .$$



Для длинных цилиндрических оболочек взаимным влиянием краев можно пренебречь, что позволяет строить решение на одном краю независимо от другого. В случае коротких оболочек взаимное влияние краев необходимо учитывать и применять общее решение дифференциального уравнения прогибов, содержащее четыре постоянные интегрирования:

$$w = e^{\beta x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) + e^{-\beta x} (C_3 \cos \beta x + C_4 \sin \beta x) + w_1 \quad ,$$

где w_1 — частное решение уравнения прогибов, определяемое давлением p , распределенным по поверхности оболочки.

Примем во внимание, что в рассматриваемой задаче $p = 0$, и перепишем функцию прогибов w в форме:

$$w = C_1 \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_2 \sin \beta x \operatorname{ch} \beta x + C_3 \cos \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_4 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x .$$

Преимущество такой записи решения заключается в том, что если ввести систему координат так, как показано на рисунке, то сразу должны принять $C_2 = C_3 = 0$, так как функция прогибов w должна быть четной относительно x .

Постоянные C_1 и C_4 должны быть найдены из граничных условий на торце оболочки (краю), которые в данной задаче имеют вид:

$$\begin{aligned} M_x \Big|_{x=l/2} &= -D \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=l/2} = 0 , \\ Q_x \Big|_{x=l/2} &= -D \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=l/2} = -Q_0 . \end{aligned}$$

Подставляя производные функции прогибов w в представленные граничные условия и решая полученную систему уравнений относительно постоянных C_1 и C_4 , получим:

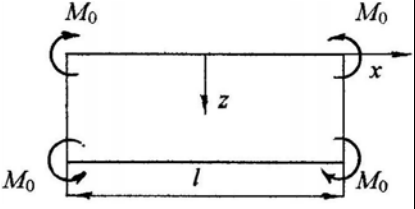
$$C_1 = -\frac{Q_0}{\beta^3 D} \frac{\sin \alpha \operatorname{sh} \alpha}{\sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha} , \quad C_4 = -\frac{Q_0}{\beta^3 D} \frac{\cos \alpha \operatorname{ch} \alpha}{\sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha} ,$$

где $\alpha = \beta l/2$.

Прогиб и наклон на конце цилиндра при $x = l/2$ принимают следующие значения:

$$\begin{aligned} w \Big|_{x=l/2} &= -\frac{Q_0}{2\beta^3 D} \frac{\cos 2\alpha + \operatorname{ch} 2\alpha}{\sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha} \Rightarrow w \Big|_{x=l/2} = -\frac{2Q_0 a^2 \beta}{Eh} \cdot \chi_1(2\alpha) , \\ \frac{dw}{dx} \Big|_{x=l/2} &= -\frac{2Q_0 a^2 \beta^2}{Eh} \frac{\operatorname{sh} 2\alpha - \sin 2\alpha}{\sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha} \Rightarrow \frac{dw}{dx} \Big|_{x=l/2} = -\frac{2Q_0 a^2 \beta^2}{Eh} \cdot \chi_2(2\alpha) , \end{aligned}$$

где $\chi_1(2\alpha)$, $\chi_2(2\alpha)$ — тригонометрические функции, значения которых приведены в таблицах, имеющих в литературе.

12.6.		Изгиб короткой цилиндрической оболочки изгибающими моментами, равномерно распределенными по краю
-------	---	--

Решение поставленной задачи строится по схеме, предложенной в задаче об изгибе короткой цилиндрической оболочки перерезывающими силами, равномерно распределенными по краю.

Функцию прогибов принимаем в виде:

$$w = C_1 \sin \beta x \operatorname{sh} \beta x + C_4 \cos \beta x \operatorname{ch} \beta x \quad .$$

Постоянные C_1 и C_4 должны быть найдены из граничных условий на торце оболочки (краю), которые в данной задаче имеют вид:

$$M_x \Big|_{x=l/2} = -D \frac{d^2 w}{dx^2} \Big|_{x=l/2} = M_0 \quad ,$$

$$Q_x \Big|_{x=l/2} = -D \frac{d^3 w}{dx^3} \Big|_{x=l/2} = 0 \quad .$$

Определяя значения постоянных C_1 и C_4 , будем иметь:

$$C_1 = -\frac{M_0}{2\beta^2 D} \frac{\sin 2\alpha \operatorname{ch}^2 \alpha + \operatorname{sh} 2\alpha \cos^2 \alpha}{(\sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha) \cos \alpha \operatorname{ch} \alpha} \quad ,$$

$$C_4 = -\frac{M_0}{\beta^2 D} \frac{\cos \alpha \operatorname{sh} \alpha - \sin \alpha \operatorname{ch} \alpha}{\sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha} \quad .$$

Прогиб и наклон на конце цилиндра при $x=l/2$ принимают следующие значения:

$$w \Big|_{x=l/2} = -\frac{2M_0 a^2 \beta^2}{Eh} \cdot \chi_2(2\alpha) \quad ,$$

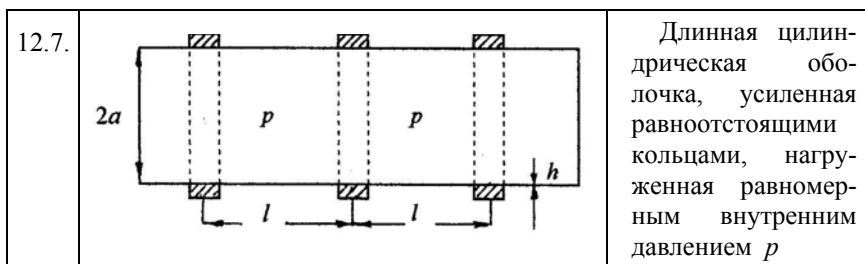
$$\frac{dw}{dx} \Big|_{x=l/2} = -\frac{4M_0 a^2 \beta^3}{Eh} \cdot \chi_3(2\alpha) \quad ,$$

где к ранее введенным тригонометрическим функциям $\chi_1(2\alpha)$, $\chi_2(2\alpha)$ добавилась функция

$$\chi_3(2\alpha) = \frac{\operatorname{ch} 2\alpha - \cos 2\alpha}{\sin 2\alpha + \operatorname{sh} 2\alpha},$$

значения которой также имеются в таблицах.

Отметим, что при достаточно больших значениях параметра α (возрастание α определяет возрастание длины оболочки l) функции $\chi_1(2\alpha)$, $\chi_2(2\alpha)$, $\chi_3(2\alpha)$ близки к единице. Можно видеть, что в этом случае решения задач для коротких оболочек переходят в решения для длинных. Анализ показывает, что при $2\alpha = 3,5 \div 4$ цилиндрическую оболочку можно считать длинной.



Приведенные выше решения задач об изгибе короткой цилиндрической оболочки нагрузками, равномерно распределенными по краю, могут быть использованы при рассмотрении ряда других задач, в частности, для решения поставленной.

Положим сначала, что колец нет; в этом случае радиус трубы увеличится на величину $\delta = pa^2/Eh$. При наличии колец между оболочкой и каждым кольцом возникают реактивные силы, величину которых на единицу длины окружности обозначим через P .

Для решения поставленной задачи можно принять расчетную схему, приведенную на рис. 12.9, где $Q_0 = -P/2$.

Если принять, что подкрепляющие кольца являются абсолютно жесткими, сила P и момент M_0 должны быть определены из условий, что под кольцом прогиб w равен δ

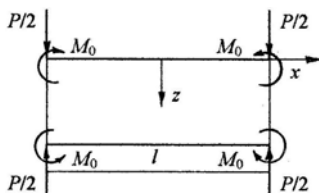


Рис. 12.9

и что наклон dw/dx равен нулю. Записав эти два условия, будем иметь:

$$w|_{x=l/2} = \frac{Pa^2\beta}{Eh} \cdot \chi_1(2\alpha) - \frac{2M_0a^2\beta^2}{Eh} \cdot \chi_2(2\alpha) = \frac{pa^2}{Eh} ,$$

$$\frac{dw}{dx} \Big|_{x=l/2} = \frac{Pa^2\beta^2}{Eh} \cdot \chi_2(2\alpha) - \frac{4M_0a^2\beta^3}{Eh} \cdot \chi_3(2\alpha) = 0 .$$

Решение полученных уравнений относительно силы P и момента M_0 дает:

$$P = \frac{2p}{\beta} \frac{\chi_3}{2\chi_1\chi_3 - \chi_2^2} ,$$

$$M_0 = \frac{p}{2\beta^2} \frac{\chi_2}{2\chi_1\chi_3 - \chi_2^2} .$$

Теперь определение прогибов в поставленной задаче сведено к суммированию полученных ранее решений задач об изгибе короткой цилиндрической оболочки нагрузками P и M_0 , с добавлением частного решения $w_1 = -pa^2/Eh$, определяемого наличием внутреннего давления p .

При необходимости можно учесть деформирование (растяжение) подкрепляющих колец, учитывая, что сила P вызывает в кольце растягивающую силу Pa , которая приводит к увеличению внутреннего радиуса $\delta_1 = Pa^2/ES$, где S — площадь поперечного сечения кольца. Чтобы принять в расчет расширение подкрепляющего кольца, прогиб под кольцом теперь запишем в виде:

$$w|_{x=l/2} = \delta - \delta_1 .$$

Список литературы

1. Теребушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Наука, 1984.
2. Подгорный А.Н. и др. Основы и методы прикладной теории упругости. Киев: Вища школа, 1981.
3. Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979.
4. Тимошенко С.П., Гудьер Д. Теория упругости. М.: Наука, 1979.
5. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976.
6. Винокуров Л.П. Теория упругости и пластичности. Харьков: Изд-во ХГУ, 1965.
7. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. М.: Физматгиз, 1959.
8. Ван Цзи-де. Прикладная теория упругости. М.: Физматгиз, 1959.
9. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.

Владимир Тимофеевич Сапунов

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Учебное пособие

Редактор Шумакова Н.В.

Оригинал-макет изготовлен В. Т. Сапуновым

Подписано в печать 16.05.08 Формат 60х84 1/16
Уч.-изд. л. 14,5 Печ. л. 14,5 Тираж 200 экз.
Изд. № 4/125 Заказ

*Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)
115409, Москва, Каширское шоссе, 31*

*Типография издательства «Тривант».
г. Троицк Московской области*