ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.Т. Сапунов

Прикладная теория упругости

Учебное пособие

Часть 2

Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебного пособия для студентов высших
учебных заведений

Москва 2008

УДК 539.3 (075)
ББК 22.251я7
С 19

Сапунов В.Т. **Прикладная теория упругости**: *Учеб. пособие в 2-х частях*. Ч. 2. М.: МИФИ, 2008. – 140 с.

Предлагаемое издание является второй частью учебного пособия, в которой рассмотрены плоская задача в комплексных переменных, теория изгиба тонких плит и вариационные принципы и энергетические методы решения задач теории упругости. Особое внимание уделено простоте построения уравнений теории упругости, определяющих решения поставленных задач, выявляющих особенности напряженно-деформированного состояния элементов конструкций. Все решаемые задачи доведены до конечных формул и представляют интерес для практики инженерных расчетов.

Пособие рекомендовано для студентов старших курсов специальностей «Физика прочности» и «Основы конструирования физических установок», аспирантов и инженерно-технических работников, специализирующихся в области прочности и жесткости элементов конструкций.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной
образовательной программы

Рецензент: д-р техн. наук, профессор Е.М. Морозов (МИФИ)

ISBN 978 – 5 – 7262 – 1056 – 8

Оглавление

В первой части учебного пособия [1] изложены основы теории упругости, начиная с рассмотрения соответствующей расчетной модели и законов механики сплошного твердого деформируемого тела. Получены основные уравнения теории упругости, следующие из законов равновесия и сплошности, проведено подробное исследование напряженного и деформированного состояний в точке. В общем виде рассмотрена задача определения перемещений по заданным компонентам деформаций с выявлением условий однозначности ее решения и получением условий совместности (неразрывности) деформаций Сен-Венана. Построение функциональной связи между напряжениями и деформациями (обобщенного закона Гука) проведено на базе физического закона механики деформируемого твердого тела. Здесь получен линейный физический закон для однородного изотропного материала и рассмотрены основные упругие технические постоянные, характеризующие свойства реальных материалов.

Рассмотрена полная система определяющих уравнений упругого равновесия и общие методы решения граничных задач линейной теории упругости. При представлении задач теории упругости в перемещениях и в напряжениях получены основные уравнения и общие методы решений этих уравнений.

Дана постановка температурных и динамических задач линейной теории упругости с получением определяющих уравнений и обсуждением методов их решения.

Отметим, что на практике приходится встречаться с довольно обширным, практически очень важным классом основных задач теории упругости, в которых на форму тела и на приложенные к нему внешние силы накладываются определенные ограничения. Первая часть пособия охватывает лишь часть таких задач: подробно рассмотрены задача Сен-Венана с проверкой гипотез сопротивления материалов и решением проблемы кручения призматических стержней, плоская задача в действительных переменных в прямоугольной и полярной системах координат и задача осесимметричного нагружения оболочек вращения с решениями по безмоментной и моментной теориям.

Во второй части учебного пособия рассмотрены плоская задача в комплексных переменных (глава 1), теория изгиба тонких плит (глава 2) и вариационные принципы и энергетические методы решения задач теории упругости (глава 3). Особое внимание уделено простоте построения уравнений теории упругости, определяющих решения поставленных задач, выявляющих особенности напряженно-деформированного состояния элементов конструкций. Все решаемые задачи доведены до конечных формул и представляют интерес для практики инженерных расчетов.

1. Плоская задача теории упругости в комплексных переменных (метод Колосова – Мусхелишвили)

При рассмотрении плоской задачи теории упругости в действительных переменных показано, что и задача о плоской деформации, и задача о плоском напряженном состоянии при наличии объемных сил тяжести сводятся к определению функции напряжений, удовлетворяющей бигармоническому уравнению.

Трудности, связанные с решением бигармонического уравнения для более или менее широких классов частных случаев, имеющих практическое значение, привели к поиску эффективных методов решения этого уравнения, в частности, к решению с применением комплексных переменных.

Впервые решение плоской задачи теории упругости в комплексных переменных было построено Г.В. Колосовым (1909, 1914 гг.). Комплексное представление общего решения плоской задачи оказалось весьма плодотворным не только для эффективного решения основных граничных задач, но и для исследований общего характера, например, возможности обобщений на случай анизотропных тел. Н.И. Мусхелишвили принадлежит более строгий вывод формул, полученных Г.В. Колосовым, а также ряда других формул, представляющих результаты в более простой форме, и применение этих формул к решению основных граничных задач при использовании конформного отображения и свойств интегралов типа Коши.

1.1. Комплексные переменные и комплексные функции

В комплексную переменную z входят две вещественные переменные x и y, так что $z = x + iy$, где $i = \sqrt{-1}$ – мнимая единица; x – вещественная часть комплексной переменной; y (коэффициент при i) – мнимая часть. В полярных координатах, учитывая, что $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, имеем $z = r\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) = re^{i\theta}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ – модуль комплексного числа; θ – его аргумент.

Комплексная переменная $\bar{z} = x - iy$ носит название сопряженной переменной z. В полярных координатах переменная $\bar{z}$ записывается в виде: $\bar{z} = re^{-i\theta}$. Очевидно, что $z\bar{z} = r^2$.

Функция комплексной переменной z носит название комплексной функции. Подобно комплексной переменной, комплексная функция может быть разделена на вещественную и мнимую части:

$$f(z) = f(x+iy) = P(x, y) + iQ(x, y) \quad ,$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – функции вещественных переменных x и y.

Функция $\overline{f(z)}$, сопряженная с комплексной функцией $f(z)$, имеет вид:

$$\overline{f(z)} = P(x, y) - iQ(x, y) \quad .$$

Комплексная функция $f(z)$ называется аналитической (или регулярной, или голоморфной) в области S, если она однозначна и дифференцируема в каждой точке этой области. Необходимыми и достаточными условиями для выполнения этих требований являются уравнения Коши – Римана:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y} \quad , \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x} \quad .$$

Точки области, в которых функция $f(z)$ не имеет производных, называются особыми точками (особенностями) аналитической функции.

Можно показать, что если функция $f(z)$ является аналитической в области S, то в этой области существуют не только первые производные функций P и Q, но и производные высших порядков.

Для аналитической комплексной функции справедливо следующее утверждение: функции P и Q являются гармоническими сопряженными функциями, т.е. удовлетворяют уравнению Лапласа. Действительно, если из уравнений Коши – Римана путем дифференцирования поочередно исключать P и Q, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}=0 \quad , \qquad \frac{\partial^2 Q}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial y^2}=0 \quad .$$

Обратимся к правилам дифференцирования комплексной функции. Понятия предела, непрерывности и производной функции комплексной переменной $f(z)$ определяются формально так же, как и для функции действительной переменной. Учитывая, что $z=x+iy$, имеем

$$\partial z/\partial x=1 \quad , \qquad \partial z/\partial y=i \quad .$$

В таком случае справедливы соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{df}{dz} \quad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{df}{dz}\frac{\partial z}{\partial y}=i\,\frac{df}{dz} \quad ,$$

используя которые можно получить

$$\frac{df}{dz}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}-i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad , \qquad \frac{df}{d\bar{z}}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}+i\,\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad .$$

Некоторые другие понятия и зависимости теории функций комплексных переменных будут использоваться в последующем изложении по мере необходимости.

1.2. Комплексное представление плоской задачи

Решение плоской задачи теории упругости сводится к определению функции напряжений $U(x, y)$, удовлетворяющей бигармоническому уравнению $\nabla^2\nabla^2 U=0$ (при отсутствии объемных сил) и заданным граничным условиям на контуре области S, занятой телом. Область S будем считать односвязной до тех пор, пока иное не будет оговорено особо.

1.2.1. Комплексное представление функции напряжений

Рассматривая бигармоническое уравнение $\nabla^2\nabla^2 U = 0$, можем утверждать, что гармоническая функция $P = \nabla^2 U$ является решением этого уравнения. Пользуясь соотношениями Коши – Римана, можем подобрать гармоническую функцию Q, сопряженную с функцией P, и составить функцию комплексной переменной $f(z) = P + iQ$, аналитическую в области S, занятой телом. Поскольку гармоническая функция Q определяется соотношениями Коши – Римана с точностью до постоянной, функция $f(z)$ будет определена с точностью до мнимой постоянной.

Интеграл от функции $f(z)$ также будет аналитической функцией:

$$\varphi(z) = \frac{1}{4}\int f(z)dz = p + iq \quad .$$

Дифференцируя функцию $\varphi(z)$ по переменной z и учитывая, что производная по z равна производной по x, получим

$$\varphi'(z) = \frac{\partial p}{\partial x} + i\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{1}{4}(P + iQ) \quad ,$$

откуда, принимая во внимание соотношения Коши – Римана, будем иметь

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial q}{\partial y} = \frac{P}{4} \quad , \qquad \frac{\partial p}{\partial y} = -\frac{\partial q}{\partial x} = -\frac{Q}{4} \quad .$$

Учитывая, что функции p и q являются гармоническими, применение оператора Лапласа к функции $xp + yq$ позволяет получить

$$\nabla^2(xp + yq) = 2\frac{\partial p}{\partial x} + 2\frac{\partial q}{\partial y} = P \quad .$$

Принимая во внимание соотношение $P = \nabla^2 U$, введем в рассмотрение новую гармоническую функцию

$$p_1 = U - xp - yq$$

и представим функцию напряжений в виде:

$$U = p_1 + xp + yq \quad .$$

Будем считать гармоническую функцию p_1 действительной частью комплексной функции $\chi(z)$ и, используя соотношения Коши – Римана, подберем мнимую часть в виде гармонической функции q_1, сопряженной с функцией p_1. Функция комплексной переменной $\chi(z) = p_1 + iq_1$ будет аналитической в области S, занятой телом.

С учетом введенной функции $\chi(z)$ функцию напряжений U можем представить в виде:

$$U = \mathrm{Re}\left[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)\right] \quad .$$

Далее, используя представление о сопряженных комплексных функциях, окончательно получим:

$$2U = \bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)} \quad . \qquad (1.1)$$

Представленное соотношение для функции напряжений U является искомым, однако в дальнейшем чаще придется пользоваться не этим соотношением, а частными производными функции напряжений, поскольку именно они имеют физическое значение.

Легко получить, что

$$2\frac{\partial U}{\partial x}=\varphi(z)+\bar{z}\varphi'(z)+\overline{\varphi(z)}+z\overline{\varphi'(z)}+\chi'(z)+\overline{\chi'(z)} \quad ,$$

$$2\frac{\partial U}{\partial y}=i\left[-\varphi(z)+\bar{z}\varphi'(z)+\overline{\varphi(z)}-z\overline{\varphi'(z)}+\chi'(z)-\overline{\chi'(z)}\right] \quad .$$

Рассмотрение полученных формул показывает, что вместо производных $\partial U/\partial x$ и $\partial U/\partial y$ удобнее использовать их комплексную комбинацию

$$f(x,y)=\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)} \quad ,$$

где $\psi(z)=\chi'(z)$.

Возвращаясь к соотношению (1.1) для функции напряжений U, заметим, что справедливо и обратное утверждение: любое соотношение типа (1.1) является бигармонической функцией, если функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ – аналитические комплексные функции.

1.2.2. Комплексное представление перемещений

Для определения перемещений воспользуемся уравнениями линейного физического закона, представляя напряжения через функцию напряжений U:

$$\sigma_x=\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}=\lambda\vartheta+2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \quad ,$$

$$\sigma_y=\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}=\lambda\vartheta+2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \quad ,$$

$$\tau_{xy}=-\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \quad ,$$

где $\vartheta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z}$.

Решая первые два уравнения относительно производных $\partial u / \partial x$ и $\partial v / \partial y$, будем иметь:

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \nabla^2 U \ ,$$

$$2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \nabla^2 U \ .$$

Используя введенное ранее обозначение $P = \nabla^2 U$ и учитывая, что $P / 4 = \partial p / \partial x = \partial q / \partial y$, представим вторые производные функции напряжений U в форме:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = P - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 4 \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \ ,$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = P - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 4 \frac{\partial q}{\partial y} - \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \ .$$

Полученные зависимости позволяют переписать соотношения, определяющие производные перемещений $\partial u / \partial x$ и $\partial v / \partial y$, в следующем виде:

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x} = 4 \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \cdot 4 \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \ ,$$

$$2\mu \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \cdot \frac{\partial q}{\partial y} \ .$$

Интегрируя, будем иметь:

$$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \cdot p + f_1(y) \quad ,$$

$$2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \cdot q + f_2(x) \quad .$$

Функции интегрирования $f_1(y)$ и $f_2(x)$ определим, подставляя найденные значения перемещений в третье уравнение линейного физического закона и учитывая, что в силу условий Коши – Римана $(\partial p / \partial y) + (\partial q / \partial x) = 0$. Будем иметь

$$f_1'(y) + f_2'(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1'(y) = -f_2'(x) = C \ ,$$

где C – действительная постоянная. В этом случае

$$f_1(y) = Cy + C_1 \quad , \qquad f_2(x) = -Cx + C_2 \quad ,$$

но эти две функции не вызывают деформаций (представляют жесткое перемещение тела) и могут быть отброшены.

Окончательно, для определения перемещений имеем:

$$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \cdot p \quad ,$$

$$2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \cdot q \quad ,$$

или, переходя к записи в комплексной форме,

$$2\mu(u + iv) = -\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\,\frac{\partial U}{\partial y}\right) + \frac{2(\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}\,\varphi(z) \quad .$$

Используя теперь полученную ранее комплексную комбинацию производных функции напряжений $\partial U / \partial x$ и $\partial U / \partial y$, будем иметь:

$$2\mu(u+iv) = -\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\varphi(z) = \\ = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} \quad , \tag{1.2}$$

где $\kappa = \dfrac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu} = 3-4\nu$ для случая плоской деформации. В случае плоского напряженного состояния постоянная κ должна быть заменена на постоянную $\kappa^* = \dfrac{\lambda^*+3\mu}{\lambda^*+\mu} = \dfrac{3-\nu}{1+\nu}$ $\left(\lambda^* = \dfrac{2\lambda\mu}{\lambda+2\mu}\right)$.

1.2.3. Комплексное представление напряжений

Комплексное представление напряжений будем строить, используя соотношения, определяющие составляющие полного напряжения на произвольной площадке с внешней нормалью $\vec{n}(l,m,n)$:

$$X_n = \sigma_x l + \tau_{xy} m \quad ,$$

$$Y_n = \tau_{xy} l + \sigma_y m \quad .$$

Перепишем представленные соотношения, подставляя вместо напряжений их значения через функцию напряжений U и учитывая, что $l = dy/ds$, $m = -dx/ds$. Будем иметь

$$X_n = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\cdot\frac{dy}{ds} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cdot\left(-\frac{dx}{ds}\right) \quad \Rightarrow \quad X_n = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) \quad ,$$

$$Y_n = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cdot\left(-\frac{dx}{ds}\right) - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cdot\frac{dy}{ds} \quad \Rightarrow \quad Y_n = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) \quad ,$$

или, переходя к записи в комплексной форме,

$$X_n + iY_n = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - i\,\frac{\partial U}{\partial x}\right) \quad \Rightarrow \quad X_n + iY_n = -i\,\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\,\frac{\partial U}{\partial y}\right) .$$

Используя комплексную комбинацию производных функции напряжений $\partial U / \partial x$ и $\partial U / \partial y$, будем иметь:

$$X_n + iY_n = -i\,\frac{d}{ds}\left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}\right] .$$

Перепишем полученное соотношение в несколько иной форме

$$ds \cdot \left(X_n + iY_n\right) = -i \cdot d\left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}\right]$$

и дадим элементу ds направление dy. В этом случае

$$ds = dy \;,\quad dz = idy \;,\quad d\bar{z} = -idy \;,\quad X_n = \sigma_x \;,\quad Y_n = \tau_{xy}$$

и соотношение, определяющее комплексное представление составляющих полного напряжения на произвольной площадке, принимает вид:

$$\sigma_x + i\tau_{xy} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} - z\,\overline{\varphi''(z)} - \overline{\psi'(z)} .$$

Придадим теперь элементу ds направление dx. В этом случае

$$ds = dx \;,\quad dz = d\bar{z} = idx \;,\quad X_n = -\tau_{xy} \;,\quad Y_n = -\sigma_y .$$

Соответственно, имеем

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)} + z\,\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)} .$$

Полученные два соотношения определяют искомое комплексное представление напряжений, но их можно заменить более простыми. Действительно, складывая их и вычитая, будем иметь:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] ,$$
$$\sigma_y - \sigma_x - 2i\tau_{xy} = 2\left[z\,\overline{\varphi''(z)} + \overline{\psi'(z)}\right] .$$

Если заменить во втором уравнении i на $-i$, получим:

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\bar{z}\,\varphi''(z) + \psi'(z)\right] .$$

С введением новых обозначений $\varphi'(z) = \Phi(z)$, $\psi'(z) = \Psi(z)$, окончательно будем иметь:

$$\begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) \ , \\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} &= 2\left[\bar{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)\right] \ . \end{aligned} \qquad (1.3)$$

1.2.4. Комплексное представление нагрузки, приложенной к контуру

Составляющие $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ внешней нагрузки, приложенной к контуру тела, на произвольной площадке с нормалью $\vec{n}(l, m, n)$ при положительном направлении обхода контура, когда область, занятая телом, остается слева, представляются известными соотношениями (см. раздел 1.2.3.):

$$\overline{X} = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) , \qquad \overline{Y} = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right) .$$

Соответственно, проекции главного вектора X и Y нагрузки, приложенной на участке AB контура тела, запишем в следующем виде:

$$X = \left[\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B , \qquad Y = \left[-\frac{\partial U}{\partial x}\right]_A^B ,$$

где символ $[\ ]_A^B$ обозначает приращение функции, заключенной в скобки, при перемещении по участку контура AB из точки A в точку B.

Переходя к записи главного вектора в комплексной форме, получим:

$$X + iY = \left[\frac{\partial U}{\partial y} - i\,\frac{\partial U}{\partial x} \right]_A^B \quad \Rightarrow \quad X + iY = -i \left[\frac{\partial U}{\partial x} + i\,\frac{\partial U}{\partial y} \right]_A^B \quad .$$

Используя комплексную комбинацию производных функции напряжений $\partial U / \partial x$ и $\partial U / \partial y$, будем иметь:

$$X + iY = -i \left[\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} \right]_A^B \quad . \tag{1.4, а}$$

Аналогичная формула, определяющая главный момент нагрузки, приложенной на участке AB контура тела, относительно начала координат, имеет вид:

$$M = \mathrm{Re} \left[\chi(z) - z\,\psi(z) - z\bar{z}\,\varphi'(z) \right]_A^B \quad . \tag{1.4, б}$$

Поскольку рассматриваемая область S, занятая телом, односвязная, аналитические комплексные функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, $\chi(z)$ однозначны в этой области. Поэтому, если точка B совпадает с точкой A, как и следует ожидать, будем иметь:

$$X = Y = M = 0 \quad .$$

Полученный результат подтверждает тот факт, что совокупность внешних нагрузок, действующих на контуре области S, для находящегося в равновесии тела всегда статически эквивалентна нулю.

1.2.5. Комплексное представление перемещений и напряжений в полярных координатах

Во многих случаях решение плоской задачи проще строить в полярной системе координат r, θ, представляя комплексную переменную в виде: $z = x + iy = re^{i\theta}$ ($\bar{z} = re^{-i\theta}$). Проекции полного перемещения произвольной точки на направления r, θ обозначим соответственно через v_r и v_θ.

Введенные компоненты перемещения v_r и v_θ легко связать с компонентами перемещения этой же точки u, v в прямоугольных координатах x, y:

$$u = v_r \cos\theta - v_\theta \sin\theta \quad ,$$
$$v = v_r \sin\theta + v_\theta \cos\theta \quad .$$

Переходя к записи полученных соотношений в комплексной форме, после некоторых простых преобразований получим:

$$u + iv = \left(v_r + iv_\theta\right)e^{i\theta} \quad \Rightarrow \quad v_r + iv_\theta = \left(u + iv\right)e^{-i\theta} \quad .$$

Используя комплексную комбинацию перемещений u, v в форме полученной ранее зависимости (1.2), будем иметь:

$$2\mu(v_r + iv_\theta) = e^{-i\theta}\left[\kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}\right] \quad .$$

Полученное соотношение определяет компоненты перемещения v_r и v_θ в полярных координатах, если в правой части заменить переменную z на ее значение $re^{i\theta}$ и отделить действительную часть от мнимой.

В полярной системе координат компоненты тензора напряжений обозначим как σ_r, σ_θ, $\tau_{r\theta}$. Используя формулы преобразования компонентов тензора напряжений при замене системы координат, легко получить:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \sigma_x + \sigma_y \quad ,$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = \left(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}\right)e^{2i\theta} \quad .$$

Комплексное представление напряжений в прямоугольной системе координат определяется зависимостями (1.3). Соответственно, для напряжений в полярной системе координат будем иметь:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) \quad ,$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}\left[\bar{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)\right] \quad .$$

Вычитая из первого соотношения второе, можем получить еще одну полезную формулу:

$$\sigma_r - i\tau_{r\theta} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} - e^{2i\theta}\left[\bar{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)\right] \quad ,$$

определяющую напряжения, действующие на площадке, расположенной на дуге окружности $r = \mathrm{const}$.

1.3. Степень определенности введенных комплексных функций

1.3.1. Односвязная область

Комплексное представление перемещений (1.2) и напряжений (1.3) показывает, что при заданных аналитических комплексных функциях $\Phi(z)$, $\Psi(z)$, $\varphi(z)$, $\psi(z)$ перемещения точек тела и напряжения в каждой его точке определены однозначно. Напомним, что область S, занятую телом, считаем односвязной.

Перейдем к рассмотрению вопроса о том, насколько определены комплексные функции Φ, Ψ, φ, ψ заданием напряженного состояния или же заданием перемещений точек тела.

Пусть ***заданное напряженное состояние*** определяется набором комплексных функций Φ, Ψ, φ, ψ:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) \ ,$$
$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\bar{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)\right] \ ,$$
$$\varphi(z) = \int \Phi(z)dz \ , \quad \psi(z) = \int \Psi(z)dz \ .$$

Предположим, что имеет место другой набор комплексных функций Φ_1, Ψ_1, φ_1, ψ_1, определяющих это же напряженное состояние:

$$\sigma_x + \sigma_y = 2\left[\Phi_1(z) + \overline{\Phi_1(z)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi_1(z) \ ,$$
$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\bar{z}\,\Phi_1'(z) + \Psi_1(z)\right] \ ,$$
$$\varphi_1(z) = \int \Phi_1(z)dz \ , \quad \psi_1(z) = \int \Psi_1(z)dz \ .$$

Из рассмотрения первых уравнений, определяющих напряженное состояние, легко видеть, что функции Φ_1 и Φ имеют одинаковые действительные части, значит, сами функции могут отличаться только мнимой постоянной iC:

$$\Phi_1(z) = \Phi(z) + iC \ .$$

Учитывая, что $\Phi_1'(z) = \Phi'(z)$, из сравнения вторых уравнений сразу следует:

$$\Psi_1(z) = \Psi(z) \ .$$

Соответственно, для функций $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ будем иметь:

$$\varphi_1(z) = \varphi(z) + iCz + \gamma \ ,$$
$$\psi_1(z) = \psi(z) + \gamma' \ ,$$

где γ и γ' – произвольные комплексные постоянные.

Таким образом, при заданном напряженном состоянии функция $\Psi(z)$ определена полностью, функция $\Phi(z)$ – с точностью до слагаемого iC, функция $\varphi(z)$ – с точностью до слагаемого $iCz+\gamma$ и функция $\psi(z)$ – с точностью до слагаемого γ'. Этим самым утверждается, что все три постоянные C, γ и γ' могут быть заданы произвольно.

С другой стороны, очевидно, что напряженное состояние не изменится, если

– функцию $\varphi(z)$ заменить на функцию $\varphi(z)+iCz+\gamma$;

– функцию $\psi(z)$ заменить на функцию $\psi(z)+\gamma'$.

При этом функция $\Phi(z)=\varphi'(z)$ заменяется на $\Phi(z)+iC$, а функция $\Psi(z)$ остается без изменения.

Задание перемещений точек тела вполне определяет компоненты напряженного состояния. Ясно, что при ***заданных перемещениях*** замены комплексных функций можно проводить только по типу рассмотренных выше. Посмотрим, как влияют такие замены на компоненты перемещений, определяемых комплексным соотношением (1.2):

$$2\mu(u+iv)=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)} \quad .$$

Непосредственная замена функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ на функции $\varphi_1(z)$ и $\psi_1(z)$ позволяет получить

$$2\mu(u_1+iv_1)=2\mu(u+iv)+(\kappa+1)Ciz+\kappa\gamma-\gamma' \quad ,$$

откуда следует, что проведенная замена комплексных функций без изменения значений перемещений возможна только в том случае, если

$$C=0 \quad , \quad \kappa\gamma-\gamma'=0 \quad .$$

Следовательно, при заданных перемещениях можно произвольно распорядиться только одной из комплексных постоянных γ, γ'.

Этот же результат можно получить, полагая $\gamma = \alpha + i\beta$, $\gamma' = \alpha' + i\beta'$ и записывая перемещения u_1 и v_1 через u и v. Будем иметь

$$u_1 = u + u_0 \ , \qquad v_1 = v + v_0 \ ,$$

где

$$u_0 = -\frac{(\kappa+1)C}{2\mu} y + \frac{\kappa\alpha - \alpha'}{2\mu} \quad , \quad v_0 = \frac{(\kappa+1)C}{2\mu} x + \frac{\kappa\beta + \beta'}{2\mu} \quad .$$

Видно, что слагаемые u_0 и v_0 определяют жесткое перемещение тела как целого, и, соответственно, эти слагаемые должны быть приравнены к нулю, что и приводит к уже известному результату.

Возможность произвольного выбора постоянных позволяет принимать их, например, равными нулю или обеспечивать соблюдение некоторых условий для рассматриваемых комплексных функций.

Так, при ***заданных напряжениях*** постоянные C, γ и γ' можем выбрать так, чтобы

$$\varphi(0) = 0 \ , \ \text{мнимая часть } \varphi'(0) = 0 \ , \quad \psi(0) = 0 \ .$$

При ***заданных перемещениях*** подходящим выбором постоянной γ или γ' можно обеспечить

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{или} \quad \psi(0) = 0 \ .$$

1.3.2. Конечная многосвязная область

Будем считать, что область S, занятая телом, ограничена несколькими простыми замкнутыми контурами L_1, L_2, . . . , L_m, L_{m+1}, из которых последний охватывает все предыдущие; предполагается, что контуры не имеют общих точек.

Напомним, что по определению напряжения и перемещения должны быть однозначными функциями, однако введенные в рассмотрение комплексные функции в случае многосвязной области могут оказаться многозначными.

Рассмотрим, какие условия необходимо выполнить и в каком виде нужно выбрать комплексные функции, чтобы сохранить однозначность напряжений и перемещений.

Прежде всего, формула $\sigma_x + \sigma_y = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z)$ показывает, что действительная часть функции $\Phi(z)$ должна быть однозначна. Однако ее мнимая часть при однократном обходе какого-либо замкнутого контура L'_k ($k = 1, 2, \ldots, m$), охватывающего один из контуров L_k (или при обходе самого контура L_k, поскольку L'_k стягивается к L_k), может испытать приращение вида $iB_k = i \cdot 2\pi A_k$, где B_k (A_k) – действительная постоянная.

Введем в рассмотрение новую функцию

$$\Phi^*(z) = \Phi(z) - \sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) \quad ,$$

где z_k – произвольно выбранная точка внутри контура L_k (вне контура S). Функция $\ln(z - z_k)$ при обходе против часовой стрелки вокруг контура L_k получает приращение $2\pi i$. Действительно, $\ln z = \ln re^{i\theta} = \ln r + \ln e^{i\theta} = \ln r + i\theta$, и при обходе контура по положительному направлению угла θ (против часовой стрелки) получаем приращение θ, равное 2π. Соответственно, функция $A_k \ln(z - z_k)$ прирастет на величину $2\pi i\, A_k$, а остальные слагаемые под знаком суммы вернутся к своим прежним значениям.

Итак, имеем

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) + \Phi^*(z) \quad ,$$

где функция $\Phi^*(z)$ является аналитической и, следовательно, однозначной в области S.

Для комплексной функции $\varphi(z)$ получаем:

$$\varphi(z) = \int_{z_0}^{z} \Phi(z)dz + \text{const} = \sum_{k=1}^{m} A_k\left[(z - z_k)\ln(z - z_k) - (z - z_k)\right] +$$
$$+ \int_{z_0}^{z} \Phi^*(z)dz + \text{const} \ ,$$

где z_0 – произвольная постоянная точка в области S. Интеграл $\int_{z_0}^{z} \Phi^*(z)dz$ представляет собой функцию комплексной переменной z, которая при обходе внутреннего контура L_k может получить приращение типа $2\pi i c_k$, где c_k – постоянная (в общем случае комплексная; множитель $2\pi i$ введен для удобства). Следовательно, аналогично предыдущему рассмотрению можно принять

$$\int_{z_0}^{z} \Phi^*(z)dz = \sum_{k=1}^{m} c_k \ln(z - z_k) + \text{однозначная функция.}$$

Подставляя полученное соотношение в формулу для $\varphi(z)$ и группируя вместе слагаемые типа $A_k z_k \ln(z - z_k)$ и $c_k \ln(z - z_k)$, получим:

$$\varphi(z) = z\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln(z - z_k) + \varphi^*(z) \ ,$$

где $\varphi^*(z)$ – функция, аналитическая в области S; γ_k – некоторые комплексные постоянные.

Рассматривая вторую из формул (1.3), определяющих напряженное состояние, а именно

$$\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 2\left[\bar{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)\right] ,$$

убеждаемся, что функция $\Psi(z)$ – аналитическая (однозначная) функция. Соответственно, для функции $\psi(z) = \int \Psi(z)dz$ имеем:

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{m} \gamma'_k \ln(z - z_k) + \psi^*(z) ,$$

где $\psi^*(z)$ – функция, аналитическая в области S; γ'_k – некоторые комплексные постоянные.

Дополнительно введем в рассмотрение комплексную функцию $\chi(z) = \int \psi(z)dz$. По аналогии с предыдущим будем иметь:

$$\chi(z) = z\sum_{k=1}^{m} \gamma'_k \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} \gamma''_k \ln(z - z_k) + \chi^*(z) .$$

Посмотрим, какие требования к комплексным функциям должны быть добавлены, чтобы однозначными оставались и перемещения. Комплексное представление перемещений имеет вид (1.2):

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)} .$$

Подставим в приведенную формулу найденные выше соотношения для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Будем иметь:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\left[z\sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) + \sum_{k=1}^{m} \gamma_k \ln(z - z_k) + \varphi^*(z)\right] -$$

$$- z\left[\sum_{k=1}^{m} A_k \overline{\ln(z - z_k)} + \overline{\varphi^{*\prime}(z)}\right] - \sum_{k=1}^{m} \gamma'_k \overline{\ln(z - z_k)} - \overline{\psi^*(z)} .$$

При обходе контура L_k против часовой стрелки функция $2\mu(u+iv)$ получит следующее приращение:

$$2\mu\left[u+iv\right]_{L_k}=2\pi i\left[\left(\kappa+1\right)A_k z+\kappa\gamma_k+\overline{\gamma'_k}\right] \ .$$

Следовательно, для однозначности перемещений необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:

$$A_k=0 \ , \quad \kappa\gamma_k+\overline{\gamma'_k}=0 \quad (k=1,2,\ldots,m) \ .$$

Покажем, что комплексные постоянные γ_k и γ'_k могут быть представлены через компоненты главного вектора X_k, Y_k внешних усилий, приложенных к контуру L_k ($k=1,2,\ldots,m$).

Представление главного вектора нагрузки, приложенной к контуру L_k, в комплексной форме имеет вид (1.4, а):

$$X_k+iY_k=-i\left[\varphi\left(z\right)+z\overline{\varphi'\left(z\right)}+\overline{\psi\left(z\right)}\right]_{L_k} \ ,$$

где на этот раз контур L_k должен обходиться в направлении часовой стрелки (при положительном обходе область, занятая телом, остается слева). Принимая во внимание данное обстоятельство, будем иметь:

$$X_k+iY_k=-2\pi\left(\gamma_k-\overline{\gamma'_k}\right) \ .$$

Решение двух уравнений относительно комплексных постоянных γ_k и γ'_k позволяет получить:

$$\gamma_k=-\frac{X_k+iY_k}{2\pi\left(1+\kappa\right)} \ , \quad \gamma'_k=\frac{\kappa(X_k-iY_k)}{2\pi\left(1+\kappa\right)} \ .$$

Окончательно комплексные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ будут иметь вид:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k + iY_k)\ln(z - z_k) + \varphi^*(z) \ ,$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa}{2\pi(1+\kappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k - iY_k)\ln(z - z_k) + \psi^*(z) \ .$$

1.3.3. Бесконечная многосвязная область

Бесконечную многосвязную область можно представить как предельный случай конечной многосвязной области, когда контур L_{m+1} целиком уходит в бесконечность. Граница такой области состоит из одного или нескольких контуров L_1, L_2, . . . , L_m.

Очевидно, что все соотношения, определяющие комплексные функции, полученные в разделе 1.3.2, остаются справедливыми для любой конечной области S. Остается изучить поведение рассматриваемых функций в окрестности бесконечно удаленной точки плоскости.

Опишем из начала координат, как из центра, окружность L_R радиуса R так, чтобы все контуры L_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) находились внутри L_R.

Для всякой точки z, находящейся вне L_R, будем иметь $|z| > |z_k|$. Представим функцию $\ln(z - z_k)$ в следующем виде:

$$\ln(z - z_k) = \ln z + \ln\left(1 - \frac{z_k}{z}\right) = \ln z -$$

$$-\frac{z_k}{z} - \frac{1}{2}\left(\frac{z_k}{z}\right)^2 - \frac{1}{3}\left(\frac{z_k}{z}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{z_k}{z}\right)^4 - \ . \ . \ . = \ln z + \zeta(z) \ ,$$

где $\zeta(z)$ – комплексная функция, аналитическая (голоморфная) вне

L_R (по определению, имеющему место в теории функций комплексной переменной).

Преобразуем формулы для комплексных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, полученные в разделе 1.3.2, для точек z, находящихся вне L_R (для больших $|z|$) с учетом полученного представления функции $\ln(z-z_k)$. Будем иметь:

$$\varphi(z)=-\frac{1}{2\pi(1+\kappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k+iY_k)[\ln z+\zeta(z)]+\varphi^*(z) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \varphi(z)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\ln z+\varphi^{**}(z) \ ,$$

$$\psi(z)=\frac{\kappa}{2\pi(1+\kappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k-iY_k)[\ln z+\zeta(z)]+\psi^*(z) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \psi(z)=\frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)}\ln z+\psi^{**}(z) \ ,$$

где $X=\sum\limits_{k=1}^{m}X_k$ и $Y=\sum\limits_{k=1}^{m}Y_k$ – составляющие главного вектора всех внешних усилий, приложенных к границе области S (к совокупности контуров L_1, L_2, . . . , L_m); $\varphi^{**}(z)$ и $\psi^{**}(z)$ – комплексные функции, аналитические (голоморфные) вне L_R.

Согласно теореме Лорана[1] функции $\varphi^{**}(z)$ и $\psi^{**}(z)$ можно разложить в ряд вне окружности L_R:

---

[1] Если функция $f(z)$ голоморфна внутри кругового кольца, ограниченного концентрическими окружностями L_1 и L_2, то в этой области она разлагается в ряд вида $f(z)=\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}a_k z^k$. В рассматриваемом случае роль L_1 исполняет L_R, а роль L_2 – бесконечно большая окружность.

$$\varphi^{**}(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n \ , \qquad \psi^{**}(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty} a'_n z^n \ .$$

Приведенными рассуждениями комплексные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ полностью определены в окрестности бесконечно удаленной точки плоскости. Однако, поскольку эти функции предназначены для описания напряжений и перемещений, необходимо добавить условия ограниченности этих величин на бесконечности: напряжения и перемещения должны принимать конечные значения в бесконечно удаленных частях плоскости.

Рассмотрим, каковы должны быть комплексные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ при соблюдении условия об ***ограниченности напряжений*** во всей рассматриваемой области S.

Формулы для комплексного представления напряжений в общем случае имеют вид (1.3):

$$\sigma_x+\sigma_y=2\left[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\right]=2\left[\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}\right] ,$$
$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\left[\bar{z}\,\Phi'(z)+\Psi(z)\right]=2\left[\bar{z}\,\varphi''(z)+\psi'(z)\right] .$$

Подставляя полученные соотношения для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в первое уравнение, получим:

$$\sigma_x+\sigma_y=2\left\{-\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\cdot\frac{1}{z}-\frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)}\cdot\frac{1}{\bar{z}}+\sum_{-\infty}^{+\infty} n\left(a_n z^{n-1}+\bar{a}_n\bar{z}^{\,n-1}\right)\right\} .$$

Неограниченное возрастание суммы напряжений $\sigma_x+\sigma_y$ вместе с ростом $|z|$ связано с членами ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty} n\left(a_n z^{n-1}+\bar{a}_n\bar{z}^{\,n-1}\right)=\sum_{n=2}^{\infty} n r^{n-1}\left(a_n e^{i(n-1)\theta}+\bar{a}_n e^{-i(n-1)\theta}\right) .$$

Очевидно, что для обеспечения ограниченности суммы $\sigma_x + \sigma_y$ нужно принять

$$a_n = \overline{a}_n = 0 \quad \text{при} \quad n \ge 2 \;.$$

Подобным образом можно убедиться, что для обеспечения ограниченности комбинации напряжений $\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}$ необходимо и достаточно, чтобы оставался ограниченным ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} n r^{n-1} a'_n e^{\,i(n-1)\theta} \;,$$

откуда следует

$$a'_n = 0 \quad \text{при} \quad n \ge 2 \;.$$

Таким образом, с учетом введенного условия об ***ограниченности напряжений*** во всей рассматриваемой области S, комплексные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ принимают вид:

$$\varphi(z) = -\frac{X + iY}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \Gamma z + \varphi_0(z) \;,$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa(X - iY)}{2\pi(1+\kappa)} \ln z + \Gamma' z + \psi_0(z) \;,$$

где $\Gamma = B + iC$, $\Gamma' = B' + iC'$ – комплексные постоянные; $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ – функции, голоморфные вне окружности L_R, представляемые при достаточно больших значениях $|z|$ разложениями вида[1]

[1] Поменяли ряд $\sum\limits_{-\infty}^{+\infty} a_n z^n$ на ряд $\sum\limits_{-1}^{\infty} a_n \left(1/z^n\right)$ и выделили отдельно слагаемое $a_{-1} z \equiv \Gamma z$.

$$\varphi_0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots \quad , \qquad \psi_0(z) = a'_0 + \frac{a'_1}{z} + \frac{a'_2}{z^2} + \ldots$$

Поскольку при заданном напряженном состоянии можем произвольно распоряжаться некоторыми постоянными, входящими в функции φ и ψ (раздел 1.3.1), можем принять

$$C = 0 \ ;$$

$$a_0 = a'_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad \varphi_0(\infty) = \psi_0(\infty) = 0 \ .$$

Действительные постоянные B, B' и C', входящие в соотношения для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ посредством комплексных постоянных Γ и Γ', имеют простой физический смысл. Действительно, рассматривая поведение напряжений на бесконечности, будем иметь:

$$\lim_{|z| \to \infty} \left(\sigma_x + \sigma_y\right) = 2\left(\Gamma + \overline{\Gamma}\right) = 4 \operatorname{Re} \Gamma = 4B \ ,$$

$$\lim_{|z| \to \infty} \left(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}\right) = 2\Gamma' = 2\left(B' + iC'\right) \ .$$

Решение представленных уравнений относительно напряжений в бесконечно удаленных точках плоскости позволяет записать:

$$\sigma_x^\infty = 2B - B' \ , \quad \sigma_y^\infty = 2B + B' \ , \quad \tau_{xy}^\infty = C' \ .$$

Полученные соотношения показывают, что на бесконечности имеет место равномерное распределение напряжений, вернее, распределение, бесконечно мало отличающееся от равномерного. Если принять, что N_1 и N_2 – значения главных напряжений на бесконечности, а α – угол, который главная ось 1 составляет с осью x, то, воспользовавшись формулами перехода компонентов тензора напряжений при замене прямоугольной системы координат[1], можно получить:

$$\sigma_x^\infty + \sigma_y^\infty = N_1 + N_2 \quad ,$$

$$\sigma_y^\infty - \sigma_x^\infty + 2i\tau_{xy}^\infty = -\left(N_1 - N_2\right)e^{-2i\alpha} \quad .$$

Переходя к постоянным B, B' и C', будем иметь:

$$\operatorname{Re}\Gamma = B = \frac{1}{4}\left(N_1 + N_2\right) \quad ,$$

$$\Gamma' = B' + iC' = -\frac{1}{2}\left(N_1 - N_2\right)e^{-2i\alpha} \quad .$$

Перейдем теперь к рассмотрению требования об ***ограниченности перемещений*** во всей рассматриваемой области S. Напомним, что в общем случае комплексное представление перемещений имеет вид (1.2):

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi\left(z\right) - z\overline{\varphi'\left(z\right)} - \overline{\psi\left(z\right)} \quad .$$

Подставляя имеющиеся соотношения для функций $\varphi\left(z\right)$ и $\psi\left(z\right)$, получим:

$$2\mu(u + iv) = -\frac{\kappa\left(X + iY\right)}{2\pi\left(1 + \kappa\right)}\ln(z\bar{z}) + \left(\kappa\Gamma - \overline{\Gamma}'\right)z - \overline{\Gamma}'\bar{z} + \ldots \quad ,$$

где многоточие определяет слагаемые, остающиеся ограниченными при сколь угодно больших значениях $\left|z\right|$. Можно видеть, что пере-

[1] При переходе в плоскости от одной прямоугольной системы координат (xy) к другой ($x'y'$) имеем:

$$\sigma_{x'} + \sigma_{y'} = \sigma_x + \sigma_y \quad , \quad \sigma_{y'} - \sigma_{x'} + 2i\tau_{x'y'} = \left(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}\right)e^{2i\alpha} \quad .$$

мещение на бесконечности будет ограничено, если главный вектор всех внешних усилий, приложенных к границе области S (к совокупности контуров L_1, $L_2, \ldots,$ L_m) и напряжения на бесконечности равны нулю. Если напряжения на бесконечности равны нулю, а главный вектор внешних усилий отличен от нуля, то перемещения на бесконечности возрастают как $\ln(z\bar{z}) = 2\ln r$.

1.4. Приведение основных граничных задач к задачам теории функций комплексных переменных

Под основными граничными задачами плоской теории упругости будем понимать те же граничные задачи, которые сформулированы ранее для трехмерного случая.

Первая основная граничная задача. Определить упругое равновесие тела при заданных внешних силах, приложенных к границе L области S.

Вторая основная граничная задача. Определить упругое равновесие тела при заданных перемещениях точек границы L области S.

Третья основная граничная задача. Определить упругое равновесие тела, когда на одной части границы L области S заданны внешние силы, а на другой – перемещения точек.

Комплексное представление перемещений (1.2) и напряжений (1.3) показывает, что при известных аналитических комплексных функциях $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ упругое равновесие тела определено однозначно. Соответственно, сформулированные граничные задачи должны быть сведены к отысканию этих функций по определенным условиям на границе L области S, отвечающим той или иной граничной задаче.

Точки границы L области S будем обозначать через переменную $t = x + iy$, где x и y – координаты рассматриваемой точки границы.

Под областью S, как и ранее, понимаем область, занятую телом, а под границей L – либо совокупность контуров L_1, $L_2, \ldots,$ L_m,

L_{m+1}, если область конечна, либо совокупность контуров L_1, L_2, . . . , L_m, если область бесконечна.

Если область S бесконечна, для первой основной граничной задачи будем считать заданными значения напряжений на бесконечности, что сводится к заданию постоянных

$$\operatorname{Re}\Gamma = B \ , \qquad \Gamma' = B' + iC' \ .$$

Постоянная C не влияет на распределение напряжений, и в дальнейшем она принимается равной нулю.

В дальнейшем будем рассматривать только первую основную граничную задачу.

1.4.1. Односвязная конечная область

Пусть $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ – заданные значения составляющих внешней нагрузки, приложенной к контуру тела, на произвольной площадке с нормалью $\vec{n}\left(l, m, n\right)$. Проекции главного вектора X и Y нагрузки, приложенной на участке AB контура тела, представим (раздел 1.2.4) в следующем виде:

$$X + iY = \int\limits_{AB} \left(\overline{X} + i\overline{Y}\right) ds = -i\left[\varphi\left(t\right) + t\,\overline{\varphi'\left(t\right)} + \overline{\psi\left(t\right)}\right]_A^B \ ,$$

где символ $\left[\ \right]_A^B$, как и раньше, обозначает приращение функции, заключенной в скобки, при перемещении по участку контура AB из точки A в точку B в положительном направлении, когда область, занятая телом, остается слева.

Если считать точку A фиксированной, а точку B – переменной, представленное соотношение можно переписать в виде граничного условия:

$$\varphi\left(t\right) + t\,\overline{\varphi'\left(t\right)} + \overline{\psi\left(t\right)} = f_1 + if_2 + \text{const} \ .$$

Здесь постоянная определяет значение левой части соотношения в точке A, а комбинация $f_1 + if_2$ имеет вид:

$$f_1 + if_2 = f_1(t) + if_2(t) = f_1(s) + if_2(s) =$$
$$= i\int_{t_0}^{t}\left(\overline{X} + i\overline{Y}\right)ds = i\int_{0}^{s}\left(\overline{X} + i\overline{Y}\right)ds \; .$$

Функции f_1 и f_2 являются заданными на контуре L, поскольку определяются через заданные значения составляющих $\overline{X}$ и $\overline{Y}$ внешней нагрузки.

Отметим, что комплексную функцию $\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)}$ следует понимать, как граничное значение функции $\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$ при стремлении точки z, расположенной внутри области S, к точке t контура L. Данное обстоятельство справедливо в силу принятого предположения о непрерывности напряжений во всей области S вплоть до контура L.

Вернемся теперь к постоянной, входящей в граничное условие. Говоря о степени определенности комплексных функций при заданных напряжениях, получили, что замена функции $\varphi(z)$ на функцию $\varphi(z) + iCz + \gamma$ и функции $\psi(z)$ на функцию $\psi(z) + \gamma'$ не меняет напряженного состояния. Легко получить, что при этом комплексная функция $\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}$ заменится на функцию $\varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)} + \gamma + \gamma'$. Отсюда следует возможность придать постоянной, входящей в граничное условие, любое фиксированное значение путем подходящего выбора суммы $\gamma + \gamma'$. Этим самым принимается, что из трех постоянных C, γ и γ' в дальнейших рассуждениях произвольно могут быть заданы уже только две: C и одна из γ, γ'.

Предыдущими рассуждениями первая основная граничная задача сведена к отысканию аналитических комплексных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ по их значениям на границе L области S. Соответствующее граничное условие было предложено Н.И. Мусхелишвили.

Рассмотрим аналогичное граничное условие, предложенное Г.В. Колосовым в несколько иной форме.

Будем считать, что на границе L области S заданы нормальная N и касательная T составляющие внешних усилий[1]. Составляющая N представляет собой проекцию внешней нагрузки на нормаль $\vec{n}$, а T – проекция той же нагрузки на касательную $\vec{t}$ к границе, направленную влево, если смотреть вдоль $\vec{n}$ (по положительному направлению обхода контура). Не останавливаясь на промежуточных преобразованиях, приведем граничное условие Г.В. Колосова в окончательном виде:

$$\Phi(t)+\overline{\Phi(t)}-e^{2i\alpha}\left[\bar{t}\,\Phi'(t)+\Psi(t)\right]=N-iT \quad \text{на} \ L \ ,$$

где α – угол, который нормаль $\vec{n}$ составляет с осью x.

Использование граничного условия в форме Колосова в ряде случаев существенно упрощает решение задачи.

1.4.2. Бесконечная область с отверстием

Для бесконечной области S, ограниченной простым замкнутым контуром L (для бесконечной области с отверстием) граничное условие запишется в том же виде, как и для конечной односвязной области:

$$\varphi(t)+t\,\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)}=f_1+if_2+\text{const} \ ,$$

где функция f_1+if_2 определяется на контуре L прежним соотношением $f_1+if_2=i\int_0^s\left(\overline{X}+i\overline{Y}\right)ds$ при прежнем условии относитель-

[1] Если внешние усилия заданы в форме составляющих $\overline{X}$ и $\overline{Y}$, то тем самым заданы N и T, и обратно.

но положительного направления обхода контура: область S должна оставаться слева. Однако, несмотря на такое математическое соответствие уравнений, рассматриваемая задача существенно отличается от предыдущей (см. раздел 1.4.1). Дело в том, что в случае конечной односвязной области функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ голоморфны (и, следовательно, однозначны) во всей области S, тогда как для бесконечной области это, вообще говоря, не имеет место. Однако полученные в разделе 1.3.3 представления функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ для бесконечной области в виде

$$\varphi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\ln z + \Gamma z + \varphi_0(z) \ ,$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)}\ln z + \Gamma' z + \psi_0(z) \ ,$$

позволяют привести граничное условие к определению голоморфных (и, следовательно, однозначных) функций $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$.

Подставим выписанные соотношения для функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в граничное условие, предварительно заменив в них переменную z на переменную t. Будем иметь:

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = f_1 + if_2 +$$

$$+\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\left(\ln t - \kappa \ln \bar{t}\right) + \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)}\frac{t}{\bar{t}} - \left(\Gamma + \Gamma'\right)t - \bar{\Gamma}'\bar{t} + \mathrm{const} \ .$$

Перепишем полученное соотношение в виде:

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = f_1^0 + if_2^0 + \mathrm{const} \ ,$$

где введено обозначение

$$f_1^0 + if_2^0 = f_1 + if_2 +$$

$$+\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\left(\ln t - \kappa \ln \bar{t}\right) + \frac{X-iY}{2\pi(1+\kappa)}\frac{t}{\bar{t}} - \left(\Gamma + \Gamma'\right)t - \overline{\Gamma}'\bar{t} \ .$$

Введенная в рассмотрение функция $f_1^0 + if_2^0$ является однозначной и непрерывной на контуре L. Действительно, если функция $f_1 + if_2$ при обходе контура получает приращение $i\left(X + iY\right) = i\int\limits_L \left(\overline{X} + i\overline{Y}\right)ds$, то точно такое же приращение, но с обратным знаком, дает слагаемое $\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\left(\ln t - \kappa \ln \bar{t}\right)$ (положительное направление обхода контура является отрицательным для угла θ). Следовательно, значение функции $f_1^0 + if_2^0$ возвращается к своему первоначальному значению.

При фиксировании постоянной, входящей в правую часть граничного условия, в дальнейших рассуждениях из трех постоянных C, γ и γ' произвольно могут быть заданы уже только две: C и одна из γ, γ'.

1.4.3. Конечная многосвязная область

Рассмотрим конечную многосвязную область S, ограниченную контурами L_1, L_2, . . . , L_m, L_{m+1}, из которых последний охватывает все предыдущие.

Комплексные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в рассматриваемом случае (раздел 1.3.2) представлены соотношениями:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{2\pi(1+\kappa)}\sum_{k=1}^{m}\left(X_k + iY_k\right)\ln\left(z - z_k\right) + \varphi^*(z) \ ,$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa}{2\pi(1+\kappa)}\sum_{k=1}^{m}(X_k - iY_k)\ln\left(z - z_k\right) + \psi^*(z) \ ,$$

где $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$ – функции, аналитические (и, следовательно, однозначные) в области S; z_k – произвольно выбранная точка внутри контура L_k; X_k, Y_k – компоненты главного вектора внешних усилий, приложенных на контуре L_k.

Граничное условие на контуре L_k ($k=1,2,\ldots,m+1$), очевидно, можно записать в виде:

$$\varphi(t)+t\overline{\varphi'(t)}+\overline{\psi(t)} = f_1+if_2+C_k \quad .$$

В приведенном соотношении C_k ($k=1,2,\ldots,m+1$) – некоторые постоянные; f_1+if_2 – функция, определенная на контуре L_k:

$$f_1+if_2 = i(X_k+iY_k) = i\int_{t_k}^{t}\left(\overline{X}_k+i\overline{Y}_k\right)ds \quad ,$$

где t_k – точка, произвольно зафиксированная на контуре L_k. Положительным направлением обхода контура, как и ранее, считается то, при котором область S остается слева.

Постоянные C_k заранее неизвестны, но одну из них, например, C_{m+1} можно зафиксировать произвольно. Остальные постоянные C_k ($k=1,2,\ldots,m$) подлежат определению вместе с функциями $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$.

Очевидно, что граничные условия для многозначных в конечной многосвязной области комплексных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ нужно переписать в граничные условия для функций $\varphi^*(z)$ и $\psi^*(z)$, аналитических (и, следовательно, однозначных) в области S. Процедура полностью аналогична той, которая рассмотрена в разделе 1.4.2.

Отметим, что граничное условие в форме Г.В. Колосова

$$\Phi(t)+\overline{\Phi(t)}-e^{2i\alpha}\left[\bar{t}\,\Phi'(t)+\Psi(t)\right]=N-iT \quad ,$$

где α – угол, который нормаль $\vec{n}$ составляет с осью x, пригодно в рассматриваемом случае без изменений, поскольку функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ однозначны для конечной многосвязной области.

Случай бесконечной многосвязной области может быть рассмотрен по схемам, предложенным в разделах 1.4.1 и 1.4.2, и поэтому на нем здесь останавливаться не будем.

1.5. Решение некоторых задач плоской теории упругости

Ниже рассматриваются решения некоторых простейших граничных задач плоской теории упругости с использованием степенных рядов Фурье. Этот метод решения непосредственно применяется к областям, ограниченным одной окружностью или двумя концентрическими окружностями. Возможность распространить метод на области более общего вида дает использование конформного отображения.

1.5.1. Решение первой основной граничной задачи для бесконечной плоскости с круговым отверстием

Решение задачи будем строить в полярной системе координат r, θ, помещая начало координат в центр кругового отверстия, имеющего радиус R.

Для отыскания комплексных функций используем граничное условие в форме Колосова:

$$\Phi(t)+\overline{\Phi(t)}-e^{2i\theta}\left[\bar{t}\,\Phi'(t)+\Psi(t)\right]=N-iT \quad \text{на} \quad L \ ,$$

где N и T – проекции внешней нагрузки, действующей на окружности L контура, на направления нормали n, направленной к центру отверстия, и касательной t, направленной влево, если смотреть вдоль положительного направления нормали.

Отметим, что в разделе 1.4.1 граничное условие в форме Колосова представлено с использованием угла α, который нормаль n составляет с осью x, а здесь перешли к углу θ. Однако не надо упускать из виду, что направления осей r и θ противоположны направлениям n и t. Соответственно, поскольку $\alpha = \theta \pm \pi$, то $e^{2i\alpha} = e^{2i\theta}$, и вид граничного условия остается прежним.

Граничное условие в форме Колосова предполагает использование комплексных функций

$$\Phi(z) = \varphi'(z) \quad , \quad \Psi(z) = \psi'(z) \quad .$$

В свою очередь функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ для бесконечной области (плоскости) определены соотношениями

$$\varphi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\ln z + \Gamma z + \varphi_0(z) \quad ,$$
$$\psi(z) = \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)}\ln z + \Gamma' z + \psi_0(z) \quad ,$$

где $\Gamma = B + iC$ и $\Gamma' = B' + iC'$ – комплексные постоянные (в дальнейшем будем принимать $C = 0$); $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ – функции, голоморфные вне окружности L, представляемые в области S разложениями вида[1]

$$\varphi_0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots \;, \qquad \psi_0(z) = a'_0 + \frac{a'_1}{z} + \frac{a'_2}{z^2} + \dots$$

Дифференцируем функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. Будем иметь:

[1] Для конечной многосвязной области функции $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ голоморфны вне любой окружности, охватывающей все контуры (при достаточно больших значениях $|z|$). Если имеется только один контур (плоскость с отверстием), то эти функции будут голоморфны во всей области S, если только начало координат взято вне области S, т.е. внутри отверстия.

$$\Phi(z)=\varphi'(z)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\frac{1}{z}+\Gamma-+\frac{a_1}{z^2}-\frac{2a_2}{z^3}-\ \ldots$$

$$\Psi(z)=\psi'(z)=\frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)}\frac{1}{z}+\Gamma'-\frac{a'_1}{z^2}-\frac{2a'_2}{z^3}-\ \ldots$$

Перепишем полученные соотношения в форме рядов

$$\Phi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{-k} \quad , \qquad \Psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a'_k z^{-k} \quad ,$$

где введены новые обозначения для коэффициентов:

$$a_0=\Gamma=B \quad , \quad a'_0=\Gamma'=B'+iC' \ ,$$

$$a_1=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)} \quad , \quad a'_1=\frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)} \qquad \text{и т.д.}$$

Отметим, что коэффициенты разложения a_1 и $\overline{a}'_1$ связаны между собой условием однозначности перемещений $\kappa a_1+\overline{a}'_1=0$.

Поскольку соотношения, полученные для комплексных функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, предназначены для использования в граничном условии при $r=R$, перепишем их в следующем виде:

$$\Phi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k r^{-k}e^{-ik\theta} \quad , \qquad \Psi(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a'_k r^{-k}e^{-ik\theta} \quad .$$

Правую часть граничного условия также представим в форме ряда

$$N-iT=\sum_{-\infty}^{+\infty}A_k e^{ik\theta} \quad ,$$

где коэффициенты A_k разложения известны.

Подставляя преобразованные соотношения в граничное условие, получим:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{a_k(1+k)}{R^k}-\frac{a'_{k+2}}{R^{k|+2}}\right]e^{-ik\theta}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\overline{a}_k}{R^k}e^{ik\theta}-a'_0e^{2i\theta}-\frac{a'_1}{R}e^{i\theta}=$$

$$=\sum_{-\infty}^{+\infty}A_k e^{ik\theta} \quad .$$

Сравнивая коэффициенты при различных степенях $e^{i\theta}$, определим неизвестные коэффициенты разложений a_k и a'_k через известные A_k. Будем иметь:

– сравнение постоянных членов

$$a_0-\frac{a'_2}{R^2}+\overline{a}_0=A_0 \quad\Rightarrow\quad 2a_0-\frac{a'_2}{R^2}=A_0 \quad\Rightarrow\quad a'_2=R^2\big(2\Gamma-A_0\big) \ ,$$

поскольку $a_0=\Gamma=B$ – действительное число;

– сравнение коэффициентов при $e^{i\theta}$

$$\frac{\overline{a}_1}{R}-\frac{a'_1}{R}=A_1 \quad\Rightarrow\quad \overline{a}_1-a'_1=A_1R \quad ;$$

– сравнение коэффициентов при $e^{2i\theta}$

$$\frac{\overline{a}_2}{R^2}-a'_0=A_2 \quad\Rightarrow\quad \overline{a}_2=R^2\left(A_2+\Gamma'\right) \;\Rightarrow\; a_2=R^2\left(\overline{A}_2+\overline{\Gamma}'\right) \ ,$$

поскольку $a'_0=\Gamma'=B'+iC'$;

– сравнение коэффициентов при $e^{ik\theta}$, когда $k\ge 3$

$$\frac{\overline{a}_k}{R^k}=A_k \quad\Rightarrow\quad \overline{a}_k=A_kR^k \quad ;$$

– сравнение коэффициентов при $e^{-ik\theta}$, когда $k \ge 1$

$$\frac{a_k(1+k)}{R^k} - \frac{a'_{k+2}}{R^{k+2}} = A_{-k} \quad \Rightarrow \quad a'_{k+2} = a_k(1+k)R^2 - A_{-k}R^{k+2}$$

или, с заменой индекса k на $(k-2)$,

$$a'_k = a_{k-2}(k-1)R^2 - A_{-k+2}R^k \quad \text{при} \quad k \ge 3 \quad .$$

Для определения коэффициентов a_1 и a'_1 имеем два уравнения:

$$\kappa a_1 + \overline{a}'_1 = 0 \quad ,$$

$$\overline{a}_1 - a'_1 = A_1 R \quad .$$

Решение этих уравнений относительно упомянутых неизвестных позволяет получить:

$$a_1 = \frac{1}{1+\kappa}\overline{A}_1 R \quad , \qquad a'_1 = -\frac{\kappa}{1+\kappa}A_1 R \quad .$$

Окончательно можем выписать все определяемые коэффициенты рядов:

$$a_0 = \Gamma \quad , \qquad\qquad a'_0 = \Gamma' \quad ,$$

$$a_1 = \frac{1}{1+\kappa}\overline{A}_1 R \quad , \qquad a'_1 = -\frac{\kappa}{1+\kappa}A_1 R \quad ,$$

$$a_2 = R^2\left(\overline{A}_2 + \overline{\Gamma}'\right) \quad , \qquad a'_2 = R^2\left(2\Gamma - A_0\right) \quad ,$$

$$\overline{a}_k = A_k R^k \ (k \ge 3)\,, \qquad a'_k = a_{k-2}(k-1)R^2 - A_{-k+2}R^k \ (k \ge 3) \quad .$$

Таким образом, первая основная граничная задача для бесконечной плоскости с круговым отверстием решена в общем виде.

Задачи

1.1.	Одностороннее растяжение пластины, ослабленной круговым отверстием, имеющим радиус R.

В соответствии с условием задачи имеем, что контур кругового отверстия свободен от нагрузки, а на бесконечности напряжения принимают значения:

$$\sigma_x^\infty = p \quad , \quad \sigma_y^\infty = 0 \quad , \quad \tau_{xy}^\infty = 0 \quad .$$

Действительные постоянные B, B' и C', входящие в соотношения для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ посредством комплексных постоянных Γ и Γ', имеют простой физический смысл (см. раздел 1.3.3). Рассматривая поведение напряжений на бесконечности, имеем:

$$\begin{array}{lclcl}
\sigma_x^\infty = 2B - B' & & 2B - B' = p & & B = p/4 \quad , \\
\sigma_y^\infty = 2B + B' & \Rightarrow & 2B + B' = 0 & \Rightarrow & B' = -p/2 \quad , \\
\tau_{xy}^\infty = C' & & C' = 0 & & C' = 0 \quad .
\end{array}$$

Соответственно, постоянные Γ и Γ' принимают значения:

$$\Gamma = p/4 \quad , \quad \Gamma' = -p/2 \quad .$$

Поскольку контур кругового отверстия не нагружен, имеем $N - iT = 0$ на L и, как следствие, все коэффициенты разложения A_k равны нулю.

Переходим к определению коэффициентов разложения комплексных функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$. Будем иметь:

$$\begin{array}{ll}
a_0 = p/4 \quad , & a'_0 = -p/2 \quad , \\
a_1 = 0 \quad , & a'_1 = 0 \quad , \\
a_2 = -pR^2/2 \quad , & a'_2 = pR^2/2 \quad , \\
a_3 = 0 \quad , & a'_3 = 0 \quad , \\
a_4 = 0 \quad , & a'_4 = -3pR^4/2 \quad .
\end{array}$$

Все остальные коэффициенты равны нулю.

С учетом коэффициентов разложений комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ принимают вид:

$$\Phi(z)=\frac{p}{4}\left(1-\frac{2R^2}{z^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \Phi(z)=\frac{p}{4}\left(1-\frac{2R^2}{r^2}e^{-2i\theta}\right) ,$$

$$\Psi(z)=-\frac{p}{2}\left(1-\frac{R^2}{z^2}+\frac{3R^4}{z^4}\right) \quad \Rightarrow \quad \Psi(z)=-\frac{p}{2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}e^{-2i\theta}+\frac{3R^4}{r^4}e^{-4i\theta}\right) .$$

Найденные соотношения для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ определяют решение поставленной задачи в общем виде.

Определим теперь соответствующие компоненты напряжений, используя формулы, полученные в разделе 1.2.5:

$$\sigma_r+\sigma_\theta = 2\left[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\right] ,$$

$$\sigma_\theta-\sigma_r+2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}\left[\bar{z}\,\Phi'(z)+\Psi(z)\right] .$$

Подставив соотношения для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в приведенные формулы и проведя некоторые простые преобразования, будем иметь:

$$\sigma_r+\sigma_\theta = p\left(1-\frac{2R^2}{r^2}\cos 2\theta\right) ,$$

$$\sigma_\theta-\sigma_r+2i\,\tau_{r\theta} =$$

$$=\frac{pR^2}{r^2}+\left(\frac{2pR^2}{r^2}-\frac{3pR^4}{r^4}-p\right)\cos 2\theta+i\left(-\frac{2pR^2}{r^2}+\frac{3pR^4}{r^4}-p\right)\sin 2\theta .$$

Поскольку второе уравнение распадается на два, для определения напряжений получаем следующие три уравнения:

$$\sigma_r+\sigma_\theta = p\left(1-\frac{2R^2}{r^2}\cos 2\theta\right) ,$$

$$\sigma_\theta-\sigma_r = \frac{pR^2}{r^2}+\left(\frac{2pR^2}{r^2}-\frac{3pR^4}{r^4}-p\right)\cos 2\theta ,$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{p}{2}\left(1+\frac{2R^2}{r^2}-\frac{3R^4}{r^4}\right)\sin 2\theta .$$

Касательное напряжение $\tau_{r\theta}$ определяется третьим уравнением, а для отыскания нормальных напряжений используем первое и второе. Окончательно будем иметь:

$$\sigma_r = \frac{p}{2}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)+\frac{p}{2}\left(1-\frac{4R^2}{r^2}+\frac{3R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \quad ,$$

$$\sigma_\theta = \frac{p}{2}\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)-\frac{p}{2}\left(1+\frac{3R^4}{r^4}\right)\cos 2\theta \quad ,$$

$$\tau_{r\theta} = -\frac{p}{2}\left(1+\frac{2R^2}{r^2}-\frac{3R^4}{r^4}\right)\sin 2\theta \quad .$$

Решение рассматриваемой задачи в действительных переменных приведено в книге [1]. Там же проведен подробный анализ напряженного состояния с обсуждением его особенностей.

Для определения перемещений v_r и v_θ точек пластины воспользуемся их комплексным представлением в полярной системе координат (см. раздел 1.2.5):

$$2\mu(v_r+iv_\theta)= e^{-i\theta}\left[\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}\right] \quad .$$

Необходимые комплексные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ определим по известным функциям $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$:

$$\varphi(z)=\int\Phi(z)dz = \frac{p}{4}\left(z+\frac{2R^2}{z}\right) \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(z)=\frac{p}{4}\left(re^{i\theta}+\frac{2R^2}{r}e^{-i\theta}\right) \quad ,$$

$$\psi(z)=\int\Psi(z)dz = -\frac{p}{2}\left(z+\frac{R^2}{z}-\frac{R^4}{z^3}\right) \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \psi(z)=-\frac{p}{2}\left(re^{i\theta}+\frac{R^2}{r}e^{-i\theta}-\frac{R^4}{r^3}e^{-3i\theta}\right) \quad .$$

Подставляя значения комплексных функций в уравнение для перемещений и отделяя действительную и мнимую части, получим:

$$v_r = \frac{p}{8\mu r}\left\{ r^2(\kappa-1)+2R^2+2\left[R^2(\kappa+1)+r^2-\frac{R^4}{r^2}\right]\cos 2\theta \right\} ,$$

$$v_\theta = -\frac{p}{4\mu r}\left[R^2(\kappa-1)+r^2+\frac{R^4}{r^2}\right]\sin 2\theta .$$

1.2.	Всестороннее растяжение пластины, ослабленной круговым отверстием, имеющим радиус R.

Решение задачи о всестороннем растяжении пластины, ослабленной круговым отверстием, строится по схеме, предложенной при решении задачи 1.1.

В соответствии с условием задачи на бесконечности имеем

$$\sigma_x^\infty = \sigma_y^\infty = p \ , \qquad \tau_{xy}^\infty = 0 \ .$$

Определение действительных постоянных B, B' и C', входящих в соотношения для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, в рассматриваемом случае дает:

$$\begin{array}{lclcl} \sigma_x^\infty = 2B - B' & & 2B - B' = p & & B = p/2 \ , \\ \sigma_y^\infty = 2B + B' & \Rightarrow & 2B + B' = p & \Rightarrow & B' = 0 \ , \\ \tau_{xy}^\infty = C' & & C' = 0 & & C' = 0 \ . \end{array}$$

Соответственно, для постоянных Γ и Γ' получим:

$$\Gamma = p/2 \ , \qquad \Gamma' = 0 \ .$$

Как и в предыдущей задаче, имеем $N - iT = 0$ на L и $A_k = 0$. Переходя к определению коэффициентов разложения комплексных функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, будем иметь, что только два коэффициента отличны от нуля:

$$a_0 = p/2 \ , \qquad a_2' = pR^2 \ .$$

С учетом найденных коэффициентов разложений комплексные функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ и $\varphi(z)$, $\psi(z)$ принимают вид:

$$\Phi(z)=\frac{p}{2}\quad,\qquad \Psi(z)=\frac{pR^2}{z^2}\quad;$$

$$\varphi(z)=\frac{p}{2}z\quad,\qquad \psi(z)=-\frac{pR^2}{z}\quad.$$

Напряжения и перемещения вычисляются по формулам, приведенным в предыдущей задаче. Не останавливаясь на промежуточных преобразованиях, приведем окончательные результаты:

$$\sigma_r=p\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)\quad,\quad \sigma_\theta=p\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)\quad,\quad \tau_{r\theta}=0\;;$$

$$v_r=\frac{p}{4\mu r}\left[r^2(\kappa-1)+2R^2\right]\quad,\quad v_\theta=0\quad.$$

Приведенное решение можно получить, используя непосредственно решение предыдущей задачи, суммируя два односторонних растяжения пластины соответственно по осям x и y. Подобная процедура возможна, поскольку в теории упругости справедливы принцип пропорциональности решения заданной нагрузке и принцип независимости действия сил (принцип суперпозиции).

1.3.	Равномерное нормальное давление, приложенное к обводу кругового отверстия радиуса R в пластине.

Из условия задачи имеем, что на бесконечности напряжения равны нулю, а на контуре кругового отверстия приложено равномерное нормальное давление p.

Соответственно, постоянные Γ и Γ' равны нулю ($\Gamma=\Gamma'=0\;\Rightarrow\; a_0=a'_0=0$), а проекции N и T внешней нагрузки, действующей на окружности L контура, на направления нормали и касательной к контуру, принимают следующие значения:

$$N=-p\quad,\qquad T=0\;.$$

Напомним, что внешняя нагрузка, действующая на контуре кругового отверстия, записанная в комплексном виде $N-iT$, должна быть представлена в форме ряда

$$N-iT=\sum_{-\infty}^{+\infty}A_k e^{ik\theta}\quad.$$

В рассматриваемом случае, когда $N - iT = -p$, будем иметь:

$$A_0 = -p \ , \quad A_k = 0 \quad \text{при} \quad k \neq 0 \ .$$

Переходим к определению коэффициентов разложения комплексных функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$. В соответствии с имеющимися формулами, получим

$$a'_2 = pR^2 \ ,$$

а все остальные коэффициенты разложений функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ равны нулю.

С учетом найденных коэффициентов разложений, комплексные функции $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ и $\varphi(z)$, $\psi(z)$ принимают вид:

$$\Phi(z) = 0 \ , \qquad \Psi(z) = \frac{pR^2}{z^2} \ ;$$

$$\varphi(z) = 0 \ , \qquad \psi(z) = -\frac{pR^2}{z} \ .$$

Определение напряжений и перемещений по имеющимся формулам не представляет особого труда. Не останавливаясь на промежуточных преобразованиях, приведем окончательные результаты:

$$\sigma_r = -\frac{pR^2}{r^2} \ , \quad \sigma_\theta = \frac{pR^2}{r^2} \ , \quad \tau_{r\theta} = 0 \ ;$$

$$v_r = \frac{pR^2}{2\mu r} \ , \quad v_\theta = 0 \ .$$

1.4.	Сосредоточенная сила, приложенная в точке неограниченной плоскости.

Решение задачи о бесконечной плоскости с круговым отверстием можно использовать для исследования напряженно-деформированного состояния в пластине, находящейся под действием сосредоточенных сил и моментов.

Поскольку в поставленной задаче на бесконечности напряжения равны нулю, постоянные Γ и Γ' также равны нулю ($\Gamma = \Gamma' = 0 \ \Rightarrow \ a_0 = a'_0 = 0$).

Будем считать, что внешние усилия, приложенные к контуру кругового отверстия радиуса R, имеют постоянную величину и направление, а их распределение по контуру отверстия задано в следующей форме:

$$\overline{X} = \frac{X}{2\pi R} \quad , \qquad \overline{Y} = \frac{Y}{2\pi R} \quad ,$$

где X , Y — составляющие главного вектора внешних усилий (постоянные величины). Соответственно, проекции N и T внешней нагрузки, действующей на окружности L контура, на направления нормали и касательной к контуру[1], принимают следующие значения:

$$N = -\left(\overline{X}\cos\theta + \overline{Y}\sin\theta\right) \quad \Rightarrow \quad N = -\frac{1}{2\pi R}\left(X\cos\theta + Y\sin\theta\right) \; ,$$

$$T = \overline{X}\sin\theta - \overline{Y}\cos\theta \qquad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2\pi R}\left(X\sin\theta - Y\cos\theta\right) \; .$$

Комплексное представление внешней нагрузки, действующей на контуре кругового отверстия, будет иметь вид:

$$N - iT = -\frac{1}{2\pi R}\left(X - iY\right)e^{i\theta} \quad \text{на} \quad L \; .$$

Представляя внешнюю нагрузку $N - iT$ в форме ряда, получим, что отличным от нуля будет только один коэффициент

$$A_1 = -\frac{X - iY}{2\pi R} \; .$$

Переходим к определению коэффициентов разложения комплексных функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$. Будем иметь:

$$a_1 = -\frac{X + iY}{2\pi(1+\kappa)} \quad , \qquad a'_1 = \frac{\kappa(X - iY)}{2\pi(1+\kappa)} \quad ,$$

$$a_2 = 0 \quad , \qquad a'_2 = 0 \quad ,$$

$$a_3 = 0 \quad , \qquad a'_3 = -R^2\frac{X + iY}{\pi(1+\kappa)} \quad .$$

Все остальные коэффициенты равны нулю.

С учетом найденных коэффициентов разложений, комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ принимают вид:

[1] Напомним, что нормаль к контуру направлена к центру окружности, так что она составляет с осью x угол $\theta \pm \pi$.

$$\Phi(z)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\cdot\frac{1}{z} \quad , \qquad \Psi(z)=\frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)}\cdot\frac{1}{z}-\frac{X+iY}{\pi(1+\kappa)}\cdot\frac{R^2}{z^3} \quad .$$

Будем считать теперь, что радиус отверстия в пластине беспредельно уменьшается, а составляющие $\overline{X}$, $\overline{Y}$ внешней нагрузки, действующей на контуре, беспредельно возрастают так, что главный вектор (X , Y) остается постоянным по величине и направлению. В этом случае можно говорить, что в начале координат приложена сосредоточенная сила (X , Y). Напряженно-деформированное состояние от действия этой силы будет определяться комплексными функциями $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, которые принимают вид:

$$\Phi(z)=-\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\cdot\frac{1}{z} \quad , \qquad \Psi(z)=\frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)}\cdot\frac{1}{z} \quad .$$

Определение напряжений и перемещений по имеющимся формулам не представляет никаких затруднений. Не останавливаясь на промежуточных преобразованиях, приведем окончательные результаты для напряжений[1]:

$$\sigma_r = -\frac{3+\kappa}{2\pi(1+\kappa)}\cdot\frac{X\cos\theta+Y\sin\theta}{r} \quad ,$$

$$\sigma_\theta = \frac{\kappa-1}{2\pi(1+\kappa)}\cdot\frac{X\cos\theta+Y\sin\theta}{r} \quad ,$$

$$\tau_{r\theta} = \frac{\kappa-1}{2\pi(1+\kappa)}\cdot\frac{X\sin\theta-Y\cos\theta}{r} \quad .$$

1.5. Сосредоточенный момент, приложенный в точке неограниченной плоскости.

Поскольку в поставленной задаче на бесконечности напряжения равны нулю, постоянные Γ и Γ' также равны нулю ($\Gamma=\Gamma'=0 \;\Rightarrow\; a_0=a'_0=0$).

---

[1] Если рассматривается тонкая пластина (плоское напряженное состояние), то в формулах для напряжений вместо постоянной κ необходимо ввести постоянную $\kappa^*=(3-\nu)/(1+\nu)$ и, кроме того, учесть, что компоненты X , Y главного вектора внешних усилий должны рассчитываться на единицу толщины пластины: $X=X^{(0)}/h$, $Y=Y^{(0)}/h$, где $X^{(0)}$, $Y^{(0)}$ — составляющие сосредоточенной силы; h — толщина пластины.

Будем считать, что к контуру кругового отверстия радиуса R приложено равномерное касательное усилие T. В этом случае, представляя внешнюю нагрузку $N - iT = -iT$ в форме ряда, получим, что отличным от нуля будет только один коэффициент разложения $A_0 = -iT$.

Использование формул, определяющих коэффициенты разложения в ряд комплексных функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, приводит к следующему результату: все коэффициенты разложений равны нулю, кроме коэффициента $a'_2 = iTR^2$. Принимая, что $M = -2\pi R^2 \cdot T$, где M — момент внешних сил, приложенных к контуру отверстия, формулу для постоянной a'_2 перепишем в виде:

$$a'_2 = -iM / 2\pi \quad .$$

Соответственно, комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ принимают вид:

$$\Phi(z) = 0 \quad , \qquad \Psi(z) = -\frac{iM}{2\pi} \cdot \frac{1}{z^2} \quad .$$

Очевидно, что полученные соотношения для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ не изменятся, если радиус отверстия будет стремиться к нулю, а усилия T будут возрастать так, чтобы момент M оставался постоянным. В этом предельном случае формулы для комплексных функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ определяют напряженно-деформированное состояние в бесконечной плоскости при действии на нее сосредоточенного момента M, приложенного в начале координат.

Простые вычисления позволяют получить:

$$\sigma_r = \sigma_\theta = 0 \quad , \qquad \tau_{r\theta} = -M / 2\pi r^2 \quad .$$

Если рассматривается тонкая пластина (плоское напряженное состояние), то необходимо учесть примечание к задаче 1.4.

1.5.2. Решение первой основной граничной задачи для кругового кольца

Рассмотрим случай, когда область S, занятая телом, представляет круговое кольцо, ограниченное двумя концентрическими окружностями L_1 и L_2 с радиусами R_1 и R_2 ($R_1 < R_2$) с центром в начале координат.

Внешние усилия N', T' и N'', T'', действующие на окружностях L_1 и L_2, считаем заданными как функции угла θ. Разложения внешней нагрузки как на L_1, так и на L_2 в комплексные ряды Фурье имеют вид:

$$N' - iT' = \sum_{-\infty}^{+\infty} A'_k e^{ik\theta} \quad , \qquad N'' - iT'' = \sum_{-\infty}^{+\infty} A''_k e^{ik\theta} \quad ,$$

где коэффициенты A'_k и A''_k разложений известны.

Для отыскания комплексных функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ будем использовать граничные условия в форме Колосова, которые в рассматриваемой задаче запишем в форме:

$$\Phi(t) + \overline{\Phi(t)} - e^{2i\theta}\left[\bar{t}\,\Phi'(t) + \Psi(t)\right] = \begin{cases} \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A'_k e^{ik\theta} & \text{на } L_1 \\ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty} A''_k e^{ik\theta} & \text{на } L_2 \end{cases} .$$

Комплексная функция $\Phi(z)$ для многосвязной конечной области (см. раздел 1.3.2) получена в виде:

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{m} A_k \ln(z - z_k) + \Phi^*(z) \quad .$$

Соответственно, для рассматриваемой *двухсвязной* области будем иметь:

$$\Phi(z) = A \ln z + \Phi^*(z) \quad ,$$

где A – действительная постоянная; $z_1 = 0$ – точка внутри контура

L_1 (начало координат); $\Phi^*(z)$ – аналитическая и, следовательно, однозначная функция в области S.

Комплексная функция $\Psi(z)$ является аналитической (однозначной) функцией в области S по определению.

Используя возможность представления функций, аналитических в рассматриваемой области, в форме ряда, для комплексных функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ будем иметь:

$$\Phi(z) = A\ln z + \sum_{-\infty}^{+\infty} a_k z^k \quad , \qquad \Psi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} a'_k z^k \quad .$$

Отметим, что полученное представление функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ отвечает условиям *однозначности напряжений* для рассматриваемой *двухсвязной* области. Требование *однозначности перемещений* для *многосвязной* конечной области (см. раздел 1.3.2) реализуется в форме дополнительных ограничений

$$A_k = 0 \quad , \qquad \kappa\gamma_k + \overline{\gamma'}_k = 0 \quad ,$$

которые для *двухсвязной* области принимают вид[1]:

$$A = 0 \quad , \qquad \kappa a_{-1} + \overline{a'}_{-1} = 0 \quad .$$

Подставим соотношения, определяющие комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, в граничные условия. После очевидных простых преобразований будем иметь:

---

[1] В рассматриваемом случае имеем только один внутренний контур L_1 ($A_k = 0$ $\Rightarrow$ $A = 0$). Величины γ_k и $\overline{\gamma'}_k$ есть коэффициенты при слагаемых типа $\ln(z - z_k)$ в разложениях функций $\varphi(z) = \int \Phi(z)dz$ и $\psi(z) = \int \Psi(z)dz$. При принятых обозначениях $\ln(z - z_k) \Rightarrow \ln z$, а γ_k и $\overline{\gamma'}_k$ $\Rightarrow$ a_{-1} и $\overline{a'}_{-1}$.

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}(1-k)a_k r^k e^{ik\theta}+\sum_{-\infty}^{+\infty}\overline{a}_k r^k e^{-ik\theta}-\sum_{-\infty}^{+\infty}a'_{k-2}r^{k-2}e^{ik\theta} = \begin{cases}\sum\limits_{-\infty}^{+\infty}A'_k e^{ik\theta} \\ \sum\limits_{-\infty}^{+\infty}A''_k e^{ik\theta}\end{cases} .$$

Сравнение слагаемых, не зависящих от угла θ (свободных членов), позволяет получить:

$$\overline{a}_0+a_0-a'_{-2}R_1^{-2}=A'_0 \quad \text{на} \quad L_1 \ ,$$

$$\overline{a}_0+a_0-a'_{-2}R_2^{-2}=A''_0 \quad \text{на} \quad L_2 \ .$$

Примем во внимание, что коэффициент a_0 в разложении функции $\Phi(z)$ есть то же самое, что коэффициент $\Gamma=B+iC$ в разложении функции $\varphi(z)$. Неоднократно отмечалось, что слагаемое iC (при действительном C) не оказывает влияния на напряженное состояние и может быть принятым равным нулю. В этом случае $a_0=\overline{a}_0$, и уравнения для свободных членов преобразуются к виду:

$$2a_0-a'_{-2}R_1^{-2}=A'_0 \ ,$$

$$2a_0-a'_{-2}R_2^{-2}=A''_0 \ .$$

Решение уравнений относительно коэффициентов a_0 и a'_{-2} позволяет получить:

$$a_0=\frac{1}{2}\frac{A''_0R_2^2-A'_0R_1^2}{R_2^2-R_1^2} \ ,$$

$$a'_{-2}=\frac{(A''_0-A'_0)R_1^2R_2^2}{R_2^2-R_1^2} \ .$$

Поскольку a_0 – действительная величина, требуется, чтобы мнимая часть числителя ($A''_0 R_2^2 - A'_0 R_1^2$), как комплексной величины, равнялась нулю: $\operatorname{Im}\left(A''_0 R_2^2 - A'_0 R_1^2\right) = 0$. Как показывают простые вычисления, это условие определяет равенство нулю главного момента внешних усилий.

Сравнение слагаемых при $e^{ik\theta}$ ($k = \pm 1,\ k = \pm 2, \ldots$) дает:

$$
\begin{aligned}
&(1-k) a_k R_1^k + \overline{a}_{-k} R_1^{-k} - a'_{k-2} R_1^{k-2} = A'_k \quad \text{на} \quad L_1 \ , \\
&(1-k) a_k R_2^k + \overline{a}_{-k} R_2^{-k} - a'_{k-2} R_2^{k-2} = A''_k \quad \text{на} \quad L_2 \ .
\end{aligned} \tag{1.5}
$$

Разделив первое уравнение на R_1^{k-2}, а второе на R_2^{k-2} и вычтя одно из другого, будем иметь:

$$
(1-k)\left(R_2^2 - R_1^2\right) a_k + \left(R_2^{-2k+2} - R_1^{-2k+2}\right) \overline{a}_{-k} = B_k \ , \tag{1.6, а}
$$

где введено обозначение $B_k = A''_k R_2^{-k+2} - A'_k R_1^{-k+2}$.

В полученном уравнении заменим k на $-k$ и перейдем к сопряженным величинам:

$$
\left(R_2^{2k+2} - R_1^{2k+2}\right) a_k + (1+k)\left(R_2^2 - R_1^2\right) \overline{a}_{-k} = \overline{B}_{-k} \ . \tag{1.6, б}
$$

Система уравнений (1.6) при заданном значении k дает возможность вычислить коэффициенты a_k и $\overline{a}_{-k}$, если только определитель этой системы Δ отличен от нуля:

$$
\Delta = \left(1-k^2\right)\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 - \left(R_2^{2k+2} - R_1^{2k+2}\right)\left(R_2^{-2k+2} - R_1^{-2k+2}\right) \neq 0 \ .
$$

Легко убедиться, что определитель Δ обращается в нуль только при $k=0$ и $k=\pm 1$. Значение $k=0$ нас уже не интересует. При $k=+1$ система уравнений принимает вид:

$$\begin{gathered} 0=B_1 \quad \Rightarrow \quad A_1'' R_2 - A_1' R_1 = 0 \ , \\ \left(R_2^4 - R_1^4\right) a_1 + 2\left(R_2^2 - R_1^2\right)\overline{a}_{-1} = \overline{B}_{-1} \ . \end{gathered} \tag{1.7}$$

Простые выкладки показывают, что первое уравнение $A_1'' R_2 - A_1' R_1 = 0$ определяет равенство нулю главного вектора внешних усилий, а второе – связывает между собой два коэффициента a_1 и a_{-1}.

При $k=-1$ не получим ничего нового, поскольку будем иметь систему уравнений, следующую из (1.7) путем перехода к сопряженным значениям.

Вернемся к вычислению коэффициентов a_k и $\overline{a}_{-k}$. Решение системы уравнений (1.6) при $k=\pm 2$, $k=\pm 3$, . . . позволяет получить:

$$a_k = \frac{(1+k)\left(R_2^2 - R_1^2\right)B_k - \left(R_2^{-2k+2} - R_1^{-2k+2}\right)\overline{B}_{-k}}{\left(1-k^2\right)\left(R_2^2 - R_1^2\right)^2 - \left(R_2^{2k+2} - R_1^{2k+2}\right)\left(R_2^{-2k+2} - R_1^{-2k+2}\right)} \ .$$

Соотношения для коэффициентов $\overline{a}_{-k}$ не выписываем, поскольку они следуют из полученных для a_k при замене k на $-k$ и переходе к сопряженным величинам.

Наконец, коэффициенты a_k' вычисляются по одному из двух уравнений (1.5), а коэффициент a_{-2}' – по «своей» отдельной формуле. Так как все коэффициенты a_k, за исключением a_1 и a_{-1}, уже вычислены, то будем иметь определенные значения для всех a_k', кроме a_{-1}' и a_{-3}'.

Коэффициенты a_{-1} и $\overline{a'}_{-1}$, в свою очередь, определятся из решения двух уравнений, одно из которых является условием однозначности перемещений, а второе следует из первого уравнения системы (1,5) при $k = +1$:

$$\kappa a_{-1} + \overline{a'}_{-1} = 0 \quad ,$$

$$\overline{a}_{-1} - a'_{-1} = A'_1 R \quad \Rightarrow \quad a_{-1} - \overline{a'}_{-1} = \overline{A'}_1 R \quad .$$

Находим:

$$a_{-1} = \frac{\overline{A'}_1 R_1}{1+\kappa} \quad , \qquad a'_{-1} = -\frac{\kappa A'_1 R_1}{1+\kappa} \quad .$$

Для определения коэффициента a_1 воспользуемся вторым уравнением системы (1.7), связывающим коэффициенты a_1 и a_{-1}. Будем иметь:

$$a_1 = \frac{\overline{B}_{-1}}{R_2^4 - R_1^4} - \frac{2A'_1 R_1}{(1+\kappa)\left(R_2^2 + R_1^2\right)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = \frac{\overline{A}''_{-1} R_2^3 - \overline{A}'_{-1} R_1^3}{R_2^4 - R_1^4} - \frac{2A'_1 R_1}{(1+\kappa)\left(R_2^2 + R_1^2\right)} \quad .$$

Наконец, теперь можем вычислить и коэффициент a'_{-3} из любого уравнения системы (1.5) при $k = -1$, поскольку коэффициенты a_1 и a_{-1} уже известны.

Таким образом, задача определения коэффициентов разложения комплексных функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ в ряды полностью решена и, темсамым, решена первая основная граничная задача для кругового кольца.

Задача

1.6.	Толстостенная труба, подверженная равномерному внешнему и внутреннему давлениям.

Будем считать, что на внутренней поверхности трубы $r = a$ действует равномерно распределенное давление p_a, а на внешней $r = b$ – давление p_b. Граничные условия в напряжениях в этом случае имеют вид:

$$\sigma_r = -p_a \ , \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad r = a \ (\text{на } L_1) \ ;$$

$$\sigma_r = -p_b \ , \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{при} \quad r = b \ (\text{на } L_2) \ .$$

Разложения внешней нагрузки на контурах L_1 ($N' = p_a$, $T' = 0$) и на L_2 ($N'' = -p_b$, $T'' = 0$) в комплексные ряды Фурье позволяют получить, что

$$A'_0 = -p_a \ , \quad A''_0 = -p_b \ ,$$

а все остальные коэффициенты равны нулю. Соответственно, в разложениях комплексных функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ отличными от нуля будут только коэффициенты a_0 и a'_{-2}:

$$a_0 = \frac{1}{2}\frac{A''_0 b^2 - A'_0 a^2}{b^2 - a^2} \quad , \qquad a'_{-2} = \frac{(A''_0 - A'_0)\, a^2 b^2}{b^2 - a^2}$$

или, с подстановкой значений коэффициентов A'_0 и A''_0,

$$a_0 = -\frac{1}{2}\frac{p_b b^2 - p_a a^2}{b^2 - a^2} \quad , \qquad a'_{-2} = \frac{(p_a - p_b)\, a^2 b^2}{b^2 - a^2} \quad .$$

Таким образом, комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ принимают вид:

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2}\frac{p_b b^2 - p_a a^2}{b^2 - a^2} \ ,$$

$$\Psi(z) = \frac{(p_a - p_b)\, a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{z^2} \ .$$

Для определения напряжений используем их комплексное представление в полярной системе координат:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2\left[\Phi(z) + \overline{\Phi(z)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z) \ ,$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}\left[\bar{z}\,\Phi'(z) + \Psi(z)\right] .$$

Подставляя в приведенные соотношения комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, будем иметь:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2\,\frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} \ ,$$

$$\sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2e^{2i\theta}\,\frac{(p_a - p_b)\,a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2\, 2e^{2i\theta}} \qquad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \sigma_\theta - \sigma_r + 2i\tau_{r\theta} = 2\,\frac{(p_a - p_b)\,a^2 b^2}{r^2\left(b^2 - a^2\right)} \ .$$

Из второго соотношения следует, что $\tau_{r\theta} = 0$ и, соответственно,

$$\sigma_\theta - \sigma_r = 2\,\frac{(p_a - p_b)\,a^2 b^2}{r^2\left(b^2 - a^2\right)} \ .$$

Определение напряжений σ_r и σ_θ приводит к известному результату:

$$\sigma_r = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} - \frac{(p_a - p_b)\,a^2 b^2}{\left(b^2 - a^2\right)} \cdot \frac{1}{r^2} \ ,$$

$$\sigma_\theta = \frac{p_a a^2 - p_b b^2}{b^2 - a^2} + \frac{(p_a - p_b)\,a^2 b^2}{\left(b^2 - a^2\right)} \cdot \frac{1}{r^2} \ .$$

Решение рассматриваемой задачи в действительных переменных приведено в книге $[1]$. Там же проведен подробный анализ напряженного состояния с обсуждением его особенностей.

1.6. Решение граничных задач для полуплоскости и плоскости с прямолинейными разрезами

1.6.1. Преобразование общих формул для полуплоскости

До сих пор рассматривали только такие области, граница которых состояла из замкнутых (конечных) контуров. Полуплоскость представляет собой случай, когда граница определяется разомкнутой линией, уходящей в бесконечность в обе стороны.

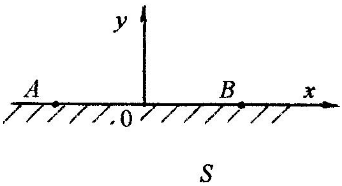

Рис. 1.1

Пусть область, S занятая телом, состоит из нижней полуплоскости $y<0$ (рис. 1.1), ограниченной осью x. Будем считать, напряжения стремятся к нулю, когда переменная z удаляется в бесконечность по любому пути, оставаясь внутри S.

Если бы контур области S не простирался в бесконечность, а был замкнутой кривой, то комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ при больших значениях $|z|$ имели бы вид (см. раздел 1.3.3):

$$\Phi(z)=\frac{\gamma_1}{z}+\frac{\gamma_2}{z^2}+\ldots\ , \qquad \Psi(z)=\frac{\gamma'_1}{z}+\frac{\gamma'_2}{z^2}+\ldots$$

Соответственно, для рассматриваемого случая можем записать:

$$\Phi(z)=\frac{\gamma}{z}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{z}\right) \quad\Rightarrow\quad \Phi'(z)=-\frac{\gamma}{z^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{z^2}\right)\ ,$$

$$\Psi(z)=\frac{\gamma'}{z}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{z}\right)\ ,$$

где γ и γ' – постоянные. Напомним, что символом $\mathrm{o}(1/z)$ обозначается такая величина, что $|\mathrm{o}(1/z)|<\varepsilon/|z|$, где ε зависит только от модуля $|z|$ и стремится к нулю при $|z|\to\infty$.

Интегрируя комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$, получим:

$$\varphi(z)=\gamma\ln z+\mathrm{o}(1)+\mathrm{const}\ ,\quad \psi(z)=\gamma'\ln z+\mathrm{o}(1)+\mathrm{const}\ ,$$

где символ $\mathrm{o}(1)$ определяет такую величину, что $|\mathrm{o}(1)|<\varepsilon$, где ε зависит только от модуля $|z|$ и стремится к нулю при $|z|\to\infty$. В представленных соотношениях следует выбрать одну ветвь многозначной функции $\ln z$, например $\ln|z|+i\theta$, где θ изменяется от $\theta=-\pi$ до $\theta=0$.

Будем считать, что *главный вектор внешних сил, приложенных к отрезку AB оси x, стремится к определенному пределу, когда концы отрезка уходят в бесконечность* (*A – влево, а B – вправо*)[1].

При положительном направлении обхода контура, когда область S, занятая телом, остается слева, компоненты главного вектора нагрузки, приложенной к участку AB контура, определяются соотношениями (см. раздел 1.2.4):

$$X+iY=-i\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B\ ,\quad \frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}\ .$$

Соответственно, если X', Y' – компоненты главного вектора нагрузки, приложенной к отрезку AB границы полуплоскости, будем иметь:

$$X'+iY'=i\left[\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}\right]_A^B=i\left[\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}\right]_A^B\ ,$$

поскольку направление обхода от A к B – отрицательное.

Если точки A и B находятся по разные стороны от начала координат и достаточно далеко друг от друга, то использование ком-

---

[1] Принятое условие всегда выполняется, если нагружен конечный участок границы.

плексных функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ в полученном виде приводит к соотношению:

$$X' + iY' = i\left(\gamma \ln\frac{r''}{r'} + \gamma\pi i + \overline{\gamma'} \ln\frac{r''}{r'} - \overline{\gamma'}\pi i + \varepsilon\right) ,$$

где r' и r'' – расстояния точек A и B от начала координат; ε – малая величина, стремящаяся к нулю при возрастании r' и r''. Из полученного соотношения следует, что компоненты главного вектора X', Y' будут оставаться ограниченными при сколь угодно больших r' и r'', если выполняется условие:

$$\gamma + \overline{\gamma'} = 0 .$$

В таком случае компоненты главного вектора X, Y нагрузки, приложенной ко всей границе полуплоскости (ко всей оси x), будут определяться соотношением:

$$X + iY = -\pi\left(\gamma - \overline{\gamma'}\right) ,$$

откуда можно получить:

$$\gamma = -\frac{X+iY}{2\pi} , \quad \gamma' = -\frac{X-iY}{2\pi} .$$

С учетом полученных значений постоянных γ и γ' комплексные функции будут иметь вид:

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi z} + o\left(\frac{1}{z}\right) , \quad \Psi(z) = \frac{X-iY}{2\pi z} + o\left(\frac{1}{z}\right) ;$$

$$\varphi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi} \ln z + o(1) + \text{const} ,$$

$$\psi(z) = \frac{X-iY}{2\pi} \ln z + o(1) + \text{const} .$$

Используя полученные соотношения для комплексных функций, напряженное и деформированное состояния можем определить по известным формулам (см. разделы 1.2.2 и 1.2.3):

$$2\mu(u+iv)=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}\ ;$$

$$\sigma_x+\sigma_y=2\left[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\right]=4\,\mathrm{Re}\,\Phi(z)\ ,$$

$$\sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\left[\bar z\,\Phi'(z)+\Psi(z)\right]\ .$$

Принимая теперь для области, занятой телом (нижней полуплоскости $\mathrm{Im}(z)\le 0$) обозначение S^-, а для оси x – L (рис. 1.2), распространим определение комплексных функций на верхнюю полуплоскость S^+.

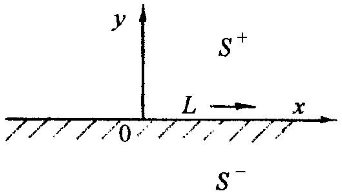

Рис. 1.2

Условимся сначала о некоторых представлениях. Если функция $F(z)$ определена в области S^-, то функция $\overline{F}(z)=\overline{F(\bar z)}$[1] определена в области S^+ (данное утверждение проверяется с привлечением соотношений Коши – Римана). Соответственно, если существует граничное значение $F^-(t)$ в точке t действительной оси x, то существует и граничное значение $\overline{F}^+(t)$, причем $\overline{F^-(t)}=\overline{F}^+(t)$ или $\overline{F}^-(t)=\overline{F}^+(t)$.

Построим аналитическое продолжение функции $\Phi(z)$ в верхнюю полуплоскость S^+ так, чтобы ее значения в этой полуплоскости аналитически продолжили значения, принимаемые в нижней полуплоскости через *незагруженные* участки границы (если таковые имеются).

---

[1] Если $\Phi(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, то $\overline{\Phi}(z)=u_1(x,y)+iv_1(x,y)$, где $u_1(x,y)=u(x,-y)$, $v_1(x,y)=-v(x,-y)$.

На незагруженном участке границы имеем, что $\sigma_y = \tau_{xy} = 0$. Поскольку

$$\sigma_y - i\tau_{xy} = \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + z\overline{\Phi'(z)} + \overline{\Psi(z)} \quad ,$$

граничное условие принимает вид:

$$\sigma_y - i\tau_{xy}\Big|_{y=0} = \Phi^-(t) + \overline{\Phi}^-(t) + t\overline{\Phi'}^-(t) + \overline{\Psi}^-(t) = 0 \quad ,$$

откуда непосредственно следует

$$\Phi^-(t) = -\overline{\Phi}^-(t) - t\overline{\Phi'}^-(t) - \overline{\Psi}^-(t) \quad .$$

Можно утверждать, что функция $\Phi(z) = -\overline{\Phi(z)} - z\overline{\Phi'(z)} - \overline{\Psi(z)}$ голоморфна в области S^-. Голоморфной в этой области является и функция $\overline{\Phi(z)} = -\Phi(\bar{z}) - \bar{z}\Phi'(\bar{z}) - \Psi(\bar{z})$.

Функция $\Phi(z) = -\overline{\Phi}(z) - z\overline{\Phi'}(z) - \overline{\Psi}(z)$ будет голоморфной в области S^+. Действительно, $\overline{\Phi(z)} = -\Phi(\bar{z}) - \bar{z}\Phi'(\bar{z}) - \Psi(\bar{z}) \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{\overline{\Phi}(\bar{z})} = -\overline{\Phi(\bar{z})} - z\overline{\Phi'(\bar{z})} - \overline{\Psi(\bar{z})} \Rightarrow \Phi(z) = -\overline{\Phi}(z) - z\overline{\Phi'}(z) - \overline{\Psi}(z)$. Соответственно, на границе $\mathrm{Im}(z) = 0$ (на границе L, при $z \to t$ со стороны S^+) имеем:

$$\Phi^+(t) = -\overline{\Phi}^+(t) - t\,\overline{\Phi'}^+(t) - \overline{\Psi}^+(t) \quad .$$

Сопоставление полученных соотношений для $\Phi^-(t)$ и $\Phi^+(t)$ с учетом равенства $\overline{F}^-(t) = \overline{F}^+(t)$, принимающего здесь форму $\overline{\Phi}^-(t) = \overline{\Phi}^+(t)$ и $\overline{\Psi}^-(t) = \overline{\Psi}^+(t)$, позволяет получить:

$$\Phi^-(t) = \Phi^+(t) \quad .$$

Следовательно, функция $\Phi(z)=-\overline{\Phi}(z)-z\overline{\Phi'}(z)-\overline{\Psi}(z)$, определенная в верхней полуплоскости S^+, является аналитическим продолжением через ненагруженные участки границы L голоморфной в нижней полуплоскости S^- функции $\Phi(z)$. Иными словами, функция $\Phi(z)=-\overline{\Phi}(z)-z\overline{\Phi'}(z)-\overline{\Psi}(z)$ представляет кусочно-голоморфную функцию во всей плоскости, разрезанной вдоль нагруженных участков границы L.

Аналитическое продолжение комплексной функции $\Psi(z)$ на верхнюю полуплоскость S^+ легко получить, используя соответствующее соотношение для функции $\Phi(z)$. Действительно, $\Phi(z)=$ $=-\overline{\Phi}(z)-z\overline{\Phi'}(z)-\overline{\Psi}(z) \xrightarrow{z\to\bar{z}} \overline{\Phi}(z)=-\Phi(z)-z\Phi'(z)-\Psi(z)$, откуда имеем:

$$\Psi(z)=-\Phi(z)-\overline{\Phi}(z)-z\Phi'(z)\ .$$

Полученное соотношение позволяет упростить формулы, описывающие напряженное состояние, записав их через *одну* функцию $\Phi(z)$, определенную как в верхней, так и в нижней полуплоскости:

$$\begin{gathered}\sigma_x+\sigma_y=2\left[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\right]\ ,\\ \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\left[(\bar{z}-z)\Phi'(z)-\Phi(z)-\overline{\Phi}(z)\right]\ .\end{gathered}\tag{1.8}$$

Переходя во втором уравнении к сопряженным значениям и складывая его с первым, можно получить еще одно соотношение для напряжений, удобное для использования в некоторых случаях:

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=\Phi(z)-\Phi(\bar{z})+(z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)}\ . \tag{1.8, a}$$

Для аналогичных преобразований формулы, определяющей комплексное представление перемещений, необходимо получить аналитическое продолжение на верхнюю полуплоскость S^+ функций $\varphi(z)$ и $\psi(z)$. С этой целью продолжим голоморфную в области S^- функцию $\varphi(z)$ в область S^+ так, чтобы в этой области $\varphi'(z)=\Phi(z)$, где функция $\Phi(z)$ уже определена соотношением:

$$\Phi(z)=-\overline{\Phi}(z)-z\overline{\Phi}'(z)-\overline{\Psi}(z) \;\Rightarrow\; \Phi(z)=-\left[z\overline{\varphi}'(z)+\overline{\psi}(z)\right]' \ .$$

Представленные соотношения позволяют определить производную функции $\varphi(z)$ и саму функцию:

$$\varphi'(z)=-\left[z\overline{\varphi}'(z)+\overline{\psi}(z)\right]' \;\Rightarrow\; \varphi(z)=-z\overline{\varphi}'(z)-\overline{\psi}(z)+\text{const} \ .$$

Аналитическое продолжение комплексной функции $\psi(z)$ на верхнюю полуплоскость S^+ легко получить аналогично тому, как это было сделано для функции $\Psi(z)$. Будем иметь:

$$\psi(z)=-\overline{\varphi}(z)-z\varphi'(z)+\text{const} \ .$$

Теперь и перемещения могут быть представлены через *одну* функцию $\varphi(z)$, определенную как в верхней, так и в нижней полуплоскости:

$$2\mu(u+iv)=\kappa\varphi(z)+\varphi(\bar{z})-(z-\bar{z})\overline{\varphi'(z)}+\text{const} \ . \qquad (1.9)$$

Отметим, что постоянная, входящая в полученную формулу, определяет жесткое поступательное перемещение всего тела и, соответственно, может быть принята равной нулю.

1.6.2. Решение первой основной граничной задачи для полуплоскости

Пусть тело занимает нижнюю полуплоскость (см. рис. 1.2). Будем считать, что заданы внешние нагрузки в форме давления $P(t)$

и сдвигающих усилий $T(t)$, приложенных ко всей границе L, причем $P(\infty)=T(\infty)=0$ (нагрузки исчезают при $t\to\infty$). Напомним, что составляющая $P(t)$ представляет собой проекцию внешней нагрузки на внешнюю нормаль $\vec{n}$, а $T(t)$ – проекция той же нагрузки на касательную $\vec{t}$ к границе, направленную влево, если смотреть вдоль $\vec{n}$ (по положительному направлению обхода контура).

Согласно соотношению (1.8, а) граничное условие в поставленной задаче принимает вид:

$$\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=P(t)+iT(t) \quad ,$$

поскольку при z, стремящемся к t из нижней полуплоскости, $\Phi(z)$ стремится к $\Phi^{-}(t)$, $\Phi(\bar{z})$ стремится к $\Phi^{+}(t)$, а $(z-\bar{z})\overline{\Phi'(z)}=$ $=2iy\overline{\Phi'(z)}$ стремится к нулю. Тем самым, задача сведена к отысканию кусочно-голоморфной функции $\Phi(z)$ по заданному скачку $\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=f(t)$ на L. Решение этой задачи известно:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{f(t)}{t-z}\,dt=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{P(t)+iT(t)}{t-z}\,dt \quad .$$

Таким образом, первая основная граничная задача для полуплоскости решена, поскольку функция $\Phi(z)$ определяет и компоненты тензора напряжений, и перемещения по уже известным формулам.

1.6.3. Решение первой основной граничной задачи для плоскости с прямолинейными разрезами

Пусть область S', занятая упругим телом, представляет собой всю плоскость, разрезанную вдоль n отрезков $L_k=a_kb_k$ ($k=1,2,\ldots,n$) оси x; совокупность всех этих отрезков обозначим через L.

В отличие от ранее рассматриваемой задачи (см. раздел 1.6.1), будем предполагать, что напряжения *ограничены* на бесконечности. В этом случае комплексные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ принимают вид (см. раздел 1.3.3):

$$\varphi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\ln z + \Gamma z + \varphi_0(z) \quad ,$$

$$\psi(z) = \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)}\ln z + \Gamma' z + \psi_0(z) \quad ,$$

где $\Gamma = B + iC$, $\Gamma' = B' + iC'$ – комплексные постоянные; $\varphi_0(z)$ и $\psi_0(z)$ – функции, представляемые при достаточно больших значениях $|z|$ разложениями вида

$$\varphi_0(z) = a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \ldots \quad , \qquad \psi_0(z) = a'_0 + \frac{a'_1}{z} + \frac{a'_2}{z^2} + \ldots$$

Соответственно, комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ при достаточно больших значениях $|z|$ можем записать в форме:

$$\Phi(z) = -\frac{X+iY}{2\pi(1+\kappa)}\frac{1}{z} + \Gamma + O\left(\frac{1}{z^2}\right) ,$$

$$\Psi(z) = \frac{\kappa(X-iY)}{2\pi(1+\kappa)}\frac{1}{z} + \Gamma' + O\left(\frac{1}{z^2}\right) .$$

Действительные постоянные B , B' и C' , входящие в соотношения для функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ посредством комплексных постоянных Γ и Γ' , имеют простой физический смысл.

$$B = (N_1 + N_2)/4 \quad ,$$

$$\Gamma' = B' + iC' = -(N_1 - N_2)e^{-2i\alpha}/2 \quad ,$$

где N_1 и N_2 – значения главных напряжений на бесконечности; α – угол, который главная ось 1 составляет с осью x. Постоянная C может быть принята равной нулю.

Введем в рассмотрение новую функцию

$$\Omega(z)=\overline{\Phi}(z)+z\overline{\Phi'}(z)+\overline{\Psi}(z) \ ,$$

которая на основании имеющихся соотношений будет иметь вид:

$$\Omega(z)=\frac{\kappa(X+iY)}{2\pi(1+\kappa)}\frac{1}{z}+\overline{\Gamma}+\overline{\Gamma}'+O\left(\frac{1}{z^2}\right) \ .$$

Комплексная функция $\Psi(z)$ может быть определена через новую функцию $\Omega(z)$ следующим образом:

$$\Psi(z)=\overline{\Omega}(z)-\Phi(z)+z\Phi'(z) \ ,$$

что позволяет представить напряжения через комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$. В частности, соотношение (1.8, а)

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}+z\overline{\Phi'(z)}+\overline{\Psi(z)}$$

будет иметь вид:

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=\Phi(z)+\Omega(\bar{z})+(z-\bar{z})\,\overline{\Phi'(z)} \ . \qquad (1.8,\ б)$$

Аналогично можно преобразовать и соотношение, определяющее перемещения (1.2), если вместо функции $\psi(z)$ ввести новую функцию

$$\omega(z)=\int\Omega(z)dz=z\overline{\Phi}(z)+\overline{\psi}(z)+\text{const} \ .$$

Будем иметь:

$$2\mu(u+iv)=\kappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 2\mu(u+iv)=\kappa\varphi(z)-\omega(\bar{z})-(z-\bar{z})\overline{\Phi(z)}+\text{const} \ . \qquad (1.9, а)$$

Перейдем теперь к решению первой основной задачи. Будем считать, что заданы внешние нагрузки $\overline{X}^{+}$, $\overline{Y}^{+}$, $\overline{X}^{-}$, $\overline{Y}^{-}$, приложенных ко всей границе L; верхними индексами "$+$" и "$-$" отмечены значения нагрузок, принимаемые соответственно на верхних и нижних краях разрезов. Кроме того, будем считать заданными постоянные $\Gamma=\overline{\Gamma}=B$ (постоянная C принята равной нулю) и $\Gamma'=B'+iC'$, т.е. считаем заданными напряжения на бесконечности.

Согласно соотношению (1.8, б) граничные условия в поставленной задаче принимает вид:

$$\Phi^{+}(t)+\Omega^{-}(t)=\overline{Y}^{+}-i\,\overline{X}^{+} \quad , \qquad \Phi^{-}(t)+\Omega^{+}(t)=\overline{Y}^{-}-i\,\overline{X}^{-} \ .$$

Складывая и вычитая полученные уравнения, имеем:

$$\left[\Phi(t)+\Omega(t)\right]^{+}+\left[\Phi(t)+\Omega(t)\right]^{-}=2p(t) \ , \qquad (1.10)$$

$$\left[\Phi(t)-\Omega(t)\right]^{+}-\left[\Phi(t)-\Omega(t)\right]^{-}=2q(t) \ , \qquad (1.11)$$

где $2p(t)$, $2q(t)$ – заданные на L функции:

$$2p(t)=\left[\overline{Y}^{+}+\overline{Y}^{-}\right]-i\left[\overline{X}^{+}+\overline{X}^{-}\right] \ ,$$

$$2q(t)=\left[\overline{Y}^{+}-\overline{Y}^{-}\right]-i\left[\overline{X}^{+}-\overline{X}^{-}\right] \ .$$

Так как $\Phi(\infty)-\Omega(\infty)=-\Gamma'$, то общее решение граничной задачи (1.11) определяется формулой:

$$\Phi(z)-\Omega(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{q(t)}{t-z}\,dt-\overline{\Gamma}' \ . \qquad (1.12)$$

Далее, вводя в рассмотрение функцию

$$\mathrm{X}(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-a_k)^{1/2}(z-b_k)^{1/2} \quad , \tag{1.13}$$

запишем общее решение граничной задачи (1.10) [1]:

$$\Phi(z)+\Omega(z)=\frac{1}{\pi i\,\mathrm{X}(z)}\int_L \frac{\mathrm{X}^+(t)p(t)}{t-z}\,dt+\frac{2P_n(z)}{\mathrm{X}(z)} \quad . \tag{1.14}$$

Здесь $P_n(z)$ обозначает полином степени не выше n:

$$P_n(z)=C_0 z^n+C_1 z^{n-1}+\ldots+C_n \quad ,$$

а под $\mathrm{X}^+(t)$ подразумевается значение, принимаемое функцией $\mathrm{X}(z)$ на левой стороне L.

Из формул (1.12) и (1.14) следует:

$$\begin{aligned}
\Phi(z)&=\Phi_0(z)+\frac{P_n(z)}{\mathrm{X}(z)}-\frac{1}{2}\overline{\Gamma}' \quad ,\\
\Omega(z)&=\Omega_0(z)+\frac{P_n(z)}{\mathrm{X}(z)}+\frac{1}{2}\overline{\Gamma}' \quad ,
\end{aligned} \tag{1.15}$$

где

$$\Phi_0(z)=\frac{1}{2\pi i\,\mathrm{X}(z)}\int_L \frac{\mathrm{X}^+(t)p(t)}{t-z}\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q(t)}{t-z}\,dt \quad ,$$

$$\Omega_0(z)=\frac{1}{2\pi i\,\mathrm{X}(z)}\int_L \frac{\mathrm{X}^+(t)p(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{q(t)}{t-z}\,dt \quad .$$

[1] Решение дается без вывода. Полное решение задачи приводится в работе [7].

Остается определить полином $P_n(z)$. Для определенности будем считать, что под функцией $X(z)$ подразумевается ветвь, имеющая при больших значениях $|z|$ вид:

$$X(z) = z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots$$

Коэффициент C_0 сразу определяется по первой из формул (1.15) и по условию $\Phi(\infty) = \Gamma$:

$$C_0 = \Gamma + \frac{1}{2}\,\Gamma' \ .$$

Остальные коэффициенты должны быть определены из условия однозначности перемещений, комплексное представление которых дано формулой:

$$2\mu(u + iv) = \kappa\varphi(z) - \omega(\bar{z}) - (z - \bar{z})\overline{\Phi(z)} + \text{const} \ .$$

Приведенное соотношение показывает, что выдвинутое условие будет выполняться, если функция $\kappa\varphi(z) - \omega(\bar{z})$ будет возвращаться к своим первоначальным значениям, когда точка z описывает замкнутые контуры Λ_k, охватывающие отрезки $a_k b_k = L_k$ ($k = 1, 2, \ldots, n$). Стягивая контуры Λ_k к отрезкам L_k, условие однозначности перемещений можно привести к следующим равенствам:

$$2(\kappa + 1)\int\limits_{L_k} \frac{P_n(t)}{X(t)}\,dt + \kappa\int\limits_{L_k}\left[\Phi_0^+(t) - \Phi_0^-(t)\right]dt + \int\limits_{L_k}\left[\Omega_0^+(t) - \Omega_0^-(t)\right]dt = 0 \ ,$$

которые представляют собой систему линейных уравнений относительно постоянных C_1, C_2, . . . , C_n .

В частном случае, когда края разрезов (щелей) свободны от напряжений (*растяжение пластины, ослабленной разрезами*), функции $\Phi_0(z)$ и $\Omega_0(z)$ равны нулю и решение принимает достаточно простой вид:

$$\Phi(z) = \frac{P_n(z)}{X(z)} - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}' \quad , \quad \Omega(z) = \frac{P_n(z)}{X(z)} + \frac{1}{2}\overline{\Gamma}' \quad . \tag{1.16}$$

В этом случае коэффициенты полинома $P_n(z)$ определяются соотношениями:

$$C_0 = \Gamma + \frac{1}{2}\,\Gamma' \quad , \quad \int\limits_{L_k} \frac{P_n(t)}{X^+(t)}\,dt = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \; .$$

При $n = 1$ (*растяжение пластины, ослабленной одним разрезом*), полагая $a_1 = -l$, $b_1 = l$ (l – полудлина разреза), получим совсем простые формулы:

$$\Phi(z) = \frac{\left(2\Gamma + \overline{\Gamma}'\right)z}{2\sqrt{z^2 - l^2}} - \frac{1}{2}\overline{\Gamma}' \; , \quad \Omega(z) = \frac{\left(2\Gamma + \overline{\Gamma}'\right)z}{2\sqrt{z^2 - l^2}} + \frac{1}{2}\overline{\Gamma}' \; . \tag{1.17}$$

Представленные функции определяют напряженное состояние неограниченной пластины с одиночным разрезом.

1.7. Напряженное состояние в вершине разреза (трещины) при растяжении пластины

В расчетах на прочность элементов конструкций и сооружений с трещинами отправной точкой является исследование напряжений и деформаций, возникающих в них под действием приложенных нагрузок. При этом особый интерес представляет область в непосредственной близости к вершине (кончику) трещины, размеры которой малы по сравнению с размерами тела и трещины, поскольку именно в этой области начинается дальнейшее разрушение. В рамках линейной механики разрушения, исходящей из модели идеально упругого тела и представляющей трещину в виде разреза нулевой толщины, поверхности которого свободны от напряжений, задача определения напряженного состояния в вершине трещины сводится к граничной задаче теории упругости для плоскости с полубесконечным разрезом при соответствующем нагружении.

Рассмотрим задачу о растяжении плоскости с одиночным разрезом (трещиной), ориентированным перпендикулярно растягивающим напряжениям σ, приложенным на бесконечности, а нагрузка на верхнем и нижнем краях разреза равна нулю. Разрез занимает область $y = 0$, $|x| \le l$.

Поскольку в рассматриваемом случае $N_1 = \sigma$, $N_2 = 0$, $\alpha = \pi/2$, будем иметь: $B = \sigma/4$, $\Gamma = \sigma/4$ (постоянная C равна нулю) и $\Gamma' = B' + iC' = \sigma/2$.

Соответственно, комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$, определяемые соотношениями (1.17), принимают вид:

$$\Phi(z) = \frac{\sigma z}{2\sqrt{z^2 - l^2}} - \frac{\sigma}{4}, \quad \Omega(z) = \frac{\sigma z}{2\sqrt{z^2 - l^2}} + \frac{\sigma}{4}.$$

Напомним, что полученные соотношения определяют напряженное состояние неограниченной пластины с одиночным разрезом при больших значениях $|z|$. Для перехода к задаче определения напряженного состояния в вершине трещины (к задаче для плоскости с полубесконечным разрезом) введем полярные координаты r, θ, поместив начало координат в вершине разреза, и новую комплексную переменную $\zeta = z - l = re^{i\theta}$ ($z = \zeta + l$). Комплексные функции $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ будут иметь вид:

$$\Phi(z) = \frac{\sigma(\zeta + l)}{2\sqrt{\zeta(\zeta + 2l)}} - \frac{\sigma}{4},$$

$$\Omega(z)=\frac{\sigma(\zeta+l)}{2\sqrt{\zeta(\zeta+2l)}}+\frac{\sigma}{4}\quad .$$

При малых (сравнительно с длиной трещины) значениях $|\zeta|$ асимптотическое представление комплексных функций $\Phi(z)$ и $\Omega(z)$ в окрестности вершины разреза позволяет получить:

$$\Phi(z)\big|_{|\zeta|\to 0}=\Omega(z)\big|_{|\zeta|\to 0}=\frac{\sigma\sqrt{\pi l}}{2\sqrt{2\pi\zeta}}=\frac{K_{\mathrm{I}}\,e^{-i\theta/2}}{2\,\sqrt{2\pi r}}\quad ,$$

где введено обозначение: $K_{\mathrm{I}}=\sigma\sqrt{\pi l}$ – коэффициент интенсивности напряжений для трещины нормального отрыва (для трещины типа I).

Напряженное состояние в вершине трещины определим, используя первое из соотношений (1.8) и соотношение (1.8, а):

$$\sigma_x+\sigma_y=2\left[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\right]\quad ,$$

$$\sigma_y-i\tau_{xy}=\Phi(z)+\Omega(\bar z)+(z-\bar z)\,\overline{\Phi'(z)}\quad .$$

Используя второе из представленных зависимостей, для нормального напряжения σ_y можем получить:

$$\sigma_y=\mathrm{Re}\left[\Phi(z)+\Omega(\bar z)+(z-\bar z)\,\overline{\Phi'(z)}\right]=$$

$$=\frac{K_{\mathrm{I}}}{2\,\sqrt{2\pi r}}\mathrm{Re}\left[\exp\left(-\frac{i\theta}{2}\right)+\exp\left(\frac{i\theta}{2}\right)-i\sin\theta\cdot\exp\left(\frac{3i\theta}{2}\right)\right]\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad \sigma_y=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1+\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\quad .$$

Аналогичным образом находим соотношение, определяющее касательное напряжение τ_{xy}:

$$-i\tau_{xy}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{2\sqrt{2\pi r}}\left(-i\sin\theta\cos\frac{3\theta}{2}\right)\Rightarrow\tau_{xy}=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{3\theta}{2}\;.$$

Соответственно, для нормального напряжения σ_x будем иметь:

$$\sigma_x=2\left[\Phi(z)+\overline{\Phi(z)}\right]-\sigma_y\quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\qquad\sigma_x=\frac{K_{\mathrm{I}}}{\sqrt{2\pi r}}\cos\frac{\theta}{2}\left(1-\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{3\theta}{2}\right)\;.$$

Обратим внимание, что введенный параметр $K_{\mathrm{I}}=\sigma\sqrt{\pi l}$ является мерой сингулярности напряжений в области, прилегающей к вершине трещины, и играет для этой области такую же роль, как коэффициенты концентрации напряжений для макрообъемов тела. В отличие от коэффициентов концентрации коэффициенты интенсивности напряжений имеют размерность ($\text{МПа}\sqrt{\text{м}}$ или $\text{кг/мм}^{3/2}$). Очевидно, что можно говорить о трещинах поперечного (тип трещины II) и продольного (тип III) сдвига.

Особенностью поля напряжений в вершине трещины является то, что асимптотика напряженного состояния не зависит от длины трещины, формы тела и схемы действующих нагрузок. С другой стороны, интенсивность асимптотического распределения напряжений определяется только коэффициентом интенсивности напряжений, являющимся функцией проложенной нагрузки, геометрии тела и трещины, но не зависящим от координат r , θ точки вблизи вершины разреза.

Таким образом, коэффициенты интенсивности напряжений являются базовыми характеристиками напряженно-деформированного состояния в вершине трещины. Определение этих величин для тел с трещинами на основе решения соответствующих краевых задач является обширной самостоятельной областью математической теории упругости.

2. Изгиб тонких плит (пластин)

Пластиной (плитой) будем называть тело призматической или цилиндрической формы, у которого высота h мала по сравнению с размерами основания.

Пластины, толщина которых не превышает $1/5$ наименьшего размера основания, относятся к *тонким*. Расчеты таких пластин ведут на основе классической теории изгиба, базирующейся на гипотезах Кирхгофа. Расчеты пластин, толщина которых превышает $1/5$ наименьшего размера основания, ведут на основе теории *толстых* плит.

Плоскость, делящая толщину пластины пополам, называется *срединной*. Перемещения, которые получают точки срединной плоскости при нагружении пластины нагрузкой, перпендикулярной к срединной плоскости (при изгибе пластины), называют *прогибами*. Срединная плоскость после деформирования пластины переходит в *срединную поверхность*.

Пластину считают *жесткой*, если величина максимального прогиба (*стрелы прогиба*) не превышает $1/5$ толщины. При построении теории изгиба жесткой пластины можно пренебречь напряжениями растяжения (сжатия), равномерно распределенными по толщине пластины (*мембранными* напряжениями). Для *гибких* пластин, наряду с изгибными напряжениями, учет мембранных напряжений необходим. Пластину принято считать *абсолютно гибкой* или *мембраной*, если стрела прогиба превышает толщину в 5 и более раз. При расчете мембраны можно пренебречь изгибными напряжениями по сравнению с мембранными напряжениями в срединной плоскости.

Построение *инженерной теории* изгиба тонких пластин базируется на следующих основных допущениях (гипотезах):

– прямая, нормальная к срединной плоскости пластины до изгиба, переходит в нормаль к срединной поверхности после изгиба (гипотеза Кирхгофа – Лява);

– напряжением, действующим в направлении, перпендикулярном срединной поверхности, можно пренебречь;

– срединная плоскость остается после изгиба нейтральной.

2.1. Изгиб прямоугольных пластин

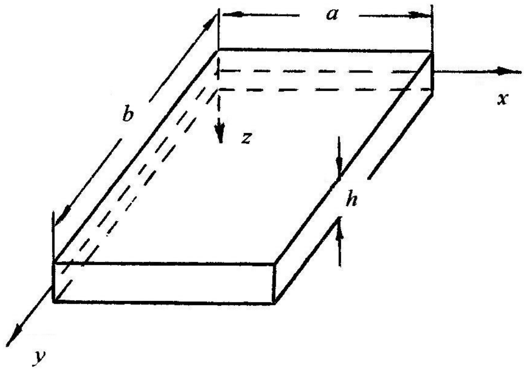

Рис. 2.1

Выберем систему координат так, чтобы плоскость xy являлась срединной плоскостью пластины, а ось z располагалась в направлении ее толщины (рис. 2.1). Размеры пластины показаны на рисунке.

Гипотезу о прямых нормалях в рассматриваемом случае можно трактовать как требование неизменности прямых углов в плоскостях xz и yz, что означает отсутствие сдвигов γ_{xz} и γ_{yz} в этих плоскостях ($\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$) и равенство нулю соответствующих касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz} ($\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$).

Вторая гипотеза позволяет утверждать, что на площадках, параллельных срединной плоскости, можно пренебречь нормальным напряжением σ_z ($\sigma_z = 0$). Соответственно, можно пренебречь взаимным нажатием горизонтальных слоев пластины и принять, что линейная деформация ε_z равна нулю ($\varepsilon_z = 0$). Как следствие, можно утверждать, что вертикальные перемещения точек (прогибы w) в пределах нормали (по толщине пластины) остаются постоянными и равными вертикальным перемещениям точек срединной поверхности $w = w(x, y)$. Поскольку принято, что срединная плоскость остается после изгиба нейтральной, для точек этой плоскости имеем $u_0 = 0$, $v_0 = 0$, $w_0 = w(x, y)$.

Принятые допущения существенно упрощают анализ напряженно-деформированного состояния изгибаемой пластины и позволяют в качестве расчетной схемы использовать элемент срединной плоскости пластины вместо ее элемента объема.

2.1.1. Уравнение прогибов при изгибе прямоугольной пластины

Примем, что на верхней плоскости пластины действует нормальная к ней нагрузка $p(x, y)$, а нижняя плоскость свободна от нагрузки. Объемные силы учитывать не будем, поскольку в задачах изгиба пластин они обычно малы по сравнению с поперечной нагрузкой $p(x, y)$.

Учитывая рассматриваемый характер деформирования пластины (изгиб), нагрузку на элемент срединной плоскости представим в виде изгибающих моментов M_x, M_y, скручивающего момента M_{xy} и перерезывающих сил Q_x и Q_y (рис.2.2). Индексация сил и моментов является общепринятой в теории пластин и оболочек. На рисунке показаны положительные направления сил и моментов[1], причем $M_{xy} = -M_{yx}$.

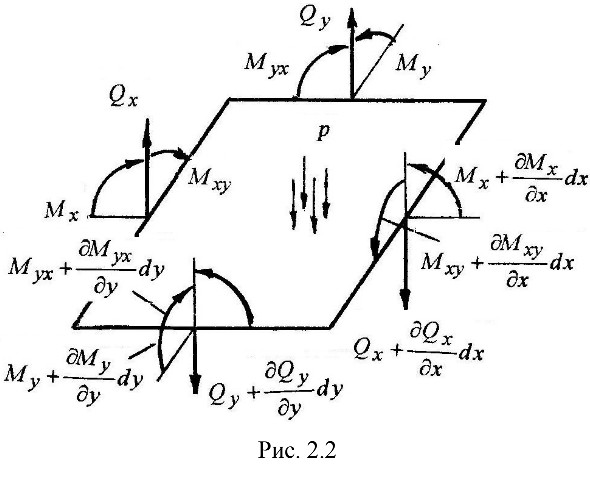

Рис. 2.2

Запишем уравнения равновесия выделенного элемента пластины. Отметим, что поскольку срединную плоскость после изгиба

---

[1] Изгибающий момент считается положительным, если в выбранной координатной системе вектор момента направлен по положительному направлению внешней нормали (или касательной) к площадке. Положительное направление касательной к площадке определяется направлением нормали, повернутой на 90° против часовой стрелки, если смотреть с конца оси z.

считаем нейтральной (недеформируемой), уравнения сил $\sum X = 0$ и $\sum Y = 0$ удовлетворяются тождественно. Проектируя все силы на направление оси z, получим:

$$\sum Z = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad .$$

Уравнение моментов относительно оси x после отбрасывания слагаемых высших порядков малости принимает вид:

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} + Q_y = 0 \quad .$$

Аналогичный вид будет иметь уравнение моментов относительно оси y:

$$\frac{\partial M_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad .$$

Полученные три уравнения полностью описывают равновесие выделенного элемента пластины, поскольку уравнение моментов относительно оси z удовлетворяется тождественно.

Определив перерезывающие силы Q_x и Q_y из уравнений моментов (с учетом соотношения $M_{xy} = -M_{yx}$)

$$Q_x = -\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} \quad , \qquad Q_y = -\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} \quad , \tag{2.1}$$

и подставив их значения в уравнение сил, будем иметь:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p(x, y) \quad . \tag{2.2}$$

Полученное соотношение показывает, что задача изгиба пластины является статически неопределимой (одно уравнение статики – три неизвестных момента), и для дальнейшего ее решения необходимо рассматривать деформированное состояние пластины и привлекать уравнения линейного физического закона, связывающие деформации и напряжения.

Напомним, что используемые при построении *инженерной теории* изгиба тонких пластин допущения (гипотезы) позволили сделать существенные упрощения в напряженно-деформированном состоянии изгибаемой пластины. Действительно, имеем:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \ ;$$
$$\sigma_z = 0 \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_z = 0 \quad \Rightarrow \quad w = w(x, y) \ .$$

Отметим, однако, что гипотеза о прямых нормалях входит в некоторое противоречие с расчетной схемой, принятой при рассмотрении равновесия элемента пластины. Так, наличие перерезывающих сил Q_x и Q_y в расчетной схеме обусловлено характером деформирования пластины, а реализация упомянутой гипотезы требует равенства нулю касательных напряжений τ_{xz} и τ_{yz}, которые определяют эти силы. В дальнейшем будем считать, что деформации сдвига γ_{xz} и γ_{yz} достаточно малы, чтобы ими можно было пренебречь *при анализе деформированного состояния*, но перерезывающие силы Q_x и Q_y являются величинами того же порядка, что и нагрузка $p(x, y)$, и моменты M_x, M_y и M_{xy}.

Реализуя условие $\gamma_{xz} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} = 0$, можем получить:

$$u = -z\frac{\partial w}{\partial x} + f(x, y) \quad \Rightarrow \quad u = -z\frac{\partial w}{\partial x} \ ,$$

поскольку $u\big|_{z=0} = 0$. Аналогичным образом, из условия $\gamma_{yz} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0$ будем иметь, что $v = -z\dfrac{\partial w}{\partial y}$.

Переходя к уравнениям линейного физического закона и учитывая, что $\varepsilon_z = \sigma_z = 0$, можем записать:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \nu\sigma_y\right) \ ,$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \nu\sigma_x\right) \ ,$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\ \tau_{xy} \ .$$

Полученные уравнения позволяют представить напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} через производные от перемещений u, v и, далее, через производные от перемещения w:

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu\frac{\partial v}{\partial y}\right) \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu\frac{\partial u}{\partial x}\right) \\
\tau_{xy} &= \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)
\end{aligned}
\quad \xrightarrow[\;v=-z\frac{\partial w}{\partial y}\;]{\;u=-z\frac{\partial w}{\partial x}\;} \quad
\begin{aligned}
\sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right), \\
\sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right), \\
\tau_{xy} &= -\frac{Ez}{\left(1+\nu\right)}\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \ .
\end{aligned}$$

Дальнейший путь решения поставленной задачи очевиден: необходимо представить моменты M_x, M_y и M_{xy} через напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy} и, используя соотношение (2.2), получить разрешающее уравнение относительно перемещения w (уравнение прогибов).

Поскольку в теории пластин и оболочек принято оперировать силами и моментами, отнесенными к единице длины сечения, зависимости, связывающие моменты и напряжения, имеют вид:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z\,dz \ , \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_y z\,dz \ , \quad M_{xy} = -\int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xy} z\,dz \ .$$

После подстановки значений напряжений и интегрирования представленных соотношений, получим:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \ ,$$

$$M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \ ,$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \ ,$$

где $D = Eh^3/12\left(1-\nu^2\right)$ – цилиндрическая жесткость пластины.

Соответственно, уравнение прогибов (уравнение Софи Жермен, 1815 г.) будет иметь вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x,y)}{D} \quad \Rightarrow \qquad (2.3)$$

$$\Rightarrow \qquad \nabla^2\nabla^2 w = p(x,y)/D \ .$$

Таким образом, задача изгиба прямоугольной пластины при приложении к ней поперечной нагрузки сведена к решению неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка в частных производных с постоянными коэффициентами. Постоянные интегрирования должны быть найдены из граничных условий на краях (контуре) пластины.

Отметим, что цилиндрическая жесткость пластины D имеет тот же смысл, что и жесткость EJ балки при изгибе. Значения жесткости D для пластины постоянной толщины h и жесткости EJ балки прямоугольного сечения, имеющей эту же высоту, а ширину, равную единице, отличаются лишь на величину $0 < 1-\nu^2 < 1$, причем $D > EJ$.

2.1.2. Граничные условия при изгибе

Постоянные интегрирования уравнения прогибов (2.3) должны быть найдены из граничных условий на краях (контуре) пластины.

Отметим, что на краю пластины, не считаясь с условиями его закрепления, в каждой точке можем задавать статические граничные условия – моменты и перерезывающие силы (см. рис. 2.2). Соответственно, для различных условий закрепления края пластины можем ставить условия относительно прогиба и углов поворота сечений – геометрические граничные условия. Очевидно, возможны и смешанные граничные условия. В такой ситуации, естественно, возникает вопрос о числе граничных условий, необходимых для обеспечения существования и единственности решения.

Доказано (Кирхгоф, 1850 г.), что для *полного* определения прогиба w, удовлетворяющего уравнению (2.3), достаточно *двух* граничных условий на каждой из граней прямоугольной пластины (общее число граничных условий определяется порядком дифференциального уравнения).

Край пластины жестко закреплен. Для определенности будем считать, что жестко закреплен край $y=0$ (см. рис. 2.1). В этом случае прогиб w и угол поворота $\partial w/\partial y$ в точках края должны быть равны нулю:

$$w\big|_{y=0}=0\ ,\qquad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0}=0\ .$$

Край пластины шарнирно оперт на жесткую опору. Шарнирно опертый край пластины не смещается в вертикальной плоскости, но может свободно поворачиваться. Для определенности будем считать, что шарнирно оперт край $x=a$ (см. рис. 2.1). В этом случае прогиб w и изгибающий момент M_x вдоль края должны равняться нулю:

$$w\big|_{x=a}=0\ ,\quad M_x\big|_{x=a}=0\quad\Rightarrow\quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right|_{x=a}=0\ .$$

Но условие $w = 0$ вдоль края $x = a$ означает, что одновременно имеем:

$$\partial w / \partial y \,\Big|_{x=a} = \partial^2 w / \partial y^2 \,\Big|_{x=a} = 0 \ .$$

Таким образом, для шарнирно опертого края пластины $x = a$ граничные условия имеют вид:

$$w\Big|_{x=a} = 0 \ , \quad \partial^2 w / \partial x^2 \,\Big|_{x=a} = 0 \ .$$

Свободный край. Если край пластины свободен, то естественно считать, что по этому краю нет ни моментов, ни перерезывающих сил. Полагая для определенности, что свободным является край $x = a$ (см. рис. 2.1), можем записать:

$$M_x \Big|_{x=a} = 0 \ , \quad M_{xy} \Big|_{x=a} = 0 \ , \quad Q_x \Big|_{x=a} = 0 \ .$$

Из физических соображений ни одним из этих трех граничных условий пренебречь нельзя, однако возникшая трудность может быть устранена объединением двух условий относительно момента M_{xy} и перерезывающей силы Q_x в одно.

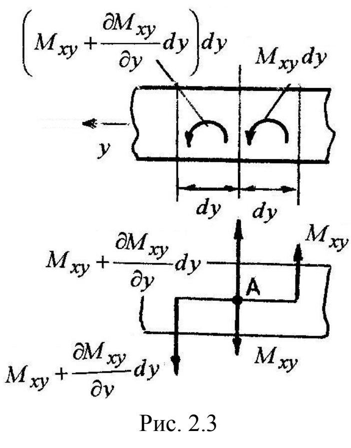

Рис. 2.3

Действительно, скручивающий момент $M_{xy} dy$, действующий на элементе длины dy края пластины $x = a$, на основании принципа Сен-Венана можно представить в виде двух статически эквивалентных сил M_{xy}, действующих на расстоянии dy друг от друга (рис. 2.3). Для следующего элемента длины dy скручивающий момент имеет величину $\left(M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy \right) dy$. Этот момент представляется двумя силами $M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dy$ на том же плече dy. Как результат таких замен моментов на силы, имеем, что в точке A действует сила $\left(\partial M_{xy} / \partial y \right) dy$, направленная вверх. Соответственно, на единицу длины будет приходиться перерезывающая сила $\partial M_{xy} / \partial y$. Таким образом, получили, что распределение скручивающих моментов M_{xy} статически эквивалентно распределению перерезывающих сил $Q_x^{'} = -\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}$ (принято во внимание правило знаков для перерезывающих сил). Соответственно, объединенное граничное условие будет выглядеть следующим образом:

$$Q_x - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \bigg|_{x=a} = 0 \quad .$$

Переходя в граничных условиях от сил и моментов к прогибу w, получим:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \bigg|_{x=a} = 0 \ , \qquad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \left(2 - \nu \right) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \bigg|_{x=a} = 0 \quad .$$

Отметим, что рассмотренная выше замена распределения скручивающих моментов, действующих на краю изгибаемой пластины, на статически эквивалентное распределение перерезывающих сил оказывает влияние на распределение напряжений в непосредственной близости к краю пластины, но в остальной части пластины распределение напряжений остается без изменений.

Заканчивая рассмотрение граничных условий для свободной грани, отметим, что в процессе преобразования скручивающего момента M_{xy} в эквивалентную поперечную нагрузку $Q_x^{'}$ получим еще две неуравновешенные сосредоточенные силы в концах края. По величине эти силы равны значениям момента M_{xy} в соответствующих углах пластины и направлены в разные стороны. Если стороны пластины, примыкающие к свободному краю, защемлены или оперты, то учитывать эти силы нет необходимости, так как они будут нейтрализованы реакциями опор. Если же примыкающие стороны тоже свободны, то упомянутые силы должны быть учтены в форме сосредоточенных усилий в углах пластины.

2.1.3. Мембранная аналогия при изгибе прямоугольной пластины

Уравнение четвертого порядка $\nabla^2\nabla^2 w = p(x, y)/D$, определяющее прогиб прямоугольной пластины, можно свести к двум уравнениям второго порядка, используя имеющиеся соотношения для изгибающих моментов:

$$M_x = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) , \quad M_y = -D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) .$$

Действительно, суммируя выписанные соотношения и проводя некоторые преобразования, будем иметь:

$$M_x + M_y = -D(1+\nu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 w = -M / D \ ,$$

где $M = (M_x + M_y)/(1+\nu)$ – приведенный изгибающий момент.

Подставляя полученное значение $\nabla^2 w$ в уравнение прогибов, будем иметь:

$$\nabla^2 M = -p(x, y) \ .$$

Итак, окончательно имеем:

$$\nabla^2\nabla^2 w = p(x, y)/D \qquad \Rightarrow \qquad \begin{aligned} \nabla^2 M &= -p(x, y) \ , \\ \nabla^2 w &= -M / D \ . \end{aligned}$$

Известно, что прогиб $z(x, y)$ мембраны (очень тонкой гибкой пластины), закрепленной на контуре, идентичном контуру изгибаемой пластины, и нагруженной нагрузкой $p(x, y)$, определяется дифференциальным уравнением:

$$\nabla^2 z = -p(x, y)/T \ ,$$

где T – натяжение мембраны (сила, отнесенная к единице длины).

Сравнение двух уравнений, определяющих прогиб прямоугольной пластины, и уравнения прогибов мембраны позволяет сделать следующие выводы:

– если положить $T = 1$, то $z = M$. Это значит, что при натяжении мембраны, равном единице, и нагрузке $p(x, y)$ изогнутая поверхность мембраны $z(x, y)$ определяет эпюру приведенного момента $M(x, y)$;

– если положить $T = D$, $p = M$, то $z = w$. В этом случае при натяжении мембраны, равном жесткости пластины D, и нагрузке в форме эпюры M изогнутая поверхность мембраны $z(x, y)$ определяет поверхность изогнутой пластины $w(x, y)$.

Решения задачи о мембране известны для многих случаев ее нагружения, и ими можно пользоваться при рассмотрении соответствующих задач изгиба пластин.

2.1.4. Потенциальная энергия изогнутой прямоугольной пластины

Потенциальная энергия, накопленная телом при его упругом деформировании, определяется известным соотношением:

$$U = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx} \right) dx dy dz \quad .$$

Для тонких пластин в соответствии с принятыми допущениями о характере напряженно-деформированного состояния имеем, что нормальное напряжение σ_z и угловые деформации γ_{zx} и γ_{zy} являются малыми величинами, и ими можно пренебречь по сравнению с другими компонентами напряжений и деформаций. В этом случае имеем:

$$U = \frac{1}{2} \iiint\limits_V \left(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy} \right) dx dy dz \quad .$$

Исключим из полученного соотношения деформации, используя соответствующие уравнения линейного физического закона. После некоторых преобразований будем иметь:

$$U = \iiint\limits_V \left[\frac{1}{2E} \left(\sigma_x^2 - 2\nu \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 \right) + \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy}^2 \right] dx dy dz \quad .$$

Используя теперь представления напряжений через прогиб $w(x, y)$, потенциальную энергию деформации изогнутой прямоугольной пластины получим в виде:

$$U = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \iiint\limits_V z^2 \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - \right.$$

$$\left. - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy dz \quad .$$

Интегрирование по переменной z по толщине пластины (в пределах от $-h/2$ до $+h/2$) приводит к результату:

$$U = \frac{D}{2} \iint\limits_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dxdy \ ,$$

где A – площадь пластины.

Полученное соотношение, определяющее потенциальную энергию деформации изогнутой прямоугольной пластины, может быть упрощено для пластин произвольной формы с защемленными краями и для прямоугольных пластин, у которых вдоль кромок прогиб равен нулю. Действительно, интегрируя последнее слагаемое по частям, будем иметь:

$$\iint\limits_A \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dxdy = \oint\limits_S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial x} dx - \oint\limits_S \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dy +$$

$$+ \iint\limits_A \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dxdy \quad .$$

Для пластин, края которых защемлены, вдоль кромок выполняются условия: $\partial w / \partial x = \partial w / \partial y = 0$ ($\partial w / \partial n = \partial w / \partial s = 0$). Для прямоугольных пластин, у которых вдоль кромок $w = 0$, имеем, что $\partial w / \partial x = \partial^2 w / \partial x^2 = 0$ вдоль кромок $y = \mathrm{const}$ и $\partial w / \partial y = = \partial^2 w / \partial y^2 = 0$ вдоль кромок $x = \mathrm{const}$. Отсюда следует, что контурные интегралы для рассматриваемых случаев обращаются в нуль, и, таким образом, равен нулю интеграл

$$\iint\limits_A \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dxdy = 0 \quad .$$

Соответственно, потенциальная энергия изгиба будет равна:

$$U = \frac{D}{2} \iint_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dxdy \quad .$$

Полученные соотношения для потенциальной энергии деформации изогнутой пластины будут использоваться в дальнейшем при решении задач с использованием энергетических методов.

Задача

2.1.	Изгиб шарнирно опертых прямоугольных пластин.

Задача изгиба прямоугольной пластины при приложении к ней поперечной нагрузки $p(x, y)$ сводится к решению неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка относительно прогиба w:

$$\nabla^2 \nabla^2 w = p(x, y) / D \quad .$$

Постоянные интегрирования должны быть найдены из граничных условий на шарнирно опертых краях пластины:

$$w = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \, , \quad x = a \quad .$$

$$w = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \, , \quad y = b \quad ,$$

где a и b – размеры пластины (см. рис. 2.1).

Решение в двойных тригонометрических рядах (решение Навье). Решение уравнения прогибов будем разыскивать в виде двойного тригонометрического ряда:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad .$$

Подобная форма решения, с одной стороны, позволяет удовлетворить граничные условия на шарнирно опертых краях пластины, а с другой – является наиболее общим, поскольку любая функция двух переменных, удовлетворяющая граничным условиям, представима в виде двойного ряда Фурье.

Представим нагрузку $p(x, y)$ в виде такого же двойного тригонометрического ряда Фурье, как и для функции прогибов:

$$p(x, y)=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad ,$$

где произвольный коэффициент разложения $a_{m'n'}$ определяется известным соотношением:

$$a_{m'n'}=\frac{4}{ab}\int_0^a\int_0^b p(x, y)\sin\frac{m'\pi x}{a}\sin\frac{n'\pi y}{b}\,dxdy \quad .$$

Очевидно, что дальнейшее решение поставленной задачи будет заключаться в определении коэффициентов A_{mn} разложения прогиба w через известные коэффициенты a_{mn} разложения нагрузки $p(x, y)$ при удовлетворении дифференциального уравнения прогибов.

Подставим функцию $w(x, y)$ и нагрузку $p(x, y)$в форме двойных рядов Фурье в уравнение прогибов. Будем иметь:

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^4+2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2+\left(\frac{n\pi}{b}\right)^4\right]\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b}=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{mn}}{D}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad .$$

Из уравнения следует:

$$A_{mn}\,\pi^4\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2=\frac{a_{mn}}{D} \quad \Rightarrow \quad A_{mn}=a_{mn}\,/\,\pi^4 D\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 \quad .$$

С учетом значений найденных коэффициентов A_{mn} функция прогибов $w(x, y)$ будет иметь вид:

$$w(x, y)=\frac{1}{\pi^4 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{a_{mn}\,/\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2\right\}\sin\frac{m\pi x}{a}\sin\frac{n\pi y}{b} \quad .$$

Если поперечная нагрузка равномерно распределена по всей площади пластины ($p(x, y) \to p_0$), коэффициенты ее разложения в двойной ряд Фурье будут определяться соотношением:

$$a_{m'n'} = \frac{4p_0}{ab} \int_0^a \int_0^b \sin\frac{m'\pi x}{a} \sin\frac{n'\pi y}{b}\, dx dy \quad \Rightarrow \quad a_{m'n'} = \frac{16 p_0}{\pi^2 m'n'} \quad ,$$

где m' и n' – нечетные числа.

Функция прогибов $w(x, y)$ в этом случае будет иметь вид:

$$w(x, y) = \frac{16 p_0}{\pi^6 D} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ 1 / \, mn \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \right\} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad ,$$

где $m = 1, 3, 5, \ldots$, $n = 1, 3, 5, \ldots$

Тот факт, что все члены ряда с четными индексами m и n обращаются в нуль, имеет простое физическое объяснение. Действительно, при равномерном нагружении пластины изогнутая поверхность пластины будет симметричной относительно осей $x = a/2$ и $y = b/2$. Слагаемые, определяемые четными значениями m и n , являются несимметричными относительно этих осей и, соответственно, должны быть приравнены нулю.

Зная функцию прогибов, по известным формулам можно найти значения моментов или напряжений.

Изложенный метод решения задачи изгиба прямоугольной пластины в двойных тригонометрических рядах Фурье наряду с простотой и наглядностью выкладок обладает существенными недостатками:

– скорость сходимости рядов, входящих в решение, невелика, а в некоторых случаях ряды вообще расходятся;

– распространение метода на другие типы граничных условий весьма затруднительно.

Решение в одинарных (ординарных) тригонометрических рядах (метод М. Леви). Метод Леви решения задач изгиба прямоугольных пластин используется для случаев, когда две противоположные стороны пластины шарнирно оперты, а на двух других – граничные условия произвольные. В этом плане метод имеет более общий характер, чем решение Навье.

Будем считать, что шарнирно опертыми являются стороны пластины $x = 0$, $x = a$. Граничные условия на этих сторонах имеют вид:

$$w = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \, , \quad x = a \; .$$

Граничные условия на двух других сторонах пока не формулируем.

Решение уравнения прогибов будем разыскивать в виде ряда:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(y) \sin\frac{m\pi x}{a} \quad ,$$

где $Y_m(y)$ – произвольная функция переменной y. При таком выборе формы решения граничные условия на шарнирно опертых краях пластины удовлетворяются. Отметим, что представление решения уравнения прогибов в подобном виде является проекцией на рассматриваемую задачу более общего метода – метода разделения переменных Фурье.

Нагрузку $p(x, y)$ представим в виде такого же тригонометрического ряда, как и для функции прогибов:

$$p(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin\frac{m\pi x}{a} \quad ,$$

где $p_m(y)$ – коэффициенты ряда, зависящие от переменной y. Определение этих коэффициентов не представляет особого труда:

$$p_{m'}(y) = \frac{2}{a} \int_0^a p(x, y) \sin\frac{m'\pi x}{a}\, dx \quad .$$

Подставим функцию $w(x, y)$ и нагрузку $p(x, y)$ в форме выбранных одинарных тригонометрических рядов в уравнение прогибов. Будем иметь:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[Y_m^{\mathrm{IV}} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 Y_m'' + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 Y_m \right] \sin\frac{m\pi x}{a} = \frac{1}{D} \sum_{m=1}^{\infty} p_m(y) \sin\frac{m\pi x}{a} \quad ,$$

откуда следует обыкновенное неоднородное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка для функции $Y_m(y)$:

$$Y_m^{\mathrm{IV}} - 2\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 Y_m'' + \left(\frac{m\pi}{a}\right)^4 Y_m = \frac{p_m(y)}{D} \quad .$$

Как известно, решение дифференциального уравнения подобного типа складывается из его частного решения $\overline{Y}_m(y)$ и общего решения $Y_m^0(y)$ соответствующего однородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения отыскивается по стандартной процедуре и имеет вид:

$$Y_m^0(y) = A_m \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + C_m y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + D_m y \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} \quad ,$$

где A_m, B_m, C_m, D_m – постоянные интегрирования, подлежащие определению из граничных условий на краях пластины $y = 0$, $y = b$.

Частное решение $\overline{Y}_m(y)$ найти не трудно, если нагрузка $p(x, y)$ определяется несложной функцией. В частности, если нагрузка равномерно распределена по верхней плоскости пластины, коэффициенты p_m тригонометрического ряда, представляющего нагрузку p_0, при четных значениях m равны нулю, а при нечетных принимают следующие значения:

$$p_m = \frac{4 p_0}{m\pi} \quad .$$

В этом случае

$$\overline{Y}_m = \frac{4 p_0 a^4}{m^5 \pi^5 D} \quad .$$

При произвольном нагружении пластины построение частного решения неоднородного уравнения $\overline{Y}_m(y)$ ведется по правилу Коши с применением процедуры Коши, в которой используется частное решение однородного уравнения, удовлетворяющее некоторым начальным условиям.

Для определения постоянных интегрирования A_m, B_m, C_m, D_m будем считать, что края пластины $y = 0$, $y = b$ шарнирно оперты. В этом случае имеем:

$$w = 0 \ , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \ , \quad y = b \ .$$

Подставив в граничные условия функцию прогибов $w(x, y)$ в форме выбранного одинарного тригонометрического ряда, перейдем к граничным условиям для функции $Y_m(y)$:

$$Y_m = 0 \ , \quad \partial^2 Y_m / \partial y^2 = 0 \quad \text{при} \quad y = 0 \ , \quad y = b \ .$$

Напомним, что разыскиваемая функция $Y_m(y)$ имеет вид:

$$Y_m(y) = A_m \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} + B_m \operatorname{sh}\frac{m\pi y}{a} + C_m y \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} + D_m y \operatorname{ch}\frac{m\pi y}{a} + \overline{Y}_m(y) \quad .$$

Можно видеть, что подстановка функции $Y_m(y)$ в граничные условия, позволяет получить четыре уравнения относительно определяемых четырех постоянных интегрирования. Обратим внимание, что в правой части уравнений будем иметь значения функции $\overline{Y}_m(y)$ и ее второй производной $\overline{Y}_m''(y)$ в точках $y = 0$ и $y = b$. Очевидно, что соответствующий подбор частного решения $\overline{Y}_m(y)$, обеспечивающий, например, нулевые значения[1] $\overline{Y}_m(0) = 0$, $\overline{Y}_m''(0) = 0$, может существенно упростить отыскание постоянных интегрирования.

Скорость сходимости рядов, используемых в решении Леви, достаточно велика. Если в соотношении для прогиба $w(x, y)$ ограничиться всего одним слагаемым, то, например, для квадратной пластины, шарнирно опертой по всем сторонам, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, вычисление прогиба в центре пластины дает результат, отличающийся от его точного значения приблизительно на $1\,\%$. При решении этой же задачи с использованием метода Навье для обеспечения такой же точности необходимо оставлять четыре-пять слагаемых.

При вычислении моментов сходимость рядов несколько хуже, однако двух-трех слагаемых совершенно достаточно для получения результатов с практически необходимой точностью.

Решение в одинарных тригонометрических рядах с отделением частного решения (метод Галеркина Б.Г.). Суть метода Галеркина Б.Г. заключается в представлении прогиба пластины $w(x, y)$ в виде суммы основного прогиба $w_{\text{осн}}$ и дополнительного $w_{\text{доп}}$ ($w = w_{\text{осн}} + w_{\text{доп}}$). С учетом данного предложения уравнение прогибов принимает форму:

$$\nabla^2\nabla^2 w_{\text{осн}} + \nabla^2\nabla^2 w_{\text{доп}} = p(x, y)/D \quad .$$

Основной прогиб $w_{\text{осн}}$ будем рассматривать как частное решение уравнения прогибов пластины, т.е. для его отыскания достаточно удовлетворить уравнение:

$$\nabla^2\nabla^2 w_{\text{осн}} = p(x, y)/D \quad .$$

[1] Отметим, что начальные условия, используемые при построении частного решения неоднородного уравнения $\overline{Y}_m(y)$ с применением процедуры Коши, имеют подобный вид.

Соответственно, для определения дополнительного прогиба $w_{\text{доп}}$ остается однородное бигармоническое уравнение:

$$\nabla^2 \nabla^2 w_{\text{доп}} = 0 \ .$$

Будем считать, что две стороны пластины $x = 0$, $x = a$ являются шарнирно опертыми. Граничные условия на этих сторонах имеют вид:

$$w = 0 \ , \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \ , \ \ x = a \ .$$

Учитывая приятое разделение прогиба пластины на основной $w_{\text{осн}}$ и дополнительный $w_{\text{доп}}$ прогибы, получаем, что граничные условия для полного прогиба w переходят в граничные условия для дополнительного прогиба $w_{\text{доп}}$:

$$w_{\text{доп}} = 0 \ , \quad \frac{\partial^2 w_{\text{доп}}}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0 \ , \ \ x = a \ .$$

Соответственно, решение однородного бигармонического уравнения относительно дополнительного прогиба $w_{\text{доп}}$ будем разыскивать в виде ряда:

$$w_{\text{доп}}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} Y_n(y) \sin \frac{n\pi x}{a} \ ,$$

где $Y_n(y)$ – произвольная функция переменной y. При таком выборе формы решения граничные условия на шарнирно опертых краях пластины удовлетворяются.

Отыскание $Y_n(y)$ определяется стандартной процедурой и приводит к известному результату:

$$Y_n(y) = A_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{a} + C_n \, y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} + D_n \, y \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{a} \ ,$$

где A_n, B_n, C_n, D_n – постоянные интегрирования, подлежащие определению из граничных условий на краях пластины $y = 0$, $y = b$.

Таким образом, для дополнительного прогиба $w_{\text{доп}}$ имеем:

$$w_{\text{доп}}\left(x,y\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}+B_n\operatorname{sh}\frac{n\pi y}{a}+C_n y\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}+D_n y\operatorname{ch}\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}\quad .$$

Дальнейшее решение задачи ничем не отличается от решения с применением метода Леви.

Сравнивая методы Леви и Галеркина, нужно отметить, что метод Леви требует представить в форме ряда не только прогиб $w\left(x,y\right)$, но и нагрузку $p\left(x,y\right)$, но при применении этого метода частное решение разыскивается для обыкновенного дифференциального уравнения, а при применении метода Галеркина – для бигармонического.

2.2. Изгиб круглых пластин

2.2.1. Уравнение прогибов в полярных координатах. Граничные условия

Решение задачи изгиба прямоугольной пластины при приложении к ней поперечной нагрузки сведено к решению неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка в частных производных с постоянными коэффициентами (уравнения прогибов) относительно функции прогиба $w\left(x,y\right)$:

$$\nabla^2\nabla^2 w=p\left(x,y\right)/D\quad .$$

При рассмотрении изгиба круглых пластин удобнее пользоваться полярной системой координат r, θ. Очевидно, что решение поставленной задачи можно провести, повторив все выкладки, и получить соответствующее уравнение прогибов. Однако в этом нет необходимости, поскольку имеющаяся связь между декартовыми и полярными координатами определяет оператор Лапласа ∇^2 в полярной системе координат в виде:

$$\nabla^2=\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\quad .$$

Соответственно, дифференциальное уравнение изогнутой поверхности круглой пластины, находящейся под действием поперечной нагрузки $p(r,\theta)$, в полярных координатах будет иметь вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=\frac{p(r,\theta)}{D} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \qquad \nabla^2\nabla^2 w = p(r,\theta)/D \ .$$

Чтобы получить в полярной системе координат соотношения, связывающие моменты M_r, M_θ, $M_{r\theta}$ и перерезывающие силы Q_r, Q_θ с прогибом w, проще использовать зависимости между декартовыми и полярными координатами, записав производные $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$, $\partial^2 w/\partial x^2$, . . . через производные $\partial w/\partial r$, $\partial w/\partial\theta$, $\partial^2 w/\partial r^2$, . . . В частности, будем иметь:

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\sin\theta \quad ,$$

$$\frac{\partial w}{\partial y}=\frac{\partial w}{\partial r}\sin\theta+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\cos\theta \quad ,$$

$$\ldots$$

Совместим ось x с радиусом r. В этом случае моменты M_r, M_θ, $M_{r\theta}$ и перерезывающие силы Q_r, Q_θ имеют те же значения, что и моменты M_x, M_y и M_{xy}, и перерезывающие силы Q_x и Q_y в той же точке при $\theta=0$. Не останавливаясь на промежуточных преобразованиях, выпишем необходимые соотношения:

$$M_r=-D\left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\right] \quad ,$$

$$M_\theta = -D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right) \ ,$$

$$M_{r\theta} = (1-\nu)D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial w}{\partial \theta}\right) \ ,$$

$$Q_r = -D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \ ,$$

$$Q_\theta = -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right) \ .$$

Решение задачи изгиба круглой пластины при произвольном нагружении обычно строится при представлении прогиба $w(r\,,\theta)$ и нагрузки $p(r\,,\theta)$ в рядах Фурье.

Постоянные интегрирования уравнения прогибов должны быть найдены из граничных условий на краях (контуре) пластины.

Край пластины жестко закреплен. В этом случае прогиб w и угол поворота $\partial w / \partial r$ в точках края при $r = a$ (a – радиус сплошной пластины) должны быть равны нулю:

$$w\big|_{r=a} = 0 \ , \quad \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=a} = 0 \ .$$

Край пластины шарнирно оперт на жесткую опору. Шарнирно опертый край пластины не смещается в вертикальной плоскости, но может свободно поворачиваться. В этом случае прогиб w и изгибающий момент M_r вдоль края $r = a$ должны равняться нулю:

$$w\big|_{r=a} = 0 \ , \quad M_r\big|_{r=a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right)\right|_{r=a} = 0 \ .$$

Но условие $w = 0$ вдоль края $r = a$ (при произвольном значении θ) означает, что одновременно имеем:

$$\left.\frac{\partial w}{\partial \theta}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}\right|_{r=a} = 0 \ .$$

Таким образом, для шарнирно опертого края пластины $r = a$ граничные условия имеют вид:

$$\left. w \right|_{r=a} = 0 \ , \qquad \left.\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=a} = 0 \ .$$

Свободный край. Если край пластины $r = a$ свободен, то естественно считать, что на этом краю нет моментов M_r, $M_{r\theta}$ и перерезывающей силы Q_r. Учитывая возможность объединения граничных условий относительно $M_{r\theta}$ и Q_r в одно (см. раздел 2.1.2), будем иметь:

$$\left. M_r \right|_{r=a} = 0 \ , \quad \left. Q_r - \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial \theta}\right|_{r=a} = 0 \ .$$

Граничные условия для кольцевой пластины на внутреннем радиусе b записываются в аналогичной форме.

Отметим, что в случае кольцевой пластины для определения четырех постоянных интегрирования всегда есть четыре независимых граничных условия. Для сплошной пластины, у которой нет центрального выреза, граничных условий только два, и необходимо формировать дополнительно два условия из физических соображений.

2.2.2. Симметрично нагруженные круглые пластины

Если поперечная нагрузка, приложенная к круглой пластине, симметрична относительно оси, перпендикулярной к плоскости пластины и проходящей через ее центр, то и изогнутая поверхность пластины будет осесимметричной. В этом случае прогиб w будет функцией только переменной r, и уравнение прогибов примет вид:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\right)\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right)=\frac{p(r)}{D}$$

или

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left\{r\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\}=\frac{p(r)}{D}\quad,$$

где использована возможность записи оператора Лапласа в более компактном виде:

$$\nabla^2=\frac{d^2}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}=\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}\right)\quad.$$

Последний вариант записи уравнения прогибов при осесимметричном изгибе круглой пластины предпочтителен, поскольку допускает прямое интегрирование уравнения.

Рассмотрим частный случай нагружения круглой сплошной пластины радиуса a равномерно распределенным давлением p_0. В этом случае уравнение прогибов принимает форму:

$$\frac{d}{dr}\left\{r\,\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]\right\}=\frac{p_0 r}{D}\quad.$$

Проведя последовательное интегрирование уравнения, будем иметь:

$$w=\frac{p_0 r^4}{64D}+\frac{C_1 r^2}{4}\left(\ln r-1\right)+\frac{C_2 r^2}{4}+C_3\ln r+C_4 \quad ,$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – постоянные интегрирования, подлежащие определению.

Задачи

2.2.	Изгиб круглой сплошной пластины радиуса a, жестко защемленной по краю и нагруженной равномерно распределенным давлением p_0.

Поставленная задача является осесимметричной, и в этом случае можно использовать имеющееся общее решение уравнения прогибов:

$$w=\frac{p_0 r^4}{64D}+\frac{C_1 r^2}{4}\left(\ln r-1\right)+\frac{C_2 r^2}{4}+C_3\ln r+C_4 \quad .$$

Таким образом, задача сводится к отысканию четырех постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4.

Для жестко защемленного края пластины имеем следующие два граничных условия:

$$w\Big|_{r=a}=0 \quad , \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial r}\right|_{r=a}=0 \quad .$$

Одно дополнительное условие для определения постоянных интегрирования очевидно: прогиб w должен принимать конечное значение в центре пластины при $r=0$. Реализация этого условия дает $C_3=0$.

Для выявления второго дополнительного условия рассмотрим соотношение, определяющее перерезывающую силу Q_r:

$$Q_r=-D\frac{d}{dr}\left(\frac{d^2 w}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}\right) \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dw}{dr}\right)\right]=-\frac{Q_r}{D} \quad .$$

Сопоставляя полученное соотношение с первым этапом интегрирования уравнения прогибов

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right]=\frac{p_0 r}{2D}+\frac{C_1}{r} \quad ,$$

будем иметь:

$$-\frac{Q_r}{D}=\frac{p_0 r}{2D}+\frac{C_1}{r} \quad .$$

Поскольку перерезывающая сила Q_r должна иметь конечное значение в центре пластины при $r=0$, принимаем $C_1=0$.

Оставшиеся две постоянные C_2 и C_4 определим из граничных условий при $r=a$, которые с учетом соотношения для прогиба w принимают вид:

$$\frac{p_0 a^4}{64D}+\frac{C_2 a^2}{4}+C_4=0 \quad ,$$

$$\frac{p_0 a^3}{16D}+\frac{C_2 a}{2}=0 \quad ,$$

откуда следует

$$C_2=-\frac{p_0 a^2}{8D} \quad , \qquad C_4=\frac{p_0 a^4}{64D} \quad .$$

Таким образом, прогиб круглой сплошной пластины радиуса a, жестко защемленной по краю и нагруженной равномерно распределенным давлением p_0, определяется соотношением:

$$w=\frac{p_0}{64D}\left(r^2-a^2\right)^2 \quad .$$

Наибольший прогиб имеет место в центре пластины:

$$w_{\max}=w\big|_{r=0}=\frac{p_0 a^4}{64D} \quad .$$

Вычисление изгибающих моментов M_r, M_θ приводит к следующему результату:

$$M_r = \frac{p_0}{16}\left[a^2(1+\nu) - r^2(3+\nu)\right] ,$$
$$M_\theta = \frac{p_0}{16}\left[a^2(1+\nu) - r^2(1+3\nu)\right] .$$

Наибольший изгибающий момент имеет место на кромке пластины при $r = a$: $(M_r)_{\max} = -p_0 a^2 / 8$. Соответственно, наибольшее напряжение изгиба оказывается равным $(\sigma_r)_{\max} = 3 p_0 a^2 / 4h^2$.

Поскольку соотношение, определяющее перерезывающую силу Q_r , позволяет уменьшить число постоянных интегрирования, можно использовать его как исходное уравнение для решения задачи изгиба круглой сплошной пластины. Очевидно, для этого нужно связать перерезывающую силу Q_r с заданной нагрузкой $p(r)$, что не представляет особого труда:

$$Q_r \cdot 2\pi r = -\int_0^r p(r) \cdot 2\pi r \cdot dr \quad \Rightarrow \quad Q_r = -\frac{1}{r}\int_0^r p(r) r\, dr \quad .$$

Теперь для решения задачи осесимметричного изгиба круглой сплошной пластины можно использовать уравнение прогибов в виде:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = \frac{1}{Dr}\int_0^r p(r) r\, dr \quad .$$

Представленное уравнение является дифференциальным уравнением третьего порядка, и его решение будет содержать уже только три постоянных интегрирования.

2.3.	Изгиб кольцевой пластины, шарнирно опертой по внешнему контуру, изгибающими моментами M_1 и M_2, равномерно распределенными по внутреннему и внешнему контурам соответственно.

Для решения поставленной задачи воспользуемся уравнением прогибов в форме дифференциального уравнения третьего порядка, которое при отсутствии поперечной нагрузки принимает вид:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\,\frac{dw}{dr}\right)\right]=0 \quad .$$

Последовательное интегрирование уравнения позволяет получить вторую и первую производные функции прогибов (которые понадобятся в дальнейшем) и саму функцию прогибов в виде:

$$\frac{d^2w}{dr^2}=\frac{C_1}{2}-\frac{C_2}{r^2} \quad , \qquad \frac{dw}{dr}=C_1\,\frac{r}{2}-\frac{C_2}{r} \quad ,$$

$$w=C_1\,\frac{r^2}{4}+C_2\ln r+C_3 \quad \Rightarrow \quad w=C_1\,\frac{r^2}{4}+C_2\ln\frac{r}{a}+C_3^* \quad .$$

Принимая, что внутренний радиус пластины равен b, а внешний – a, запишем граничные условия, необходимые для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3^* :

$$w\big|_{r=a}=0 \ , \quad M_r\big|_{r=a}=M_2 \ , \quad M_r\big|_{r=b}=M_1 \quad .$$

Соотношение, связывающее изгибающий момент M_r с прогибом w, для осесимметричной задачи имеет вид:

$$M_r=-D\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\frac{\nu}{r}\frac{dw}{dr}\right) \quad .$$

Граничные условия для моментов на внутреннем и внешнем радиусах пластины дают два уравнения для двух неизвестных C_1, C_2 :

$$\frac{C_1}{2}(1+\nu)-\frac{C_2}{a^2}(1-\nu)=-\frac{M_2}{D} \quad ,$$
$$\frac{C_1}{2}(1+\nu)-\frac{C_2}{b^2}(1-\nu)=-\frac{M_1}{D} \quad .$$

Решение полученных уравнений относительно C_1, C_2 позволяет получить:

$$C_1=\frac{2\left(M_1b^2-M_2a^2\right)}{D(1+\nu)\left(a^2-b^2\right)} \quad , \qquad C_2=\frac{(M_1-M_2)a^2b^2}{D(1-\nu)\left(a^2-b^2\right)} \quad .$$

Выполнение оставшегося граничного условия дает возможность определить третью неизвестную C_3^*:

$$C_3^* = -\frac{C_1 a^2}{4} = -\frac{a^2\left(M_1 b^2 - M_2 a^2\right)}{2D\left(1+\nu\right)\left(a^2 - b^2\right)} \quad .$$

Окончательно, для прогиба w имеем:

$$w = -\frac{M_1 b^2 - M_2 a^2}{2D\left(1+\nu\right)\left(a^2 - b^2\right)}\left(a^2 - r^2\right) + \frac{\left(M_1 - M_2\right)a^2 b^2}{D\left(1-\nu\right)\left(a^2 - b^2\right)}\ln\frac{r}{a} \quad .$$

2.4.	Изгиб кольцевой пластины, шарнирно опертой по внешнему контуру, перерезывающими силами Q_0, равномерно распределенными по внутреннему контуру.

Для решения поставленной задачи воспользуемся уравнением прогибов в форме дифференциального уравнения третьего порядка в форме:

$$\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dw}{dr}\right)\right] = -\frac{Q_r(r)}{D} \quad , \quad Q_r(r) = -\frac{1}{r}\int\limits_0^r p(r)r\,dr \quad .$$

В рассматриваемом случае распределенная поперечная нагрузка $p(r)$ отсутствует, однако перерезывающая сила $Q_r(r)$ в сечениях пластины имеет место. Действительно, перерезывающая сила, приходящаяся на единицу длины окружности радиуса r, будет равна:

$$Q_r(r) = \frac{P}{2\pi r} = \frac{2\pi b Q_0}{2\pi r} = \frac{b}{r}Q_0 \quad ,$$

где $P = 2\pi b Q_0$ – вся нагрузка, приложенная к внутреннему контуру.

Интегрируя уравнение прогибов с учетом значения $Q_r(r)$, получим:

$$w = \frac{Pr^2}{8\pi D}\left(\ln\frac{r}{a} - 1\right) - C_1\frac{r^2}{4} - C_2\ln\frac{r}{a} + C_3 \quad .$$

Постоянные интегрирования должны быть определены из следующих граничных условий:

$$w\Big|_{r=a}=0\ ,\quad M_r\Big|_{r=a}=0\ ,\quad M_r\Big|_{r=b}=0\ ,$$

где a и b – внешний и внутренний радиусы пластины.

Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем значения постоянных интегрирования:

$$C_1=\frac{P}{4\pi D}\left(\frac{1-\nu}{1+\nu}-\frac{2b^2}{a^2-b^2}\ln\frac{b}{a}\right)\ ,$$

$$C_2=-\frac{P(1+\nu)}{4\pi D\,(1-\nu)}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2-b^2}\ln\frac{b}{a}\ ,$$

$$C_3=\frac{Pa^2}{8\pi D}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\nu}{1+\nu}-\frac{b^2}{a^2-b^2}\ln\frac{b}{a}\right)\ .$$

При найденных значениях постоянных C_1, C_2, C_3 можем найти прогиб в любой точке пластины.

Представляет интерес рассмотрение предельного случая, когда радиус внутреннего круга пластины становится достаточно малым, чтобы считать величину $b^2\ln(b/a)$ близкой к нулю, при сохранении значения нагрузки $P=2\pi bQ_0$. Этот случай соответствует задаче изгиба круглой пластины сосредоточенной силой, приложенной в ее центре.

Соответствующее решение будет определяться следующими значениями постоянных интегрирования:

$$C_1=\frac{1-\nu}{1+\nu}\cdot\frac{P}{4\pi D}\ ,\quad C_2=0\ ,\quad C_3=\frac{Pa^2}{8\pi D}\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\nu}{1+\nu}\right)\ .$$

Таким образом, для прогиба w будем иметь:

$$w=\frac{P}{8\pi D}\left[\frac{3+\nu}{2(1+\nu)}\left(a^2-r^2\right)+r^2\ln\frac{r}{a}\right]\ .$$

Отметим, что представленное решение совпадает с точным решением этой задачи, и это означает, что наличие малого отверстия в центре пластины не оказывает на ее прогиб никакого влияния.

3. Вариационные принципы и энергетические методы в теории упругости

3.1. Общие и частные вариационные принципы и теоремы теории упругости

Предметом вариационного исчисления является отыскание *неизвестных функций* $f_i(x, y, z)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, реализующих максимум (минимум) или стационарное значение *функционала* (определенного интеграла), имеющего, например, вид:

$$Э = \int_{V_0} F\Big[f_1(x, y, z), f_2(x, y, z), \ldots, f_n(x, y, z);$$
$$f_1'(x, y, z), f_2'(x, y, z), \ldots, f_n'(x, y, z);\; x, y, z \Big] dV_0 \quad . \tag{3.1}$$

Напомним, что предметом дифференциального исчисления является отыскание *неизвестных значений независимых переменных* x, y, z, реализующих максимум (минимум) или стационарное значение заданной *функции*.

Если все функции $f_i(x, y, z)$, входящие в функционал, независимы между собой, то вариационная задача называется *свободной*, а функционал – *полным*.

В *несвободной* вариационной задаче между варьируемыми функциями имеются зависимости (*уравнения связи* или *дополнительные условия*), которые должны быть удовлетворены предварительно, до варьирования функционала.

Условия, при которых функционал имеет стационарное значение (максимум, минимум), называются уравнениями Эйлера и естественными (эйлеровыми) граничными условиями. Функционал имеет стационарную точку, если вариация функционала по всем независимым функциям равна нулю, т.е. $\delta Э = 0$. Вопрос о наличии локального экстремума (максимума, минимума) решается знаком второй вариации $\delta^2 Э$.

Вид уравнений Эйлера зависит от формы математической реализации стационарного значения функционала: аналитической, численной или смешанной. При аналитической форме реализации стационарного значения функционала уравнения Эйлера, как правило, являются дифференциальными уравнениями с естественными граничными условиями.

Общий вариационный принцип линейной теории упругости. Напомним, что система уравнений и граничных условий линейной теории упругости имеет вид:

– *дифференциальные уравнения равновесия (статические уравнения)*

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}+X=0 \;, \\ &\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}+Y=0 \;, \\ &\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z=0 \;; \end{aligned} \tag{3.2}$$

– *зависимости Коши (геометрические уравнения)*

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x}\;, \qquad \gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\;, \\ &\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y}\;, \qquad \gamma_{yz}=\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\;, \\ &\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}\;, \qquad \gamma_{zx}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\;; \end{aligned} \tag{3.3}$$

– *обобщенный закон Гука (физические уравнения)*

$$\begin{aligned} &\sigma_x=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_x\;, \qquad \tau_{xy}=\mu\gamma_{xy}\;, \\ &\sigma_y=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_y\;, \qquad \tau_{yz}=\mu\gamma_{yz}\;, \\ &\sigma_z=\lambda\theta+2\mu\varepsilon_z\;, \qquad \tau_{zx}=\mu\gamma_{zx}\;; \end{aligned} \tag{3.4}$$

– статические граничные условия на части Σ_1 *поверхности тела*

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \quad ,$$
$$\bar{Y} = \tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n \quad , \qquad (3.5)$$
$$\bar{Z} = \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n \quad ;$$

– геометрические граничные условия на части Σ_2 *поверхности тела*

$$\bar{u} = u \;, \quad \bar{v} = v \;, \quad \bar{w} = w \;. \qquad (3.6)$$

Полный функционал линейной теории упругости должен включать все компоненты напряжений, деформаций и перемещений, которые необходимо рассматриваться как независимые функции:

$$Э = Э\big(u, v, w\,; \sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{zx}\,;\; \varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots, \gamma_{zx}\big) \;. \qquad (3.7)$$

Конкретное представление полного функционала линейной теории упругости, учитывающее вышеприведенную систему определяющих уравнений и граничных условий, можно найти в научной литературе.

Общий вариационный принцип линейной теории упругости формулируется следующим образом:

истинные поля напряжений, деформаций и перемещений таковы, что полный функционал имеет стационарное значение.

Общая вариационная теорема

Для вариационного уравнения $\delta Э = 0$*, где* $Э$ *– полный функционал линейной теории упругости, уравнениями Эйлера и естественными граничными условиями являются комплект статических, геометрических и физических уравнений теории упругости* (3.2) – (3.4) *и соответствующие граничные условия* (3.5) *и* (3.6).

Другими словами, общая вариационная теорема утверждает, что полный функционал содержит в необходимой и достаточной мере всю информацию о теории упругости, так что для решения задач не требуется привлечения каких-либо дополнительных условий (уравнений) кроме тех, что содержатся в полном функционале.

Из полного функционала линейной теории упругости можно получить различные частные функционалы и, тем самым, перейти от свободной вариационной задачи к несвободной с дополнительными условиями. В качестве дополнительных условий принимаются какие-либо соотношения из уравнений Эйлера и естественных граничных условий, реализующих стационарное значение полного функционала. Выполняя дополнительные условия предварительно (до варьирования) и исключая с их помощью зависимую часть функциональных аргументов из полного функционала, получим соответствующий частный функционал.

Частный вариационный принцип линейной теории упругости формулируется следующим образом:

из всех возможных полей напряжений, деформаций и перемещений упругого тела, удовлетворяющих дополнительным условиям, в действительности имеют место лишь те, которые придают частному функционалу стационарное значение.

Частная вариационная теорема

Для вариационного уравнения $\delta Э_k = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots)$ *с некоторыми дополнительными условиями, где* $Э_k$ *– частный функционал линейной теории упругости, уравнениями Эйлера являются те уравнения и естественные граничные условия, которые в совокупности с упомянутыми дополнительными условиями составляют полный комплект уравнений и граничных условий теории упругости, т.е. уравнений Эйлера и граничных условий для полного вариационного уравнения.*

Из приведенной формулировки следует тождественность постановки задач теории упругости на основе полного и частных вариационных уравнений.

В качестве примеров приведем некоторые частные вариационные принципы.

Вариационный принцип для перемещений (принцип Лагранжа). Если в качестве дополнительных условий принять геометрические (3.3) и физические (3.4) уравнения, а также геометрические граничные условия (3.6) на части поверхности Σ_2, то частный функционал линейной теории упругости будет определяться только перемещениями: $Э = Э(u, v, w)$. В этом случае возможными функциями перемещений являются те, которые отвечают указанным дополнительным условиям (уравнениям связи). А из всех возможных перемещений действительными будут те, при которых удовлетворяется вариационное уравнение $\delta Э(u, v, w) = 0$.

Уравнениями Эйлера для функционала $Э = Э(u, v, w)$ являются статические уравнения (3.2) в области, занятой телом, и граничные условия (3.5) на части поверхности Σ_1.

Вариационный принцип для напряжений (принцип Кастильяно). Если в качестве дополнительных условий принять статические (3.2) и физические (3.4) уравнения, а также статические граничные условия (3.5) на части поверхности Σ_1, то частный функционал линейной теории упругости будет определяться только напряжениями: $Э = Э(\sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{zx})$. Из всех возможных полей напряжений, удовлетворяющих указанным дополнительным условиям (уравнениям связи), действительными будут те, при которых удовлетворяется вариационное уравнение $\delta Э(\sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{zx}) = 0$.

Уравнениями Эйлера для функционала $Э = Э(\sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{zx})$ являются геометрические уравнения в напряжениях и граничные условия (3.6) на части поверхности Σ_2.

Вариационный принцип Рейсснера. Если в качестве дополнительных условий принять физические уравнения (3.4), то частный функционал линейной теории упругости будет определяться и напряжениями, и перемещениями: $Э = Э(u, v, w; \sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{zx})$ – смешанный функционал.

Вариационное уравнение $\delta Э(u, v, w; \sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{zx}) = 0$ эквивалентно системе статических (3.2), геометрических уравнений в напряжениях и граничных условий (3.5) и (3.6) на участках поверхности тела Σ_1 и Σ_2 соответственно.

С математической точки зрения систему полного и частных функционалов можно рассматривать как выражение общей идеи расчленения сложной системы на элементы: расчленение реализуется в выборе некоторых дополнительных условий и соответствующего частного функционала. Так, например, если в качестве дополнительных условий принять статические, геометрические и физические уравнения (3.2) – (3.4), придем к *функционалу граничных условий*. Каждому из функционалов может быть поставлен в соответствие один или несколько методов подбора аппроксимирующих функций для решения краевых задач теории упругости. Аппроксимирующие функции, как правило, подбираются так, чтобы дополнительные условия удовлетворялись точно, а параметры подбираемых функций определялись из условий реализации стационарного значения соответствующего функционала.

Наиболее используемыми в настоящее время являются методы Рэлея – Ритца, Бубнова – Галеркина, Треффца и численные методы.

3.2. Принцип возможных работ

В разделе 3.1 общие и частные вариационные принципы и теоремы линейной теории упругости рассмотрены с позиций вариационного исчисления. Однако для построения частных функционалов теории упругости и, соответственно, для реализации частных вариационных принципов удобнее (и проще) пользоваться подходом, базирующемся на *принципе возможных работ*, сформулированном И. Бернулли (1717 г.).

Рассмотрим материальную точку, на которую действует сила P. Предположим, что точка получает *возможное перемещение* δr в направлении r, составляющим угол θ с направлением силы P. Работа силы P на возможном перемещении (возможная работа) будет равна

$$\delta A = P \cdot \delta r \cos\theta = P_r \delta r \quad ,$$

где P_r – проекция силы на направление r.

Если материальная точка находится в равновесии под действием сил P_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), общая (полная) возможная работа будет определяться соотношением:

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} P_{ir}\,\delta r = \delta r \sum_{i=1}^{n} P_{ir} \quad ,$$

но, поскольку для равновесной системы сил $\sum_{i=1}^{n} P_{ir} = 0$, имеем, что $\delta A = 0$. Соответственно, принцип возможных работ формулируется следующим образом:

если материальная точка находится в равновесии, то полная возможная работа приложенных сил на любом возможном перемещении точки равна нулю.

Принцип возможных работ можно распространить на упругое тело, рассматривая его как систему материальных точек, на каждую из которых действует система уравновешенных сил. Особенность рассмотрения точки в упругом теле (по сравнению со свободной точкой) заключается в том, что, придавая ей возможное перемещение, необходимо соблюдать условие сплошности материала и граничные условия, если перемещения на поверхности (или ее части) имеют заданные значения. Отметим, что для выполнения условия сплошности материала достаточно представлять возможные перемещения непрерывными функциями координат точки.

3.3. Принцип минимума потенциальной энергии (принцип Лагранжа)

Вариационный принцип Лагранжа (см. раздел 3.1) утверждает, что из всех возможных перемещений действительными будут те, которые отвечают вариационному уравнению $\delta Э\left(u, v, w\right) = 0$.

Реализуем принцип возможных работ для упругого тела при получении точками тела возможных перемещений δu, δv, δw. Полная возможная работа будет складываться из возможных работ внутренних сил (напряжений), объемных сил X, Y, Z и поверхностных сил $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$, заданных на части поверхности Σ_1 (на части поверхности Σ_2 заданы перемещения).

Гипотеза о потенциале упругих сил позволяет определить работу внутренних сил на возможных перемещениях соотношением ($-\delta U$), где U – потенциальная энергия деформации упругого тела, а $\delta U = \iiint\limits_V \left(\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \ldots + \tau_{zx} \delta\gamma_{zx} \right) dV$ – вариация (изменение) потенциальной энергии деформации при получении телом возможных перемещений.

С учетом представленного соотношения принцип возможных работ принимает вид:

$$\iint\limits_{\Sigma_1} \left(\overline{X}\delta u + \overline{Y}\delta v + \overline{Z}\delta w \right) d\Sigma + \iiint\limits_V \left(X\delta u + Y\delta v + Z\delta w \right) dV \; - \; \delta U = 0 \; .$$

Поскольку при получении телом возможных перемещений внешние силы остаются постоянными, оператор варьирования δ можно вынести из-под знаков интегралов и представить полученное уравнение в виде:

$$\delta\left(U - W\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta\Pi = 0 \;, \tag{3.8}$$

где $W = \iint\limits_{\Sigma_1} \left(\overline{X} u + \overline{Y} v + \overline{Z} w \right) d\Sigma + \iiint\limits_V \left(X u + Y v + Z w \right) dV$; $\Pi = U - W$ – *полная потенциальная энергия системы*, состоящая из потенциальной энергии деформации U упругого тела и потенциала внешних сил $\left(-W\right)$, действующих на тело.

Уравнение (3.8) позволяет сформулировать вариационный принцип для перемещений (принцип Лагранжа) в форме:

из всех возможных перемещений, допускаемых связями, в упругом теле в действительности реализуются такие перемещения, при которых полная потенциальная энергия принимает стационарное значение.

Вопрос о наличии локального экстремума (максимума, минимума) решается знаком второй вариации $\delta^2\Pi$. Однако в рассматриваемом случае, когда под действием системы сил упругое тело находится в равновесии, знаком второй вариации $\delta^2\Pi$, по сути, решается вопрос об устойчивом или неустойчивом равновесии. Данное обстоятельство позволяет воспользоваться известным критерием Лежен – Дирихле, который утверждает, что полная потенциальная энергия имеет минимальное значение, если равновесие устойчивое.

Окончательная формулировка вариационного принципа Лагранжа имеет вид:

из всех возможных перемещений, допускаемых связями, в упругом теле в действительности реализуются такие перемещения, при которых полная потенциальная энергия принимает минимальное значение.

Отметим, что принятая формулировка принципа Лагранжа исключает рассмотрение задач о потере устойчивости упругого равновесия, однако, напомним, что эти задачи уже исключены введением в линейной теории упругости принципа независимости действия сил.

С позиций вариационного исчисления имеем, что для функционала $\Pi = U - W$ уравнениями Эйлера являются дифференциальные уравнения равновесия в области, занятой телом, и граничные условия на части поверхности Σ_1.

3.4. Принцип минимума дополнительной работы (принцип Кастильяно)

Реализуем принцип возможных работ для упругого тела при варьировании внутренних и внешних сил.

Полная возможная работа здесь будет складываться из двух слагаемых: из возможных работ варьируемых поверхностных сил $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\overline{Z}$ (только на части поверхности Σ_2, где заданы перемещения) и внутренних сил (напряжений) на действительных перемещениях. Объемные силы X, Y, Z являются внешними силами, заданными по всему объему тела, и поэтому не могут варьироваться. Будем иметь:

$$\iint\limits_{\Sigma_2} \left(\delta\overline{X} u + \delta\overline{Y} v + \delta\overline{Z} w \right) d\Sigma \; - \delta U = 0 \quad ,$$

где $\delta U = \iiint\limits_V \left(\delta\sigma_x \varepsilon_x + \delta\sigma_y \varepsilon_y + \ldots + \delta\tau_{zx} \gamma_{zx} \right) dV$ – вариация (изменение) потенциальной энергии деформации, отвечающая вариациям напряжений. Поскольку для части поверхности Σ_2 перемещения не варьируются, оператор δ можно вынести за знак интеграла. Получим:

$$\delta \left(U - W^* \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \Pi^* = 0 \quad , \tag{3.9}$$

где $W^* = \iint\limits_{\Sigma_2} \left(\bar{X} u + \bar{Y} v + \bar{Z} w \right) d\Sigma$; $\Pi^* = U - W^*$ – *дополнительная энергия системы*.

Уравнение (3.9) определяет стационарное значение дополнительной энергии. Так же, как и для полной потенциальной энергии системы, вторая вариация дополнительной энергии положительна ($\delta^2 \Pi^* > 0$), что позволяет сформулировать вариационный принцип в напряжениях (принцип Кастильяно) в форме:

из всех статически возможных полей напряжений в упругом теле в действительности реализуется такое поле напряжений, при котором дополнительная энергия принимает минимальное значение.

С позиций вариационного исчисления имеем, что для функционала $\Pi^* = U - W^*$ уравнениями Эйлера являются условия совместности деформаций, представленные в напряжениях, и граничные условия на части поверхности Σ_2.

3.5. Энергетические методы решения задач теории упругости

Решение задач теории упругости с использованием методов, построенных на классическом подходе с интегрированием основных уравнений совместно с граничными условиями, часто связано со значительными математическими трудностями. Вариационные принципы представляют практический интерес в том смысле, что позволяют подойти к решению граничных задач с другой точки зрения и построить методы, позволяющие находить решения во многих случаях, когда традиционный подход оказывается неэффективным.

3.5.1. Метод Рэлея – Ритца

Метод Рэлея – Ритца может быть построен как на использовании вариационного принципа Лагранжа, так и вариационного принципа Кастильяно. Построение метода покажем на примере принципа Лагранжа.

С применением принципа Лагранжа (принципа возможных перемещений) задача обычно решается в перемещениях.

Перемещения u, v, w задаются в форме рядов, содержащих специально подбираемые аппроксимирующие функции, удовлетворяющие граничным условиям, и неизвестные параметры:

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m f_m(x, y, z) \ , \\ v &= \sum_{m=1}^{\infty} b_m \varphi_m(x, y, z) \ , \\ w &= \sum_{m=1}^{\infty} c_m \psi_m(x, y, z) \ . \end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь $f_m(x, y, z)$, $\varphi_m(x, y, z)$, $\psi_m(x, y, z)$ – линейно независимые аппроксимирующие функции; a_m, b_m, c_m – постоянные коэффициенты (параметры), подлежащие определению.

Далее, с использованием перемещений, заданных в виде рядов (3.10), преобразуется соотношение для полной потенциальной энергии Π, с представлением энергии как функции параметров a_m, b_m, c_m.

Поскольку в состоянии равновесия полная потенциальная энергия Π должна иметь минимальное значение, для определения параметров a_m, b_m, c_m используются условия ее минимизации:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_m} = 0 \ , \quad \frac{\partial \Pi}{\partial b_m} = 0 \ , \quad \frac{\partial \Pi}{\partial c_m} = 0 \ .$$

Отметим, что точность решения задачи, полученного подобным образом, определяется, с одной стороны, удачным (или неудачным) выбором аппроксимирующих функций $f_m(x, y, z)$, $\varphi_m(x, y, z)$, $\psi_m(x, y, z)$, удовлетворяющих граничным условиям, а с другой – числом удерживаемых членов рядов.

Задачи

3.1.	Кручение стержня прямоугольного поперечного сечения со сторонами $2a$ и $2b$ ($x = \pm a$, $y = \pm b$ – начало координат расположено в центре поперечного сечения).

Для решения задачи воспользуемся принципом минимума дополнительной работы (принципом Кастильяно) $\delta\Pi^* = 0$, где $\Pi^* = U - W^*$ – дополнительная энергия системы; U – потенциальная энергия деформации; W^* – работа поверхностных сил.

Напомним основные соотношения, определяющие напряженное состояние при кручении:

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xy} = 0 \ ; \quad \tau_{zx} = \mu\tau\frac{\partial \Phi}{\partial y} \ , \quad \tau_{zy} = -\mu\tau\frac{\partial \Phi}{\partial x} \ , \tag{3.11}$$

где $\mu = G = E/2(1+\nu)$ – упругая постоянная; τ – степень закручивания (угол закручивания на единицу длины); $\Phi(x, y)$ – функция напряжений (функция Прандтля).

Общая формула для упругой потенциальной энергии деформации, представленной через напряжения и отнесенной к единице объема, имеет вид:

$$\widetilde{U} = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu\left(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x\right) + 2(1+\nu)\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)\right] \ .$$

Принимая длину бруса равной L и учитывая значения напряжений (3.11), для потенциальной энергии деформации бруса получим:

$$U = \frac{\mu\tau^2 L}{2} \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad , \tag{3.12}$$

где Ω – площадь поперечного сечения бруса.

На боковой поверхности бруса поверхностные силы заданы (равны нулю), поэтому их работа на этой части поверхности тела равна нулю.

На торцах $z = 0$ и $z = L$ работа поверхностных сил будет определяться работой касательных напряжений τ_{zx} и τ_{zy} на перемещениях u и v. Принимая, что нижнее основание $z = 0$ закреплено ($u = v = 0$) и работа поверхностных сил здесь равна нулю, вычислим работу поверхностных сил на верхнем основании $z = L$ ($u = -\tau L y$, $v = \tau L x$). Будем иметь:

$$W^* = -\mu\tau^2 L \int\limits_{\Omega} \left(x \frac{\partial \Phi}{\partial x} + y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dx dy \quad .$$

Интегрируя полученное соотношение по частям, получим:

$$W^* = 2\mu\tau^2 L \iint\limits_{\Omega} \Phi \, dx dy - \mu\tau^2 L \int\limits_{S} \Phi \left(x dy + y dx \right) \quad ,$$

где S – контур, ограничивающий поперечное сечение бруса. Поскольку рассматриваемое сечение является односвязным, на контуре поперечного сечения функцию напряжений можно принять равной нулю. Окончательно, для работы поверхностных сил будем иметь:

$$W^* = 2\mu\tau^2 L \iint\limits_{\Omega} \Phi \, dx dy \quad . \tag{3.13}$$

С учетом полученных соотношений для потенциальной энергии деформации бруса (3.12) и работы поверхностных сил (3.13) дополнительная энергия системы принимает вид:

$$\Pi^* = U - W^* \quad \Rightarrow \quad \Pi^* = \frac{\mu\tau^2 L}{2} \iint\limits_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 - 4\Phi \right] dx dy \quad . \tag{3.14}$$

При построении (выборе) функции напряжений $\Phi(x, y)$ необходимо удовлетворить граничные условия (на контуре S функция Φ должна быть равна нулю) и ввести неизвестные параметры, позволяющие варьировать ее значения. Можно, например, представить функцию $\Phi(x, y)$ в следующей форме:

$$\Phi(x, y) = \left(x^2 - a^2\right)\left(y^2 - b^2\right)\left(c_1 + c_2 x^2 + c_3 y^2 + c_4 x^2 y^2 + \ldots\right) , \tag{3.15}$$

где c_1, c_2, c_3, $c_4 \ldots$ – параметры, подлежащие определению. Отметим, что в полином включены только слагаемые с четными степенями переменных x и y, поскольку функция $\Phi(x, y)$ должна быть симметричной относительно координатных осей.

В первом приближении в соотношении (3.15) ограничимся только одним слагаемым полинома. Будем иметь:

$$\Phi(x, y) = c_1\left(x^2 - a^2\right)\left(y^2 - b^2\right) . \tag{3.16}$$

Дополнительная энергия системы (3.14) с учетом предложенного соотношения для функции напряжений (3.16) после интегрирования принимает вид:

$$\Pi^* = \frac{\mu\tau^2 L}{2} \cdot \frac{64}{45}\left[2c_1^2 a^3 b^3\left(a^2 + b^2\right) - 5c_1 a^3 b^3\right] .$$

Для действительного состояния равновесия дополнительная энергия должна принимать минимальное значение. Реализуя условие минимизации, получим:

$$\frac{d\Pi^*}{dc_1} = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 = \frac{5}{4\left(a^2 + b^2\right)} .$$

Таким образом, имеем приближенное соотношение для функции напряжений:

$$\Phi(x, y) = \frac{5}{4\left(a^2 + b^2\right)}\left(x^2 - a^2\right)\left(y^2 - b^2\right) .$$

Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем некоторые конечные результаты, определяющие приближенное решение поставленной задачи:

– крутящий момент – $M = 32\mu\tau a^3 b^3 c_1$;

– максимальное касательное напряжение, действующее в точке, расположенной посредине длинной стороны ($b > a$) – $\tau_{max} = 9M / 16 a^2 b$;

– жесткость бруса при кручении – $D = M / \tau = 32\mu a^3 b^3 c_1$.

В случае бруса квадратного поперечного сечения ($a/b=1$) приближенное решение дает значение жесткости при кручении $D=2{,}222\,\mu a^4$ (точное значение $\overline{D}=2{,}25\,\mu a^4$, погрешность составляет $-1{,}2\%$) и $\tau_{\max}=0{,}563M/a^3$ (точное значение $\overline{\tau}_{\max}=0{,}6M/a^3$, погрешность составляет $-6{,}2\%$).

Увеличим теперь число варьируемых параметров до трех: функцию напряжений $\Phi(x,y)$ возьмем в виде:

$$\Phi(x,y)=\left(x^2-a^2\right)\left(y^2-b^2\right)\left(c_1+c_2x^2+c_3y^2\right) \ .$$

Дополнительная энергия системы (3.14) с учетом предложенного соотношения для функции напряжений после интегрирования принимает вид:

$$\Pi^*=\frac{\mu\tau^2L}{2}\cdot\frac{64}{4725}\,a^3b^3\Big[210\left(a^2+b^2\right)c_1^2+a^4\left(10a^2+66b^2\right)c_2^2+b^4\left(66a^2+10b^2\right)c_3^2+$$
$$+a^2\left(60a^2+84b^2\right)c_1c_2+b^2\left(84a^2+60b^2\right)c_1c_3+12a^2b^2\left(a^2+b^2\right)c_2c_3-$$
$$-525c_1-105a^2c_1-105b^2c_3 \ .$$

Для действительного состояния равновесия дополнительная энергия должна принимать минимальное значение. Реализуя условия минимизации

$$\frac{\partial\Pi^*}{\partial c_1}=0 \ , \quad \frac{\partial\Pi^*}{\partial c_2}=0 \ , \quad \frac{\partial\Pi^*}{\partial c_3}=0 \ ,$$

для случая $a/b=1$ получим:

$$c_1=\frac{1295}{2216a^2} \ , \quad c_2=c_3=\frac{525}{4432a^2} \ .$$

Используя новое приближенное соотношение для функции напряжений, приведем некоторые конечные результаты, определяющие решение поставленной задачи:

– жесткость при кручении $D=2{,}246\,\mu a^4$ (погрешность составляет $-0{,}18\%$);

– $\tau_{\max}=0{,}626M/a^3$ (погрешность составляет $4{,}3\%$).

Для аппроксимации функции напряжений вместо полиномов можно воспользоваться, например, двойным тригонометрическим рядом:

$$\Phi(x,y)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}c_{mn}\cdot\cos(2m+1)\frac{\pi x}{2a}\cdot\cos(2n+1)\frac{\pi y}{2b}\quad, \tag{3.17}$$

где c_{mn} – параметры, подлежащие определению. Отметим, что соотношение (3.17), принятое для функции напряжений, удовлетворяет граничным условиям на контуре поперечного сечения бруса.

Если к рассмотрению принять только один член ряда, дополнительная энергия системы (3.14) после интегрирования принимает вид:

$$\Pi^*=\frac{\mu\tau^2L}{2}\left[\pi^2c_{00}^2\cdot\frac{a^2+b^2}{4ab}-64c_{00}\cdot\frac{ab}{\pi^2}\right]\quad.$$

Реализуя условие минимизации, получим:

$$\frac{d\Pi^*}{dc_{00}}=0\quad\Rightarrow\quad c_{00}=\frac{128}{\pi^2}\cdot\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}\quad.$$

В случае бруса квадратного поперечного сечения ($a/b=1$) приближенное решение дает значение жесткости при кручении $D=2{,}13\,\mu a^4$ (погрешность составляет $-5{,}3\%$) и $\tau_{\max}=0{,}484M/a^3$ (погрешность составляет $-19{,}3\%$).

Из приведенных примеров решения поставленной задачи видно, что при возрастании числа варьируемых параметров точность решения повышается. Однако точность решения зависит и от вида аппроксимирующих функций: взяв небольшое число определяемых параметров в одном случае, можем получить более высокую точность решения, чем с большим числом параметров, в другом. Если точное решение задачи неизвестно, то единственный путь, который позволяет получить ориентировочное представление о точности решения, состоит в последовательном увеличении числа варьируемых параметров и сравнении окончательных результатов. Если результаты быстро сходятся, то аппроксимацию можно считать удачной.

3.2.	Изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки p_0 .

Размеры пластины – $a\times b\times h$ (см. рис. 2.1). Будем считать пластину жесткой и, соответственно, принимаем, что усилия в срединной плоскости равны нулю. В этом случае потенциальная энергия деформации (энергия изгиба пластины) определяется соотношением (см. раздел 2.1.4):

$$U = \frac{D}{2}\iint\limits_A \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu)\left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dxdy \quad ,$$

где $w = w(x, y)$ – прогиб пластины; $D = Eh^3/12\left(1-\nu^2\right)$ – ее цилиндрическая жесткость.

Для прямоугольных пластин, у которых вдоль кромок $w = 0$, имеем, что $\partial w/\partial x = \partial^2 w/\partial x^2 = 0$ при $y = \mathrm{const}$ и $\partial w/\partial y = \partial^2 w/\partial y^2 = 0$ при $x = \mathrm{const}$. В этом случае соотношение, определяющее потенциальную энергию деформации, упрощается и принимает вид:

$$U = \frac{D}{2}\iint\limits_A \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 dxdy \quad \Rightarrow \quad U = \frac{D}{2}\iint\limits_A \left(\nabla^2 w\right)^2 dxdy \,. \tag{3.18}$$

Шарнирное опирание краев пластины соответствует условию, приводящему к упрощению записи соотношения для потенциальной энергии деформации, и поэтому в дальнейшем можно использовать формулу (3.18).

Поскольку пластина нагружена равномерно распределенным давлением p_0, работа внешних сил будет определяться соотношением:

$$W = p_0 \iint\limits_A w\,dxdy \,. \tag{3.19}$$

С учетом соотношений (3.18) и (3.19) полная потенциальная энергия системы $\Pi = U - W$ принимает вид:

$$\Pi = (D/2)\iint\limits_A \left(\nabla^2 w\right)^2 dxdy - p_0 \iint\limits_A w\,dxdy \quad .$$

Прогиб пластины $w = w(x, y)$ представим в виде двойного тригонометрического ряда:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad . \tag{3.20}$$

Подобная форма представления прогиба, с одной стороны, дает возможность удовлетворить граничные условия (и геометрические, и статические) на шарнирно опертых краях пластины, а с другой – включает параметры A_{mn}, позволяющие варьирование функции $w = w(x, y)$.

Подставляя функцию прогибов (3.20) в соотношения (3.18) и (3.19), после некоторых преобразований получим:

– для потенциальной энергии деформации пластины

$$U = D\,\frac{\pi^4 ab}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad ;$$

– для работы внешних сил

$$W = \frac{4 p_0\, ab}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_{mn}}{mn} \quad .$$

Ограничимся в первом приближении только одним членом ряда (3.20), представляя прогиб в виде:

$$w(x, y) = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad .$$

Полная потенциальная энергия системы Π в этом случае принимает вид:

$$\Pi = \frac{\pi^4 D}{8} \cdot A_{11}^2\, \frac{a^2 + b^2}{ab} - \frac{4 p_0}{\pi^2} \cdot A_{11}\, ab \quad .$$

Для действительного состояния равновесия полная потенциальная энергия должна принимать минимальное значение. Реализуя условие минимизации, получим:

$$\frac{d\Pi}{dA_{11}} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{11} = \frac{16 p_0}{\pi^6 D} \cdot \frac{a^4 b^4}{\left(a^2 + b^2\right)^2} \quad .$$

С учетом полученного значения параметра A_{11} функция прогиба (3.20) принимает вид:

$$w(x, y) = \frac{16 p_0}{\pi^6 D} \cdot \frac{a^4 b^4}{\left(a^2 + b^2\right)^2}\, \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad .$$

Максимальный прогиб в центре квадратной пластины ($a = b$), найденный при коэффициенте Пуассона $\nu = 0{,}3$, равен:

$$w_{\max} = 0{,}0455\, p_0 a^4 / E h^3 \quad .$$

Полученное приближенное значение максимального прогиба отличается от точного $\overline{w}_{\max} = 0{,}0443 p_0 a^4 / E h^3$ на $2{,}7\%$.

Если же определить максимальные изгибающие моменты, действующие также в центре квадратной пластины, то их значения $\left(M_x\right)_{\max} = \left(M_y\right)_{\max} = 0{,}0535\, p_0 a^2$ будут отличаться от точного $\left(\overline{M}\right)_{\max} = 0{,}0479\, p_0 a^2$ уже на $11{,}7\%$. Еще менее точный результат имеет место при вычислении в первом приближении поперечных (перерезывающих) сил. Соответственно, при необходимости вычисления изгибающих моментов и перерезывающих сил следует брать несколько членов ряда, определяющего прогиб пластины.

3.3.	Изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины сосредоточенной силой P , приложенной в точке с координатами ξ, η .

Как и в предыдущей задаче, прогиб пластины $w = w\left(x, y\right)$ представим в виде двойного тригонометрического ряда:

$$w\left(x, y\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad .$$

Соответственно, потенциальная энергия деформации (энергия изгиба пластины) будет представляться тем же соотношением:

$$U = D\, \frac{\pi^4 ab}{8} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)^2 \quad .$$

Работа внешних сил в поставленной задаче будет определяться работой силы P на перемещении точки ее приложения:

$$W = P \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi\xi}{a} \sin\frac{n\pi\eta}{b} \quad .$$

Реализуя условия минимизации полной потенциальной энергии $\partial\left(U - W\right)/\partial A_{mn} = 0$, получим систему уравнений типа:

$$P \sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b} - D\ \frac{\pi^4 ab}{4} A_{mn}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)^2 = 0 \quad ,$$

откуда имеем:

$$A_{mn} = \frac{4Pa^3b^3}{D\pi^4\left(m^2b^2+n^2a^2\right)^2}\ \sin\frac{m\pi\xi}{a}\sin\frac{n\pi\eta}{b} \quad .$$

Двойной тригонометрический ряд, определяющий прогиб пластины $w\left(x, y\right)$, сходится достаточно быстро. Если сила P приложена в центре квадратной пластины, максимальный прогиб будет определяться соотношением:

$$w_{\max} = \frac{4Pa^2}{\pi^4 D}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(m^2+n^2\right)^2} \quad .$$

Оставляя только один член ряда, получим, что это приближение отличается от точного значения менее чем на 10%. Если же оставить первые четыре слагаемых ряда, приближение будет отличаться от точного значения менее чем на $3{,}5\%$. Однако, как уже отмечалось, о точности решения в целом надо судить не только по величине прогибов, но и по величине сил и моментов.

3.5.2. Метод Бубнова – Галеркина

С позиций вариационного исчисления было показано, что для функционала $\Pi = U - W$ уравнениями Эйлера являются дифференциальные уравнения равновесия в области, занятой телом, и граничные условия на части поверхности Σ_1. Соответственно, принцип Лагранжа может быть представлен не только в форме рассмотренного ранее вариационного уравнения $\delta\Pi = 0$, но и в форме следующего уравнения:

$$\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) \delta u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y \right) \delta v + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta w \right] dV + \iint\limits_{\Sigma_1} \left[\left(\sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n - \overline{X} \right) \delta u + \right.$$

$$\left. + \left(\tau_{xy} l + \sigma_y m + \tau_{zy} n - \overline{Y} \right) \delta v + \left(\tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_z n - \overline{Z} \right) \delta w \right] d\Sigma = 0 \quad .$$

Как и при построении метода Рэлея – Ритца, перемещения u, v, w задаются в форме рядов (3.10), содержащих аппроксимирующие функции $f_m(x, y, z)$, $\varphi_m(x, y, z)$, $\psi_m(x, y, z)$, удовлетворяющие граничным условиям, и неизвестные параметры a_m, b_m, c_m, подлежащие определению. В этом случае в вариационном уравнении Лагранжа остается только объемный интеграл

$$\iiint\limits_V \left[\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) \delta u + \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y \right) \delta v + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta w \right] dV = 0 \quad , \tag{3.21}$$

в котором вариации перемещений δu, δv, δw будут определяться теми же соотношения (3.10), но с заменой параметров a_m, b_m, c_m на их вариации δa_m, δb_m, δc_m.

В силу произвольности возможных перемещений, определяемых вариациями δa_m, δb_m, δc_m, уравнение (3.21) распадается на совокупность уравнений, общее число которых равно числу коэффициентов a_m, b_m, c_m. Приведем три уравнения для отыскания одной группы коэффициентов a_m, b_m, c_m:

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X \right) f_m(x, y, z)\, dV = 0 \quad ,$$

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y \right) \varphi_m(x, y, z)\, dV = 0 \quad ,$$

$$\iiint\limits_V \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \psi_m(x, y, z)\, dV = 0 \quad .$$

В эти соотношения вместо напряжений должны быть подставлены их представления через перемещения, получаемые с использованием зависимостей Коши и уравнения линейного физического закона.

На уравнения, составляемые по методу Бубнова – Галеркина, можно смотреть как на уравнения, вытекающие из условий ортогональности функций[1].

Метод интегрирования уравнений Бубнова – Галеркина сводится к тому, что в эти уравнения вместо искомых функций подставляются принятые для них соотношения с неопределенными (неизвестными) коэффициентами. После этого каждое уравнение умножают поочередно на каждый член ряда (3.10), полагая в нем значения коэффициентов a_m, b_m, c_m равными единице, или, что то же самое, умножают на производные рядов (3.10) по переменным a_m, b_m, c_m и интегрируют полученные соотношения по объему тела.

Отметим, что если метод Рэлея – Ритца построен на использовании того или иного вариационного принципа и не требует знания, например, дифференциальных уравнений равновесия, то метод Бубнова – Галеркина не связан непосредственно с вариационной проблемой, и его можно рассматривать как некоторый приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений вообще (и не только в теории упругости).

---

[1] Две функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ ортогональны на интервале $[a, b]$, если $\int_a^b \psi(x)\,\varphi(x)\,dx = 0$.

Задачи

3.4.	Изгиб шарнирно опертой прямоугольной пластины под действием распределенной поперечной нагрузки $p(x, y)$.

Метод Бубнова – Галеркина использует представление принципа Лагранжа в форме уравнения, включающего дифференциальные уравнения равновесия в области, занятой телом, и статические граничные условия на части поверхности, где заданы поверхностные силы.

Напомним, что определяющим уравнением при изгибе жестких пластин является бигармоническое уравнение

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p(x, y)}{D} \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \nabla^2 w = p(x, y)/D \quad .$$

Как и в задачах 3.2 и 3.3, прогиб пластины $w = w(x, y)$ представим в виде двойного тригонометрического ряда:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} \quad \Rightarrow \quad w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\, \varphi_{mn}(x, y) \quad ,$$

где $\varphi_{mn}(x, y) = \sin(m\pi x / a)\sin(n\pi y / b)$.

Как уже отмечалось, подобное представление прогиба, с одной стороны, дает возможность удовлетворить граничные условия (и геометрические, и статические) на шарнирно опертых краях пластины, а с другой – включает параметры A_{mn}, позволяющие варьирование функции $w = w(x, y)$.

Соответственно, определяющее уравнение метода Бубнова – Галеркина (3.11) для рассматриваемой задачи принимает вид:

$$\iint\limits_A \left[D\nabla^2\nabla^2 w - p(x, y)\right] \delta w\, dA = 0 \quad , \quad \delta w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta A_{mn}\, \varphi_{mn} \quad .$$

Оставляя конечное число слагаемых в соотношении для прогиба, получим соответствующее число уравнений для отыскания параметров A_{mn} :

$$\iint\limits_A \left[D\nabla^2\nabla^2 w - p(x, y)\right] \varphi_{mn}\, dA = 0 \qquad (\, m = 1, 2, ..., k \,;\, n = 1, 2, ..., k \,) \quad .$$

Процедуру дальнейшего решения задачи рассмотрим в первом приближении, принимая, что пластина нагружена равномерно распределенным давлением p_0, и оставляя в соотношении для прогиба пластины только один член ряда:

$$w(x, y) = A_{11} \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} \quad .$$

Соответственно, после преобразований в квадратной скобке подынтегрального выражения, уравнение для определения параметра A_{11} будет иметь вид:

$$\int_0^a\int_0^b \left[\pi^4 D A_{11}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} - p_0\right]\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\,dx\,dy = 0 \quad .$$

После интегрирования получим:

$$\pi^4 D A_{11}\frac{ab}{4}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)^2 - p_0\frac{4ab}{\pi^2} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_{11} = \frac{16 p_0}{\pi^6 D}\cdot\frac{a^4 b^4}{\left(a^2+b^2\right)^2} \quad .$$

Отметим, что полученное значение параметра A_{11} совпадает с его значением, ранее найденным при решении задачи 3.2 методом Рэлея – Ритца.

Рассмотрим решения задачи во втором приближении, принимая, что пластина нагружена равномерно распределенным давлением p_0, и оставляя в соотношении для прогиба пластины два слагаемых ряда:

$$w(x, y) = A_{11} \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + A_{13} \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b} \quad .$$

Отметим, что все члены ряда с четными индексами m и n обращаются в нуль, поскольку при равномерном нагружении пластины изогнутая поверхность пластины будет симметричной относительно осей $x = a/2$ и $y = b/2$. Слагаемые, определяемые четными значениями m и n, являются несимметричными относительно этих осей и, соответственно, должны быть приравнены нулю.

Принимая во внимание, что вариация функции прогибов определяется соотношением

$$\delta w = \delta A_{11} \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + \delta A_{13} \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b} \quad ,$$

определяющее уравнение метода Бубнова – Галеркина будет иметь вид:

$$\iint_A \left[D\nabla^2\nabla^2 w - p_0 \right]\left(\delta A_{11} \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + \delta A_{13} \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b} \right) dA = 0 \quad . \qquad (3.22)$$

В силу независимости вариаций δA_{11} и δA_{13} уравнение (3.21) распадается на два уравнения, позволяющие определить два неизвестных параметра A_{11} и A_{13} :

$$\int_0^a \int_0^b \left[D\nabla^2\nabla^2 w - p_0 \right] \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b}\, dxdy = 0 \quad ,$$

$$\int_0^a \int_0^b \left[D\nabla^2\nabla^2 w - p_0 \right] \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b}\, dxdy = 0 \quad .$$

Проведем предварительно преобразования соотношения, стоящего в квадратной скобке подынтегрального выражения. Будем иметь:

$$D\nabla^2\nabla^2 w - p_0 = \pi^4 D \left[A_{11}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{\pi y}{b} + \right.$$

$$\left. + A_{13}\left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 \sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{3\pi y}{b} - p_0 \right] \quad .$$

Подставляя полученное соотношение в систему уравнений относительно параметров A_{11} и A_{13}, после интегрирования получим:

$$A_{11} = \frac{16 p_0}{\pi^6 D}\cdot\frac{a^4 b^4}{\left(a^2 + b^2\right)^2} \quad , \qquad A_{13} = \frac{16 p_0}{3\pi^6 D}\cdot\frac{a^4 b^4}{\left(9a^2 + b^2\right)^2} \quad .$$

Отметим, что при решении задачи об изгибе шарнирно опертой прямоугольной пластины под действием распределенной поперечной нагрузки методами Рэлея – Ритца и Бубнова – Галеркина прогиб пластины $w = w(x, y)$ представлялся в виде двойного тригонометрического ряда, и при этом использовались одни и те же аппроксимирующие функции. Поскольку в обеих методах определяющим является вариационное уравнение Лагранжа (хотя и в разных формах записи), то, естественно, что при одинаковых аппроксимирующих прогиб функциях результаты решения задачи совпадают.

В большинстве случаев использование метода Бубнова – Галеркина при решениях задач рассмотренного типа приводит к менее громоздким выкладкам, чем применение метода Рэлея – Ритца.

3.5.	Изгиб защемленной по контуру прямоугольной пластины под действием равномерно распределенной поперечной нагрузки p_0.

Размеры пластины и направления координатных осей в рассматриваемой задаче примем такими же, как и для шарнирно опертой прямоугольной пластины (см. рис. 2.1).

Из характера закрепления пластины следует, что прогиб w и соответствующий угол поворота ($\partial w/\partial x$ или $\partial w/\partial y$) в точках края пластины должны быть равны нулю:

$$w\Big|_{x=0,\, x=a} = 0 \quad , \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{x=0,\, x=a} = 0 \quad ,$$

$$w\Big|_{y=0,\, y=b} = 0 \quad , \qquad \left.\frac{\partial w}{\partial y}\right|_{y=0,\, y=b} = 0 \quad .$$

Прогиб пластины $w = w(x, y)$ представим в виде двойного тригонометрического ряда:

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left(1 - \cos\frac{2m\pi x}{a}\right)\left(1 - \cos\frac{2n\pi y}{b}\right) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn}\, \varphi_{mn}(x, y) \quad , \tag{3.23}$$

где

$$\varphi_{mn}(x, y) = \left(1 - \cos\frac{2m\pi x}{a}\right)\left(1 - \cos\frac{2n\pi y}{b}\right) \quad .$$

Подобная форма представления прогиба, с одной стороны, дает возможность удовлетворить граничные условия (и геометрические, и статические) на шарнирно опертых краях пластины, а с другой – включает параметры A_{mn}, позволяющие варьирование функции $w = w(x, y)$.

Определяющее уравнение метода Бубнова – Галеркина (3.11) для рассматриваемой задачи принимает вид:

$$\iint\limits_A \left[D\nabla^2\nabla^2 w - p_0 \right] \delta w \, dA = 0 \quad , \qquad \delta w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \delta A_{mn} \, \varphi_{mn} \quad .$$

Оставляя конечное число слагаемых в соотношении для прогиба, получим соответствующее число уравнений для отыскания параметров A_{mn} :

$$\iint\limits_A \left[D\nabla^2\nabla^2 w - p_0 \right] \varphi_{mn} \, dA = 0 \qquad (m = 1, 2, ..., k \; ; n = 1, 2, ..., k) \quad .$$

Процедуру дальнейшего решения задачи рассмотрим в первом приближении, оставляя в соотношении для прогиба пластины только один член ряда:

$$w(x, y) = A_{11} \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos \frac{2\pi y}{b} \right) \quad .$$

Соответственно, после преобразований в квадратной скобке подынтегрального выражения уравнение для определения параметра A_{11} будет иметь вид:

$$\int\limits_0^a \int\limits_0^b \left\{ -16\pi^4 D A_{11} \left[\frac{1}{a^4} \cos\frac{2\pi x}{a} \left(1 - \cos\frac{2\pi y}{b} \right) - \frac{1}{a^2 b^2} \cos\frac{2\pi x}{a} \cos\frac{2\pi y}{b} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{b^4} \left(1 - \cos\frac{2\pi x}{a} \right) \cos\frac{2\pi y}{b} \right] - p_0 \right\} \left(1 - \cos\frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 - \cos\frac{2\pi y}{b} \right) dx\,dy = 0 \quad .$$

После интегрирования получим:

$$-16\pi^4 D A_{11} \left[\frac{1}{a^4} \left(-\frac{a}{2} \right) \left(b + \frac{b}{2} \right) - \frac{2}{a^2 b^2} \left(-\frac{a}{2} \right) \left(-\frac{b}{2} \right) + \frac{1}{b^4} \left(a + \frac{a}{2} \right) \left(-\frac{b}{2} \right) \right] - p_0 \, ab = 0$$

или после упрощений

$$-16\pi^4 D A_{11}\left(\frac{3b}{4a^3}+\frac{1}{2ab}+\frac{3a}{4b^3}\right)-p_0\,ab\;=\;0 \quad .$$

Окончательно, для определяемого параметра A_{11} получаем:

$$A_{11}=\frac{p_0}{4\pi^4 D}\cdot\frac{a^4 b^4}{3a^4+2a^2b^2+3b^4} \quad .$$

С учетом найденного значения параметра A_{11} прогиб пластины $w=w(x,\,y)$ имеет вид:

$$w(x,\,y)=\frac{p_0}{4\pi^4 D}\cdot\frac{a^4 b^4}{3a^4+2a^2b^2+3b^4}\cdot\left(1-\cos\frac{2\pi x}{a}\right)\left(1-\cos\frac{2\pi y}{b}\right) \quad .$$

Максимальный прогиб в центре квадратной пластины ($a=b$), найденный при коэффициенте Пуассона $\nu=0{,}3$, будет равен:

$$w_{\max}=0{,}0140\,p_0 a^4/Eh^3 \quad .$$

Полученное приближенное значение максимального прогиба отличается от точного $\overline{w}_{\max}=0{,}0138 p_0\,a^4/Eh^3$ меньше чем на $1{,}5\%$.

Список литературы

1. Сапунов В.Т. Прикладная теория упругости: *Учеб. пособие*. Ч. 1. М.: МИФИ, 2008.
2. Теребушко О.И. Основы теории упругости и пластичности. М.: Наука, 1984.
3. Подгорный А.Н. и др. Основы и методы прикладной теории упругости. Киев: Вища школа, 1981.
4. Демидов С.П. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1979.
5. Тимошенко С.П., Гудьер Д. Теория упругости. М.: Наука, 1979.
6. Амензаде Ю.А. Теория упругости. М.: Высшая школа, 1976.
7. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
8. Винокуров Л.П. Теория упругости и пластичности. Харьков: Изд-во ХГУ, 1965.
9. Тимошенко С.П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. М.: Физматгиз, 1963.
10. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. М.: Физматгиз, 1959.
11. Ван Цзи-де. Прикладная теория упругости. М.: Физматгиз, 1959.
12. Новожилов В.В. Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.

Владимир Тимофеевич Сапунов

ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Учебное пособие

Часть 2

Редактор Н.В. Егорова

Оригинал-макет изготовлен В. Т. Сапуновым

Подписано в печать 20.11.2008. Формат 60x84 1/16
Уч.-изд. л. 8,75 Печ. л. 8,75 Тираж 150 экз.
Изд. № 4/138 Заказ

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)
115409, Москва, Каширское шоссе, 31

Типография издательства «Трովант».
г. Троицк Московской обл.