

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.Т. Сапунов

Основы теории пластичности и ползучести

Учебное пособие

*Рекомендовано УМО «Ядерная физика и технологии»
в качестве учебного пособия для студентов
высших учебных заведений*

Москва 2008

УДК 539.3/.6 (075)
ББК 30.121я7
С 19

Сапунов В.Т. **Основы теории пластичности и ползучести:**
Учебное пособие. М.: МИФИ, 2008. – 220 с.

В книге изложены основные законы и уравнения, а также методы решения краевых задач современной теории пластичности и ползучести; приведены решения задач упругопластического деформирования и ползучести некоторых элементов конструкций применительно к конструктивным расчетам на прочность в машиностроении. Особое внимание уделено простоте изложения определяющих уравнений теории пластичности и ползучести и задачам, выявляющим особенности напряженно-деформированного состояния элементов конструкций

Пособие рекомендовано для студентов старших курсов специальностей «Физика прочности» и «Основы конструирования физических установок», аспирантов и инженерно-технических работников, специализирующихся в области прочности и жесткости элементов конструкций.

Пособие подготовлено в рамках
Инновационной образовательной программы

Рецензент д-р. техн. наук, проф. В.Б. Малыгин (МИФИ)

ISBN 978–5–7262–0910–4

© Московский инженерно-физический институт
(государственный университет), 2008

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	6
1.1. Расчетная модель тела в рамках механики деформируемого твердого тела.	7
1.2. Методы решения задач механики деформируемого твердого тела.	12
1.3. Три закона деформирования сплошного твёрдого тела	13
ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ	
2. Напряженное и деформированное состояние в точке	17
2.1. Тензор и девиатор напряжений. Интенсивности напряжений.	17
2.2. Тензор и девиатор деформаций. Интенсивности деформаций. Скорости деформаций.	22
3. Зависимость между деформацией и напряжением за пределами упругости при одноосном растяжении	26
3.1. Диаграммы растяжения	26
3.2. Схематизация диаграмм растяжения. Модели тела в теории пластичности	29
4. Условия пластичности. Условия упрочнения	31
4.1. Поверхность и кривая пластичности	31
4.2. Условия пластичности	34
4.3. Условия упрочнения	38
5. Теории пластичности	41
5.1. Некоторые следствия из линейного физического закона	42
5.2. Теория пластического течения	45
5.3. Деформационная теория пластичности	53
5.4. Обобщенная диаграмма деформирования	56
6. Простое и сложное нагружение. Разгрузка	59
6.1. Активная и пассивная деформация	59
6.2. Теорема о простом нагружении	59
6.3. Сравнение деформационной теории и теории течения в случае простого и сложного нагружения	62
6.4. Теорема о разгрузке	65
7. Уравнения упругопластического равновесия	67
7.1. Система уравнений пластического равновесия.	67
7.2. Условия непрерывности на границе упругой и пластической областей	69
7.3. Общие методы решения задач пластичности	71

8. Некоторые задачи теории пластичности	77
8.1. Упругопластическое кручение круглого бруса	77
8.2. Чистый и поперечный упругопластический изгиб бруса . . .	82
8.3. Кручение призматических стержней	88
8.4. Толстостенный цилиндр под действием внутреннего давлени- я	92
8.5. Толстостенная сфера под действием внутреннего давления	97
8.6. Упругопластическое состояние равномерно вращающегося сплошного диска постоянной толщины	100

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

9. Ползучесть металлов при одноосном напряженном состоянии	104
9.1. Кривые ползучести. Описание кривых ползучести	104
9.2. Пределы ползучести, длительная прочность	109
9.3. Релаксация напряжений	112
9.4. Ползучесть при сжатии.	114
9.5. Кратковременная ползучесть	115
10. Простейшие (одномерные) теории ползучести	120
10.1. Модели деформируемого тела.	120
10.2. Технические теории ползучести.	122
10.3. Наследственные теории ползучести	128
11. Расчеты на ползучесть при одноосном напряженном состоянии и кручении	132
11.1. Релаксация напряжений в болтах фланцевого соединения	132
11.2. Установившаяся ползучесть изгибаемых балок, сечение которых имеет две оси симметрии	134
11.3. Установившаяся ползучесть при кручении круглых стержней	141
11.4. Неустановившаяся и установившаяся ползучесть статиче- ски неопределимой стержневой системы	146
12. Ползучесть при сложном напряженном состоянии	151
12.1. Установившаяся и неустановившаяся ползучесть	152
12.2. Применение к установившейся ползучести теории пласти- ческого течения	154
12.3. Применение к установившейся ползучести деформацион- ной теории	158
12.4. Полная система уравнений установившейся теории ползу- чести	159

13. Расчеты на ползучесть при сложном напряженном состоянии.	161
13.1. Установившаяся ползучесть тонкостенных цилиндрических оболочек	161
13.2. Установившаяся ползучесть толстостенной трубы под действием внутреннего давления	166
13.3. Установившаяся ползучесть толстостенной сферы под действием внутреннего давления	172
13.4. Ползучесть вращающихся дисков.	175
14. Длительная прочность при одноосном деформировании	182
14.1. Разрушения при ползучести.	182
14.2. Влияние различных факторов на длительную прочность . . .	189
14.3. Коэффициенты запаса при одноосном деформировании. . . .	191
14.4. Время разрушения при растяжении стержня	195
14.5. Время разрушения статически определимой стержневой системы	200
15. Длительная прочность при сложном напряженном состоянии.	202
15.1. Прочность при длительном нагружении. Эквивалентные напряжения.	202
15.2. Разрушения при неоднородном напряженном состоянии . . .	209
15.3. Хрупкое разрушение скручиваемого круглого вала.	211
15.4. Вязкое, хрупкое и вязкохрупкое разрушения тонкостенной цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления.	212
15.5. Вязкое разрушение толстостенной цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления.	216
Список литературы	219

1. Введение

При проектировании современных машин и конструкций часто приходится рассматривать работу материала за пределами упругости, что позволяет изыскивать дополнительные ресурсы конструкции. Изучением напряжений и деформаций в телах, деформируемых за пределами упругости, занимается теория пластичности, подразумевая здесь теорию пластических деформаций, не зависящих от времени. Пластическое течение, связанное с влиянием времени, изучается в теории ползучести.

Для большей части применяемых в технике материалов пластические деформации зависят только от величины действующих сил и от порядка их приложения, но не от продолжительности действия их и не от скорости, с которой производится нагружение. Как видим, в теории пластичности безразлична последовательность тех или иных производимых на тело воздействий, и в теории, таким образом, фигурирует время, но это время лишено метрики.

Однако в эксплуатационных условиях для многих материалов при повышенных температурах связь между силами и перемещениями оказывается существенно зависящей от времени. Эта зависимость проявляется, с одной стороны, в том, что при постоянной нагрузке деформации не остаются постоянными, а растут со временем, а с другой стороны, в том, что если элементу конструкции сообщена принудительная деформация и наложены связи, удерживающие деформацию постоянной, реакции связей убывают со временем. Явления такого рода будем объединять общим термином «ползучесть», понимая под этим словом совокупность явлений, которые можно объяснить, допустив, что зависимость между напряжениями и деформациями содержит время явно или через посредство некоторых операторов.

Основной задачей теории ползучести, в отличие от расчетов на прочность в теориях упругости и пластичности, является не обеспечение «абсолютной» прочности элемента конструкции, а определение времени, в течение которого не будет нарушена его конструктивная функция. Другими словами, всякое изделие,

работающее в условиях ползучести, должно быть рассчитано на определенную долговечность или ресурс.

И теория пластичности, и теория ползучести, как уже отмечалось, являются частью механики деформируемых тел и близко примыкают к теории упругости, изучающей напряжения и деформации в идеально упругих телах. Большая часть основных представлений теории упругости используется и в теориях пластичности и ползучести.

Изучение напряжений и деформаций в теориях пластичности и ползучести проводится методом, обычным для механики деформируемых тел. Прежде всего на основе экспериментальных данных устанавливаются основные законы деформирования. С помощью этих законов, имеющих феноменологический характер, составляется система уравнений теории пластичности (ползучести), решение которой и дает картину пластических деформаций (деформаций ползучести) и напряжений в рассматриваемом теле.

1.1. Расчетная модель тела в рамках механики деформируемого твердого тела

При проектировании любого объекта (машины, конструкции, узла и т.п.) одним из основных является вопрос о прочности и жесткости как объекта в целом, так и любого его элемента при заданных условиях нагружения. Легко видеть, что при имеющемся многообразии геометрических форм элементов конструкций и нагрузок, действующих на них, поставленная задача прочности и жесткости должна решаться для тела произвольной формы при произвольном внешнем нагружении.

Известно, что для оценки прочности тела необходимо определить внутренние силы (напряжения), возникающие в теле при действии на него внешнего нагружения. Оценивая внутренние силы, мы можем говорить о прочности – способности тела воспринимать внешние нагрузки, не разрушаясь.

Под жесткостью тела будем понимать его способность воспринимать внешние нагрузки, не меняя существенным образом свою

первоначальную форму. Для оценки жесткости тела, очевидно, необходимо определить его деформации или перемещения точек.

Суммируя сказанное, можно утверждать, что мы ставим задачу об определении внутренних сил (напряжений), деформаций и перемещений для точек тела произвольной формы при его произвольном нагружении. При этом ясно, что при определении напряжений и деформаций (перемещений) необходимо учитывать, что реальные элементы конструкций выполняются из разных материалов. В поставленной задаче это обстоятельство должно быть отражено в форме разных возможностей (способностей) тел сопротивляться действию внешних сил (сопротивляться деформированию). Другими словами, при решении задачи должны быть учтены свойства реального материала элемента конструкции (рис. 1.1).

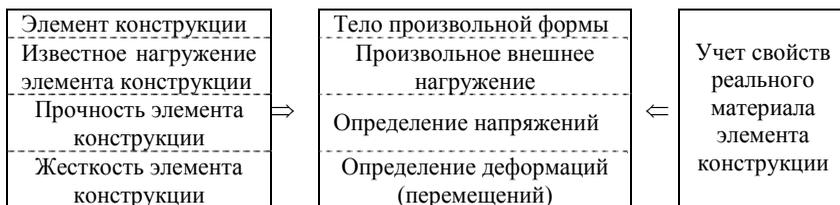


Рис. 1.1

Для решения поставленной задачи возможны два подхода:

- физический, дающий представление о поведении реальных объектов на основе анализа микроструктуры материала;
- феноменологический (механический), стремящийся найти адекватное математическое описание совокупности опытных данных по поведению объекта, устанавливаемых макроэкспериментом.

В дальнейшем будем использовать только феноменологический подход.

Отметим, что феноменологический подход для решения вопроса прочности и жесткости элементов конструкций реализован в сопротивлении материалов, теории упругости, теории пластичности, теории ползучести, строительной механике стержневых и пространственных тонкостенных систем, механике разрушения и других дисциплинах, которые по традиции излагаются, изучаются и

применяются в настоящее время раздельно. Однако очевидно, что единый феноменологический подход к одной и той же задаче (задаче прочности и жесткости) должен обеспечиваться единой схемой решения поставленной задачи.

Возможность построения единой схемы решения дает единая расчетная модель тела, принятая в механике деформируемого твердого тела, являющаяся частью механики сплошных сред. Такой моделью является сплошное твердое деформируемое тело.

Свое понятие (определение) твердого тела дает теоретическая механика (раздел физики), где под твердым телом, в отличие от газов и жидкостей, подразумевается система неизменно связанных между собой материальных точек. Поскольку при действии внешних сил на такое тело расстояния между отдельными его точками не изменяются, то внутренние силы не входят в уравнения, получаемые для описания поведения такого тела. Строение тела при этом не имеет никакого значения – рассматриваемое тело, по смыслу, является абсолютно твердым (материальной точкой).

Ставя задачу об определении внутренних сил, необходимо ввести в рассмотрение способность твердого тела деформироваться как процесс изменения взаимных расстояний между точками тела при получении ими перемещений. При этом твердое деформируемое тело должно рассматриваться уже как система бесконечно большого числа материальных точек, взаимодействующих между собой определенным образом. Физическая точка зрения состоит в том, чтобы приписывать этим материальным точкам определенную индивидуальность, например, отождествляя их с реальными атомами или молекулами. Однако приходится признать, что на современном уровне наши знания еще недостаточны для построения механики деформируемого твердого тела, в которой было бы принято во внимание действительное строение реальных материалов.

Представление о деформируемом теле как о сплошной среде упрощает возможность математического описания поведения тела. Среду будем называть сплошной, если любой объем, выделенный из нее, содержит вещество, т.е. массу. Ясно, что такое представление о сплошной среде противоречит представлению об атомном строении вещества.

Понятие сплошной среды, в общем, не так просто, как может показаться на первый взгляд: можно строить разные модели сплошной среды, наделяя их разными свойствами. Простейшая модель (классическая) вводится следующим образом. Примем материальную точку за основное первичное понятие. В кинематике это понятие тождественно понятию геометрической точки. Точку можно представить сферой бесконечно малого радиуса. При стремлении радиуса к нулю, единственной величиной, индивидуализирующей точку, остается радиус-вектор центра сферы (или координаты центра). Представляя себе некоторую замкнутую область пространства, заполненную непрерывно такими точками, получим модель сплошной среды. Если $x_i(0)$ – исходные координаты точки, то при движении среды (деформировании) они приобретают значения $x_i(t)$. Поведение среды будет полностью определено, если функции $x_i(t)$ для каждой точки известны. Как пример более сложной модели сплошной среды можно рассмотреть вариант, когда материальная точка представляется в форме бесконечно малого эллипсоида. Для индивидуализации точки такого рода нужно уже задать не только ее координаты, но и направления осей. Очевидно, что кинематика такой среды строится более сложным образом.

В дальнейшем будем опираться только на классическую модель сплошной среды. Забегая вперед, отметим, что математически условие сплошности для деформируемого тела выражается рядом условий о непрерывности деформаций, перемещений и их производных и связи между ними.

Сплошную среду в дальнейшем будем считать однородной: свойства выделенных из нее одинаковых объемов одинаковы. Очевидно, что речь должна идти о свойствах, доступных определению средствами механического макроэксперимента. Кроме того, говоря об однородности или неоднородности, необходимо всегда уточнять, о каком масштабе идет речь. Введя представление о сплошности среды, уже допустили однородность на уровне размера, порядка атомного. Технический сплав (металл) состоит из зерен, размер которых бесконечно мал по сравнению с размерами изделий из этих сплавов. Соответственно, сплавы (металлы) можно считать однородной сплошной средой.

Итак, можем считать, что для дальнейшего рассмотрения в ка-

честве модели принято однородное сплошное твердое деформируемое тело, где однородность, сплошность, твердость, деформируемость – свойства принятой модели реального тела (материала).

Можно утверждать, что перечисленных свойств недостаточно для описания поведения модели, адекватного поведению реального тела, поскольку здесь никак не отражены свойства, связанные с различной способностью разных материалов сопротивляться действию внешних сил.

Поскольку реальные тела реагируют на внешнее нагружение крайне сложным образом, естественно пытаться отразить не все наблюдаемые явления, связанные с проявлением свойств материала, а, наоборот, по возможности упростить их, выделяя только некоторые особенности, характерные для многих реальных тел в определенном интервале нагрузок или температур. В качестве таких свойств реальных материалов, прежде всего, можно назвать упругость (линейную и нелинейную), пластичность, ползучесть.

Легко видеть, что категория таких свойств как сплошность, твердость и деформируемость, неизменна в той мере, в какой неизменна сама модель сплошной среды, а категория свойств, связанных со способностью тела сопротивляться деформированию, может меняться нами в соответствии с тем, какие свойства реального тела можно считать определяющими в каждом отдельном случае.

Упругие деформации наблюдаются при относительно небольших значениях действующих нагрузок и определяются только их величиной. Если нагрузка невелика, то после ее снятия деформированное тело принимает первоначальную форму и размеры. Это свойство тел восстанавливать первоначальную форму и размеры после удаления нагрузок называется упругостью.

Пластические деформации зависят не только от величины действующих сил, но и от порядка их приложения.

Ползучесть для конструкционных сталей наблюдается при повышенных температурах: для углеродистых сталей – при температуре 300 - 350°C, для легированных – выше 400°C.

Рассматриваемая модель может усложниться добавлением и некоторых других свойств. Например, наличие облучения материала потоком тепловых или быстрых нейтронов приводит к необходимости вводить такие свойства, как радиационная ползучесть, радиационный рост или распухание.

Если механические свойства образца, вырезанного из рассматриваемого материала, не зависят от его ориентации, материал называют изотропным (в противном случае – анизотропным). Поликристаллический металл при достаточно большом объеме (масштабный фактор) ведет себя как изотропное тело. В дальнейшем принятую расчетную модель тела будем наделять свойством изотропности.

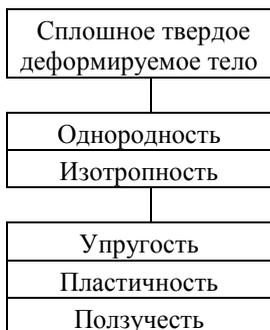


Рис. 1.2

Окончательно расчетную модель тела с позиций механики деформируемого тела можем представить в виде (рис.1.2). Очевидно, для детального исследования поведения материала в определенном интервале температур и нагрузок расчетную модель можно упростить, оставляя только одно из перечисленных свойств, например, упругость. Отметим, что этим самым предполагается независимость существования каждого из перечисленных свойств.

1.2. Методы решения задач механики деформируемого твердого тела

Поставленная задача определения напряжений, деформаций и перемещений должна решаться для построенной модели тела с позиций принятого феноменологического (механического) подхода: для модели нужно найти адекватное математическое описание совокупности опытных данных, устанавливаемых макроэкспериментом для реального тела при его нагружении.

Предлагаемый способ решения задачи заключается в следующем. Пусть имеем совокупность опытных данных, определяющих поведение реальных элементов конструкций при определенных условиях нагружения. Необходимо, сформулировав на основе этих данных некоторые закономерности деформирования реальных объектов, применить их к расчетной модели и получить математическое описание поведения (процесса деформирования) принятой модели тела при тех же условиях нагружения.

Такой способ (метод) решения поставленной задачи носит название статико-кинематического. Статико-кинематический метод имеет своей основой следующие три закона деформирования сплошных твердых тел:

- закон равновесия;
- закон сплошности;
- физический закон.

Статико-кинематический метод рассматривает и описывает один отдельно взятый этап деформирования, которому соответствуют свои напряжения, деформации и перемещения.

Вторым методом, применяемым в механике деформируемого твердого тела для исследования деформирования расчетной модели, является энергетический метод. При использовании энергетического метода определяющие уравнения составляются не для одного (отдельного) этапа деформирования, а для описания процесса деформирования в определенном интервале.

Для описания процесса деформирования требуются уже другие характеристики, а именно работа внутренних сил, накапливаемая на протяжении изучаемого интервала деформирования тела, потенциальная энергия и т.п. При этом оперируют энергетическими законами, в частности, механическим законом сохранения энергии.

Исторически статико-кинематический метод сложился раньше, чем энергетический, однако поскольку энергия является более общей характеристикой деформирования, из энергетического подхода вытекают многие положения статико-кинематического. На настоящее время более широкое применение при решении задач имеет энергетический метод, поскольку его реализация в численных методах более проста.

1.3. Три закона деформирования сплошного твёрдого тела

Законами деформирования сплошного твердого тела будем называть упомянутые выше закон сплошности, закон равновесия и физический закон. Каждый из этих законов выражается определенными зависимостями между напряжениями, перемещениями и деформациями тела. Эти зависимости, которые будут получены позднее, являются базисными (определяющими), т.е. такими, на

которых основано решение задачи о деформировании сплошного твердого тела.

Закон равновесия сплошных твердых деформируемых тел отражает экспериментально известный факт, что при приложении к телу уравновешенной нагрузки (системы сил) оно имеет хотя бы одну форму равновесия. Закон равновесия для деформируемого тела определяется теми же уравнениями, что и для недеформируемого, но с тем отличием, что для деформируемого тела требуется выполнение условий равновесия для каждой частицы тела в отдельности. Здесь имеет место аналогия с изменяемой системой, для равновесия которой требуется равновесие каждого элемента системы.

Отметим, что при рассмотрении равновесия деформируемого тела должны рассматривать два случая:

- равновесие внутренних частиц (элементарных объемов) тела, находящихся под действием только внутренних сил, определяемых в задаче;
- равновесие частиц, часть поверхности которых является поверхностью тела, находящихся, с одной стороны, под действием внутренних сил, а с другой – под действием заданных внешних сил.

Естественно, уравнения равновесия в этих двух случаях будут разными. Кроме того, поскольку деформируемое тело имеет бесконечное число степеней свободы соответственно бесконечно большому числу своих перемещающихся внутренних частиц, закон равновесия для каждой из них будет представляться не алгебраическими, а дифференциальными уравнениями.

Уравнения равновесия элементарных объемов тела, примыкающих к поверхности тела, носят название граничных условий в напряжениях (поверхность тела – его граница).

Закон сплошности непосредственно вытекает из самой сущности модели сплошного твердого тела и приводит к получению уравнений, связывающих деформации и производные от перемещений. В дальнейшем эти уравнения будем называть зависимостями Коши.

Отметим, что и закон равновесия, и закон сплошности должны выполняться для сплошного твердого деформируемого тела независимо от его механических свойств (упругости, пластичности и т.п.).

Физический закон утверждает наличие связи между напряжениями и деформациями. Уравнения, полученные на основании физического закона, часто называют уравнениями механического состояния. Они должны отражать механические свойства реального материала, которые могут быть представлены либо физическими постоянными, либо функциями некоторых параметров. Очевидно, что уравнения механического состояния имеют разные формы в зависимости от того, какие свойства реального материала учитываются при рассмотрении вопросов прочности или жесткости элемента конструкции. Например, наделяя модель свойством упругости и не учитывая все остальные, будем иметь уравнения механического состояния в форме линейного физического закона (обобщенный закон Гука) с двумя упругими постоянными – модулем упругости и коэффициентом Пуассона.

Все сказанное можно представить в виде схемы, приведенной на рис. 1.3.



Рис. 1.3

Из приведенной схемы следует, что граничные условия в напряжениях не входят в систему уравнений, определяющих процесс деформирования расчетной модели тела. Данное обстоятельство обусловлено назначением граничных условий: обеспечить соответствие между внутренними силами, определяемыми введенными законами деформирования расчетной модели тела, и внешними,

заранее известными (заданными). Естественно, удовлетворению граничных условий должно предшествовать отыскание искомых внутренних сил.

Можно сказать, что граничные условия отражают конкретные условия поставленной задачи, поскольку именно с их помощью в рассмотрение вводится заданная внешняя нагрузка и контур тела, и любая задача механики деформируемого твердого тела является граничной задачей.

Процедура решения поставленной задачи расчета на прочность и жесткость рассматриваемого элемента конструкции при использовании статико-кинематического метода будет следующей:

- выбор метода решения системы уравнений, описывающих проведение расчетной модели тела (например, аналитический или численный и т.п.);

- решение системы уравнений с отысканием напряжений, деформаций и перемещений;

- подчинение найденного решения граничным условиям и получение решения задачи о напряженно-деформированном состоянии рассматриваемого элемента конструкции;

- выбор критериев прочности и/или жесткости и оценка работоспособности элемента конструкции.

Приведенная общая схема решения задачи прочности и жесткости для любого элемента конструкции определяет и место каждой дисциплины в рамках механики деформируемого твердого тела, и взаимосвязь между ними. Например, если наделить модель тела только свойством упругости, можно построить аппарат теории упругости. Аналогично строится аппарат теории пластичности или теории ползучести. Очевидно, что для этих трех дисциплин реализация законов равновесия и сплошности приводит к одним и тем же уравнениям; сохраняются и все понятия напряженного и деформированного состояний. Отличаться же построенные математические аппараты будут только уравнениями механического состояния, которые в каждом случае нужно получать отдельно. Решение, например, упруго-пластической задачи требует совместного применения аппаратов теории упругости и пластичности и стыковки полученных решений.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ

2. Напряженное и деформированное состояние в точке

Напряженно-деформированное состояние в точке рассматривается в теории упругости. Ниже приводятся основные соотношения и формулы и некоторые дополнительные сведения, необходимые при построении математического аппарата теории пластичности.

2.1. Тензор и девиатор напряжений. Интенсивности напряжений

Напряженное состояние в любой точке тела, на которое действует произвольная система внешних сил, определяется тензором напряжений:

$$T_{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix},$$

где σ_x , σ_y , σ_z – нормальные напряжения, а τ_{xy} , τ_{yz} и τ_{zx} – касательные. Тензор напряжений записан в системе координат x , y , z , т.е. все перечисленные напряжения действуют на трех площадках, перпендикулярных к координатным осям.

Исследование напряженного состояния показывает наличие в каждой точке тела трех взаимно перпендикулярных площадок, на которых касательные напряжения равны нулю, а нормальные напряжения принимают экстремальные значения. Такие площадки носят название главных площадок, а соответствующие нормальные напряжения – главных нормальных. Для главных нормальных напряжений вводятся следующие обозначения: σ_1 , σ_2 , σ_3 , причем в теории упругости принято $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

Главные нормальные напряжения σ_1 , σ_2 , σ_3 являются корнями кубического уравнения

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0 \quad ,$$

в котором коэффициентами являются инварианты тензора напряжений:

$$I_1(T_\sigma) = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z \quad ,$$

$$I_2(T_\sigma) = \sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \quad ,$$

$$I_3(T_\sigma) = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 \quad .$$

Поскольку направления 1, 2, 3 взаимно перпендикулярны, их можно рассматривать как направления осей главной системы координат. Тензор напряжений, отнесенный к главным осям, имеет вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{pmatrix} .$$

Исследование касательных напряжений в точке позволяет определить экстремальные значения касательных напряжений или главные касательные напряжения:

$$\tau_1 = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2} \quad , \quad \tau_2 = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2} \quad , \quad \tau_3 = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \quad .$$

Используя представления о тензоре напряжений, напряженное состояние в точке можно представить в виде суммы двух напряженных состояний:

$$T_\sigma = T'_\sigma + D_\sigma \quad \text{или} \quad T_\sigma = \sigma T_1 + D_\sigma \quad ,$$

где

$$T'_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \sigma T_1 = \sigma \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

– *шаровой тензор*, определяющий равное всестороннее растяжение (сжатие) напряжениями σ ;

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & s_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & s_z \end{pmatrix}$$

– *девиатор напряжений*, определяющий напряженное состояние с «новыми» нормальными напряжениями $s_x = \sigma_x - \sigma$, $s_y = \sigma_y - \sigma$, $s_z = \sigma_z - \sigma$ и «старыми» касательными – τ_{xy} , τ_{yz} и τ_{zx} .

Считая напряжение σ средним нормальным напряжением, т.е. принимая $\sigma = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) / 3$, можно утверждать, что для первого напряженного состояния, определяемого шаровым тензором, имеет место только изменение объема, а для второго – изменяется форма элемента тела, а изменение объема отсутствует, поскольку здесь сумма нормальных напряжений равна нулю.

Как показывают опыты, при равном всестороннем растяжении (сжатии) пластические деформации не возникают, и пластическое деформирование связано с искажением (изменением) формы элемента тела. В этом плане проведенное разделение напряженного состояния на два в теории пластичности имеет физический смысл: «ответственным» за пластическое деформирование материала является девиатор напряжений.

Инварианты девиатора напряжений имеют следующий вид:

$$I_1(D_\sigma) = 0 \quad ,$$

$$I_2(D_\sigma) = s_x s_y + s_y s_z + s_z s_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 \quad ,$$

$$I_3(D_\sigma) = s_x s_y s_z - s_x \tau_{yz}^2 - s_y \tau_{zx}^2 - s_z \tau_{xy}^2 + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} \quad .$$

В дальнейшем гораздо чаще будет использоваться второй инвариант девиатора напряжений. Проведя некоторые преобразования, запишем:

$$I_2(D_\sigma) = -\frac{1}{6} \left[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) \right]$$

или, в главной системе координат

$$I_2(D_\sigma) = -\frac{1}{6} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right] .$$

Отметим, что второй инвариант девиатора напряжений имеет физический смысл. С целью его выяснения рассмотрим напряжения на *октаэдрической* (равнонаклоненной ко всем трем осям) площадке в главной системе координатных осей.

Проекция полного напряжения p_n на координатные оси в этом случае определяются соотношениями:

$$X_n = \sigma_1 l \quad , \quad Y_n = \sigma_2 m \quad , \quad Z_n = \sigma_3 n \quad .$$

При направляющих косинусах $l = m = n = 1/\sqrt{3}$ само полное напряжение p_n будет иметь следующий вид:

$$p_n = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} \quad .$$

Нормальная составляющая полного напряжения определяется известным соотношением

$$\sigma_n = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \sigma \quad .$$

Соответственно, для касательной составляющей $\tau_n = \sqrt{p_n^2 - \sigma_n^2}$ получаем:

$$\tau_n = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} .$$

Сравнение величины τ_n со вторым инвариантом девиатора напряжений показывает, что касательное напряжение τ_n пропорционально $\sqrt{|I_2(D_\sigma)|}$, что и определяет физический смысл второго инварианта девиатора напряжений.

Отметим, что поскольку нормальная составляющая полного напряжения на октаэдрической площадке равна σ , то на изменение формы элемента тела она не влияет, и, следовательно, пластическое деформирование в рассматриваемой точке тела может быть связано с касательной составляющей. С этой точки зрения касательное напряжение τ_n на рассматриваемой площадке представляет особый интерес.

В теории пластичности для определения пластического деформирования удобнее использовать не касательное напряжение τ_n , а некоторые величины, также пропорциональные корню из второго инварианта девиатора напряжений, называемые интенсивностями напряжений. В частности, в дальнейшем будем рассматривать следующие интенсивности напряжений:

- *интенсивность нормальных напряжений*

$$\sigma_i = \sqrt{3|I_2(D_\sigma)|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} ;$$

- *интенсивность касательных напряжений*

$$\tau_i = T = \sqrt{|I_2(D_\sigma)|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} .$$

Коэффициенты пропорциональности в приведенных соотношениях подобраны так, что при одноосном растяжении имеем $\sigma_i = \sigma_1$, а при чистом сдвиге – $\tau_i = T = \tau$.

2.2. Тензор и девиатор деформаций. Интенсивности деформаций. Скорости деформаций

Деформированное состояние в любой точке тела, на которое действует произвольная система внешних сил, определяется тензором деформаций:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \gamma_{xy}/2 & \gamma_{xz}/2 \\ \gamma_{yx}/2 & \varepsilon_y & \gamma_{yz}/2 \\ \gamma_{zx}/2 & \gamma_{zy}/2 & \varepsilon_z \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$ – линейные деформации, а γ_{xy}, γ_{yz} и γ_{zx} – угловые. Так же, как и тензор напряжений, тензор деформаций T_ε является тензором второго ранга, симметричным относительно главной диагонали.

Приведение тензора деформаций T_ε к главным осям 1, 2, 3 позволяет записать его в форме:

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{pmatrix},$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – главные линейные деформации.

Разности главных линейных деформаций определяют главные угловые деформации или главные сдвиги:

$$\gamma_1 = \varepsilon_2 - \varepsilon_3, \quad \gamma_2 = \varepsilon_3 - \varepsilon_1, \quad \gamma_3 = \varepsilon_1 - \varepsilon_2.$$

По аналогии с напряженным состоянием деформированное состояние, определяемое тензором деформаций, можно представить как сумму двух деформированных состояний:

$$T_{\varepsilon} = T'_{\varepsilon} + D_{\varepsilon} \quad \text{или} \quad T_{\varepsilon} = \varepsilon T_1 + D_{\varepsilon} \quad ,$$

где $T'_{\varepsilon} = \varepsilon T_1$ – шаровой тензор деформаций; D_{ε} – девиатор деформаций.

Очевидно, что для первого деформированного состояния, определяемого шаровым тензором, имеет место только изменение объема. Если же считать величину ε средней деформацией, т.е. принять $\varepsilon = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)/3$, то можно утверждать, что для второго деформированного состояния изменяется форма элемента тела, а изменение объема отсутствует. Уже отмечалось, что появление пластических деформаций обусловлено только изменением формы элемента, и выделение девиатора деформаций (так же, как и девиатора напряжений) в теории пластичности имеет физический смысл.

Инварианты тензора и девиатора деформаций формируются так же, как и инварианты тензора и девиатора напряжений. В теории пластичности важную роль играет второй инвариант девиатора деформаций $I_2(D_{\varepsilon})$, который можно рассматривать как суммарную (обобщенную) характеристику искажения формы элемента тела (как и второй инвариант девиатора напряжений). Можем получить, что

$$I_2(D_{\varepsilon}) = -\frac{1}{6} \left[(\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \right. \\ \left. + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \right] \quad ,$$

или, в главной системе координат

$$I_2(D_{\varepsilon}) = -\frac{1}{6} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right] \quad .$$

Аналогично представлениям об интенсивностях напряжений, вводятся представления об интенсивностях деформаций – величинах, пропорциональных квадратному корню из второго инварианта девиатора деформаций. В зависимости от коэффициента пропорциональности будем различать:

- *интенсивность линейных деформаций*

$$\varepsilon_i = \sqrt{\frac{4}{3} |I_2(D_\varepsilon)|} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad ;$$

- *интенсивность угловых деформаций (деформаций сдвига)*

$$\gamma_i = \Gamma = \sqrt{4 |I_2(D_\varepsilon)|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2} \quad .$$

Коэффициенты пропорциональности в приведенных соотношениях подобраны так, что при одноосном растяжении имеем $\varepsilon_i = \varepsilon_1$, а при чистом сдвиге – $\gamma_i = \Gamma = \gamma$.

Поскольку пластическое деформирование по своей природе представляет состояние движения, возможно введение представления о *скоростях деформаций*.

Пусть точки среды (тела) движутся со скоростью $v(x, y, z, t)$, составляющие которой равны v_x, v_y, v_z . За промежуток времени dt среда получит бесконечно малую деформацию, определяемую перемещениями $du = v_x dt, dv = v_y dt, dw = v_z dt$. Компоненты этой деформации, вычисленные по зависимостям Коши, имеют общий множитель dt , разделив на который можно перейти к компонентам скоростей деформаций. Соответственно, деформированное состояние в точке тела можно определить тензором скоростей деформаций T_ξ :

$$T_\xi = \begin{pmatrix} \xi_x & \eta_{xy}/2 & \eta_{xz}/2 \\ \eta_{yx}/2 & \xi_y & \eta_{yz}/2 \\ \eta_{zx}/2 & \eta_{zy}/2 & \xi_z \end{pmatrix} \quad ,$$

где $\xi_x = \partial v_x / \partial x$, $\xi_y = \partial v_y / \partial y$ и т.д. – скорости линейных деформаций, а $\eta_{xy} = (\partial v_y / \partial x) + (\partial v_x / \partial y)$ и т.д. – скорости деформаций сдвига.

Тензор скоростей деформаций T_ξ представим в виде суммы шарового тензора скоростей деформаций $T'_\xi = \xi T_1$ и девиатора скоростей деформаций D_ξ , где $\xi = (\xi_x + \xi_y + \xi_z) / 3$ – средняя скорость деформаций.

Инварианты девиатора скоростей деформаций и интенсивности скоростей деформаций вводятся аналогично тому, как это делалось при рассмотрении деформированного состояния. В частности, соотношение, определяющее интенсивность скоростей угловых деформаций (деформаций сдвига) имеет вид:

$$H = \sqrt{4|I_2(D_\xi)|} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\xi_1 - \xi_2)^2 + (\xi_2 - \xi_3)^2 + (\xi_3 - \xi_1)^2} .$$

Отметим, что при малых деформациях можно получить достаточно простые соотношения между компонентами деформаций и компонентами скоростей деформаций. Действительно, можем записать:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial t} \quad ; \\ \xi_x &= \frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{du}{dt} \quad (du = v_x dt \Rightarrow v_x = \frac{du}{dt}) . \end{aligned}$$

Поскольку для малых деформаций можем принять $v_x = \partial u / \partial t$, связь между деформацией ε_x и скоростью деформации ξ_x получаем в виде:

$$\xi_x = \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_x .$$

Остальные соотношения, связывающие компоненты скоростей деформаций с компонентами деформаций, записываются аналогично.

Компоненты скоростей деформаций, как и компоненты деформаций, не могут задаваться произвольно – они должны удовлетворять уравнениям совместности, аналогичным условиям совместности деформаций Сен-Венана.

Отметим, что применение понятий о скоростях деформаций весьма целесообразно при решении технологических задач в области обработки металлов давлением.

3. Зависимость между деформацией и напряжением за пределами упругости при одноосном растяжении

Для реализации физического закона (построения аналитической зависимости между напряжениями и деформациями) для пластически деформированного материала в случае сложного напряженного состояния, необходимо провести предварительное изучение поведения материала за пределом упругости при одноосном растяжении с целью выявления основных особенностей этого поведения.

3.1. Диаграммы растяжения

Диаграммы растяжения получают при растяжении с постоянной скоростью стандартных образцов цилиндрической формы. При постепенном возрастании растягивающей силы материал образца находится в упругом состоянии до тех пор, пока напряжение в нем не достигнет определенной величины – предела упругости. Затем материал переходит в пластическое состояние. Для разных материалов переход из упругого состояния в пластическое может различаться, и, соответственно, различаются диаграммы растяжения. На рис. 3.1 показаны некоторые типы диаграмм растяжения.

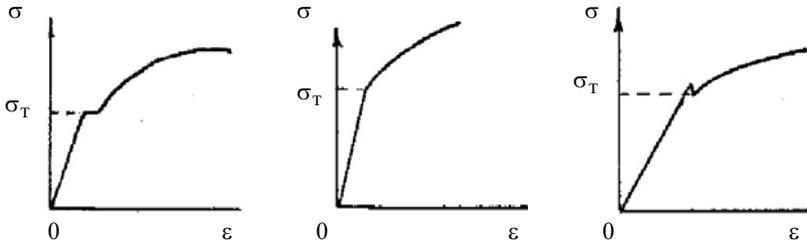


Рис. 3.1

Для прямолинейного участка диаграммы растяжения, характерного для подавляющего большинства материалов, зависимость между напряжением и деформацией записывается в форме линейного (упругого) закона Гука $\sigma = E\varepsilon$. Для материала, находящегося в пластическом состоянии, *связь между напряжением и деформацией уже нелинейная*.

Общим для всех диаграмм растяжения материалов является *наличие предела пластичности* (текучести) σ_T – напряжения, при котором появляется «первая» пластическая (остаточная) деформация. Для упрощения, в дальнейшем предел упругости и предел пластичности будем совмещать.

Отметим, что линейность закона Гука определяет однозначную зависимость между напряжением и деформацией: частичная или полная разгрузка проходит по тому же пути, что и нагружение, но в обратном направлении (рис. 3.2; участок OA на диаграмме растяжения).

Для материала, нагруженного выше предела пластичности, разгрузка (и последующее нагружение) проходит по прямой NK , параллельной начальному прямолинейному участку. Здесь уже *отсутствует однозначная зависимость между напряжением и деформацией*: в зависимости от истории нагружения одному значению напряжения может соответствовать несколько значений деформации.

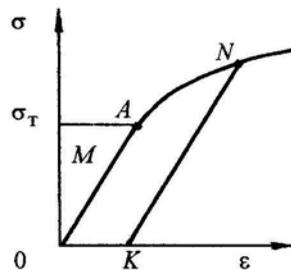


Рис. 3.2

Рассмотрение диаграмм растяжения показывает, что в процессе пластического деформирования *материал упрочняется*, поскольку повышается предел пластичности, и при этом теряется в значительной мере способность материала к дальнейшему пластическому деформированию. Действительно, предел пластичности в точке *N* больше, чем предел пластичности в точке *A* (см. рис. 3.2). С течением времени наблюдается частичное снятие упрочнения («отдых» материала). При действии высокой температуры приобретенное упрочнение исчезает («отжиг» материала).

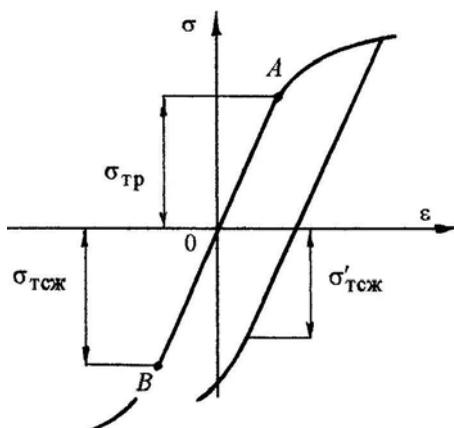


Рис. 3.3

Поскольку упрочнение материала обычно имеет *направленный* характер, в процессе пластического деформирования материал приобретает так называемую *деформационную анизотропию*. Одним из проявлений деформационной анизотропии является *эффект Баушингера*, который заключается в том, что предварительное пластическое деформирование одного знака

ухудшает сопротивляемость материала в отношении последующего пластического деформирования противоположного знака (рис. 3.3). Можно видеть, что пластическое растяжение образца приводит к заметному снижению предела пластичности (текучести) при последующем пластическом сжатии того же образца, т.е. $\sigma'_{ТСЖ} < \sigma_{ТСЖ}$.

Очевидно, что основные выявленные особенности пластического деформирования материала при одноосном растяжении должны быть учтены при построении теории пластичности в случае сложного напряженного состояния. Некоторые особенности деформирования (например, деформационная анизотропия, структурные изменения материала) при построении уравнений физического закона (теорий пластичности) учитываться не будут.

3.2. Схематизация диаграмм растяжения. Модели тела в теории пластичности

Нелинейная зависимость (рис. 3.4) между напряжением и деформацией за пределом упругости при одноосном растяжении $\sigma = f(x)$ в общем случае может быть представлена в форме:

$$\sigma = E \varepsilon (1 - \omega) ,$$

где $\omega = \omega(\varepsilon)$ – безразмерная функция

деформации. Значения функции $\omega(\varepsilon)$ зависят от вида диаграммы растяжения и меняются в пределах $0 \leq \omega(\varepsilon) \leq 1$.

Для упрощения расчетов за пределом пластичности диаграммы растяжения схематизируются, т.е. заменяются линиями (кривыми или прямыми), уравнения которых имеют простую аналитическую форму, но которые достаточно хорошо совпадают с экспериментальными данными. Уже отмечалось, что нелинейные участки диаграмм растяжения для разных материалов могут существенно различаться. Соответственно, выделим некоторые типичные виды схематизации диаграмм растяжения и определим модели поведения материала (тела), соответствующие этим схематизированным диаграммам.

Диаграмма растяжения идеального упругопластического материала (рис. 3.5):

$$\sigma = E \varepsilon , \quad \omega = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T ;$$

$$\sigma = \sigma_T , \quad \omega = 1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon} \quad \text{при} \quad \varepsilon \geq \varepsilon_T .$$

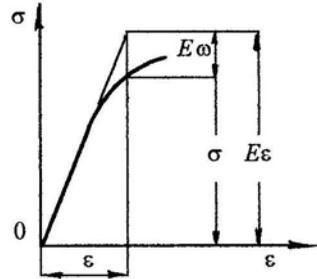


Рис. 3.4

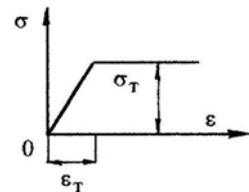


Рис. 3.5

Диаграмма растяжения материала с линейным упрочнением без площадки текучести (рис. 3.6):

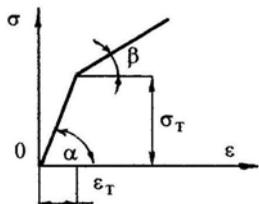


Рис. 3.6

$$\sigma = E \varepsilon, \quad \omega = 0 \quad \text{при} \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T;$$

$$\sigma = \sigma_T + E'(\varepsilon - \varepsilon_T), \quad \omega = \lambda \left(1 - \frac{\varepsilon_T}{\varepsilon} \right)$$

$$\text{при} \quad \varepsilon \geq \varepsilon_T.$$

В приведенных соотношениях имеем: $E = \operatorname{tg} \alpha$ – модуль упругости; $E' = \operatorname{tg} \beta$ – модуль упрочнения; $\lambda = (E - E')/E$ – параметр упрочнения. Обычно величина модуля упрочнения в $10 \div 50$ раз меньше модуля упругости.

Имея в распоряжении две приведенные схематизации диаграмм растяжения, можно без труда получить описания поведения для материалов, имеющих площадку текучести и упрочняющихся по линейному закону:

Диаграмма растяжения жесткопластического материала (рис. 3.7):

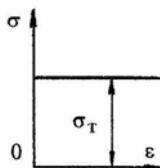


Рис. 3.7

$$\sigma = \sigma_T \quad \text{при} \quad \varepsilon \geq 0.$$

Диаграмма растяжения материала со степенным упрочнением без площадки текучести (рис. 3.8):

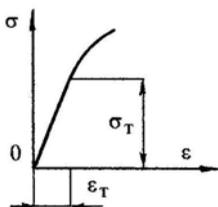


Рис. 3.8

$$\sigma = E \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_T;$$

$$\sigma = \sigma_T \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_T} \right)^m \quad \text{при} \quad \varepsilon \geq \varepsilon_T,$$

где $0 < m < 1$ – показатель степени (упрочнения). Для конструкционных сталей обычно имеем $m = 0,15 - 0,3$.

Часто для упрощения расчетов зависимость напряжения от деформации аппроксимируют степенной функцией не только в области упрочнения, а во всем интервале изменения деформации, принимая

$$\sigma = A \varepsilon^m \quad (0 < m < 1) \quad .$$

Отметим, что наиболее простыми моделями материала являются идеально-пластические тела (тела, не имеющие упрочнения). Именно эти модели на настоящее время являются наиболее часто используемыми. Соответственно, теория идеально-пластических тел имеет вполне законченный вид, и на ее основе получены многие важные для практики результаты, хотя очевидно, что поведение таких моделей представляет весьма далекую идеализацию механического поведения конструкционных материалов.

Теория пластических тел, обладающих упрочнением, пока еще далека от законченного состояния.

4. Условия пластичности. Условия упрочнения

4.1. Поверхность и кривая пластичности

Изучение поведения материала за пределом упругости при одноосном деформировании показало, что пластические деформации в растягиваемом образце появляются при выполнении условия $\sigma_1 = \sigma_T$. Очевидно, что необходимо иметь аналогичное условие появления пластических деформаций (условие пластичности) в материале при сложном напряженном состоянии.

Следует ожидать, что возникновение пластических деформаций в точке тела при сложном напряженном состоянии должно однозначно определяться только напряжениями, и, следовательно, условие пластичности в общем случае можно записать в форме:

$$f(\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}) = 0 \quad .$$

Отметим, что в записанном соотношении должно подразумеваться наличие параметра, связанного с пределом пластичности материала.

Поскольку рассматриваемое тело является изотропным, значения функции f не должны изменяться при повороте осей системы координат. Отсюда следует необходимость оперировать не с самими напряжениями, а с инвариантными характеристиками тензора напряжений. Если же учесть, что всестороннее растяжение (сжатие) не вызывает пластического деформирования материала, то приходим к выводу, что условие пластичности должно быть представлено в виде функции только второго и третьего инварианта девиатора напряжений:

$$\varphi [I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = 0 \quad .$$

Если инварианты девиатора напряжений представить через главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, то в системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ полученное соотношение можно рассматривать как некоторую поверхность – *поверхность пластичности или текущей*.

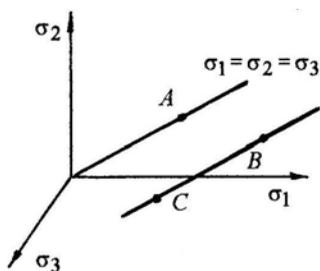


Рис. 4.1

Для изучения вида поверхности пластичности рассмотрим в принятой системе координат прямую $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, равно наклоненную ко всем трем осям (рис. 4.1). Точка A на этой прямой так же, как и любая другая точка, определяет напряженное состояние, которое является всесторонним равномерным

растяжением (сжатием) – гидростатическим давлением.

Очевидно, что напряженные состояния, определяемые любыми двумя точками B и C , расположенными на прямой, параллельной рассматриваемой, будут отличаться друг от друга только гидростатической составляющей. Поскольку, как уже отмечалось, гидростатическое давление на условие пластичности не влияет, можно утверждать, что поверхность пластичности должна быть «составле-

на» из прямых типа BC . Другими словами: поверхность пластичности должна быть цилиндрической (призматической) поверхностью с образующими, параллельными прямой OA .

Для исследования поверхности пластичности достаточно рассмотреть сечение ее плоскостью $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 0$, перпендикулярной к образующей. Введенная плоскость проходит через начало координат и равно наклонена к осям $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. Часто указанную плоскость называют девиаторной, поскольку вектор, лежащий в этой плоскости, характеризует девиатор напряженного состояния. Действительно, ранее показали, что касательное напряжение τ_n на площадке, равно наклоненной ко всем трем осям, пропорционально корню из второго инварианта девиатора напряжений.

След поверхности пластичности на девиаторной плоскости будем называть *кривой пластичности (текучести)*. Выясним некоторые свойства кривой пластичности. Проекции осей $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ на девиаторную плоскость обозначим через $1', 2', 3'$ (рис. 4.2).

Кривая пластичности должна обладать следующими свойствами:

- не проходить через начало координат, так как пластические деформации возникают при достаточно больших напряжениях;
- луч, выходящий из начала координат, должен пересекать кривую пластичности только один раз, иначе будут

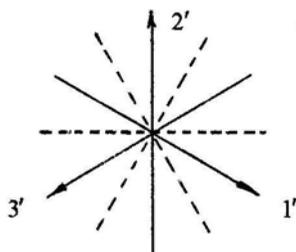


Рис. 4.2

существовать два подобных напряженных состояния, удовлетворяющих условию пластичности, что невозможно;

- кривая пластичности должна быть симметрична относительно осей $1', 2', 3'$, поскольку координатные оси $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ являются равноправными (принятое в теории упругости условие $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ здесь уже не «работает») и значения инвариантов девиатора напряжений не меняются при круговой замене главных напряжений (σ_1 на σ_2 и т.д.);

- кривая пластичности должна быть симметрична относительно прямых, перпендикулярных к осям $1'$, $2'$, $3'$, поскольку будем считать, что свойства материала при растяжении и сжатии одинаковы, и при замене знаков напряжений на обратные также имеет место состояние пластичности (эффектом Баушингера пренебрегаем).

На основании изложенного можно утверждать, что в общем случае кривая пластичности состоит из 12 одинаковых дуг, и при экспериментальном изучении условий пластичности достаточно проследить поведение материала на одной из этих дуг.

4.2. Условия пластичности

Условие пластичности Треска – Сен-Венана

Первым исследованием критерия (условия) пластичности явилась большая серия экспериментов, проведенных Треска (1864 г.), в которых он измерял усилия, требуемые для продавливания металлов через отверстия различных форм в матрицах. На основании опытов Треска пришел к выводу, что критерием возникновения пластических деформаций является не предельное значение одного из главных нормальных напряжений, а наибольшая разность этих напряжений. Несколько позднее Сен-Венан дал математическую формулировку этого критерия для плоской деформации.

В трехмерном случае условие пластичности Треска – Сен-Венана представляется следующими соотношениями:

$$2|\tau_1| = |\sigma_1 - \sigma_2| \leq \sigma_T \quad ,$$

$$2|\tau_2| = |\sigma_2 - \sigma_3| \leq \sigma_T \quad ,$$

$$2|\tau_3| = |\sigma_3 - \sigma_1| \leq \sigma_T \quad .$$

Очевидно, что выписанные соотношения имеют место при условии равноправия главных нормальных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, поскольку принятое в теории упругости условие $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ сводит три условия к одному: $2\tau_{\max} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_T$, которое представляет частный случай.

Условие пластичности Треска – Сен-Венана определяет правильную шестигранную призму с осью $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, перпендикулярной к девиаторной плоскости. Соответственно, сечение призмы девиаторной плоскостью – кривая пластичности – есть правильный шестиугольник (рис. 4.3).

Условие пластичности Треска – Сен-Венана может быть записано в общей форме через инварианты девиатора напряжений, но получаемый при этом результат является довольно сложным и малоприменимым для практического использования.

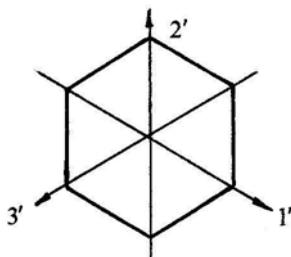


Рис. 4.3

Используя условие пластичности

Треска – Сен-Венана, можно получить соотношение между пределом текучести при растяжении σ_T и пределом текучести при чистом сдвиге τ_T . При чистом сдвиге $\sigma_1 = -\sigma_3 = \tau$, $\sigma_2 = 0$, и соответственно, $2\tau_{\max} = 2\tau_T = \sigma_T$, откуда следует $\tau_T = \sigma_T / 2$.

Условие пластичности Мизеса – Генки

Условие пластичности Мизеса – Генки базируется на утверждении, что пластичность имеет место, если второй инвариант девиатора напряжений $I_2(D_\sigma)$ достигает критического значения (Мизес, 1913 г.). Данное утверждение можем записать в виде:

$$I_2(D_\sigma) = K^2 \Rightarrow T = K,$$

где T – интенсивность касательных напряжений; K – некоторый параметр, который может быть отождествлен с пределом текучести при чистом сдвиге τ_T . Действительно, при чистом сдвиге $T = \tau_T$ и $K = \tau_T$.

Применение условия пластичности Мизеса – Генки к одноосному растяжению ($\sigma_1; \sigma_2 = \sigma_3 = 0$) позволяет получить соотноше-

ние между пределом текучести при растяжении σ_T и пределом текучести при чистом сдвиге τ_T . Будем иметь:

$$2\sigma_1^2 = 2\sigma_T^2 = 6\tau_T^2 \quad \Rightarrow \quad \tau_T = \sigma_T / \sqrt{3} .$$

Напомним, что условие пластичности Треска – Сен-Венана дает $\tau_T = \sigma_T / 2$.

С учетом соотношения $\tau_T = \sigma_T / \sqrt{3}$ условие пластичности Мизеса – Генки можно представить в виде:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2 .$$

В системе координат $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ данное уравнение определяет круговой цилиндр с осью $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$, равно наклоненной ко всем трем осям. Соответственно, пересечение этого цилиндра с девиаторной плоскостью дает окружность, описанную вокруг шестиугольника Треска – Сен-Венана.

Условие пластичности Мизеса – Генки имеет физическую интерпретацию, предложенную Генки (1924 г.), который связал появление пластических деформаций с критическим значением упругой энергии формоизменения. Действительно, можно показать, что удельная потенциальная энергия формоизменения пропорциональна второму инварианту девиатора напряжений.

Приведенная физическая интерпретация условия пластичности Мизеса – Генки не является единственной. Так, например, ранее показали, что касательное напряжение τ_n на октаэдрической площадке пропорционально корню из второго инварианта девиатора напряжений, что позволяет связывать появление пластических деформаций с критическим значением указанного напряжения.

Экспериментальное изучение и проверка условий пластичности при сложном напряженном состоянии

Рассмотренные условия пластичности Треска – Сен-Венана и Мизеса – Генки являются самыми простыми, но, естественно, не

единственными в теории пластичности. Очевидно, что оценка пригодности того или иного условия (критерия) пластичности для практического использования должна исходить из сравнения этого условия с соответствующими экспериментальными данными.

На настоящее время экспериментальное изучение и проверка условий пластичности при сложном напряженном состоянии в большинстве случаев проводится в рамках опытов на тонкостенных трубках. Путем комбинирования растяжения (P), кручения (M) и внутреннего давления (q) можно получить в стенке трубки плоское напряженное состояние. Так, например, при действии осевого усилия и крутящего момента ($P + M$ – опыты) имеем $\sigma_\varphi = 0$, $\sigma_z \neq 0$, $\tau_{\varphi z} \neq 0$; при действии осевого усилия и внутреннего давления ($P + q$ – опыты) - $\sigma_\varphi \neq 0$, $\sigma_z \neq 0$, $\tau_{\varphi z} = 0$ и т.д. Измеряя деформацию трубки (по изменению диаметра, длины, угла ее закручивания) и сопоставляя ее с известным напряженным состоянием, можно судить о закономерностях пластического деформирования.

Поскольку постановка описанных экспериментов такова, что напряженное состояние трубок можно считать плоским, необходимо иметь запись анализируемых условий пластичности для этого частного случая. Будем считать, что $\sigma_3 = 0$. Условие пластичности Треска – Сен-Венана принимает вид:

$$\begin{aligned} |\sigma_1| &= \sigma_T \quad \text{при} \quad \sigma_1 \sigma_2 > 0 \quad \text{и} \quad |\sigma_1| > |\sigma_2| \quad ; \\ |\sigma_2| &= \sigma_T \quad \text{при} \quad \sigma_1 \sigma_2 > 0 \quad \text{и} \quad |\sigma_1| < |\sigma_2| \quad ; \\ |\sigma_1 - \sigma_2| &= \sigma_T \quad \text{при} \quad \sigma_1 \sigma_2 < 0 \quad . \end{aligned}$$

Условие пластичности Мизеса – Генки в рассматриваемом случае будет определяться соотношением

$$\sigma_1^2 - \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_T^2 \quad .$$

В системе координат σ_1, σ_2 условие пластичности Треска – Сен-Венана представляет шестиугольник, отсекающий на осях от-

резки, равные пределу текучести при растяжении σ_T (рис. 4.4).

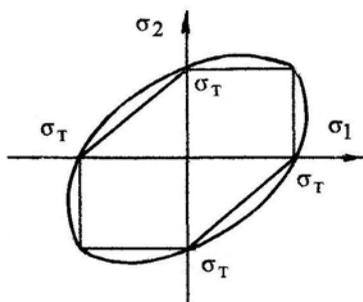


Рис. 4.4

Исследование уравнения, определяющего условие пластичности Мизеса – Генки, показывает, что в рассматриваемой системе координат это есть уравнение эллипса, наклоненного под углом 45° и описывающего шестиугольник Треска – Сен-Венана.

Многочисленные эксперименты, имеющиеся на настоящее время, показывают, что условие пластичности Мизеса – Генки выполняется для большинства конструкционных материалов, в общем, несколько лучше (по крайней мере, не хуже), чем условие пластичности Треска – Сен-Венана. Поэтому при расчетном исследовании напряжений в элементах конструкций чаще применяется условие Мизеса – Генки как более простое математически.

Имеющие место другие условия пластичности за счет математических усложнений достаточно часто лучше согласуются с опытными данными, чем условия пластичности Мизеса – Генки и Треска – Сен-Венана, однако они неизменно оказываются слишком сложными для практического использования.

4.3. Условия упрочнения

Рассмотренное ранее условие пластичности в общем случае может быть представлено в форме уравнения

$$\varphi [I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = K = \text{const} \quad ,$$

где K – параметр, связанный с пределом пластичности (текучести) материала. По определению, условие пластичности в случае сложного напряженного состояния соответствует условию $\sigma_1 = \sigma_T$ при одноосном растяжении. Поверхность пластичности, определяемая введенным уравнением в пространстве главных напряжений $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$, отделяет область упругого деформирования от области

пластического деформирования так же, как точка $\sigma_1 = \sigma_T$ на диаграмме растяжения. С другой стороны, введенное условие является условием идеальной (предельной) пластичности и определяет идеальное упруго-пластическое тело в случае сложного напряженного состояния. Поверхность пластичности (ее часто называют поверхностью нагружения) в этом случае является фиксированной.

Если материал обладает упрочнением, то пластическое деформирование при одноосном растяжении приводит к повышению предела текучести в направлении деформирования. Можно сказать, что в этом случае имеем дело с меняющимся пределом текучести, зависящим от предыдущей пластической деформации. В случае сложного напряженного состояния поверхность нагружения для упрочняющегося материала (здесь ее называют поверхностью упрочнения) уже будет не фиксированной, как для идеально пластического материала, а расширяющейся и смещающейся в силу наличия деформационной анизотропии. Форма и положение поверхности упрочнения будет зависеть не только от текущего напряженного состояния, но и от всей предшествующей истории деформирования (нагружения).

Для простейшего случая, когда поверхность нагружения (упрочнения) при возрастающей пластической деформации равномерно (изотропно) расширяется (деформационная анизотропия не учитывается), ее уравнение можно записать в виде:

$$\varphi [I_2(D_\sigma), I_3(D_\sigma)] = F(q) \quad ,$$

где $F(q)$ – возрастающая функция некоторого *параметра упрочнения* q , характеризующего предшествующую пластическую деформацию. Условие упрочнения переходит в условие пластичности при $F(q) = K = \text{const}$.

Существует ряд вариантов записи условия изотропного упрочнения. Наиболее простая формулировка имеет следующий вид:

$$T = f(q) \quad \text{или} \quad \sigma_i = f(q) \quad .$$

Выбор того или иного параметра упрочнения q определяет конечную форму условия упрочнения. Рассмотрим некоторые варианты выбора параметра упрочнения q .

Если в качестве меры упрочнения принять величину достигнутой (накопленной) интенсивности деформаций сдвига Γ , то условие упрочнения можно представить в форме соотношения

$$T = g(\Gamma)\Gamma,$$

где $g(\Gamma)$ – некоторая положительная функция, характерная для рассматриваемого материала. Предложенное уравнение построено как обобщение различных процессов деформирования в координатах « $T - \Gamma$ ». Действительно, если принять $g(\Gamma) = \tau_T / \Gamma$, то получаем условие идеальной пластичности Мизеса – Генки; если $g(\Gamma) = G$, то приходим к условию упругого деформирования $T = G\Gamma$.

Наибольшее распространение на настоящее время получило так называемое *энергетическое условие упрочнения* $T = f(A_p)$, в котором за меру упрочнения принимается работа пластической деформации

$$A_p = \int (\sigma_x d\varepsilon_x^p + \sigma_y d\varepsilon_y^p + \dots + \tau_{zx} d\gamma_{zx}^p).$$

За меру упрочнения также может быть принята величина $q = \int d\Gamma^p$ (либо $q = \int d\varepsilon_i^p$) – так называемый *параметр Одквиста*, характеризующий накопленную пластическую деформацию. Здесь имеем $d\Gamma^p$ – интенсивность приращений пластических деформаций сдвига. Величину $d\Gamma^p$ следует отличать от приращения интенсивности пластических деформаций сдвига $d\Gamma^p$, поскольку в общем случае $d\Gamma^p \neq d\Gamma^p$.

Основанием для введения параметра Одквиста следует считать

то обстоятельство, что упрочнение материала зависит от монотонно возрастающей суммы бесконечно малых приращений пластической деформации при сложном пути нагружения.

С использованием параметра Одквиста условие упрочнения представляется в виде:

$$T = f_1 \left(\int d\overline{\Gamma^p} \right) \text{ или } \sigma_i = f_2 \left(\int d\overline{\varepsilon_i^p} \right).$$

Используемые в приведенных условиях упрочнения функции $g(\Gamma)$, $f(A_p)$, $f_1 \left(\int d\overline{\Gamma^p} \right)$, $f_2 \left(\int d\overline{\varepsilon_i^p} \right)$ и другие подобные являются функциями, характерными для рассматриваемого материала. Соответственно, они могут быть определены из простейших экспериментов, например, из опыта на одноосное растяжение, поскольку их вид не зависит от типа напряженного состояния. Примеры определения этих функций будут рассматриваться по мере необходимости.

5. Теории пластичности

При одноосном напряженном состоянии расчеты на прочность и жесткость за пределами упругости можно проводить с использованием диаграммы растяжения, устанавливающей истинную связь между напряжением и деформацией. В случае сложного напряженного состояния для подобных расчетов необходимо располагать аналитической зависимостью компонентов напряжений от компонентов деформаций. Зависимости такого рода и устанавливаются в теориях пластичности.

Отметим, что процесс пластического деформирования является необратимым, и деформации в каком-то конечном состоянии (в пространстве напряжений) зависят от пути деформирования. Соответственно, уравнения, описывающие пластическое деформирование, в общем случае не могут быть конечными соотношениями, связывающими напряжения и деформации (подобно уравнениям линейного физического закона для упругого тела), а должны быть дифференциальными (неинтегрируемыми) зависимостями.

Существующие на настоящее время теории пластичности разделяются на две группы:

- в первой группе теорий рассматриваются зависимости между бесконечно малыми приращениями деформаций и напряжениями, а в частном случае – между скоростями деформаций и напряжениями. В этой группе теорий пластическое деформирование рассматривается как процесс пластического течения материала, и поэтому сами теории носят название *теорий течения*;

- во второй группе теорий, которые называют *деформационными*, устанавливаются зависимости между деформациями и напряжениями, которые, по сути, описывают поведение нелинейно-упругого тела.

Очевидно, что уравнения деформационных теорий существенно проще уравнений теорий пластического течения, однако их применение в расчетах должно сопровождаться анализом истории нагружения (деформирования). Использование деформационных теорий для описания пластических деформаций при произвольных путях нагружения может привести к неверным результатам.

В заключение добавим, что и деформационные теории, и теории пластического течения применимы при относительно малых пластических деформациях (до 10 %), когда изменение формы и размеров тела незначительны и когда можно пренебречь влиянием деформационной анизотропии. Следует также иметь в виду возможность существенного расхождения расчетных данных и результатов эксперимента из-за имеющих место структурных изменений материала в процессе пластического деформирования.

5.1. Некоторые следствия из линейного физического закона

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из уравнений линейного физического закона (обобщенного закона Гука) для изотропного материала, имея целью их обобщение и использование при построении тех или иных теорий пластичности.

Зависимости линейного физического закона для изотропного материала имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] , \\ &\dots , \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} , \\ &\dots , \end{aligned}$$

где E и $G = E/2(1 + \nu)$ – модули упругости I и II рода, ν – коэффициент Пуассона (коэффициент поперечной деформации).

Покажем некоторые следствия, вытекающие из уравнений линейного физического закона (обобщенного закона Гука) для изотропного материала.

1. *Объемная деформация прямо пропорциональна среднему нормальному напряжению.*

Действительно, если сложить первые три уравнения, то получим

$$\vartheta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1}{K} \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{\sigma}{K} ,$$

где $K = E/3(1 - 2\nu)$ – объемный модуль упругости.

2. *Компоненты девиатора напряжений пропорциональны компонентам девиатора деформаций.*

Данное утверждение легко проверяется. Действительно, имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] - \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \\ &= \frac{1}{E} \left[\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z) \right] - \frac{\sigma}{3K} . \end{aligned}$$

После несложных преобразований будем иметь:

$$\frac{\varepsilon_x - \varepsilon}{\sigma_x - \sigma} = \frac{1}{2G} \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_y - \varepsilon}{\sigma_y - \sigma} = \frac{1}{2G}, \quad \frac{\varepsilon_z - \varepsilon}{\sigma_z - \sigma} = \frac{1}{2G}.$$

Что касается остальных компонентов девиаторов деформаций и напряжений, то их пропорциональность (с тем же коэффициентом пропорциональности) очевидна:

$$\frac{\gamma_{xy}/2}{\tau_{xy}} = \dots = \frac{1}{2G}.$$

Сформулированное следствие доказано. Использование главной системы координат и некоторые простые преобразования первых трех уравнений позволяют привести их к виду:

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{1}{2G} \quad \Rightarrow \quad \frac{\gamma_1}{\tau_1} = \frac{\gamma_2}{\tau_2} = \frac{\gamma_3}{\tau_3} = \frac{1}{G}.$$

Полученное соотношение позволяет сформулировать второе следствие в следующей форме:

главные угловые деформации прямо пропорциональны главным касательным напряжениям.

Обе приведенные формулировки (и еще некоторые другие) можно встретить в работах по теории пластичности.

3. *Интенсивность касательных напряжений прямо пропорциональна интенсивности деформаций сдвига.*

Полученные ранее соотношения

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \frac{1}{2G}$$

перепишем в виде:

$$\varepsilon_1 - \varepsilon_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2G}, \quad \varepsilon_2 - \varepsilon_3 = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2G}, \quad \varepsilon_3 - \varepsilon_1 = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2G}.$$

Используя известные формулы для интенсивности деформаций сдвига Γ и интенсивности касательных напряжений T , будем иметь:

$$T = G \Gamma.$$

4. Главные направления тензора напряжений и главные направления тензора деформаций совпадают.

Данное утверждение можно считать доказанным, поскольку совпадение главных направлений тензоров напряжений и деформаций определяется свойством изотропности материала.

Напомним, что рассмотренные следствия вытекают из уравнений линейного физического закона, построенного для однородного упругого изотропного тела. Возникает вопрос: можно ли получить связь между напряжениями и деформациями в форме уравнений линейного физического закона, приняв сформулированные следствия за некоторые исходные положения? Рассмотрение этого вопроса дает положительный ответ. Данное обстоятельство является весьма существенным, поскольку дает некоторую основу для построения теорий пластичности.

5.2. Теория пластического течения

Как уже упоминалось, теория пластического течения устанавливает связь между бесконечно малыми приращениями деформаций и напряжениями, а в частном случае – между скоростями деформаций и напряжениями.

Теория пластического течения строится на следующих исходных положениях:

- рассматриваемое тело изотропно (главные направления тензора напряжений и тензора приращений пластических деформаций совпадают);

- материал в пластическом состоянии несжимаем ($\varepsilon^P = 0$ или

$d\varepsilon^p = 0$); относительное изменение объема мало и является упругой деформацией, пропорциональной среднему нормальному напряжению ($\varepsilon = \varepsilon^e = \sigma / 3K$);

- девиатор напряжений и девиатор приращений пластических деформаций пропорциональны.

В соответствии со вторым и третьим исходными положениями можем записать:

$$\frac{d\varepsilon_x^p}{\sigma_x - \sigma} = \frac{d\varepsilon_y^p}{\sigma_y - \sigma} = \dots = \frac{d\gamma_{zx}^p / 2}{\tau_{zx}} = d\lambda$$

или

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= d\lambda (\sigma_x - \sigma) , \\ &\dots , \\ d\gamma_{xy}^p &= 2d\lambda \tau_{xy} , \\ &\dots , \end{aligned}$$

где $d\lambda$ – некоторый бесконечно малый скалярный множитель, являющийся функцией напряжений и приращений пластических деформаций.

Выписанные соотношения теории пластического течения необходимо дополнить тем или иным условием упрочнения (условие пластичности является частным случаем условия упрочнения), использование которого должно позволить найти неизвестный параметр $d\lambda$. В частности, предполагая применение условия упрочнения с параметром Одкависта $\sigma_i = f_2 \left(\int \overline{d\varepsilon_i^p} \right)$ и используя полученные соотношения для приращений пластических деформаций, можем вычислить интенсивность приращений пластических деформаций:

$$\overline{d\varepsilon_i^p} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\left(d\varepsilon_x^p - d\varepsilon_y^p \right)^2 + \dots + \frac{3}{2} \left[\left(d\gamma_{xy}^p \right)^2 + \dots \right]} = \frac{2}{3} d\lambda \sigma_i ,$$

откуда непосредственно следует:

$$d\lambda = \overline{3d\varepsilon_i^p} / 2\sigma_i \quad .$$

В этом случае уравнения теории пластического течения принимают вид:

$$d\varepsilon_x^p = \frac{\overline{3d\varepsilon_i^p}}{2\sigma_i} (\sigma_x - \sigma) \quad ,$$

$$\dots ,$$

$$d\gamma_{xy}^p = \frac{\overline{3d\varepsilon_i^p}}{\sigma_i} \tau_{xy} \quad ,$$

$$\dots$$

Наличие условия упрочнения Одквиста в форме $\sigma_i = f_2 \left(\int \overline{d\varepsilon_i^p} \right)$ позволяет считать отношение $\overline{d\varepsilon_i^p} / \sigma_i$ известным, и, тем самым, уравнения теории течения определены. Однако для того, чтобы вопрос о полученных соотношениях можно было считать полностью законченным, необходимо показать возможность определения функции $\sigma_i = f_2 \left(\int \overline{d\varepsilon_i^p} \right)$ из простейшего эксперимента, например, одноосного растяжения.

Поскольку одноосное растяжение является процессом упруго-пластического деформирования, будем считать, что приращения упругих деформаций связаны с приращениями напряжений линейным физическим законом (обобщенным законом Гука):

$$d\varepsilon_x^e = \frac{1}{E} \left[d\sigma_x - \nu (d\sigma_y + d\sigma_z) \right] \quad ,$$

$$\dots ,$$

$$d\gamma_{xy}^e = \frac{1}{G} d\tau_{xy} \quad ,$$

$$\dots$$

Приращения полных деформаций запишем, суммируя приращения упругих и пластических деформаций. Будем иметь:

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{E} [d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)] + \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} (\sigma_x - \sigma) \quad ,$$

.....,

$$d\gamma_{xy} = \frac{1}{G} d\tau_{xy} + \frac{3d\varepsilon_i^p}{\sigma_i} \tau_{xy} \quad ,$$

...

Соотношения подобного типа для решения плоской задачи введены Прандтлем (1924 г.), а для общего случая – Рейсом (1930 г.).

Отметим, что при задании напряжений и приращений напряжений и наличие условия упрочнения Одквиста $\sigma_i = f_2 \left(\int \overline{d\varepsilon_i^p} \right)$ уравнения Прандтля – Рейса определяют приращения полных деформаций однозначно.

Если же уравнения теории пластического течения будут дополнены условием пластичности, например, условием пластичности Мизеса – Генки $\sigma_i = \sigma_T$ (модель идеального упруго-пластического тела), то приращения пластических деформаций при заданных напряжениях определяются с точностью до множителя $d\varepsilon_i^p$ – однозначная зависимость приращений полных деформаций от напряжений и их приращений отсутствует.

Возвращаясь к вопросу определения функции $\sigma_i = f_2 \left(\int \overline{d\varepsilon_i^p} \right)$ и используя полученные соотношения Прандтля – Рейса, можем записать, что с учетом несжимаемости материала для одноосного растяжения

$$\sigma_i = \sigma_x = \sigma_0 \quad ,$$

$$d\varepsilon_x^p = d\varepsilon_0^p, \quad d\varepsilon_y^p = d\varepsilon_z^p = -\frac{1}{2} d\varepsilon_0^p \quad .$$

Вычисляя интенсивность приращений пластических деформаций, получаем:

$$\overline{d\varepsilon_i^p} = d\varepsilon_0^p \quad \Rightarrow \quad \int \overline{d\varepsilon_i^p} = \int d\varepsilon_0^p = \varepsilon_0^p .$$

Таким образом, в случае одноосного растяжения условия упрочнения Одви-ста $\sigma_i = f_2\left(\int \overline{d\varepsilon_i^p}\right)$ принимает вид $\sigma_0 = \Phi\left(\varepsilon_0^p\right)$. Построение зависимости $\sigma_0 = \Phi\left(\varepsilon_0^p\right)$ по экспериментальной диаграмме растяжения $\sigma_0 = \sigma_0\left(\varepsilon_0\right)$ не представляет особого труда (рис. 5.1).

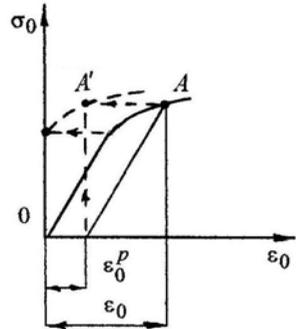


Рис. 5.1

Поскольку вид функции упрочнения не должен зависеть от типа напряженного состояния, для сложного напряженного состояния условие упрочнения Одви-ста должно иметь тот же самый вид:

$$\sigma_i = \Phi\left(\varepsilon_i^p\right) .$$

Графическое построение этой зависимости, очевидно, необходимо вести по *обобщенной кривой (диаграмме) деформирования* $\sigma_i = \sigma_i\left(\varepsilon_i\right)$, которая, в свою очередь, должна быть определена по результатам испытаний на одноосное растяжение.

Итак, вопрос об уравнениях теории пластического течения при использовании условия упрочнения Одви-ста можно считать полностью законченным.

Получим теперь уравнения теории пластического течения с применением энергетического условия упрочнения $\sigma_i = f\left(A_p\right)$ или $A_p = \Phi\left(\sigma_i\right)$, где A_p – работа пластической деформации, а $\Phi\left(\sigma_i\right)$ – характерная для данного материала функция, не зависящая от типа напряженного состояния.

Определим величину $d\lambda$ через приращение работы пластической деформации $dA_p = \sigma_x d\varepsilon_x^p + \sigma_y d\varepsilon_y^p + \dots + \tau_{zx} d\gamma_{zx}^p$. Подставляя сюда соотношения теории пластического течения, определяющие приращения пластических деформаций, будем иметь:

$$dA_p = 2\sigma_i^2 d\lambda / 3 \quad ,$$

откуда получаем:

$$d\lambda = \frac{3}{2} \frac{dA_p}{\sigma_i^2} \Rightarrow d\lambda = \frac{3}{2} \frac{\varphi' d\sigma_i}{\sigma_i^2} \quad .$$

Уравнения теории пластического течения с учетом полученного соотношения будут иметь вид:

$$d\varepsilon_x^p = \frac{3}{2\sigma_i^2} \varphi' d\sigma_i (\sigma_x - \sigma) \quad ,$$

...

$$d\gamma_{xy}^p = \frac{3}{\sigma_i^2} \varphi' d\sigma_i \tau_{xy} \quad ,$$

...

или, с введением обозначения $F(\sigma_i) = 3\varphi'(\sigma_i)/2\sigma_i^2$,

$$d\varepsilon_x^p = F(\sigma_i) d\sigma_i (\sigma_x - \sigma) \quad ,$$

...

$$d\gamma_{xy}^p = 2F(\sigma_i) d\sigma_i \tau_{xy} \quad ,$$

...

Приращения полных деформаций запишем, как и ранее, суммируя приращения упругих и пластических деформаций. Получим:

$$d\varepsilon_x = \frac{1}{E} [d\sigma_x - \nu(d\sigma_y + d\sigma_z)] + F(\sigma_i) d\sigma_i (\sigma_x - \sigma) ,$$

...

$$d\gamma_{xy} = \frac{1}{G} d\tau_{xy} + 2F(\sigma_i) d\sigma_i \tau_{xy} ,$$

...

Очевидно, что возможность применения полученных уравнений определяется возможностью отыскания функции $F(\sigma_i)$ из простейших опытов.

Определим функцию $F(\sigma_i)$ из эксперимента на одноосное растяжение. Используя полученные соотношения для приращений полных деформаций и принимая, что $\sigma_i = \sigma_x = \sigma_0$, $\varepsilon_x = \varepsilon_0$ и т.д., одноосное растяжение опишем уравнением

$$d\varepsilon_0 = \frac{d\sigma_0}{E} + F(\sigma_0) d\sigma_0 \frac{2}{3} \sigma_0 .$$

Отсюда следует, что

$$F(\sigma_0) = \frac{3}{2\sigma_0} \left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) ,$$

где $E' = d\sigma_0 / d\varepsilon_0$ – касательный модуль для диаграммы растяжения (рис. 5.2).

Для сложного напряженного состояния

функция $F(\sigma_i)$ должна иметь такой же вид, а именно:

$$F(\sigma_i) = \frac{3}{2\sigma_i} \left(\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} \right) ,$$

где $E' = d\sigma_i / d\varepsilon_i$, и определяться аналогичным образом по обобщенной кривой деформирования $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$, которая должна быть определена по результатам испытаний на одноосное растяжение.

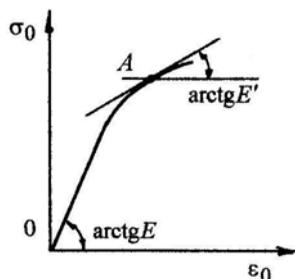


Рис. 5.2

Теория пластичности Сен-Венана – Леви – Мизеса

Если при упруго-пластическом деформировании материала можно пренебречь упругими деформациями, что допустимо при развитых пластических деформациях (модель жестко-пластического тела), то приращения полных деформаций будут определяться более простыми соотношениями:

$$\begin{aligned}d\varepsilon_x &= d\lambda(\sigma_x - \sigma) , \\ &\dots , \\d\gamma_{xy} &= 2d\lambda\tau_{xy} , \\ &\dots\end{aligned}$$

Относя правые и левые части уравнений к единице времени, получим:

$$\begin{aligned}\xi_x &= \lambda'(\sigma_x - \sigma) , \\ &\dots , \\ \eta_{xy} &= 2\lambda'\tau_{xy} , \\ &\dots\end{aligned}$$

где $\xi_x, \dots, \eta_{xy}, \dots$ – скорости деформаций; λ' – функция напряжений и скоростей деформаций.

Наличие того или иного условия упрочнения (для жестко-пластического тела с упрочнением) или условия пластичности (для идеального жестко-пластического тела) позволяет определить функцию λ' .

Если в качестве меры упрочнения принять величину достигнутой (накопленной) интенсивности скоростей деформаций сдвига H , то условие упрочнения можно представить в форме соотношения

$$T = g(H)H ,$$

где $g(H)$ – некоторая положительная функция, характерная для рассматриваемого материала.

Вычисляя интенсивность скоростей деформаций сдвига H с использованием полученных соотношений, будем иметь:

$$H = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{(\xi_x - \xi_y)^2 + \dots + \frac{3}{2}(\eta_{xy}^2 + \eta_{yz}^2 + \eta_{zx}^2)} = \lambda' \cdot 2T \quad ,$$

откуда $\lambda' = H / 2T$.

Принимая $g(H) = \tau_T / H$, переходим к условию идеальной пластичности Мизеса – Генки $T = \tau_T$. В этом варианте уравнения теории пластичности принимают вид:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{H}{2\tau_T} (\sigma_x - \sigma) \quad , \\ &\dots , \\ \eta_{xy} &= \frac{H}{\tau_T} \tau_{xy} \quad , \\ &\dots \end{aligned}$$

Выписанные соотношения известны как уравнения теории пластичности Сен-Венана – Леви – Мизеса, определяющей конечные зависимости между скоростями деформаций и напряжениями.

5.3. Деформационная теория пластичности

Несмотря на то, что в общем случае уравнения теории пластичности должны быть представлены дифференциальными соотношениями, можно построить уравнения пластического деформирования в виде конечных зависимостей между напряжениями и деформациями. Такие соотношения (деформационная теория пластичности) будут существенно проще уравнений теории пластического течения, а возможность их применения в частных случаях будет рассмотрена в дальнейшем.

Построение уравнений деформационной теории пластичности проведем на основе следующих исходных положений:

- тело изотропно;

- относительное изменение объема является упругой деформацией;

- компоненты девиаторов полных деформаций и напряжений пропорциональны.

Реализуя первое и третье положение, можем записать:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon &= \psi (\sigma_x - \sigma) \quad , \\ &\dots , \\ \gamma_{xy} &= 2\psi \tau_{xy} \quad , \\ &\dots , \end{aligned}$$

где ψ – некоторая функция напряжений и деформаций. Использование второго положения позволяет переписать полученные соотношения к виду:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma/3K) + \psi (\sigma_x - \sigma) \quad , \\ &\dots , \\ \gamma_{xy} &= 2\psi \tau_{xy} \quad , \\ &\dots \end{aligned}$$

Легко проверить, что при $\psi = \text{const} = 1/2G$ приходим к линейному физическому закону, т.е. полученные уравнения представляют естественное и простое обобщение этого закона.

Поскольку полная деформация складывается из упругой и пластической, для функции ψ можем принять

$$\psi = \frac{1}{2G} + \varphi \quad ,$$

и, тем самым, выделить отдельно пластические деформации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^p &= \varphi (\sigma_x - \sigma) \quad , \\ &\dots , \\ \gamma_{xy}^p &= 2\varphi \tau_{xy} \quad , \\ &\dots \end{aligned}$$

Определение функции ψ не представляет особого труда. Вычислим интенсивность полных деформаций с использованием полученных соотношений. Будем иметь:

$$\varepsilon_i = \frac{2}{3} \psi \sigma_i ,$$

что и позволяет получить функцию ψ в следующем виде:

$$\psi = 3 \varepsilon_i / 2 \sigma_i .$$

Полученное соотношение полностью определяет функцию ψ , поскольку при сложном напряженном состоянии характеристикой материала является обобщенная диаграмма деформирования $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$, которая, напомним, определяется по результатам испытаний на одноосное растяжение.

Определение функции φ естественно провести, представляя ее через интенсивность пластических деформаций. Будем иметь:

$$\varepsilon_i^p = \frac{2}{3} \varphi \sigma_i ,$$

откуда следует:

$$\varphi = 3 \varepsilon_i^p / 2 \sigma_i .$$

Очевидно, что для определения функции φ нужно иметь в качестве характеристики материала зависимость $\sigma_i = \chi(\varepsilon_i^p)$. Возможность построения такой зависимости по обобщенной кривой деформирования $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ уже показана, и, тем самым, уравнения деформационной теории пластичности окончательно можно записать в виде:

$$\varepsilon_x^p = \frac{3\varepsilon_i^p}{2\sigma_i}(\sigma_x - \sigma) ,$$

$$\dots ,$$

$$\gamma_{xy}^p = \frac{3\varepsilon_i^p}{\sigma_i}\tau_{xy} ,$$

$$\dots$$

Отметим, что при описании пластического деформирования с упрочнением уравнения деформационной теории пластичности определяют однозначную связь между напряжениями и пластическими деформациями. Для идеально-пластического материала такая однозначность отсутствует.

5.4. Обобщенная диаграмма деформирования

При построении уравнений теорий пластичности была показана необходимость иметь обобщенную кривую деформирования $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ как характеристику материала, используемую либо непосредственно, либо для реализации условий упрочнения в различных формах.

Для построения зависимости $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ воспользуемся результатами испытаний на одноосное растяжение – экспериментальной диаграммой растяжения $\sigma_0 = \sigma_0(\varepsilon_0)$. При одноосном растяжении имеем: $\sigma_1 = \sigma_0$, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$; $\varepsilon_1 = \varepsilon_0$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_3 = -(\varepsilon_0 - 3\varepsilon)/2$. Вычисляя интенсивности напряжений и деформаций, получим:

$$\sigma_i = \sigma_0 ,$$

$$\varepsilon_i = \varepsilon_0 - \varepsilon = \varepsilon_0 - \frac{1 - 2\nu}{3E}\sigma_0 .$$

Полученные соотношения по каждой точке $(\sigma_0, \varepsilon_0)$ кривой растяжения позволяют вычислить точку $(\sigma_i, \varepsilon_i)$ обобщенной диаграммы деформирования и, тем самым, построить эту диаграмму графически. В частности, в упругой области будем иметь:

$$\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0 - \frac{1-2\nu}{3E}\sigma_0} = \frac{3E}{2(1+\nu)} = 3G \quad .$$

Заметим, что если на обоих участках деформирования (упругом и пластическом) принять условие несжимаемости материала, то, как следует из приведенных соотношений для интенсивностей σ_i , ε_i , обобщенная диаграмма деформирования совпадет с диаграммой растяжения.

Построение обобщенной диаграммы деформирования для материала с линейным упрочнением

Обобщенная диаграмма деформирования для материала с линейным упрочнением характеризуется величиной σ_{iT} (или ε_{iT}) и углами α и β , которые должны быть определены из эксперимента на одноосное растяжение. Что же касается величины σ_{iT} , то ее определение по диаграмме растяжения не вызывает затруднений: $\sigma_{iT} = \sigma_T$ (рис. 5.3).

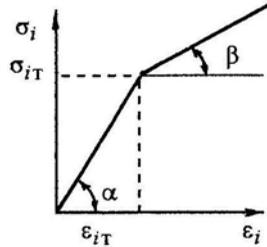


Рис. 5.3

Значения углов α и β определим через их тангенсы:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i} = 3G \quad ,$$

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_i - \sigma_{iT}}{\varepsilon_i - \varepsilon_{iT}} = \frac{\sigma_0 - \sigma_T}{\varepsilon_0 - \frac{(1-2\nu)\sigma_0}{3E} - \frac{\sigma_T}{3G}} \quad .$$

В соотношении, полученном для $\operatorname{tg} \beta$, значения σ_0 , ε_0 должны быть взяты из диаграммы одноосного растяжения с линейным упрочнением (рис. 5.4).

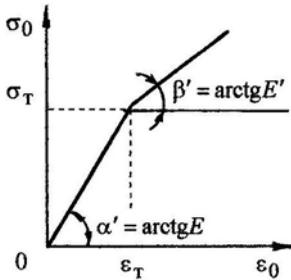


Рис. 5.4

$$E' = \frac{\sigma_0 - \sigma_T}{\epsilon_0 - \epsilon_T} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \epsilon_0 = \frac{\sigma_T}{E} + \frac{1}{E'} (\sigma_0 - \sigma_T) .$$

Подставляя полученное значение ϵ_0 в соотношение для $\operatorname{tg} \beta$, после некоторых преобразований получим:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{E'}{1 - \frac{1-2\nu}{3} \cdot \frac{E'}{E}} .$$

Таким образом, при известной диаграмме одноосного растяжения материала с линейным упрочнением (при известных характеристиках материала E , E' и ν) обобщенная диаграмма деформирования $\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_i)$ строится без особых затруднений.

Приведем некоторые числовые оценки полученных соотношений. Для конструкционных сталей коэффициент Пуассона ν можно принять равным 0,3. Модуль упрочнения E' в 10 – 50 раз меньше модуля упругости E . Оценка второго слагаемого в знаменателе соотношения для $\operatorname{tg} \beta$ дает:

$$\frac{1-0,6}{3} \cdot \frac{0,1E}{E} = 0,013 ,$$

что пренебрежимо мало по сравнению с единицей. Естественно, можно принять $\operatorname{tg} \beta = E'$.

Сравнение величины $3G$ с модулем упругости E при $\nu=0,3$ позволяет получить:

$$\frac{3G}{E} = \frac{3E}{2(1+\nu)E} = 1,154 .$$

Аналогичным образом можно построить обобщенную диаграмму деформирования $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ для материала со степенным упругим законом.

6. Простое и сложное нагружение. Разгрузка

6.1. Активная и пассивная деформация

При сложном напряженном состоянии деформация в точке называется *активной*, если интенсивность напряжений σ_i является неубывающей функцией. При активной деформации элемента тела растет пластическая составляющая его полной деформации (упругая составляющая остается постоянной). При *пассивной* деформации элемента пластическая составляющая остается неизменной, а упругая часть уменьшается.

Определения «активная» и «пассивная» деформации при сложном напряженном состоянии, по сути, соответствуют терминам «нагружение» и «разгрузка» тела при одноосном растяжении (можно говорить об активном и пассивном нагружениях).

6.2. Теорема о простом нагружении

Как уже отмечалось, в теории пластичности большое значение имеет вопрос об истории нагружения тела. Будем различать *простое* и *сложное* нагружения.

Простым (*пропорциональным*) нагружением будем называть такое нагружение, при котором компоненты девиатора напряжений возрастают пропорционально некоторому параметру. В противном случае нагружение называем сложным.

Как видим, введенное определение истории нагружения связано с изменением компонентов девиатора напряжений, что, в общем-то, не решает вопроса, поскольку нагружение реального элемента конструкции определяется изменением внешних нагрузок. В общем случае произвольного тела пропорциональное изменение внешних сил не обязательно влечет за собой пропорциональное нагружение: для этого необходимо выполнение некоторых условий, которые и предстоит выяснить.

Достаточное условие того, чтобы при пропорциональном изменении внешних сил осуществлялось пропорциональное нагружение, определяется теоремой А.А. Ильюшина:

нагружение тела произвольной формы произвольными внешними силами, возрастающими пропорционально некоторому параметру λ , будет простым, если зависимость интенсивности напряжений σ_i от интенсивности деформаций ε_i является степенной функцией вида $\sigma_i = A\varepsilon_i^m$, где A и m – постоянные материала.

Предположим, что для некоторого значения параметра λ , например, для $\lambda = 1$ поставленная задача пластичности решена при внешних нагрузках X', Y', Z' и $\bar{X}', \bar{Y}', \bar{Z}'$. Обозначим напряжения, деформации и перемещения, определяемые этим решением, через $\sigma'_x, \sigma'_y, \dots, \varepsilon'_x, \varepsilon'_y, \dots, u', v', w'$. Будем считать, что интенсивность напряжений σ_i и интенсивность деформаций ε_i связаны между собой степенной функцией $\sigma'_i = A(\varepsilon'_i)^m$.

Найдем решение этой же задачи пластичности для произвольно-го значения параметра $\lambda \neq 1$. Считая нагружение простым и реализуя определение простого нагружения, напряжения запишем в виде:

$$\sigma_x = \lambda \sigma'_x, \sigma_y = \lambda \sigma'_y, \dots,$$

а для перемещений примем:

$$u = \beta u', v = \beta v', w = \beta w'.$$

Для деформаций, соответственно, будем иметь:

$$\varepsilon_x = \beta \varepsilon'_x, \varepsilon_y = \beta \varepsilon'_y, \dots$$

В выписанных соотношениях введенный новый параметр β является функцией параметра λ , причем $\beta \neq \lambda$, поскольку в этом слу-

чае получим $\lambda \sigma'_i = \lambda^m A(\varepsilon'_i)^m$, но $m \neq 1$.

Очевидно, что все уравнения теории пластичности будут удовлетворяться для новых значений напряжений, деформаций и перемещений при любом соотношении между β и λ , если внешние силы будут определяться равенствами:

$$\begin{aligned} X &= \lambda X', & Y &= \lambda Y', & Z &= \lambda Z' & , \\ \bar{X} &= \lambda \bar{X}', & \bar{Y} &= \lambda \bar{Y}', & \bar{Z} &= \lambda \bar{Z}' & . \end{aligned}$$

Остается проверить связь между интенсивностью напряжений и интенсивностью деформаций. Легко получить, что

$$\lambda \sigma'_i = \beta^m A(\varepsilon'_i)^m .$$

Очевидно, что полученное соотношение будет удовлетворяться, если параметр β связать с параметром λ условием

$$\beta = \lambda^{1/m} .$$

Таким образом, получили, что при $\beta = \lambda^{1/m}$ «новые» напряжения, деформации и перемещения являются решением задачи пластичности и при этом нагружение является простым.

Отметим, что условие $\sigma_i = A\varepsilon_i^m$ реализации простого нагружения при пропорциональном изменении внешних сил является довольно жестким, поскольку зависимость между интенсивностью напряжений σ_i и интенсивностью деформаций ε_i должна быть степенной на всем диапазоне изменения этих величин, а не кусочно-степенной аппроксимацией истинной зависимости (диаграммы растяжения), тем более, что реальные материалы имеют линейно-упругий участок диаграммы. Применение полученного условия дает хорошие результаты для материалов с заметным упрочнением при развитых пластических деформациях.

Следует подчеркнуть, что условие $\sigma_i = A\varepsilon_i^m$ реализации про-

стого нагружения при пропорциональном изменении внешних сил является достаточным, но не необходимым условием. В ряде частных случаев показано, что простое нагружение при пропорциональном изменении внешних сил имеет место и при некоторых других видах функции $\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i)$. С другой стороны, Ивлев Д.Д. (1955 г.) показал, что если зависимость интенсивности напряжений от интенсивности деформаций имеет вид полинома, то простое нагружение тела невозможно.

6.3. Сравнение деформационной теории и теории течения в случае простого и сложного нагружения

Рассмотрим случай простого (пропорционального) нагружения, при котором компоненты девиатора напряжений возрастают пропорционально некоторому параметру λ :

$$\begin{aligned} \sigma'_x - \sigma' &= \lambda (\sigma_x - \sigma) \quad , \\ &\dots , \\ \tau'_{xy} &= \lambda \tau_{xy} \quad , \\ &\dots , \end{aligned}$$

где напряжения $\sigma'_x - \sigma'$, ..., τ'_{xy} , ... определяют некоторое фиксированное напряженное состояние.

Согласно теории пластического течения Прандтля – Рейса приращения пластических деформаций можем записать в следующей форме:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_x^p &= \frac{3}{2} \frac{\sigma_x - \sigma}{\sigma_i} \overline{d\varepsilon_i^p} \quad , \\ &\dots , \\ d\gamma_{xy}^p &= 3 \frac{\tau_{xy}}{\sigma_i} \overline{d\varepsilon_i^p} \quad , \\ &\dots \end{aligned}$$

или, учитывая условия простого нагружения, в виде:

$$d\varepsilon_x^p = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_x - \sigma'}{\sigma'_i} \overline{d\varepsilon_i^p} \quad ,$$

$$\dots ,$$

$$d\gamma_{xy}^p = 3 \frac{\tau'_{xy}}{\sigma'_i} \overline{d\varepsilon_i^p} \quad ,$$

$$\dots$$

Проинтегрируем уравнения Прандтля – Рейса от нуля до состояния, в котором имеем зафиксированные значения компонентов девиатора напряжений. Учитывая, что нагружение простое, получим:

$$\left(\varepsilon_x^p\right)' = \frac{3}{2} \frac{\sigma'_x - \sigma'}{\sigma'_i} \int \overline{d\varepsilon_i^p} \quad ,$$

$$\dots ,$$

$$\left(\gamma_{xy}^p\right)' = 3 \frac{\tau'_{xy}}{\sigma'_i} \int \overline{d\varepsilon_i^p} \quad ,$$

$$\dots$$

Определяя с использованием полученных уравнений интенсивность пластических деформаций, будем иметь:

$$\left(\varepsilon_i^p\right)' = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sigma'_i} \left(\int \overline{d\varepsilon_i^p} \right) \cdot \sqrt{2} \cdot \sigma'_i = \int \overline{d\varepsilon_i^p} \quad .$$

Полученное соотношение утверждает, что в случае простого нагружения интенсивность приращений пластических деформаций равна приращению интенсивности пластических деформаций, т.е.

$$\overline{d\varepsilon_i^p} = d\varepsilon_i^p \quad \text{или} \quad \overline{d\varepsilon_i} = d\varepsilon_i \quad .$$

Итак, согласно теории пластического течения Прандтля – Рейса, приращения пластических деформаций при простом нагружении в рассмотренном фиксированном состоянии определяются уравнениями:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_x^p)' &= \frac{3}{2} \frac{(\varepsilon_i^p)'}{\sigma_i'} (\sigma_x' - \sigma') \quad , \\ &\dots , \\ (\gamma_{xy}^p)' &= 3 \frac{(\varepsilon_i^p)'}{\sigma_i'} \tau_{xy}' \quad , \\ &\dots \end{aligned}$$

Деформационная теория пластичности определяет связь между напряжениями и пластическими деформациями в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^p &= \frac{3\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} (\sigma_x - \sigma) \quad , \\ &\dots , \\ \gamma_{xy}^p &= \frac{3\varepsilon_i^p}{\sigma_i} \tau_{xy} \quad , \\ &\dots \end{aligned}$$

Запишем теперь значения пластических деформаций в рассмотренном фиксированном состоянии. Будем иметь:

$$\begin{aligned} (\varepsilon_x^p)' &= \frac{3}{2} \frac{(\varepsilon_i^p)'}{\sigma_i'} (\sigma_x' - \sigma') \quad , \\ &\dots , \\ (\gamma_{xy}^p)' &= 3 \frac{(\varepsilon_i^p)'}{\sigma_i'} \tau_{xy}' \quad , \\ &\dots \end{aligned}$$

Легко видеть, что при простом (пропорциональном) нагружении и теория пластического течения, и деформационная теория дают одинаковые результаты.

Хотя при непропорциональном (сложном) нагружении деформационная теория пластичности дает результаты, отличные от ре-

зультатов теории течения, при нагружении, близком к пропорциональному, она может удовлетворительно согласовываться с опытом. Отметим, что само понятие нагружения, близкого к пропорциональному, является достаточно неопределенным, поскольку в качестве критерия точности деформационной теории при пропорциональном нагружении принято ее согласование с теорией течения. В этом плане представляет интерес построение моделей тела, поведение которых корректно описывается уравнениями деформационной теории для некоторых путей нагружения, отличных от пропорционального.

6.4. Теорема о разгрузке

Рассмотрим одноосное растяжение образца. Предположим, что в растянутом стержне по мере увеличения нагрузки возникло напряжение $\sigma_1 > \sigma_T$, которому соответствует деформация ε_1 .

Если теперь частично разгрузить образец на напряжение σ' , то в стержне будет иметь место напряжение $\tilde{\sigma} = \sigma_1 - \sigma'$. Напряжению $\tilde{\sigma}$ отвечает деформация $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon_1 - \varepsilon'$, где ε' – уменьшение деформации в процессе разгрузки. Поскольку разгрузка проходит по упругому закону, то $\varepsilon' = \sigma' / E$, т.е. деформация разгрузки ε' имеет то же значение, как и при

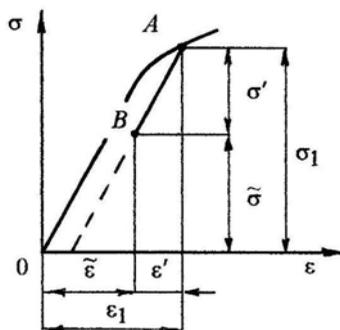


Рис. 6.1

упругом нагружении от нуля до напряжения σ' (рис. 6.1).

Таким образом, для вычисления деформации стержня после разгрузки необходимо из полной деформации, соответствующей наибольшему напряжению, вычесть упругую деформацию, соответствующую напряжению, на величину которого уменьшилось наибольшее напряжение.

Данное утверждение, очевидное при одноосном растяжении стержня, остается справедливым и в случае сложного напряженно-го состояния, если выполняются некоторые условия, сформулиро-

ванные в следующей теореме о разгрузке (Ильюшин А.А.):

перемещения (а также деформации и напряжения) в точке тела в некоторый момент разгрузки равны разностям между их значениями в момент начала разгрузки и упругими перемещениями (деформациями, напряжениями), которые возникли бы в ненагруженном теле под действием внешних сил, равных разностям нагрузок до и после разгрузки. При этом необходимо, чтобы нагружение и разгрузка были простыми.

Предположим, что для некоторого тела, находящегося под действием заданных внешних сил X, Y, Z и $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$, задача пластичности решена, т.е. найдены напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \dots$, деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \dots$ и перемещения u, v, w .

Допустим теперь, что тело разгружается. Объемные и поверхностные силы при этом уменьшаются до значений X^*, Y^*, Z^* и $\bar{X}^*, \bar{Y}^*, \bar{Z}^*$, а напряжения, деформации и перемещения, соответствующие новым нагрузкам, будут иметь значения $\tilde{\sigma}_x, \tilde{\sigma}_y, \dots, \tilde{\varepsilon}_x, \tilde{\varepsilon}_y, \dots, \tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}$.

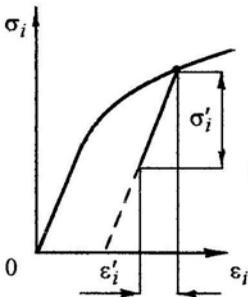


Рис. 6.2

Поскольку разгрузка при сложном напряженном состоянии представляется прямой $\sigma'_i = 3G\varepsilon'_i$ на обобщенной диаграмме деформирования (рис. 6.2), перемещения разгрузки u', v', w' можем определить как решение соответствующей упругой задачи, используя уравнения Ламе

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x} (\vartheta - \tilde{\vartheta}) + \mu \nabla^2 (u - \tilde{u}) + X - X^* = 0$$

и граничные условия в перемещениях. Эти уравнения имеют единственное решение:

$$u - \tilde{u} = u', \quad v - \tilde{v} = v', \quad w - \tilde{w} = w' \quad ,$$

откуда следует

$$\tilde{u} = u - u', \quad \tilde{v} = v - v', \quad \tilde{w} = w - w'$$

и, соответственно,

$$\tilde{\varepsilon}_x = \varepsilon_x - \varepsilon'_x, \quad \dots, \quad \tilde{\sigma}_x = \sigma_x - \sigma'_x, \quad \dots$$

Полученные соотношения справедливы в предположении, что в процессе разгрузки материал не выходит за пределы упругости.

Теорему о разгрузке можно представить в другой формулировке:

перемещения (напряжения, деформации) разгрузки определяются путем решения задачи теории упругости для внешних сил, равных разности сил при нагружении и остающихся после разгрузки. В случае полной разгрузки последние равны нулю и задача теории упругости решается для внешних сил, нагружающих тело.

Как следует из теоремы в приведенной формулировке, после полной разгрузки перемещения (напряжения, деформации) в теле равны разностям между их значениями, найденными как решение задачи пластичности при заданных внешних силах, и значениями, которые для этих же внешних сил вычислены с использованием уравнений теории упругости.

7. Уравнения упругопластического равновесия

7.1. Система уравнений пластического равновесия

Систему уравнений пластического равновесия представим, имея в виду использование деформационной теории пластичности. Напомним, что уравнения, определяемые законами равновесия и сплошности, в теории пластичности имеют тот же вид, что и в теории упругости:

- дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье)

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \quad ,$$

...;

- граничные условия в напряжениях

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n \quad ,$$

... ,

- связь между перемещениями и деформациями (зависимости Коши)

$$\varepsilon_x = \partial u / \partial x \quad ,$$

... ,

$$\gamma_{xy} = (\partial v / \partial x) + (\partial u / \partial y) \quad ,$$

... ;

- уравнения совместности деформаций Сен-Венана

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \quad ,$$

... ,

$$2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) \quad ,$$

... ;

- уравнения деформационной теории пластичности

$$\varepsilon_x - \varepsilon = \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_x - \sigma) \quad ,$$

... ,

$$\gamma_{xy} = \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy} \quad ,$$

... ;

- условие упрочнения (или условие пластичности)

$$\sigma_i = \Phi(\varepsilon_i) \quad (\text{или } \sigma_i = \sigma_T) .$$

Отметим, что система уравнений теории пластичности (совместно с условием $\sigma = 3K\varepsilon$) дает не шесть независимых уравнений, а только пять, поскольку суммирование первых трех уравнений приводит к тождеству $0 = 0$. Однако наличие условия упрочнения (условия пластичности) компенсирует эту «потерю».

Как и в теории упругости, в теории пластичности задача может решаться в перемещениях и в напряжениях.

7.2. Условия непрерывности на границе упругой и пластической областей

Уравнения пластического равновесия определяют напряжения, деформации и перемещения (или напряжения, скорости деформаций и скорости перемещений) в пластической области, т.е. там, где материал находится в пластическом состоянии. Однако при произвольном нагружении в теле, наряду с пластическими областями, имеют место и упругие области, где поля напряжений, деформаций и перемещений описываются уравнениями упругого равновесия.

Выясним, как изменяются напряжения, деформации и перемещения при переходе через поверхность Σ , разделяющую область V_1 упругого состояния материала и область V_2 – пластического (рис. 7.1). На-

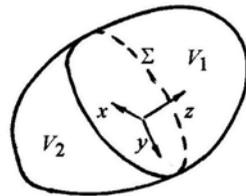


Рис. 7.1

пряжения, деформации и перемещения, относящиеся к области v_1 , будем отмечать одним штрихом, а такие же величины, но относящиеся к области v_2 – двумя штрихами. Плоскость xu системы координат, введенной в произвольной точке поверхности раздела Σ , является касательной плоскостью в рассматриваемой точке (ось z перпендикулярна к поверхности Σ).

Поскольку поверхность раздела Σ принадлежит рассматриваемому телу, то для элемента этой поверхности (как и для любого другого элемента тела) должны выполняться требования трех законов деформирования.

Очевидно, что условия равновесия элемента поверхности Σ реализуются соотношениями:

$$\tau'_{zx} = \tau''_{zx}, \quad \tau'_{zy} = \tau''_{zy}, \quad \sigma'_z = \sigma''_z \quad .$$

Условия сплошности материала на поверхности раздела сводятся к следующему требованию: элемент поверхности Σ должен иметь одинаковые деформации независимо от того, с какой стороны тела этот элемент рассматривается (со стороны области v_1 упругого состояния материала или области v_2 пластического состояния). Выполнение этого требования приводит к равенствам:

$$\varepsilon'_x = \varepsilon''_x, \quad \varepsilon'_y = \varepsilon''_y, \quad \gamma'_{xy} = \gamma''_{xy} \quad .$$

Полученные равенства деформаций можно переписать, используя, с одной стороны, уравнения линейного физического закона, а с другой – уравнения деформационной теории пластичности. Однако поскольку на поверхности раздела Σ имеем, что функция $\psi = \text{const} = 1/2G$ и уравнения деформационной теории пластичности сводятся к уравнениям линейного физического закона. В этом случае получим:

$$\begin{aligned} \sigma'_x - \nu(\sigma'_y + \sigma'_z) &= \sigma''_x - \nu(\sigma''_y + \sigma''_z) \quad , \\ \sigma'_y - \nu(\sigma'_z + \sigma'_x) &= \sigma''_y - \nu(\sigma''_z + \sigma''_x) \quad , \\ \tau'_{xy} &= \tau''_{xy} \quad . \end{aligned}$$

Поскольку $\sigma'_z = \sigma''_z$, то из первых двух уравнений следует:

$$\sigma'_x = \sigma''_x, \quad \sigma'_y = \sigma''_y \quad .$$

Подводя итог выполнения требований законов деформирования для элемента поверхности Σ , можем заключить:

на поверхности раздела упругой и пластической областей в теле напряжения непрерывны.

Дальнейшее рассмотрение уравнений упругого и пластического равновесий позволяет распространить это заключение на деформации и перемещения.

Отметим, что при решении упругопластической задачи поверхность раздела Σ заранее не задана (неизвестна), и ее определение входит в круг решаемых в задаче вопросов.

7.3. Общие методы решения задач пластичности

Для большинства практически важных задач теории пластичности получить решения в замкнутом виде трудно, а часто и невозможно из-за нелинейности имеющих место дифференциальных уравнений в частных производных.

Решение задач теории пластичности с использованием теории пластического течения представляет дополнительные трудности, связанные с тем, что уравнения теории течения содержат не только напряжения, но и их приращения. Здесь не представляется возможным использование схем решения задач теории пластичности ни в напряжениях, ни в перемещениях. В частных случаях обычно применяют численное интегрирование, прослеживая «шаг за шагом» развитие пластической деформации. На каждом «шаге» по приращениям внешней нагрузки вычисляют приращения напряжений и деформаций и т.д., решая некоторую задачу для упругого анизотропного тела с переменными параметрами упругости (Биргер И.А., 1951 г.).

Для решения нелинейных уравнений деформационной теории пластичности применяют различные варианты метода упругих решений (Ильющин А.А., 1945 г.), когда решение задачи пластичности сводится к решению последовательности линейных задач, каждая из которых может быть интерпретирована как некоторая задача теории упругости.

Метод дополнительных нагрузок

Уравнения деформационной теории пластичности можно переписать в виде:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma + \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} (\varepsilon_x - \varepsilon) \quad , \\ &\dots , \\ \tau_{xy} &= \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \gamma_{xy} \quad , \\ &\dots\end{aligned}$$

Преобразуем полученные уравнения, выделяя в них упругую часть, определяемую линейным физическим законом. При преобразованиях учтем известные соотношения:

$$\begin{aligned}\sigma &= 3K\varepsilon \quad , \quad K = \frac{E}{3(1-2\nu)} \quad , \quad \varepsilon = \frac{\vartheta}{3} \quad , \\ \lambda &= \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad , \quad \mu = G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad .\end{aligned}$$

В результате преобразований уравнения деформационной теории пластичности получают вид уравнений линейного физического закона с «дополнительными» напряжениями:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \lambda\vartheta + 2\mu\varepsilon_x + 2 \left(\frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} - G \right) (\varepsilon_x - \varepsilon) \quad , \\ &\dots , \\ \tau_{xy} &= \mu\gamma_{xy} + \left(\frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} - G \right) \gamma_{xy} \quad , \\ &\dots\end{aligned}$$

Решение задачи пластичности в перемещениях с использованием соотношений деформационной теории пластичности в полученном виде приведет к уравнениям, аналогичным уравнениям Ламе,

но отличающихся наличием *дополнительных объемных сил*, обусловленных наличием «дополнительных» напряжений:

$$(\lambda + \mu) \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + X = R_x \quad ,$$

...

где, в частности,

$$R_x = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(2G - \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \right\} + \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(G - \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(G - \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \quad .$$

Преобразуя граничные условия в напряжениях в граничные условия в перемещениях, полученные соотношения запишем в виде:

$$\left(\lambda \vartheta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) l + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m + \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) n = \bar{X} + T_x \quad ,$$

...

где T_x , T_y , T_z – *дополнительные поверхностные силы*. В частности, для поверхностной силы T_x имеем:

$$T_x = \left(2G - \frac{2\sigma_i}{3\varepsilon_i} \right) \left[\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] l + \\ + \left(G - \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) m + \left(G - \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \right) \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) n \quad .$$

Полученные соотношения можно интерпретировать как уравнения теории упругости в перемещениях, но с дополнительными объемными и поверхностными силами, откуда и следует название метода – метод дополнительных нагрузок.

В первом приближении принимается, что дополнительная нагрузка равна нулю. Решая «обычную» задачу упругости, находим перемещения, а затем и деформации первого приближения, по которым, соответственно, можно вычислить интенсивность деформаций первого приближения $\varepsilon_i^{(1)}$. Наличие обобщенной диаграммы деформирования $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ позволяет определить интенсивность напряжений первого приближения $\sigma_i^{(1)}$. Полученных данных теперь достаточно, чтобы найти дополнительную нагрузку второго приближения и т.д.

Метод дополнительных деформаций

Уравнения деформационной теории пластичности

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon &= \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_x - \sigma) \quad , \\ &\dots , \\ \gamma_{xy} &= \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy} \quad , \\ &\dots \end{aligned}$$

преобразуем, выделяя в них упругую часть, определяемую линейным физическим законом. Будем иметь:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] + \left(\frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} - \frac{1}{2G} \right) (\sigma_x - \sigma) \quad , \\ &\dots , \\ \gamma_{xy} &= \frac{1}{G} \tau_{xy} + \left(\frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} - \frac{1}{G} \right) \tau_{xy} \quad , \\ &\dots \end{aligned}$$

При решении задачи пластичности в напряжениях дифференциальные уравнения равновесия и граничные условия в напряжениях не изменятся, а уравнения совместности деформаций будут содержать дополнительные слагаемые, которые можно интерпретиро-

вать как дополнительные деформации. Для определения дополнительных деформаций используется метод последовательных приближений.

Метод переменных параметров упругости

При построении метода переменных параметров упругости (Биргер И.А., 1951 г.) предлагается представить уравнения деформационной теории пластичности:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x - \varepsilon &= \frac{3\varepsilon_i}{2\sigma_i} (\sigma_x - \sigma) \quad , \\ &\dots, \\ \gamma_{xy} &= \frac{3\varepsilon_i}{\sigma_i} \tau_{xy} \quad , \\ &\dots \end{aligned}$$

в форме линейного физического закона:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \left[\sigma_x - \nu^* (\sigma_y + \sigma_z) \right] / E^* \quad , \\ &\dots, \\ \gamma_{xy} &= \tau_{xy} / G^* \quad , \\ &\dots, \end{aligned}$$

где E^* , ν^* , G^* – *переменные параметры упругости*, зависящие от напряженного и деформированного состояния в точке и, как следствие, имеющие разные значения в разных точках тела.

Введенные параметры упругости E^* , ν^* , G^* имеют следующие значения:

$$E^* = \frac{\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}{1 + \frac{1-2\nu}{3E} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}} \quad , \quad \nu^* = \frac{\frac{1}{2} - \frac{1-2\nu}{3E} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}}{1 + \frac{1-2\nu}{3E} \cdot \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}} \quad , \quad G^* = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i} \quad .$$

Легко проверить, что три переменных параметра упругости E^* , ν^* , G^* связаны между собой тем же соотношением, что и упругие характеристики материала E , ν и G :

$$G^* = \frac{E^*}{2(1 + \nu^*)}$$

Для несжимаемого тела при $\nu = 0,5$ соотношения, определяющие переменные параметры упругости существенно упрощаются и принимают вид:

$$E^* = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}, \quad \nu^* = 0,5, \quad G^* = \frac{\sigma_i}{3\varepsilon_i}$$

Для решения задачи пластичности используется процесс последовательных приближений. В нулевом приближении решается упругая задача при $E^* = E$, $\nu^* = \nu$, $G^* = G$ с определением напряжений и деформаций, по которым, соответственно, в каждой точке тела можно вычислить интенсивность напряжений σ_{i0} и интенсивность деформаций ε_{i0} нулевого приближения. На плоскости в координатах $\sigma_i - \varepsilon_i$ эти две величины определяют точку 0, лежащую на луче, тангенс угла наклона которого равен $3G$.

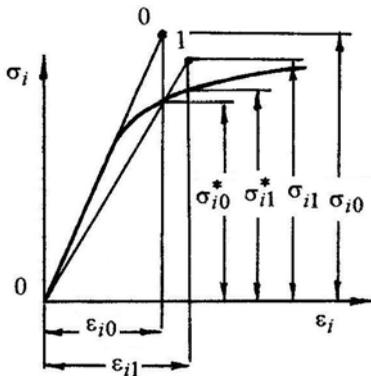


Рис. 7.2

В первом приближении вносится поправка в угол наклона луча: принимается, что его тангенс будет определяться значением $3G_1^* = \sigma_{i0}^* / \varepsilon_{i0}$, где величина σ_{i0}^* является ординатой точки, лежащей на обобщенной кривой деформирования $\sigma_i = \sigma_i(\varepsilon_i)$ при абсциссе ε_{i0} (рис. 7.2). Далее, по значениям σ_{i0}^*

и ε_{i0} вычисляются значения параметров E_1^* и ν_1^* первого приближения. Полученные значения G_1^* , E_1^* и ν_1^* используются для решения упругой задачи первого приближения и т.д.

Отметим, что на каждом этапе приближения упругая задача определения напряжений и деформаций решается для тела, параметры упругости которого в разных точках имеют разные значения.

Расчеты с применением методов упругого решения необходимо продолжать до тех пор, пока результаты расчетов n -го приближения будут отличаться от результатов расчетов $(n - 1)$ -го приближения на заданную величину с требуемой точностью. Отметим, что хотя сходимость изложенных методов изучена лишь частично (доказательства сходимости методов в общем случае нет), практика расчетов показывает, что процесс всегда является сходящимся, причем скорость сходимости довольно велика: как правило, достаточно всего два-три приближения.

8. Некоторые задачи теории пластичности

8.1. Упругопластическое кручение круглого бруса

В теории упругости решение задачи о кручении круглого стержня (вала) строится в предположении, что при деформировании стержня его сечения остаются плоскими, а радиусы – прямолинейными. В этом случае угловая деформация γ связана с относительным углом закручивания θ (углом закручивания на единицу длины) соотношением $\gamma = r\theta$, из которого следует, что наибольшая угловая деформация имеет место при γ .

Очевидно, что по мере увеличения крутящего момента первая пластическая деформация в поперечном сечении бруса появится в том случае, когда наибольшая угловая деформация γ_{\max} достигнет значения γ_T или, что то же самое, максимальное касательное напряжение τ_{\max} достигнет значения τ_T ($\tau_{\max} = \tau_T$ – условие пластичности).

Появление первых пластических деформаций можно связать с

соответствующими значениями крутящего момента M_T или относительного угла закручивания θ_T . Эти значения легко определяют по соответствующим формулам теории упругости (сопротивления материалов):

$$\tau = \frac{M}{I_p} r \Rightarrow M_T = \tau_T W_p ;$$

$$\theta = \frac{M}{GI_p} \Rightarrow \theta_T = \frac{M_T}{GI_p} \Rightarrow \theta_T = 2\gamma_T / d .$$

Определение напряжений в сечениях стержня и крутящего момента при заданном относительном угле закручивания

Будем считать, что при решении задачи пластического кручения стержня исходные гипотезы упругого деформирования остаются в силе.

Задачу определения касательных напряжений в сечениях бруса будем решать, задавшись значением относительного угла закручивания $\theta > \theta_T$. Считаем, что диаграмма сдвига материала $\tau = \tau(\gamma)$ известна и задана графически (рис. 8.1).

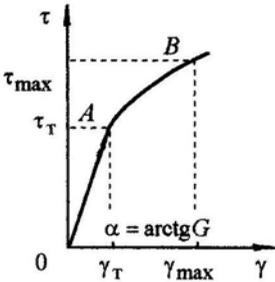


Рис. 8.1

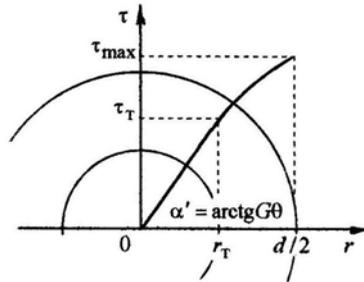


Рис. 8.2

В приведенной постановке задача решается достаточно просто. Действительно, эпюра касательных напряжений $\tau = \tau(r)$ в сечении бруса строится по диаграмме сдвига материала $\tau = \tau(\gamma)$, ограниченной значением угловой деформации $\gamma_{\max} = \theta(d/2)$, с измене-

нием масштаба ($r = \gamma / \theta$) по оси абсцисс.

Из построенной эпюры касательных напряжений $\tau = \tau(r)$ следует, что при упругопластическом кручении вала в его поперечном сечении имеем область упругого деформирования $0 < r \leq r_T$ и область пластического деформирования $r_T \leq r \leq d/2$ (рис. 8.2).

На границе упругой и пластической областей имеем, что $\gamma_T = r_T \theta$. С другой стороны, ранее получили, что $\theta_T = 2\gamma_T / d$, откуда следует $\gamma_T = d\theta_T / 2$. Полученные два соотношения позволяют определить радиус r_T через исходные параметры задачи:

$$2r_T = (\theta_T / \theta)d \quad \text{или} \quad d_T = (\theta_T / \theta)d \quad .$$

Перейдем к определению крутящего момента M , отвечающего относительному углу закручивания $\theta > \theta_T$. Будем иметь:

$$M = \int_0^{d/2} (\tau \cdot 2\pi r \cdot dr)r = 2\pi \int_0^{d/2} \tau(r)r^2 dr \quad .$$

Полученное соотношение определяет крутящий момент по построенной эпюре касательных напряжений $\tau = \tau(r)$, однако при решении задачи желательно использовать исходные данные: в рассматриваемом случае – диаграмму сдвига материала $\tau = \tau(\gamma)$. Используя полученные ранее соотношения $\gamma = r\theta$ и $\gamma_{\max} = \theta(d/2)$, заменим переменную r на переменную γ . Будем иметь:

$$r = \frac{d}{2\gamma_{\max}} \gamma \quad \Rightarrow \quad dr = \frac{d}{2\gamma_{\max}} d\gamma \quad .$$

Для момента M соответственно получаем:

$$M = \frac{\pi d^3}{4\gamma_{\max}^3} \int_0^{\gamma_{\max}} \tau(\gamma)\gamma^2 d\gamma \quad .$$

Определение напряжений в сечении стержня и относительного угла закручивания при заданном крутящем моменте

Поставленная задача легко решается при наличии зависимости крутящего момента от относительного угла закручивания (диаграммы кручения) $M = M(\theta)$.

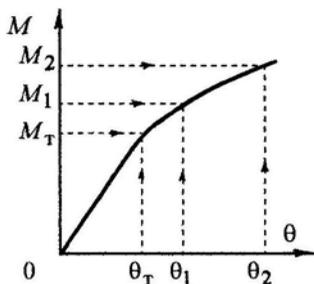


Рис. 8.3

При $M \leq M_T$ ($\theta \leq \theta_T$) диаграмма кручения представляется прямой линией $M = (GI_p) \cdot \theta$ (рис. 8.3). Вторым участком диаграммы строится по точкам с использованием предыдущего решения: задавшись значением $\theta_1 > \theta_T$, вычисляем соответствующее значение M_1 и т.д.

Далее по построенной диаграмме кручения для заданного значения $M > M_T$ определяется угол относительного закручивания θ и строится эпюра касательного напряжения.

Отметим, что обе приведенные выше задачи решены для случая, когда диаграмма сдвига материала $\tau = \tau(\gamma)$ задана графически. Очевидно, что при расчетах можно использовать и аналитические зависимости, описывающие схематизированные диаграммы сдвига. В частности, если диаграмма сдвига не имеет упрочнения (идеальное упругопластическое тело), то зависимость крутящего момента от относительного угла закручивания (диаграмма кручения) при $M > M_T$ будет представлена уравнением

$$\frac{M}{M_T} = \frac{1}{3} \left[4 - \left(\frac{\theta_T}{\theta} \right)^3 \right] .$$

Представляет интерес предельный случай, когда относительный угол закручивания достаточно велик ($\theta \gg \theta_T$). В этом случае $d_T \ll d$, т.е. диаметр упругой области практически равен нулю, и

материал в сечении практически полностью переходит в пластическое состояние (образуется пластический шарнир). Соответственно, предельный крутящий момент, при котором образуется пластический шарнир, для идеального упругопластического тела определится соотношением

$$M_{\text{пр}} = 4M_T / 3 \quad .$$

Отметим, что представление о пластическом шарнире не нарушает понятие о непрерывности напряжений в центре сечения стержня, поскольку в действительности небольшая упругая область всегда остается. С другой стороны, при этом представление о предельном моменте не теряет смысла, поскольку этот момент практически реализуется, например, уже при $d_T = d / 4$.

Задача о разгрузке скручиваемого стержня

Будем считать, что для заданного крутящего момента $M > M_T$ получено распределение касательного напряжения (рис. 8.4, а). Далее скручиваемый стержень разгружается полностью.

В соответствии с теоремой о разгрузке в этом случае напряжения разгрузки определяются из решения задачи теории упругости о нагружении этого же стержня крутящим моментом обратного знака ($-M$). Будем иметь:

$$\tau_{\text{разг}} = -\frac{M}{I_p} r \quad ,$$

т.е. эпюра напряжений разгрузки представляет линейную зависимость напряжения от радиуса (рис. 8.4, б).

Эпюра остаточных напряжений следует из сложения эпюры касательных напряжений, полученной при нагружении стержня, и эпюры напряжений разгрузки (если упругое решение определяется моментом M , то эпюры вычитаются). Результат сложения показан на рисунке рис. 8.4, в.

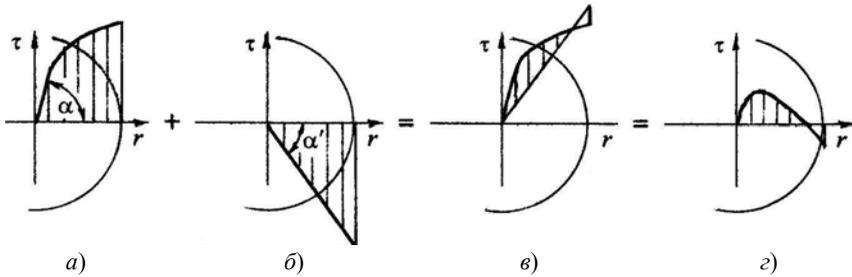


Рис. 8.4

При сложении эпюр учтено, что

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} = \frac{G \theta}{M / I_p} = \frac{\theta}{M / G I_p} = \frac{\theta}{\theta_{\text{упр}}} > 1 \quad .$$

Приведение остаточных напряжений к горизонтальной оси показано на рис. 8.4, г.

8.2. Чистый и поперечный упругопластический изгиб бруса

Чистый упругопластический изгиб бруса

Рассмотрим задачу о чистом изгибе бруса цилиндрической или призматической формы, поперечное сечение которого имеет две оси симметрии (рис. 8.5).

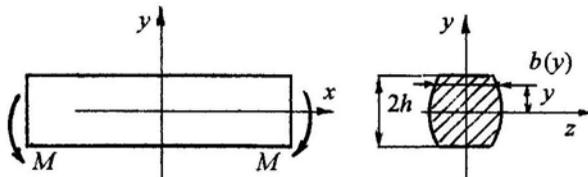


Рис. 8.5

Упругое решение поставленной задачи, использующее гипотезу плоских сечений, имеет вид:

$$\sigma_x = (M / I_z) y \quad , \quad \sigma_y = \dots = \tau_{zx} = 0 \quad .$$

Условием появления первых пластических деформаций при $y = \pm h$ будет условие пластичности $(\sigma_x)_{\max} = \sigma_T$, откуда следует соотношение для изгибающего момента M_T , отвечающего появлению первых пластических деформаций: $M_T = \sigma_T W_z$.

Реализация гипотезы плоских сечений, которую считаем справедливой, как и при упругом деформировании, приводит к соотношению $\varepsilon_x = (1/\rho)y$, где ρ – радиус кривизны изогнутого бруса. Поскольку наибольшая деформация $(\varepsilon_x)_{\max}$ достигается при $y = h$, из полученного соотношения можно определить радиус кривизны изогнутого бруса ρ_T , при котором будут иметь место первые пластические деформации:

$$1/\rho_T = \varepsilon_T / h \quad \Rightarrow \quad 1/\rho_T = M_T / EI_z \quad .$$

Определение напряжений в сечениях бруса и изгибающего момента при заданном радиусе кривизны изогнутого бруса

Решим задачу определения напряжений в сечении бруса, задавшись значением радиуса кривизны изогнутого бруса $\rho > \rho_T$ и считая, что диаграмма растяжения материала бруса $\sigma_x = \sigma_x(\varepsilon_x)$ известна.

Так же, как и в задаче кручения круглого стержня, эпюра нормальных напряжений $\sigma_x = \sigma_x(y)$ в сечении изогнутого бруса легко строится определением деформаций по соотношению $\varepsilon_x = (1/\rho)y$ при выбранном значении координаты y и вычислению соответствующих напряжений по диаграмме растяжения материала.

На рис. 8.6 показаны эпюры напряжений в сечениях балок, изготовленных из материала с линейным упрочнением (а) и из идеального упругопластического материала (б).

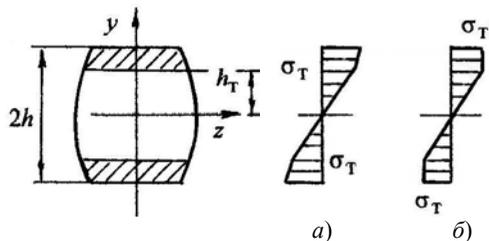


Рис. 8.6

Размер упругой зоны h_T определим из следующих соображений:

$$1/\rho_T = \varepsilon_T / h \Rightarrow 1/\rho = \varepsilon_T / h_T \Rightarrow h_T = (\rho / \rho_T) h .$$

Полученное распределение напряжений $\sigma_x = \sigma_x(y)$ должно удовлетворять граничным условиям на торце бруса:

$N_x = 0$ – отсутствие продольной силы;

$M_z = M$ – равенство момента внутренних сил M_z внешнему изгибающему моменту M .

Первое граничное условие удовлетворяется тождественно, поскольку рассматриваемое сечение симметрично. Второе условие приводит к соотношению

$$M = 2 \int_0^h \sigma_x(y) b(y) y dy .$$

Будем считать, что материал бруса характеризуется диаграммой растяжения без упрочнения. В этом случае:

$$\begin{aligned} M &= 2 \int_0^{h_T} E \varepsilon_x b(y) y dy + 2 \int_{h_T}^h \sigma_T b(y) y dy = \\ &= 2 \frac{\sigma_T}{h_T} \int_0^{h_T} b(y) y^2 dy + 2 \sigma_T \int_{h_T}^h b(y) y dy = \frac{\sigma_T}{h_T} I_{\text{упр}} + \sigma_T \cdot 2 S_{\text{пласт}} . \end{aligned}$$

Здесь $I_{\text{упр}}$ – момент инерции упругой зоны; $S_{\text{пласт}}$ – статический момент одной из частей пластической зоны относительно оси z . При преобразованиях были использованы соотношения $E = \sigma_T / \varepsilon_T$ и $\varepsilon_x / \varepsilon_T = y / h_T$.

В частном случае при $b = \text{const}$ (прямоугольное сечение) будем иметь:

$$M = \sigma_T b h^2 \left[1 - \frac{1}{3} \left(\frac{h_T}{h} \right)^2 \right] = \frac{M_T}{2} \left[3 - \left(\frac{h_T}{h} \right)^2 \right] .$$

Из полученного соотношения при $h_T = 0$ следует значение предельного момента:

$$M_{\text{пр}} = 3M_T / 2 = \sigma_T b h^2 .$$

Отметим, что реализация предельного момента имеет место при сравнительно небольших отношениях h_T / h . Действительно, запишав соотношение для изгибающего момента M в виде

$$\frac{M}{M_{\text{пр}}} = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{h_T}{h} \right)^2 ,$$

можно получить, что при $h_T / h = 1/3$ момент M отличается от $M_{\text{пр}}$ меньше, чем на 4%.

Задачи определения напряжений по заданному изгибающему моменту $M > M_T$ и вычисления остаточных напряжений при разгрузке при чистом изгибе решаются аналогично соответствующим задачам кручения круглого бруса.

Поперечный упругопластический изгиб бруса

При поперечном изгибе бруса в его сечениях наряду с нормальными напряжениями действуют и касательные, однако для достаточно длинных балок ими можно пренебречь.

Вследствие того, что в рассматриваемой задаче внутренний изгибающий момент M_z меняется по длине балки (закон его изменения определяется приложенной нагрузкой), величина h_T , определяющая размер упругой зоны в сечении, также будет меняться по длине балки.

Построим зависимость $h_T = h_T(x)$ для балки прямоугольного поперечного сечения, материал которой не имеет упрочнения. Для этой цели используем полученное при решении задачи о чистом изгибе такой балки соотношение, связывающее изгибающий M и предельный $M_{пр}$ моменты, переписав его в виде

$$\frac{M_z(x)}{M_{пр}} = 1 - \frac{1}{3} \left(\frac{h_T}{h} \right)^2$$

и считая, что в сечении с максимальным изгибающим моментом реализуется предельное состояние (пластический шарнир). Подставляя в представленное соотношение зависимость $M_z(x)$, можем получить требуемую функцию $h_T = h_T(x)$.

Балка на двух опорах, нагруженная силой

В рассматриваемом примере предельное состояние, очевидно, будет характеризоваться наличием предельного момента $M_{пр}$ в сечении балки под силой P (рис. 8.7). С учетом данного обстоятельства функцию $M_z(x)$ можем записать в форме:

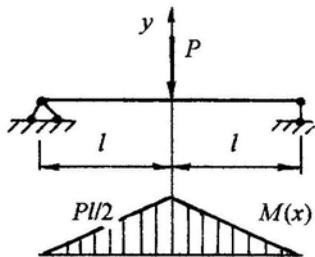


Рис. 8.7

С учетом данного обстоятельства функцию $M_z(x)$ можем записать в форме:

$$M_z(x) = M_{пр} [1 - (x/l)]^2$$

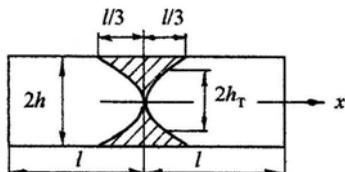


Рис. 8.8

Соответственно, функция $h_T = h_T(x)$ будет иметь вид (рис. 8.8):

$$h_T(x) = h \sqrt{3x/l}$$

Полученное соотношение показывает, что границей раздела упругой и пластической областей является парабола. Принимая $h_T = h$, можно определить расстояние, на которое распространяется зона пластического деформирования по длине балки в каждую сторону от точки приложения силы P . Будем иметь, что $x = \pm l/3$.

Предельное значение нагрузки $P_{пр}$ найдем по известному предельному моменту $M_{пр}$:

$$P_{пр} = 2 M_{пр} / l .$$

Балка на двух опорах, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой

При рассмотрении балки на двух опорах, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (рис. 8.9), функцию $M_z(x)$ можем записать в форме:

$$M_z(x) = M_{пр} \left[1 - (x/l)^2 \right] .$$

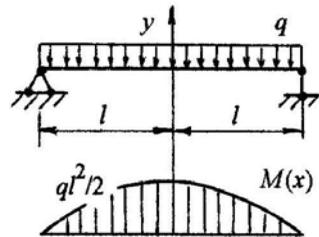


Рис. 8.9

Соответственно, функция $h_T = h_T(x)$ будет иметь вид:

$$h_T(x) = h\sqrt{3}(x/l) .$$

Здесь границей раздела упругой и пластической областей являются прямые линии (рис. 8.10). Принимая $h_T = h$, получим, что при $x = \pm l/\sqrt{3}$ зона пластичности исчезает.

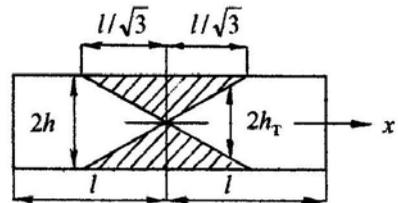


Рис. 8.10

8.3. Кручение призматических стержней

Пластическое кручение стержней. Аналогия Надаи

Будем считать, что материал стержня полностью находится в пластическом (предельном) состоянии (упругая зона отсутствует). Так же, как и в теории упругости, полагаем, что отличными от нуля будут касательные напряжения τ_{zx} и τ_{zy} , которые при этом не зависят от переменной z (ось z – ось бруса). Дифференциальные уравнения равновесия в этом случае сводятся к одному уравнению:

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} = 0 \quad .$$

Несмотря на то, что имеем одно уравнение статики с двумя неизвестными, поставленная задача в теории пластичности решается как статически определимая. Действительно, добавляя условие упрочнения (условие пластичности), будем иметь дополнительное уравнение, связывающее касательные напряжения. В частности, используя здесь условие пластичности Мизеса – Генки, будем иметь

$$T = \tau_T \quad \Rightarrow \quad \tau_{zx}^2 + \tau_{zy}^2 = \tau_T^2 \quad .$$

Решение задачи легко свести к отысканию функции пластических напряжений $F_p = F_p(x, y)$, которую вводим так, чтобы удовлетворить тождественно уравнение равновесия:

$$\tau_{zx} = \tau_T \left(\partial F_p / \partial y \right) , \quad \tau_{zy} = - \tau_T \left(\partial F_p / \partial x \right) \quad .$$

Уравнение для определения функции $F_p = F_p(x, y)$ получаем, подставляя значения напряжений в условие пластичности:

$$\left(\partial F_p / \partial x \right)^2 + \left(\partial F_p / \partial y \right)^2 = 1 \quad .$$

Граничное условие в напряжениях на боковой поверхности или, что то же самое, на контуре поперечного сечения бруса (поскольку рассматриваемые величины не зависят от переменной z) преобразуем подобным образом:

$$\tau_{zx} l + \tau_{zy} m = 0 \Rightarrow \frac{\partial F_p}{\partial y} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{\partial F_p}{\partial x} \cdot \frac{dx}{ds} = 0 ,$$

откуда следует

$$dF_p/ds = 0 \Rightarrow F_p = C \text{ на } L ,$$

где L – контур поперечного сечения бруса. Поскольку касательные напряжения определяются через производные от функции напряжений, принимаем $C = 0$.

Выполнение граничных условий на торце скручиваемого бруса приводит к соотношению, связывающему предельный момент $M_{\text{пр}}$ и функцию пластических напряжений F_p :

$$M_{\text{пр}} = 2 \tau_T \iint F_p(x, y) dx dy .$$

Определение функции напряжений $F_p = F_p(x, y)$ путем решения дифференциального уравнения достаточно сложно, однако некоторые заключения о характере этой функции можно сделать, рассматривая ее как поверхность в трехмерной системе координат.

Определим направляющие косинусы нормали к поверхности $F_p = F_p(x, y)$. В общем случае решение этого вопроса для произвольной поверхности $z = z(x, y)$ позволяет записать:

$$l = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) / A , \quad m = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) / A , \quad n = 1 / A ,$$

где $A = \sqrt{1 + (\partial z / \partial x)^2 + (\partial z / \partial y)^2}$.

Для рассматриваемой поверхности имеем, что $A = \sqrt{2}$ и, тем самым, получаем, что нормаль к поверхности напряжений имеет постоянный и равный 45° угол наклона к оси z (оси бруса). Поверхности такого типа носят название поверхностей постоянного уклона или поверхностей естественного откоса. В задаче кручения такую поверхность можно получить, если на пластину, представляющую поперечное сечение скручиваемого стержня, насыпать мелкий сухой песок. Песчаная аналогия задачи кручения установлена Надаи.

Песчаная аналогия позволяет легко определить величину предельного момента

$$M_{\text{пр}} = 2 \tau_T \iint F_p(x, y) dx dy = 2 \tau_T \cdot V \quad ,$$

где V – объем, заключенный между поверхностью естественного откоса и плоскостью пластины.

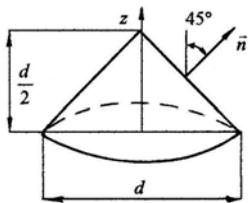


Рис. 8.11

Для круглого вала, имеющего диаметр d (рис. 8.11), поверхность естественного откоса представляет собой конус, высота которого равна $d/2$. Соответственно, получим:

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{d}{2} \Rightarrow M_{\text{пр}} = \tau_T \frac{\pi d^3}{12} \quad .$$

Для вала с поперечным сечением в форме квадрата будем иметь:

$$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot \frac{a}{2} \Rightarrow M_{\text{пр}} = \tau_T \cdot \frac{a^3}{3} \quad .$$

Упругопластическое кручение стержней.

Мембранно-песчаная аналогия Прандтля – Надаи

Аналитическое решение поставленной задачи даже для материала, не имеющего упрочнения, представляет значительные трудности. На настоящее время упругопластическая задача кручения призматических (цилиндрических) стержней решена для стержней

с достаточно простыми сечениями (прямоугольник, равносторонний треугольник, овал и т.д.).

Наглядное представление о распределении напряжений при упругопластическом кручении бруса для материала, не имеющего упрочнения, дает мембранно-песчаная аналогия Прандтля – Надаи. Напомним, что мембранная аналогия Прандтля позволяет свести решение упругой задачи кручения к решению задачи о прогибе мембраны, натянутой на контур, идентичный контуру поперечного сечения скручиваемого стержня. При этом изогнутая поверхность мембраны представляет поверхность функции упругих напряжений $F_e = F_e(x, y)$ в трехмерной системе координат.

При упругопластическом кручении стержня условие непрерывности напряжений на границе раздела упругой и пластической областей приводит к соотношениям:

$$\partial F_e / \partial x = \partial F_p / \partial x \quad , \quad \partial F_e / \partial y = \partial F_p / \partial y \quad ,$$

из которых следует, что на границе раздела упругой и пластической областей функции упругих и пластических напряжений равны. В этом случае можно утверждать, что границей раздела областей является проекция на плоскость поперечного сечения бруса линии, по которой поверхность функции упругих напряжений F_e касается функции пластических напряжений F_p . На этом утверждении относительно функций F_e и F_p и базируется мембранно-песчаная аналогия Прандтля – Надаи.

Реализация аналогии заключается в следующем. Над контуром, соответствующим заданному поперечному сечению бруса, строится жесткая «крыша» с постоянным углом ската. Основание крыши затягивается мембраной, которая загружается равномерно

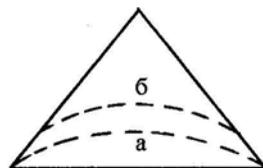


Рис. 8.12

распределенным давлением. При небольших нагрузках мембрана не касается крыши, что соответствует упругому кручению (рис. 8.12, а). При достижении определенного давления мембрана

коснется крыши (появление первых пластических деформаций в задаче кручения), а при дальнейшем возрастании давления часть мембраны будет прилегать к крыше (рис. 8.12, б). Проекция зон прилегания на плоскость контура мембраны соответствуют пластическим областям, остальная часть будет упругой областью.

8.4. Толстостенный цилиндр под действием внутреннего давления

Решение задачи об упругопластическом деформировании толстостенного цилиндра под действием внутреннего давления представляет определенные трудности и реализуется численными методами. Однако можно построить достаточно простое приближенное решение, хорошо подтверждаемое экспериментом, если ввести некоторые упрощения.

Будем считать, что материал, из которого изготовлен цилиндр, является идеально упругопластическим, а коэффициент Пуассона равен 0,5 и для упругой, и для пластической областей, что равносильно утверждению о несжимаемости материала в обеих областях.

При сравнительно небольших значениях внутреннего давления p материал цилиндра деформируется упруго. Напряжения в этом случае определяются известными формулами теории упругости:

$$\sigma_r = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) ,$$

$$\sigma_\varphi = \frac{pa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) ,$$

$$\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\varphi) / 2 ,$$

где a и b – внутренний и внешний радиусы цилиндра. В последнем соотношении реализовано принятое допущение о несжимаемости материала в упругой области $\nu = 0,5$.

Определим давление p_T , при котором в цилиндре появятся первые пластические деформации. Предполагая использовать в дальнейшем условие пластичности Мизеса – Генки, вычислим интенсивность напряжений:

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\varphi - \sigma_r) .$$

Подставляя значения напряжений, получим:

$$\sigma_i = \sqrt{3} \cdot \frac{p a^2 b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{1}{r^2} .$$

Интенсивность напряжений принимает максимальное значение при $r = a$, следовательно, первые пластические деформации появятся на внутренней поверхности цилиндра. Реализуя условие пластичности Мизеса – Генки, определим давление p_T :

$$\sigma_i|_{r=a} = \sigma_T \Rightarrow \sqrt{3} \cdot \frac{p_T b^2}{b^2 - a^2} = \sigma_T \Rightarrow p_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) .$$

При давлении $p > p_T$ пластически деформированный материал будет занимать область $a \leq r \leq r_T$, где радиус r_T , являющийся границей раздела упругой и пластической областей, подлежит определению.

Напряжения в упругой области при $r_T \leq r \leq b$ будут определяться представленными ранее формулами, но с заменой радиуса a и давления p на r_T и q , где q – давление (радиальное напряжение) на границе раздела, также подлежащее определению. Можем записать:

$$\sigma_r^e = \frac{q r_T^2}{b^2 - r_T^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right) ,$$

$$\sigma_\phi^e = \frac{q r_T^2}{b^2 - r_T^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right) ,$$

$$\sigma_z^e = \left(\sigma_r^e + \sigma_\phi^e \right) / 2 .$$

Определим напряжения в пластической области. Поскольку нагружение возрастающим внутренним давлением в данной задаче является простым, воспользуемся соотношениями деформационной теории пластичности.

Реализация условия плоской деформации $\varepsilon_z^p = 0$ позволяет исключить из рассмотрения напряжение σ_z^p (так же, как и в упругой области). Действительно,

$$\varepsilon_z^p = \frac{3\varepsilon_i^p}{2\sigma_i^p} (\sigma_z^p - \sigma^p) = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z^p = (\sigma_r^p + \sigma_\phi^p) / 2 .$$

Оставшиеся два напряжения σ_r^p и σ_ϕ^p должны удовлетворять:

- дифференциальному уравнению

$$\frac{d\sigma_r^p}{dr} + \frac{\sigma_r^p - \sigma_\phi^p}{r} = 0 ;$$

- условию пластичности

$$\frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\phi^p - \sigma_r^p) = \sigma_T .$$

Совместное решение этих двух уравнений позволяет получить:

$$\frac{d\sigma_r^p}{dr} = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{r} \Rightarrow \sigma_r^p = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \cdot \ln r + C .$$

Постоянная C определяется из граничного условия $\sigma_r^p = -p$ при $r = a$. Будем иметь:

$$-p = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \cdot \ln a + C \Rightarrow C = -p - \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \cdot \ln a .$$

Окончательно для напряжений в пластической области можем записать:

$$\begin{aligned} \sigma_r^p &= \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \cdot \ln \frac{r}{a} - p , \\ \sigma_\phi^p &= \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 + \ln \frac{r}{a} \right) - p , \\ \sigma_z^p &= \left(\sigma_r^p + \sigma_\phi^p \right) / 2 . \end{aligned}$$

Величины r_T и q , входящие в упругое решение и остающиеся до сих пор неизвестными, определим из условий непрерывности напряжений на границе раздела упругой и пластической областей при $r = r_T$:

$$\begin{aligned} \sigma_r^e = \sigma_r^p &\Rightarrow \frac{q r_T^2}{b^2 - r_T^2} \left(1 - \frac{b^2}{r_T^2} \right) = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \cdot \ln \frac{r_T}{a} - p = -q , \\ \sigma_\phi^e = \sigma_\phi^p &\Rightarrow \frac{q r_T^2}{b^2 - r_T^2} \left(1 + \frac{b^2}{r_T^2} \right) = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \cdot \left(1 + \ln \frac{r_T}{a} \right) - p . \end{aligned}$$

Исключая давление q из второго соотношения, после несложных преобразований получаем уравнение, определяющее радиус r_T :

$$\ln \frac{r_T}{a} + \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{r_T^2}{b^2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_T} p \quad .$$

Полученное уравнение решается численно или графически. При найденном радиусе r_T давление q определится имеющимся соотношением

$$q = p - \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \cdot \ln \frac{r_T}{a} \quad .$$

Более простую формулу для давления q можно записать, рассматривая q как нагрузку, при которой пластическая деформация имеет место при $r = r_T$ (аналог формулы для давления p_T):

$$q = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}} \left(1 - \frac{r_T^2}{b^2} \right) \quad .$$

Предельное состояние цилиндра достигается, когда пластическая область распространится на все сечение. Соответствующее предельное внутреннее давление (предел пластического сопротивления трубы) отыщем, подставляя условие $r_T = b$ в уравнение, определяющее радиус r_T . Будем иметь:

$$\ln \frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2\sigma_T} p_{\text{пр}} \quad \Rightarrow \quad p = \frac{2\sigma_T}{\sqrt{3}} \ln \frac{b}{a} \quad .$$

Распределения напряжений по толщине стенки цилиндра в упругом (а), упругопластическом (б) и предельном состояниях (в) показаны на рис. 8.13.

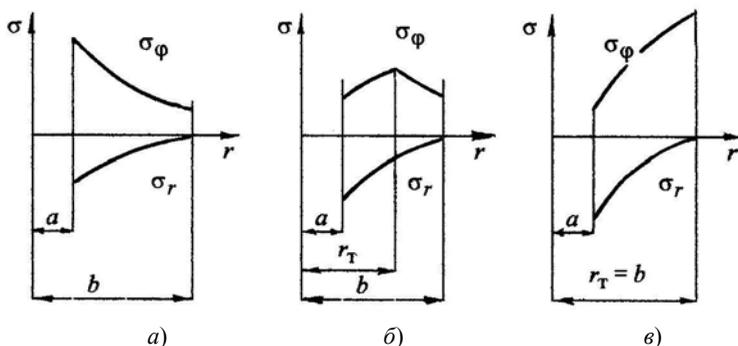


Рис. 8.13

8.5. Толстостенная сфера под действием внутреннего давления

Вследствие центральной симметрии рассматриваемой задачи (r, θ, φ – сферические координаты) угловые деформации $\gamma_{r\varphi}, \gamma_{\varphi\theta}, \gamma_{\theta r}$ и касательные напряжения $\tau_{r\varphi}, \tau_{\varphi\theta}, \tau_{\theta r}$ равны нулю, а линейные деформации $\epsilon_\theta, \epsilon_\varphi$ и нормальные напряжения $\sigma_\theta, \sigma_\varphi$ попарно равны между собой.

Напряжения σ_r и σ_φ при сравнительно небольших значениях внутреннего давления p определяются известными формулами теории упругости:

$$\sigma_r = \frac{pa^3}{b^3 - a^3} \left(1 - \frac{b^3}{r^3} \right),$$

$$\sigma_\varphi = \frac{pa^3}{b^3 - a^3} \left(1 + \frac{b^3}{r^3} \right),$$

где a и b – внутренний и внешний радиусы сферы.

Первые пластические деформации появятся на внутренней поверхности сферы, поскольку интенсивность напряжений

$$\sigma_i = \sigma_\varphi - \sigma_r = \frac{3}{2} \cdot \frac{pa^3}{b^3 - a^3} \cdot \frac{b^3}{r^3}$$

принимает максимальные значения при $r = a$.

Давление p_T , при котором появятся первые пластические деформации, определится соотношением

$$\frac{3}{2} \cdot \frac{pa^3}{b^3 - a^3} \cdot \frac{b^3}{a^3} = \sigma_T \Rightarrow p_T = \frac{2\sigma_T}{3} \left(1 - \frac{a^3}{b^3} \right).$$

При давлении $p > p_T$ пластически деформированный материал будет занимать область $a \leq r \leq r_T$, где радиус r_T , являющийся границей раздела упругой и пластической областей, подлежит определению.

Напряжения в упругой области при $r_T \leq r \leq b$ будут определяться представленными ранее формулами, но с заменой радиуса a и давления p на r_T и q , где q – давление (радиальное напряжение) на границе раздела, также подлежащее определению. Рассматривая q как нагрузку, при которой пластическая деформация имеет место при $r = r_T$ (аналог формулы для давления p_T), имеем:

$$q = \frac{2\sigma_T}{3} \left(1 - \frac{r_T^3}{b^3} \right).$$

Будем считать, что материал сферы не имеет упрочнения. Напряжения в пластической области σ_r^p и σ_φ^p в этом случае должны удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d\sigma_r^p}{dr} + 2 \frac{\sigma_r^p - \sigma_\varphi^p}{r} = 0$$

и условию пластичности

$$\sigma_{\phi}^p - \sigma_r^p = \sigma_T \quad .$$

Совместное решение этих двух уравнений с выполнением граничного условия при $r = a$ позволяет получить:

$$\begin{aligned}\sigma_r^p &= 2\sigma_T \ln \frac{r}{a} - p \quad , \\ \sigma_{\phi}^p &= \sigma_T \left(1 + 2 \ln \frac{r}{a} \right) - p \quad .\end{aligned}$$

Для определения неизвестного радиуса r_T используем условие непрерывности радиальных напряжений на границе раздела упругой и пластической областей при $r = r_T$:

$$\sigma_r^e = \sigma_r^p \Rightarrow -q = \sigma_r^p \Rightarrow -\frac{2}{3}\sigma_T \left(1 - \frac{r_T^3}{b^3} \right) = 2\sigma_T \cdot \ln \frac{r_T}{a} - p \quad .$$

После несложных преобразований получаем уравнение, определяющее радиус r_T :

$$\ln \frac{r_T}{a} - \frac{1}{3} \cdot \frac{r_T^3}{b^3} = \frac{p}{2\sigma_T} - \frac{1}{3} \quad .$$

Предельное состояние сферы достигается, когда пластическая область распространится на все сечение. Соответствующее предельное внутреннее давление $p_{\text{пр}}$ отыщем, подставляя условие $r_T = b$ в уравнение, определяющее радиус r_T . Будем иметь:

$$p_{\text{пр}} = 2\sigma_T \ln \frac{b}{a} \quad .$$

8.6. Упругопластическое состояние равномерно вращающегося сплошного диска постоянной толщины

Распределение упругих напряжений в сплошном диске в соответствии с решением теории упругости имеет вид:

$$\begin{aligned}\sigma_r &= \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) , \\ \sigma_\varphi &= \frac{\rho \omega^2 b^2}{8} \left[3 + \nu - (1 + 3\nu) \frac{r^2}{b^2} \right] , \\ \sigma_z = \tau_{r\varphi} = \tau_{\varphi z} = \tau_{zr} &= 0 .\end{aligned}$$

В приведенных соотношениях ρ – плотность материала; ω – угловая скорость вращения; b – внешний радиус диска. Распределение напряжений показывает, что $\sigma_\varphi \geq \sigma_r > 0$ и что опасной точкой является центр диска.

Определим угловую скорость ω_T , при которой в центре диска появляются первые пластические деформации. Условие пластичности Треска – Сен-Венана $\tau_{\max} = \tau_T$ в данной задаче переходит в условие $\sigma_\varphi = \sigma_T$ ($\tau_{\max} = \sigma_\varphi / 2$, $2\tau_T = \sigma_T$). Можем записать:

$$\sigma_\varphi \Big|_{r=0} = \sigma_T \Rightarrow \frac{\rho \omega_T^2 b^2}{8} (3 + \nu) = \sigma_T \Rightarrow \omega_T^2 = \frac{8\sigma_T}{(3 + \nu)\rho b^2} .$$

Отметим, что использование условия пластичности Мизеса – Генки приводит к тому же результату, но с более сложными преобразованиями.

При угловой скорости $\omega > \omega_T$ пластически деформированный материал будет занимать область $0 \leq r \leq r_T$, где радиус r_T , являющийся границей раздела упругой и пластической областей, подлежит определению.

Будем считать, что материал диска не имеет упрочнения. Напряжения в пластической области σ_r^p и σ_ϕ^p в этом случае должны удовлетворять дифференциальному уравнению

$$\frac{d\sigma_r^p}{dr} + \frac{\sigma_r^p - \sigma_\phi^p}{r} + \rho\omega^2 r = 0$$

и условию пластичности

$$\sigma_\phi^p = \sigma_T \quad .$$

Совместное решение этих двух уравнений позволяет получить:

$$\frac{d}{dr}(r\sigma_r^p) = \sigma_T - \rho\omega^2 r^2 \quad \Rightarrow \quad \sigma_r^p = \sigma_T - \frac{1}{3}\rho\omega^2 r^2 \quad .$$

Постоянная интегрирования C принята равной нулю, поскольку напряжение σ_r^p должно быть конечным в центре диска при $r=0$.

Таким образом, распределение напряжений в пластической области представляется соотношениями:

$$\begin{aligned} \sigma_r^p &= \sigma_T - \frac{1}{3}\rho\omega^2 r^2 \quad , \\ \sigma_\phi^p &= \sigma_T \quad . \end{aligned}$$

Перейдем к определению напряжений в упругой области. Выписанные ранее соотношения не могут быть использованы, поскольку определяют напряжения в сплошном диске, тогда как при угловой скорости $\omega > \omega_T$ упругая область имеет форму кольца (диска с отверстием). Воспользуемся общим решением упругой задачи о вращающемся диске с отверстием в форме:

$$\sigma_r^e = A - \frac{B}{r^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \quad ,$$

$$\sigma_\varphi^e = A + \frac{B}{r^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r^2 \quad .$$

Постоянные A и B и неизвестный еще радиус r_T , являющийся границей раздела упругой и пластической областей, определим из граничного условия на внешней поверхности диска и условий непрерывности напряжений на границе раздела при $r = r_T$. Будем иметь:

$$\sigma_r^e \Big|_{r=b} = 0 \quad \Rightarrow \quad A - \frac{B}{b^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 = 0 \quad ,$$

$$\sigma_r^e = \sigma_r^p \quad \Rightarrow \quad A - \frac{B}{r_T^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 r_T^2 = \sigma_T - \frac{1}{3} \rho \omega^2 r_T^2 \quad ,$$

$$\sigma_\varphi^e = \sigma_\varphi^p \quad \Rightarrow \quad A - \frac{B}{r_T^2} - \frac{1+3\nu}{8} \rho \omega^2 r_T^2 = \sigma_T \quad .$$

Решая совместно второе и третье уравнения выписанной системы, получим:

$$A = \sigma_T + \frac{1+3\nu}{12} \rho \omega^2 r_T^2 \quad ,$$

$$B = \frac{1+3\nu}{24} \rho \omega^2 r_T^4 \quad .$$

Подставляя найденные значения постоянных A и B в первое уравнение системы, получим соотношение, связывающее радиус r_T с угловой скоростью вращения диска ω :

$$\sigma_T + \frac{1+3\nu}{12} \rho \omega^2 r_T^2 - \frac{1+3\nu}{24} \rho \omega^2 \frac{r_T^4}{b^2} - \frac{3+\nu}{8} \rho \omega^2 b^2 = 0$$

или, после преобразований

$$r_T^4 - 2b^2 r_T^2 - \frac{24b^2}{1+3\nu} \left[\frac{\sigma_T}{\rho\omega^2} - \frac{b^2(3+\nu)}{8} \right] = 0 .$$

Предельное состояние диска достигается, когда пластическая область распространится на все сечение. Соответствующее значение предельной угловой скорости вращения диска $\omega_{\text{пр}}$ отыщем, подставляя условие $r_T = b$ в уравнение, определяющее радиус r_T :

$$b^4 - 2b^4 = \frac{24b^2}{1+3\nu} \left[\frac{\sigma_T}{\rho\omega_{\text{пр}}^2} - \frac{b^2(3+\nu)}{8} \right] \Rightarrow \omega_{\text{пр}}^2 = \frac{3\sigma_T}{\rho b^2} .$$

Распределение напряжений в предельном состоянии будет иметь вид (рис. 8.14):

$$\sigma_r^p = \sigma_T \left(1 - \frac{r^2}{b^2} \right) , \quad \sigma_\phi^p = \sigma_T .$$

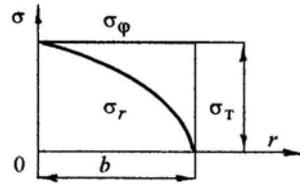


Рис. 8.14

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОЛЗУЧЕСТИ

9. Ползучесть металлов при одноосном напряженном состоянии

9.1. Кривые ползучести. Описание кривых ползучести

Ползучесть характеризуется изменением во времени деформаций и напряжений. Одну сторону этого явления - изменение деформаций – называют простым последствием или собственно ползучестью, другую – изменение напряжений – релаксаций.

Для определения аналитических зависимостей, описывающих ползучесть, используются результаты растяжения стандартных образцов при постоянной нагрузке и заданной температуре в течение всего времени испытания. По результатам испытаний в координатах «деформация ε – время t » строятся так называемые кривые ползучести или кривые простого последствия.

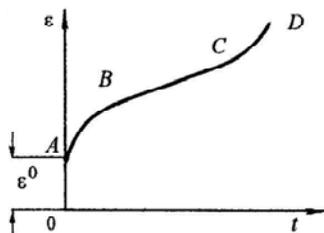


Рис. 9.1

Кривая ползучести (типичный вид) схематически представлена на рис. 9.1. Отрезком OA представлена начальная или мгновенная деформация ε^0 . В зависимости от величины приложенной нагрузки она может быть упругой или упругопластической.

На кривой ползучести различают три участка. Участок AB представляет первую или неустановившуюся стадию ползучести. Деформация здесь протекает с неравномерной, все время уменьшающейся скоростью.

Далее следует участок BC , представляющий собой вторую, или установившуюся стадию ползучести. Здесь скорость ползучести постоянна и при этом минимальна. Продолжительность второй стадии обычно значительно больше, чем первой, но это зависит от материала, температуры испытания и величины приложенного напряжения.

Наконец, участок CD или третья стадия ползучести (стадия разрыва), характеризуется увеличением скорости деформации.

Испытание заканчивается либо хрупким изломом вблизи точки C , либо вязким разрушением в точке D , сопровождаемым образованием шейки. Предполагается, что увеличение скорости деформации в третьей стадии вызвано повышением напряжения, которое, в свою очередь, обусловлено уменьшением площади поперечного сечения за счет образования шейки. Однако это утверждение справедливо лишь для чистых металлов, и для них действительно при испытаниях при постоянном напряжении ускоренная ползучесть отсутствует вплоть до разрушения (при испытаниях при постоянной нагрузке третья стадия имеет место).

В настоящее время установлено, что для сложных сплавов, работающих при высоких температурах, приведенное выше утверждение недостаточно. Увеличение скорости ползучести в случае отсутствия шейки (при сравнительно малых деформациях) связывается с образованием трещин, которые развиваются в материале и вызывают его «разрыхление». Это явление по своему эффекту эквивалентно уменьшению площади поперечного сечения образца.

Отметим, что с увеличением температуры ($T_1 < T_2 < T_3$) и напряжения ($\sigma_1 < \sigma_2 < \sigma_3$) скорость деформации ползучести возрастает, а продолжительность второй стадии уменьшается (рис. 9.2).

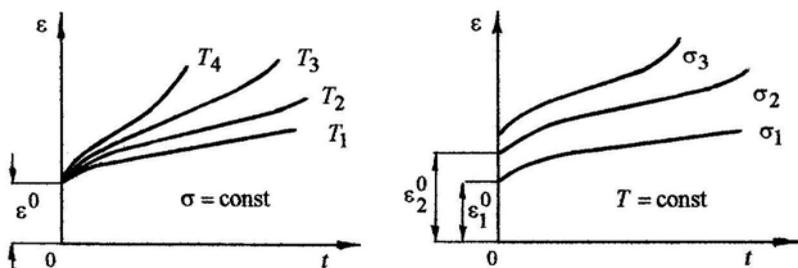


Рис. 9.2

Если при испытании образца на ползучесть в некоторый момент времени произвести его разгрузку, то после скачкообразного уменьшения длины образца на величину упругой деформации σ/E будет происходить дальнейшее медленное сокращение его длины. Это явление носит название обратной ползучести или обратного последствия.

Основная задача, которая ставилась при первых исследованиях ползучести и которая сохранила свою актуальность до настоящего времени – экстраполяция полученных экспериментальных данных на большие интервалы изменения параметров опыта (температур, напряжений и т.д.). Очевидно, что это можно сделать, имея соответствующие аналитические зависимости, полученные либо из обобщения достаточного числа экспериментальных данных (эмпирические формулы), либо построенные на механизмах, объясняющих явление ползучести.

Из ранних исследователей ползучести конструкционных материалов нужно отметить Бейли (Vaily) (работы 1929 – 1935 г.г.), который предложил следующую эмпирическую зависимость для описания установившейся ползучести:

$$\dot{\epsilon} = B\sigma^n ,$$

где B , n – постоянные материала при данной температуре.

Из приведенной формулы следует, что $\lg \dot{\epsilon} = \lg B + n \lg \sigma$, т.е. между логарифмом скорости установившейся ползучести и логарифмом напряжения существует линейная зависимость.

Определение постоянных B , n проводится следующим образом. Имея ряд кривых ползучести, полученных для данного материала при определенной температуре и разных напряжениях, находят значения минимальных скоростей деформаций (скоростей установившейся ползучести), соответствующих заданным напряжениям. Результаты представляются точками в координатах $\lg \sigma - \lg \dot{\epsilon}^c$, по которым проводится прямая линия, наименее уклоняющаяся от этих точек (рис. 9.3).

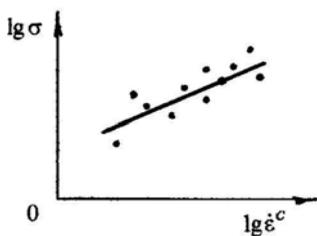


Рис. 9.3

Взяв координаты двух точек на построенной прямой, можем на основании логарифмической зависимости записать два уравнения для определения двух неизвестных B , n . Отметим, что показатель ползучести n оказывается довольно большим: для сталей он меняется в интервале от 3 до 8, а иногда и больше.

Рассмотренная степенная зависимость $\dot{\epsilon} = B\sigma^n$ может быть переписана в несколько иной форме, а именно:

$$\dot{\epsilon} / \dot{\epsilon}_n = (\sigma / \sigma_n)^n ,$$

где $\dot{\epsilon}_n$ – постоянная, имеющая размерность скорости деформации; σ_n – постоянная, имеющая размерность напряжения. Очевидно, что

$$B = \dot{\epsilon}_n \sigma_n^{-n} .$$

Введение двух постоянных $\dot{\epsilon}_n$ и σ_n вместо одной B позволяет иметь в своем распоряжении возможность выбора масштаба.

Вместо степенной зависимости часто пользуются экспоненциальной зависимостью

$$\dot{\epsilon} / \dot{\epsilon}_e = \exp(\sigma / \sigma_e)$$

или зависимостью с гиперболическим синусом, введенной Надаи (1937 г.):

$$\dot{\epsilon} / \dot{\epsilon}_e = A \operatorname{sh}(\sigma / \sigma_e) ,$$

где A , $\dot{\epsilon}_e$, σ_e – характеристики материала при данной температуре.

Имеются и более сложные зависимости, содержащие комбинации степенных и показательных функций. Однако следует заметить, что все эти уравнения носят, в общем, эмпирический характер, поэтому выбор того или иного уравнения при построении механической теории ползучести не имеет принципиального значения. Основное соображение, которым при этом руководствуются – удобство и простота использования.

Имеются многочисленные попытки составления уравнений, описывающих первую и вторую стадии ползучести в целом. Некоторые из этих уравнений подобраны эмпирическим путем, некоторые следуют из тех или иных моделей ползучести. Уравнения, опи-

сывающие кривые ползучести, можно условно разделить на две группы.

В основу уравнений, относящихся к первой группе, положена гипотеза, утверждающая, что кривые ползучести в координатах «деформация ползучести ε^c – время t », где $\varepsilon^c = \varepsilon - \varepsilon_0$, при разных напряжениях и одинаковых температурах геометрически подобны на первых двух участках и могут быть представлены соотношением типа

$$\varepsilon^c = Q(\sigma)\Omega(T, t) \quad .$$

Вторая группа описывает кривые ползучести более сложной зависимостью, предполагающей их геометрическое подобие на первых участках:

$$\varepsilon^c = Q_1(\sigma, T)\Psi(t) + Q_2(\sigma, T)t \quad ,$$

где Q_1 и Q_2 – функции напряжения и температуры; Ψ – монотонно и быстро убывающая функция времени. Первое слагаемое описывает стадию неустановившейся ползучести, второе – стадию установившейся ползучести при постоянной скорости деформации. При малых значениях времени t вторым слагаемым в представленном уравнении можно пренебречь; при больших значениях t процесс ползучести определяется только вторым слагаемым.

Зависимости второй группы описывают ползучесть более точно, но зависимости первой – проще. В частности, принимая при постоянной температуре функцию $Q(\sigma)$ степенной, будем иметь:

$$\varepsilon^c = \sigma^n \Omega(t) \quad ,$$

причем при $t = 0$ функция $\Omega(t) = 0$. Дифференцируя соотношение для деформации ползучести, получим:

$$\xi^c = \sigma^n B(t) \quad .$$

Графики функций $\Omega(t)$ и $B(t)$ показаны на рис. 9.4.

В стадии установившейся ползучести скорость деформации минимальна и постоянна. Поэтому $B(t) = B = a = \text{const}$ и $\Omega(t) = C + Bt$.

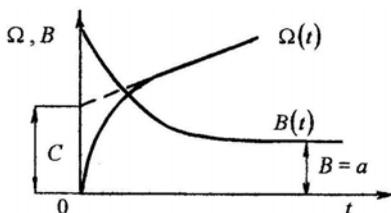


Рис. 9.4

В общем случае функцию $\Omega(T, t)$ приближенно можно записать в виде произведения функций времени и температуры. Одним из предложений, достаточно широко используемым, является следующее:

$$\Omega(T, t) = \Omega_1(t) \exp(-Q/R\vartheta) \quad ,$$

где Q – энергия активации ползучести; R – универсальная газовая постоянная; ϑ – абсолютная температура.

Для зависимостей второй группы функция Q_2 представляет собой скорость деформации ползучести во второй стадии и может быть взята при постоянной температуре, например, в виде степенной зависимости; функция Q_1 обычно берется в форме такой же зависимости. Функция времени Ψ чаще всего представляется степенной зависимостью типа t^m (показатель степени m для сталей равен примерно $1/3$, но может меняться в ту или другую сторону).

Какие-либо надежные формулы для описания третьего участка кривых ползучести отсутствуют. Начало третьего участка предшествует разрушению; обычно выход материала на третий участок считают недопустимым, поэтому в расчетах на ползучесть его не рассматривают.

9.2. Пределы ползучести, длительная прочность

Кривые ползучести являются основой расчетов на ползучесть. Для сопоставления сопротивления различных материалов ползучести вводится условная характеристика – условный предел ползуче-

сти. Будем различать условный предел ползучести по допускаемой деформации и условный предел ползучести по допускаемой скорости установившейся ползучести.

Под условным пределом ползучести по допускаемой деформации будем понимать напряжение, при котором деформация ползучести за заданный промежуток времени достигает величины, установленной техническими условиями. Из приведенного определения следует, что для данного материала предел ползучести зависит от температуры и времени испытания, а также и от принятой величины допускаемой деформации. Заданный промежуток времени обычно принимается равным сроку службы детали. Допускаемая деформация выбирается, исходя из условий нормальной эксплуатации детали за срок ее службы $t_{\text{сл}}$. Ориентировочные данные о величинах суммарной допускаемой деформации ползучести $[\varepsilon]$ для некоторых элементов конструкций приведены в табл. 9.1.

Таблица 9.1

Элемент конструкции	Срок работы, ч	$[\varepsilon]$
Турбинные диски	10^5	0,0001
Паропроводы	10^5	0,003
Цилиндры паровых турбин	10^5	0,001

Расчетное уравнение в рассматриваемом случае имеет вид:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \dot{\varepsilon}^c \cdot t_{\text{сл}} \leq [\varepsilon] \quad .$$

Пренебрегая стадией неустановившейся ползучести и вводя степенной закон для скорости деформации установившейся, для определения условного предела ползучести по допускаемой деформации получим уравнение:

$$([\sigma]/E) + a [\sigma]^n t_{\text{сл}} = [\varepsilon] \quad .$$

В случае, когда и начальная деформация, и деформация в стадии неустановившейся ползучести малы сравнительно с деформацией ползучести в установившейся стадии, при определении предела ползучести исходят из наибольшей допускаемой величины скорости деформации установившейся ползучести.

Под условным пределом ползучести по допускаемой скорости деформации установившейся ползучести $[\dot{\epsilon}^c]$ будем понимать напряжение, при котором скорость деформации ползучести равна определенной величине, установленной техническими условиями. Величина предела ползучести в таком определении зависит от температуры и принятой величины скорости деформаций. Ориентировочные данные о значениях $[\dot{\epsilon}^c]$ для некоторых элементов конструкций приведены в табл. 9.2.

Таблица 9.2

Элемент конструкции	$[\dot{\epsilon}^c]$, 1/ч
Турбинные диски	10^{-9}
Болты, фланцы, цилиндры паровых турбин	10^{-8}
Трубы пароперегревателей	$10^{-6} - 10^{-5}$

При степенном законе для скорости деформации установившейся ползучести расчетное уравнение имеет вид:

$$\dot{\epsilon}^c = a\sigma^n \leq [\dot{\epsilon}^c] .$$

Для определения условного предела ползучести по допускаемой скорости деформации установившейся ползучести получаем:

$$[\sigma] = (\dot{\epsilon}^c / a)^{1/n} .$$

В теории ползучести дополнительно вводится понятие о длительной прочности, как о напряжении, вызывающем разрушение за данный срок службы. Обычно зависимость предела длительной прочности от времени до разрушения при данной температуре представляется графически в логарифмических координатах $\lg \sigma - \lg t$ (рис. 9.5).

С увеличением температуры и заданного промежутка времени до разрушения, величина предела длительной прочности снижается (рис. 9.5, а).

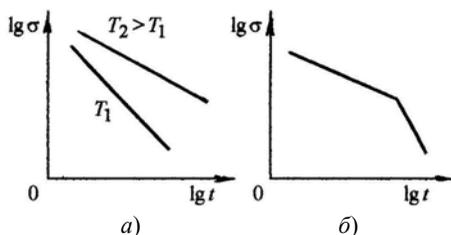


Рис. 9.5

Перелом на кривой длительной прочности (рис. 9.5, б) обычно наблюдается при достаточно длительных испытаниях и соответствует переходу от вязкого разрушения с образованием шейки к хрупкому без образования шейки.

При расчетах по пределам ползучести необходимо убедиться, что они не превосходят допускаемого напряжения, представляющего некоторую долю предела длительной прочности.

9.3. Релаксация напряжений

Все сведения, которые были приведены ранее, относятся к одному проявлению ползучести: изменению (увеличению) деформации растягиваемого образца при постоянной нагрузке или постоянном напряжении. В реальных условиях приходится иметь дело с явлениями более сложного характера, проявляющимися, например, в случае, когда элемент, находящийся в условиях ползучести, связан с другими элементами, которые деформируются упруго. В этом случае даже при постоянной внешней нагрузке усилия перераспределяются между элементами системы во времени.

Рассмотрим стержень, соединенный с пружиной жесткости c . Примем, что в начальный момент времени стержню сообщено удлинение ε_0 , причем напряжение в нем будет равно σ_0 . Удлинение пружины при этом составит σ_0/c . Закрепив оба конца стержня (рис. 9.6) будем иметь, что сумма удлинений образца и пружины во времени остается постоянной:

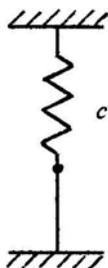


Рис. 9.6

$$\varepsilon_0 + \frac{\sigma_0}{c} = \varepsilon + \frac{\sigma}{c} = \text{const} .$$

Если материал стержня находится в состоянии ползучести, то удлинение его сопровождается уменьшением напряжения, поскольку энергия системы возрастать не может. Этот процесс уменьшения напряжения во времени называют релаксацией. Если жесткость пружины мала, то перемещение ее конца, связанное с удлинением образца вследствие ползучести, мало сказывается на величине силы натяжения пружины. В этом случае можно считать,

что напряжение в образце остается постоянным и, тем самым, осуществляется схема испытания на ползучесть (простое последствие).

Другим крайним случаем будет тот, когда жесткость пружины очень велика и полная длина образца остается без изменения. В этом случае

$$\varepsilon_0 = \varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} + \varepsilon^c = \text{const} .$$

Здесь имеем так называемую «чистую» релаксацию.

Процесс «чистой» релаксации представляет собой ползучесть при убывающем напряжении в образце, которая происходит таким образом, что прирост деформаций ползучести компенсируется уменьшением упругой деформации образца за счет уменьшения напряжения. Отметим, что деформация ползучести при релаксации не может увеличиваться беспредельно: если деформация ползучести достигнет величины деформации, возникшей при нагружении ($\varepsilon^c = \varepsilon_0$), то напряжение в стержне становится равным нулю (стержень разгружается).

Типичным примером схемы, приведенной на рис. 9.6, может служить фланцевое соединение трубопровода. Болты затягиваются с некоторым предварительным усилием, которое уменьшается со временем. Удлинение болта и усилие в нем связаны соотношением типа $\varepsilon + \sigma/c = \text{const}$, поскольку фланцы не могут считаться абсолютно жесткими, однако определение жесткости фланцев в этом случае затруднительно из-за неравномерности распределения сжимающих напряжений в них.

Итак, можем считать, что релаксация напряжений типична для элементов конструкций, подверженных действию постоянных нагрузок в течение длительного времени, когда возможность деформирования какого-либо элемента в условиях ползучести ограничена стеснением его со стороны других элементов, способных деформироваться упруго.

Эксперименты на релаксацию проводятся уже достаточно давно, однако технические трудности проведения таких испытаний значительно больше, чем трудности испытаний на ползучесть.

Возникает принципиальный вопрос: можно ли рассчитать процесс релаксации, располагая характеристиками ползучести, полученными при стандартных испытаниях на ползучесть (простое последствие). Другими словами, возможно ли построение кривой релаксации с помощью полученных из опыта кривых ползучести? Положительный ответ можно дать, только сформулировав теорию ползучести, т.е. построив такие уравнения, которые могли бы описать ползучесть при переменных напряжениях.

9.4. Ползучесть при сжатии

Испытания на ползучесть при сжатии представляют бóльшую техническую трудность, чем испытания при растяжении. При использовании длинных образцов здесь значительную роль играют начальные неправильности и эксцентриситет приложения нагрузки, влияние которых в процессе испытания на растяжение уменьшается, а при испытании на сжатие возрастает, поскольку начальные прогибы растут и эксцентриситет увеличивается. Соответственно, если результат испытания при растяжении мало зависит от начальных неправильностей и неточности в приложении нагрузки, то при испытании на сжатие напряженное состояние может меняться существенно, что затрудняет получение кривых ползучести.

Основной целью исследований ползучести при сжатии, как правило, является вопрос о соответствии характеристик ползучести при растяжении и сжатии и возможности замены одних испытаний (например, на растяжение) на другие (на сжатие). Приведем некоторые результаты для разных групп материалов.

Для жаропрочных хромоникелевых сплавов¹ общий вывод состоит в том, что при одинаковом напряжении абсолютная величина скорости установившейся ползучести при растяжении и при сжатии одинакова в пределах погрешности эксперимента. Обнаруживается разница на начальных участках кривых ползучести, которая может быть отнесена на счет экспериментальных ошибок и неустойчивости характеристик ползучести на первой стадии. Третья стадия ползучести наблюдается и при сжатии, причем начало ее соответствует примерно той же величине деформации, что и при

¹ Салли А. Ползучесть металлов и жаропрочные сплавы. М.: Оборонгиз, 1953.

растяжении, однако если при растяжении скорость ползучести непрерывно увеличивается вплоть до разрыва, при сжатии имеет место ее волнообразное изменение.

При изучении ползучести алюминиевых сплавов при сжатии¹ получено, что разница между кривыми ползучести при растяжении и при сжатии не выходит за пределы полосы разброса.

Для магниевых сплавов ползучесть при растяжении идет значительно быстрее, чем при сжатии, однако отметим, что для них и при нормальных температурах обычные кривые деформирования при растяжении и сжатии существенно различаются.

Малоизученным на настоящее время является вопрос о ползучести при переменном нагружении, когда меняется знак нагрузки, т.е. при реверсивном нагружении.

9.5. Кратковременная ползучесть

При решении практических задач расчета на ползучесть и длительную прочность приходится иметь дело с изделиями, предназначенными для самых разнообразных длительностей службы. Узлы паровых турбин проектируются в расчете на длительность эксплуатации, измеряемую годами и даже десятками лет (длительная ползучесть), а для элементов ракетных двигателей требуется гарантировать прочность при действии нагрузок и температур в течение нескольких минут или даже секунд (кратковременная ползучесть). В первом случае нагрузки и температуры должны быть относительно невысоки, во втором можно допустить значительные нагрузки при более высоких температурах. Поведение материала в этих случаях существенно отличается, соответственно и расчетные методы оказываются неодинаковыми.

Можно ввести следующую довольно условную классификацию областей ползучести:

- длительная ползучесть – месяцы и годы;
- ползучесть средней длительности – часы и дни;
- кратковременная ползучесть – секунды и минуты.

¹ Торшенов Н.Г. Ползучесть алюминиевого сплава Д-16Г при сжатии // ПМТФ. 1961. № 6.

Часто длительную и ползучесть средней длительности не различают.

Кратковременной¹ будем называть ползучесть, происходящую в таких условиях, когда за время, не превышающее 20 ÷ 30 минут, накапливается деформация ползучести либо сравнимая по величине с мгновенной деформацией, либо превышающая ее. Приведенное определение по существу характеризует не столько длительность процесса, сколько рабочие диапазоны напряжений и температур, поскольку фиксация точных границ для деформации и времени службы затруднительна. Отметим некоторые особенности кратковременной ползучести на примере типичной кривой, построенной для стали ЭП-22 при температуре $T = 900^{\circ}\text{C}$ при напряжении 30-40 кг/мм² (рис. 9.7):

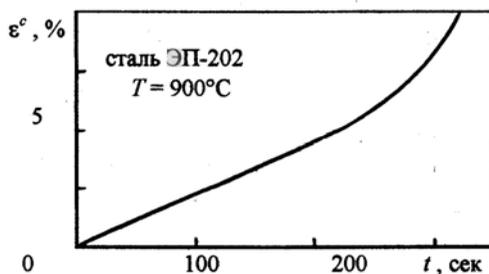


Рис. 9.7

- первый участок на кривой отсутствует и с самого начала ползучесть происходит с постоянной скоростью;
- при малых деформациях (порядка 1 ÷ 2 %) скорость ползучести зависит практически только от текущих значений напряжения и температуры (не зависит от предыстории);
- анизотропия материала не играет существенной роли (при умеренных температурах и напряжениях скорость ползучести существенно зависит от текстуры материала);
- разрушение образцов при кратковременной ползучести, как правило, происходит при постоянной величине равномерного удлинения, т.е. не зависит от температуры и напряжения. Разрушению предшествует появление третьих участков на кривых ползучести. Разрушение не связано с изменением площади поперечного

¹ Работнов Ю.Н., Милейко С.Т. Кратковременная ползучесть. М.: Наука. 1970.

сечения и происходит вследствие развития трещин по границам зерен.

Отмеченные особенности протекания процесса кратковременной ползучести позволяют описывать ее следующими уравнениями:

- для скорости деформации

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0(\sigma) + \dot{\varepsilon}^c(\sigma, T) \quad ;$$

- для деформации

$$\varepsilon = \varepsilon_0(\sigma) + \int_0^t \dot{\varepsilon}^c(\sigma, T) dt \quad ,$$

где $\varepsilon_0(\sigma) = (\sigma/E) + g(\sigma)$ – мгновенная упругопластическая деформация, определяемая диаграммой мгновенного растяжения, а $\dot{\varepsilon}_0(\sigma)$ – ее скорость; $\dot{\varepsilon}^c(\sigma, T)$ – скорость деформации ползучести.

Отметим, что приведенные выше особенности кратковременной ползучести наблюдаются не у всех материалов. Медь и некоторые медные сплавы, например, при любых напряжениях и температурах обнаруживают участок неустановившейся ползучести.

Для практических расчетов скорость деформации ползучести нужно представить в некоторой аналитической форме. Как уже отмечалось, неизбежный разброс опытных данных делает приемлемыми различные аналитические аппроксимации закона ползучести, и при выборе той или иной аппроксимации можно руководствоваться соображениями удобства ее применения при расчетах. В большинстве случаев используются две зависимости:

экспоненциальная: $\dot{\varepsilon}^c(\sigma, T) = \varepsilon_e \exp(\sigma/\sigma_e)$, где ε_e, σ_e – постоянные материала при данной температуре. Соотношение непригодно для малых значений σ , так как при $\sigma = 0$ имеем скорость ползучести, отличную от нуля. Поскольку в прочности область малых напряжений интереса не представляет, формулой можно пользоваться, принимая соответствующие меры к тому, чтобы избежать формальных противоречий в точках, где $\sigma = 0$;

степенная: $\dot{\varepsilon}^c(\sigma, T) = \varepsilon_n (\sigma / \sigma_n)^n$. Здесь фигурируют три постоянные ε_n , σ_n , n , но постоянную ε_n можно фиксировать произвольно, принимая ее, например, за единицу масштаба.

Зависимость постоянных ползучести от температуры обычно задается графически или в виде таблиц. В некоторых случаях, например для титановых сплавов, показатель n степенного закона меняется относительно слабо в широком диапазоне температур. Здесь удобно использовать одно и то же значение n , компенсируя вносимую ошибку надлежащим выбором постоянной σ_n , поскольку расчет при постоянном показателе n существенно проще.

Для кратковременной ползучести имеет большое значение точность определения мгновенных характеристик материала. Употребляя выражение “мгновенная” деформация, упругая или упруго-пластическая, нужно оговорить его условный смысл. Мгновенной диаграммой деформирования материала $\varepsilon_0(\sigma) = (\sigma / E) + g(\sigma)$ будем называть диаграмму, снятую с такой скоростью, при которой влияние сопутствующей деформированию ползучести несущественно. Эту мгновенную диаграмму никак не нужно смешивать с динамической диаграммой, получаемой при достаточно больших скоростях деформирования, реализуемых путем ударного нагружения.

Для построения диаграмм мгновенного деформирования при высокой температуре рекомендуется следующая методика.

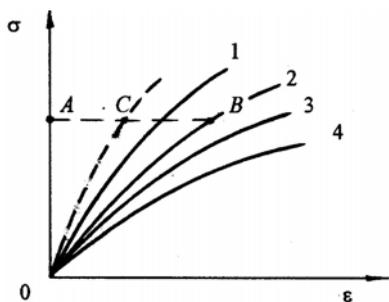


Рис. 9.8

Проводится серия испытаний на растяжение с постоянной скоростью изменения напряжения $\dot{\sigma} = \text{const}$. На рис. 9.8 схематически показаны такие кривые для разных значений $\dot{\sigma}$, причем $\dot{\sigma}_1 > \dot{\sigma}_2 > \dot{\sigma}_3 \dots$ (кривая 1 соответствует скорости $\dot{\sigma}_1$ и т. д.).

Рассмотрим одну из этих кривых, например, кривую, соответствующую скорости напряжения $\dot{\sigma}_2$. Абсцисса AB некоторой точки B этой кривой к моменту, когда напряжение достигло величины

σ , представляет собой полную деформацию ε , состоящую из мгновенной упругопластической деформации AC и деформации ползучести CB . Ползучесть имеет место при переменном напряжении $\sigma = \dot{\sigma}_2 t$. Предположим теперь, что из независимых опытов на ползучесть при постоянном напряжении найдено соотношение, определяющее скорость деформации ползучести. Проинтегрировав его при $\sigma = \dot{\sigma}_2 t$, получаем величину CB и, тем самым, находим положение точки C , принадлежащей мгновенной диаграмме деформирования (пунктирная линия). Оказывается, что обрабатывая подобным образом кривые растяжения, снятые даже с сильно различающимися скоростями нагружения (на 3–4 порядка), получим одну и ту же кривую мгновенного деформирования с точностью до естественного индивидуального разброса свойств материала образцов.

Очевидно, что чем больше скорость нагружения, тем меньше сказывается ползучесть и тем ближе фактически снятая на машине опытная кривая к полученной путем перерасчета кривой мгновенного деформирования. Если температура испытания не слишком высока, то кривая растяжения, снятая за 1–2 секунды ($\dot{\sigma} \approx 10 \text{ кг/мм}^2 \cdot \text{с}$), для многих материалов может быть принята за мгновенную кривую.

Сравнение мгновенной кривой (сплошная линия), определенной подобным образом для титанового сплава ВТ-14 при $T = 700 \text{ }^\circ\text{C}$, и обычной машинной диаграммы (пунктир), снятой при постоянной скорости одного из захватов машины, примерно соответствующей

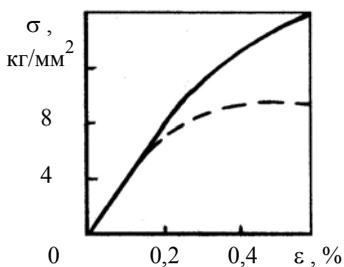


Рис. 9.9

скорости деформации образца 10^{-4} с^{-1} , показано на рис. 9.9. Как следует из сравнения, различие между диаграммами весьма значительно.

Диаграмма мгновенного деформирования существенно зависит от температуры и в общем случае имеет вид:

$$\varepsilon_0(\sigma, T) = (\sigma / E(T)) + g(\sigma, T) \quad .$$

10. Простейшие (одномерные) теории ползучести

10.1. Модели деформируемого тела

Как уже неоднократно отмечалось, явление ползучести, т.е. нарастание деформации нагруженного тела со временем, было известно достаточно давно. Однако учет ползучести при расчетах конструкций не вызывался серьезной необходимостью и первые наблюдения над ползучестью носили качественный характер. Первые исследователи отметили аналогию ползучести с вязким течением жидкости и при попытке описать деформацию твердого тела во времени объединяли свойства вязкости и упругости. Как известно, напряжение и скорость деформации в вязкой жидкости связаны законом вязкости Ньютона $\sigma = 3\eta\dot{\epsilon}$. В упругом теле справедлив закон Гука $\sigma = E\epsilon$ или $\dot{\sigma} = E\dot{\epsilon}$.

Соответствующие механические модели можно представить в виде вязкого  и упругого  элементов. Комбинируя свойства вязкости и упругости в форме соответствующих элементов, можно получить (рис. 10.1):

- тело Максвелла (рис. 10.1, а);
- тело Фойгта (рис. 10.1, б).

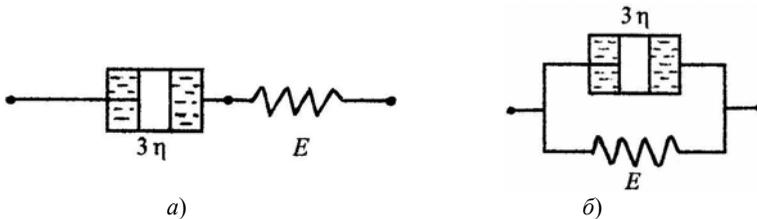


Рис. 10.1

Поведение тела Максвелла описывается уравнением Максвелла

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \frac{\sigma}{3\eta},$$

а поведение тела Фойгта – уравнением Фойгта

$$\sigma = E\varepsilon + 3\eta\dot{\varepsilon} \quad .$$

Рассмотрим тело Максвелла. Из соответствующего уравнения следует, что если напряжение постоянно (простое последствие), то деформация нарастает неограниченно с постоянной скоростью.

Если же считать постоянной деформацию ($\dot{\varepsilon} = 0$ при $t \geq 0$), то для описания релаксации получаем уравнение

$$\dot{\sigma} + (\sigma/\tau) = 0 \quad ,$$

решение которого при начальном условии $\sigma = \sigma_0$ при $t = 0$ имеет вид:

$$\sigma = \sigma_0 \exp(-t/\tau) \quad ,$$

где $\tau = 3\eta/E$ – время релаксации. Полученное соотношение дает закон релаксации напряжения при постоянной деформации (рис. 10.2).

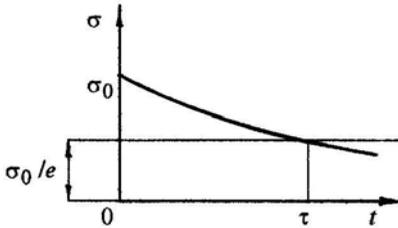


Рис. 10.2

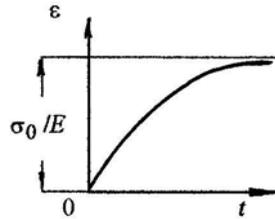


Рис. 10.3

Уравнение Фойгта позволяет получить закон изменения деформации во времени при постоянном напряжении в виде (рис. 10.3):

$$\varepsilon = \frac{\sigma_0}{E} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right] \quad .$$

При постоянной деформации тело Фойгта не релаксирует — напряжение остается постоянным. Время τ в этом случае называется временем запаздывания.

Как видим, тела Максвелла и Фойгта моделируют деформацию и напряжение во времени, однако реальные материалы, как правило, не подчиняются уравнениям Максвелла и Фойгта. Эти уравнения только качественно отражают некоторые стороны сложных процессов деформирования материалов во времени. Стремясь лучше описать эти процессы, часто усложняют модели, соединяя три элемента (тело Кельвина), четыре и т.д., однако это приводит к громоздким математическим решениям и все-таки не позволяет удовлетворительно описать поведение реальных материалов во времени. Поэтому в расчетах деталей машин и элементов конструкций в основном применение получили так называемые технические теории ползучести.

10.2. Технические теории ползучести

Существуют два подхода к объяснению явлений ползучести: физический и механический (или феноменологический), и соответственно – физические и механические (технические) теории ползучести.

Задача механических теорий ползучести состоит в том, чтобы связать измеряемые величины (напряжения, деформации, скорости деформаций, температуру и время) с помощью некоторого уравнения или системы уравнений, носящих универсальный характер. Строя механическую теорию ползучести, необходимо постулировать принципиальную возможность существования таких уравнений, из которых внутренние параметры, характеризующие состояние материала, могут быть исключены, а все характеристики ползучести могут быть найдены из макроэксперимента, т.е. путем измерения механических величин (сил и деформаций). Подобный подход является обычным в механике деформируемого твердого тела и, следуя ему, надлежит на основе опытных данных установить механические уравнения состояния для тела в состоянии ползучести.

Установление механических уравнений состояния является достаточно трудной задачей, поскольку, как уже отмечалось, явление ползучести сложно и зависит от многих факторов. Отметим, что при формулировании уравнений ползучести не следует стремиться

к их наибольшей общности, поскольку различного рода обобщения влекут за собой большие математические трудности при решении конкретных задач. Кроме того, при использовании сложных уравнений возникают трудности в определении различного рода коэффициентов или функций, входящих в эти уравнения, по имеющимся опытным данным. И наконец, для ползучести характерен большой разброс опытных данных, и нет особого смысла рассматривать сложные уравнения, которые будут содержать приближенные (из-за этого разброса) исходные параметры.

При построении теории ползучести прежде всего необходимо решить вопрос о том, какие переменные следует связать между собой, а затем – какова будет аналитическая зависимость между ними. Очевидно, что лучшей теорией будет та, которая наиболее полно согласуется с данными экспериментов. Поскольку в поисках лучшей аналитической зависимости возможны различные исходные предположения, существуют различные варианты теорий ползучести.

Итак, теория ползучести должна дать возможность на основе простейших испытаний материала определить его поведение в случае меняющихся во времени напряжений и деформаций, а также обеспечить определение закона изменения деформаций по заданному закону изменения напряжений и наоборот. В частном случае она должна позволить построить кривые релаксации по серии кривых ползучести.

Теории старения. Теории старения строятся в предположении, что при определенной температуре между деформацией, напряжением и временем существует зависимость типа

$$\Phi(\varepsilon, \sigma, t) = 0 \quad .$$

Принимая, что деформация ползучести определяется соотношением $\varepsilon^c = f(\sigma, t)$ и учитывая только упругую составляющую деформации, получим:

$$\varepsilon = (\sigma / E) + f(\sigma, t) \quad .$$

Как уже отмечалось, для описания деформации ползучести ε^c существует много различных аналитических зависимостей. Одной из них является зависимость типа

$$\varepsilon^c = Q(\sigma)\Omega(T, t) ,$$

предполагающая подобие соответствующих кривых, т.е. возможность их построения по одной кривой умножением ее ординат на некоторую величину, являющуюся функцией времени. Наиболее распространенным является выбор функции $Q(\sigma)$ в виде степенной зависимости. В этом случае при постоянной температуре будем иметь:

$$\varepsilon = (\sigma/E) + \Omega(t)\sigma^n .$$

Один из вариантов теории старения предложен в форме соотношения

$$\varepsilon^c = \psi \sigma ,$$

где $\psi = B \int_0^t \sigma^{n-1} dt$. В этом случае деформации ползучести ε^c представляется зависимостью

$$\varepsilon^c = B\sigma \int_0^t \sigma^{n-1} dt .$$

Однако, полагая $\sigma = \text{const}$ (переходя к кривым ползучести) будем иметь, что $\varepsilon^c = B\sigma^n t$, т.е. действительная кривая ползучести схематизируется прямой линией, что возможно только при развитых деформациях ползучести, когда деформацией, накопленной в период неустановившейся ползучести, можно пренебречь. Для устранения этого недостатка предлагается принять функционал ψ в виде:

$$\psi = \int_0^t B(t) \sigma^{n-1} dt ,$$

где $B(t)$ – убывающая функция времени. Для деформации ползучести соответственно имеем:

$$\varepsilon^c = \sigma \int_0^t B(t) \sigma^{n-1} dt ,$$

откуда в случае простого последствия получаем:

$$\varepsilon^c = \sigma^n \Omega(t) , \quad \Omega(t) = \int_0^t B(t) dt .$$

Несколько иная формулировка теории старения, удобная для расчетов строится на основе представления зависимости между напряжением, деформацией и временем в виде функции $\sigma = \varphi(\varepsilon, t)$. Соответствующие изохронные кривые для различных моментов времени строят по кривым ползучести при постоянных напряжениях (рис. 10.4).

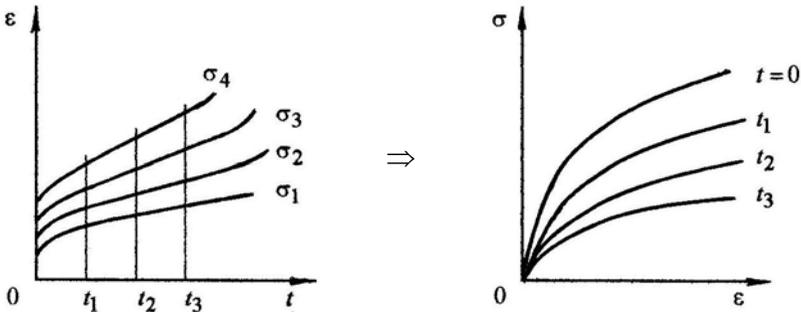


Рис. 10.4

Легко видеть, что при $t = 0$ имеем диаграмму растяжения материала. Построенное семейство кривых позволяет применять непосредственно решения теории пластичности к задачам теории ползуче-

сти, выбирая для каждого момента времени соответствующую кривую $\sigma(\varepsilon)$.

В случае подобия кривых объем расчетов существенно уменьшается, т.к. в этом случае $\sigma = \varphi(\varepsilon)\Omega(t)$.

По теории старения кривые релаксации определяются уравнением

$$\frac{\sigma}{E} + \Omega(t)\sigma^n = \frac{\sigma(0)}{E},$$

где $\sigma(0)/E = \varepsilon(0)$ – начальное удлинение, остающееся постоянным (здесь оно принято упругим). Решая уравнение относительно безразмерного напряжения $\bar{\sigma} = \sigma/\sigma(0)$, можно получить:

$$E\sigma(0)^{n-1}\Omega(t) = (1 - \bar{\sigma})/\bar{\sigma}^n$$

или, вводя безразмерное время $t^* = E\sigma(0)^{n-1}\Omega(t)$,

$$t^* = (1 - \bar{\sigma})/\bar{\sigma}^n.$$

Так как $n > 1$, а t^* с течением времени неограниченно возрастает, то напряжение падает, стремясь со временем к нулю.

В уравнениях теории старения время входит как параметр, и свойства материала как бы изменяются со временем: материал «старее» – этим объясняется происхождение названия теории.

Приведенные соотношения очевидны при постоянных напряжениях и обычно приводят к правильным качественным и удовлетворительным количественным результатам в случаях развитой ползучести при постоянных или слабо меняющихся напряжениях.

Теории течения. Теории течения устанавливают связь между скоростью деформации ползучести, напряжением и временем, т.е. принимается, что при определенной температуре существует зависимость

$$\xi^c = f(\sigma, t) .$$

Одной из распространенных аналитических формулировок этой теории является степенная:

$$\xi^c = B(t)\sigma^n ,$$

где $B(t) = \frac{d}{dt} \Omega(t)$. С учетом наличия упругой деформации скорость полной деформации может быть записана в форме:

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + B(t)\sigma^n .$$

Отметим, что при $B(t) = \text{const}$ и $n = 1$ из полученного уравнения следует уравнение Максвелла.

Закон релаксации в соответствии с теорией течения следует из уравнения

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + B(t)\sigma^n = 0 .$$

Разделяя переменные и интегрируя это уравнение при начальном условии $\sigma|_{t=0} = \sigma(0)$, получим в безразмерном виде:

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{(n-1)\sqrt{1+(n-1)t^*}} .$$

Здесь введены те же обозначения, что и ранее (при рассмотрении процесса релаксации согласно теории старения). Полученное соотношение показывает, что с течением времени напряжение уменьшается, стремясь к нулю.

Теории упрочнения. В теориях упрочнения принимается, что существует функциональная зависимость между напряжением, деформацией ползучести и скоростью деформации ползучести. Как правило, эта зависимость представляется в форме:

$$\xi^c = \frac{f(\sigma)}{g(\varepsilon^c)} .$$

Время здесь в явном виде не содержится — параметром времени является накопленная деформация ползучести.

Согласно записанному уравнению, можно видеть, что с увеличением деформации ползучести скорость деформации при постоянном напряжении уменьшается. Это обстоятельство может быть интерпретировано как упрочнение материала, вызываемое растущей деформацией ползучести – отсюда происходит название рассматриваемой теории.

Функция $g(\varepsilon^c)$ обычно принимается в виде степенной функции

$$g(\varepsilon^c) = (\varepsilon^c)^\alpha , \quad \alpha \geq 0 .$$

Для функции напряжения $f(\sigma)$ предлагаются следующие зависимости: $f(\sigma) = \beta \sigma^\nu$, $f(\sigma) = a(e^{\sigma/b} - 1)$, $f(\sigma) = a e^{\sigma/b}$ и др., где α, β, ν, a, b – постоянные для данного материала при определенной температуре.

Уравнения теорий упрочнения более сложны и их применение к решению задач ползучести связано с большими математическими трудностями.

10.3. Наследственные теории ползучести

Рассмотрим теории, позволяющие описать ползучесть материала в случае одноосного растяжения с учетом истории нагружения. Эти теории носят название наследственных теорий ползучести.

Простейшей из таких теорий, в основе которой лежит принцип наложения (суперпозиции) деформаций, является линейная теория наследственности, предложенная Больцманом и Вольтерра. Форма записи закона линейной теории наследственности Больцмана – Вольтерра определяется следующими соображениями:

- полная деформация тела складывается из мгновенной деформации и из «наследуемой» деформации;

- мгновенная деформация определяется напряжением, действующим в данный момент времени, и связана с ним законом Гука;

- наследуемая деформация определяется следующим образом. Пусть в момент времени τ было приложено напряжение $\sigma(\tau)$, которое действовало в течение времени $d\tau$. Материал сохраняет “воспоминание” об этом напряжении в виде некоторой малой деформации $d\varepsilon$. Величина $d\varepsilon$ пропорциональна напряжению $\sigma(\tau)$, продолжительности его действия $d\tau$ и зависит от времени, протекшего от момента τ до настоящего момента t , т.е. от разности $(t - \tau)$. Чтобы учесть эту зависимость, предполагаем, что $d\varepsilon$ пропорционально некоторой функции $K(t - \tau)$.

Таким образом,

$$d\varepsilon = \sigma(\tau) K(t - \tau) d\tau .$$

В силу суперпозиции величина наследуемой деформации в момент времени t , возникшей за счет напряжений, действовавших до момента времени t , равна

$$\int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau .$$

Окончательно, полная деформация в момент времени t будет определяться соотношением:

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E} + \int_0^t K(t - \tau) \sigma(\tau) d\tau .$$

Отметим, что функция $K(t - \tau)$ должна быть убывающей: «воспоминание» материала «сглаживается» со временем.

Уравнение, записанное для полной деформации, представляет так называемое линейное интегральное уравнение Вольтерра второго рода относительно σ . Функция $K(t - \tau)$ является ядром этого уравнения (ядром ползучести).

Полученное уравнение позволяет по заданному закону изменения напряжения во времени определить закон изменения деформации и, в частности, описать явление последействия при постоянном напряжении. В этом частном случае при $\sigma(t) = \sigma(0) = \text{const}$ получаем:

$$\varepsilon(t) = \sigma(0) \left[\frac{1}{E} + \int_0^t K(t - \tau) d\tau \right].$$

Решение интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно функции $\sigma(t)$ имеет вид:

$$\sigma(t) = E \varepsilon(t) - \int_0^t \Gamma(t - \tau) \varepsilon(\tau) d\tau,$$

где $\Gamma(t - \tau)$ – резольвента интегрального уравнения (ядро релаксации). Это уравнение позволяет по заданному закону изменения деформации определить закон изменения напряжения и, в частности, описать явление релаксации при постоянной деформации:

$$\sigma(t) = \varepsilon(0) \left[E - \int_0^t \Gamma(t - \tau) d\tau \right].$$

Линейная теория наследственности Больцмана—Вольтерра в ряде случаев хорошо описывает процессы деформирования высокомолекулярных соединений (полимеров) и бетона.

Отметим, что поскольку ядро ползучести зависит только от разности времени $(t - \tau)$, должно иметь место неизменность свойств

материала во времени: начало отчета можно устанавливать произвольно, результаты остаются без изменения. Однако существуют материалы, свойства которых существенно меняются во времени: например, бетон, который стареет в течение примерно двух лет. Арутюнян Н.Х. (1952) развил вариант теории Больцмана – Вольтерра, отражающий указанное обстоятельство.

Линейные теории наследственности для описания ползучести металлов не пригодны. Работнов Ю.Н. (1948) предложил обобщение линейной теории наследственности в виде:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma(t) + \int_0^t K(t-\tau)\sigma(\tau)d\tau .$$

Если время t мало, то деформация последствия (второе слагаемое) мала и $\sigma = \varphi(\varepsilon)$, т.е. функция $\varphi(\varepsilon)$ характеризует кривую деформации при быстром испытании.

Рассмотрим ползучесть при постоянном напряжении (простое последствие). В этом случае:

$$\varphi(\varepsilon) = \sigma(0)[1 + G(t)] , \quad G(t) = \int_0^t K(t-\tau)d\tau .$$

Представленное соотношение показывает, что при фиксированных напряжениях кривые ползучести подобны.

Хорошее согласование с результатами эксперимента дает следующая аппроксимация функции $G(t)$:

$$G(t) = \alpha t^\beta ,$$

где α, β – постоянные для данного материала при данной температуре. Поскольку $G'(t) = K(t-\tau)$, имеем:

$$K(t-\tau) = \alpha \beta (t-\tau)^{\beta-1} .$$

Решение исходного уравнения относительно $\sigma(t)$ позволяет получить:

$$\sigma(t) = \varphi(\varepsilon) - \int_0^t \Gamma(t-\tau)\varphi(\tau) d\tau .$$

В случае простой релаксации $\varepsilon(t) = \varepsilon(0) = \text{const}$, и кривая релаксации представляется уравнением:

$$\sigma(t) = \varphi[\varepsilon(0)] [1 - R(t)] , \quad R(t) = \int_0^t \Gamma(t-\tau) d\tau .$$

Если начальное растяжение происходит быстро, то $\sigma(0) = \varphi[\varepsilon(0)]$ и уравнение кривой релаксации приводится к виду:

$$\sigma(t) / \sigma(0) = 1 - R(t) .$$

11. Расчеты на ползучесть при одноосном напряженном состоянии и кручении

11.1. Релаксация напряжений в болтах фланцевого соединения

Определим, как часто необходимо производить затяжку болтов фланцевого соединения, если начальное натяжение каждого болта должно снижаться не более чем на заданную величину.

Примем, что фланцы абсолютно несжимаемы. В этом случае деформация болта, растянутого первоначальным напряжением $\sigma(0)$, не меняется со временем. Прирост деформации ползучести происходит за счет уменьшения упругой деформации болта, вследствие чего напряжение в болте уменьшается. Можем записать:

$$\varepsilon^e + \varepsilon^c = \frac{\sigma}{E} + \varepsilon^c = \text{const} .$$

Дифференцируя полученное соотношение по времени, получаем уравнение для описания процесса релаксации в болтах:

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{d\varepsilon^c}{dt} = 0 \quad .$$

Будем пренебрегать стадией неустановившейся ползучести. Тогда скорость деформации ползучести, т.е. скорость установившейся деформации ползучести, используя теорию течения, можем представить в виде:

$$\frac{d\varepsilon^c}{dt} = \dot{\varepsilon}^c = \xi^c = a\sigma^n \quad .$$

Подстановка ξ^c в дифференциальное уравнение релаксации и его интегрирование (с разделением переменных) позволяет получить:

$$\frac{1}{(n-1)\sigma^{n-1}} = Eat + C \quad .$$

Постоянная интегрирования определяется из начального условия $\sigma|_{t=0} = \sigma(0)$. Будем иметь:

$$C = \frac{1}{(n-1)\sigma(0)^{n-1}} \quad .$$

Окончательно, изменение напряжения во времени определится соотношением

$$\frac{\sigma}{\sigma(0)} = \frac{1}{\sqrt[n-1]{1 + (n-1)Eat[\sigma(0)]^{n-1}}} \quad .$$

Зная характеристики a , n , E данного материала при заданной температуре, можно по полученной зависимости определить время t , по истечении которого первоначальное напряжение $\sigma(0)$ снизится до допустимой величины и необходимо будет произвести дополнительную затяжку болтов.

Построенное решение является приближенным, поскольку не учтена деформация фланцев и стадия неустановившейся ползучести.

11.2. Установившаяся ползучесть изгибаемых балок, сечение которых имеет две оси симметрии

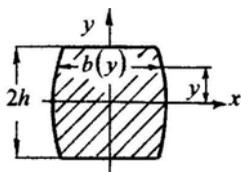


Рис. 11.1

Поперечное сечение рассматриваемых балок в общем случае имеет вид, показанный на рис. 11.1. Балка изгибается в плоскости zy .

Рассмотрим случай чистого изгиба. Гипотезу плоских сечений будем считать справедливой и при ползучести, что достаточно хорошо подтверждается опытными данными. На основании этой гипотезы относительная линейная деформация ε_z волокна, расположенного на расстоянии y от нейтрального слоя, определяется соотношением $\varepsilon_z = y/\rho$, где ρ – радиус кривизны изогнутой оси балки. Пренебрегая упругой частью деформации, после дифференцирования будем иметь:

$$\dot{\varepsilon}_z^c = y \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$$

или, при степенном законе установившейся ползучести,

$$a\sigma_z^n = y \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right).$$

Из полученного соотношения следует:

$$\sigma_z = y^{1/n} \left[\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]^{1/n} .$$

Перепишем полученное соотношение для напряжения σ_z в виде:

$$\sigma_z = \Phi \cdot y^{1/n} ,$$

где введено обозначение $\Phi = \left[\frac{1}{a} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right]^{1/n}$.

Условие равенства момента внешних ($M = \text{const}$) и внутренних сил (условие равновесия) имеет вид:

$$M = 2 \int_0^h \sigma_z b(y) y dy = 2 \Phi \int_0^h b(y) y^{(n+1)/n} dy .$$

Введем обозначение $I_{nx} = 2 \int_0^h b(y) y^{(n+1)/n} dy$, считая величину

J_{nx} обобщенным моментом инерции сечения. С учетом этого обозначения из уравнения равновесия определим функцию Φ :

$$\Phi = M / I_{nx} .$$

Подставляя теперь значение Φ в соотношение для напряжения σ_z , окончательно получаем:

$$\sigma_z = \frac{M}{I_{nx}} y^{1/n} .$$

Как следует из полученного соотношения, распределение нормальных напряжений по высоте сечения определяется нелинейным законом. В качестве примера рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой $2h$. В этом случае

$$I_{nx} = \frac{2bn}{2n+1} h^{(2n+1)/n} \quad \text{и} \quad \sigma_z = \frac{2n+1}{2bn} \cdot \frac{y^{1/n}}{h^{(2n+1)/n}} \cdot M .$$

Запишем соотношение для максимального напряжения при ползучести σ_{\max}^c , выделяя в нем максимальное упругое напряжение $\sigma_{\max}^e = 6M / b(2h)^2$. Будем иметь:

$$\sigma_{\max}^c = \frac{2n+1}{2bn} \cdot \frac{1}{h^2} \cdot M = \frac{2n+1}{3n} \cdot \sigma_{\max}^e .$$

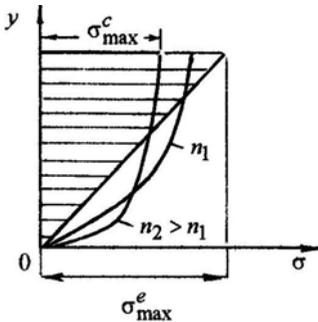


Рис. 11.2

Построение эпюры нормальных напряжений для различных значений параметра ползучести n показывает, что напряжения при ползучести по высоте сечения несколько выравниваются: в точках, наиболее удаленных от нейтрального слоя, они снижаются ($\sigma_{\max}^c < \sigma_{\max}^e$ при $n > 1$), а вблизи нейтрального слоя увеличиваются (рис. 11.2).

Можно показать, что с возрастанием показателя ползучести n распределение напряжений σ_z стремится к идеально-пластическому распределению с тем отличием, что в случае ползучести эта предельная картина достигается при любом значении изгибающего момента. Действительно, при $n \rightarrow \infty$ имеем:

$$\sigma_{\max}^c = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3n} \right) \cdot \frac{6M}{b(2h)^2} = \frac{4M}{b(2h)^2} ,$$

но $4M / b(2h)^2 = \sigma_T$ – известный результат теории пластичности.

Проведение расчетов при возрастающих температурах дает ту же картину изменения напряжений в сечении балки, что и при возрастании показателя ползучести n .

Соотношение для максимального напряжения при ползучести может быть записано в несколько иной форме, а именно:

$$\sigma_{\max}^c = M / W_{nx} \quad ,$$

где $W_{nx} = I_{nx} / h^{1/n}$ – обобщенный момент сопротивления прямоугольного сечения.

Перейдем к определению прогибов балки $v = v(t)$. Прогибы будем считать малыми, поэтому с достаточной степенью точности можем полагать:

$$1/\rho = d^2v/dz^2 \quad ,$$

или, дифференцируя по времени,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{dv}{dt} \right) \quad .$$

Ранее получили, что $a\sigma_z^n = y \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$. Это соотношение позволяет

выразить скорость изменения кривизны оси балки $\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)$ через нагрузку. Действительно,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{a}{y} \sigma_z^n = a \left(\frac{M}{I_{nx}} \right)^n \quad .$$

Подставляя полученное значение в исходное уравнение, определяющее прогиб балки, будем иметь:

$$\frac{d^2}{dz^2} \left(\frac{dv}{dt} \right) = a \left(\frac{M}{I_{nx}} \right)^n \quad .$$

Представленное уравнение позволяет определить скорость, с которой происходит прогиб балки (скорость прогиба) при установившейся ползучести, а также величину прогиба за определенный промежуток времени. К прогибу от ползучести нужно добавить упругий прогиб.

Интегрирование уравнения прогибов по переменной z позволяет получить:

$$\frac{dv}{dt} = a \left(\frac{M}{I_{nx}} \right)^n \frac{z^2}{2} + C_1 z + C_2 .$$

Для определения постоянных интегрирования C_1 и C_2 используем следующие условия:

$$\left. \frac{dv}{dt} \right|_{z=0} = 0 , \quad \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{dv}{dz} \right) \right|_{z=l/2} = 0 ,$$

где l – длина балки. Будем иметь:

$$C_1 = -\frac{al}{2} \left(\frac{M}{I_{nx}} \right)^n , \quad C_2 = 0 .$$

Итак,

$$\frac{dv}{dt} = a \left(\frac{M}{I_{nx}} \right)^n \frac{z}{2} (z-l) .$$

Интегрируя полученное уравнение по времени, получим величину прогиба за время t :

$$v = a \left(\frac{M}{I_{nx}} \right)^n \frac{z}{2} (z-l) t + C_3 .$$

Значение постоянной C_3 определим из следующего начального условия: при $t = 0$ прогиб равен упругому. Для чистого изгиба, при принятом направлении осей и изгибающего момента и $z = l/2$ (для каждого значения z постоянная C_3 имеет свое значение) получим:

$$C_3 = v^e = -\frac{Ml^2}{8I_x E} .$$

Окончательно, для прогиба балки при ползучести получим:

$$v = a \left(\frac{M}{I_{nx}} \right)^n \frac{z}{2} (z-l) t - \frac{Ml^2}{8I_x E} .$$

При действии на балку поперечных нагрузок (плоский поперечный изгиб) необходимо учитывать касательные напряжения. Влияние касательных напряжений при изгибе будет сказываться в искривлении поперечных сечений и в усложнении зависимости между напряжением σ_z и скоростью деформации ползучести $\dot{\epsilon}^c$. Отметим, что при большой длине балок ($l/2h \gg 1$) касательными напряжениями можно пренебречь, оставляя соотношение для нормального напряжения σ_z в том же виде, что и для чистого изгиба. Касательные напряжения в этом случае вычисляются по известному нормальному напряжению σ_z из дифференциального уравнения равновесия

$$\frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = 0$$

и граничных условий

$$\tau_{zy} \Big|_{y=\pm h} = 0 .$$

Получим соотношение для касательного напряжения τ_{zy} для балки с прямоугольным поперечным сечением. Будем иметь:

$$\tau_{zy} = -\int \frac{2n+1}{2bn} \cdot \frac{y^{1/n}}{h^{2+(1/n)}} \cdot Q dy + C = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{Q}{2bh^{(2n+1)/n}} \cdot y^{(n+1)/n} + C.$$

Здесь использована известная формула $dM/dz = Q$.

Из граничного условия определяется постоянная C , которая будет равна

$$C = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{Q}{2bh}.$$

Поскольку касательное напряжение не меняет знак по высоте сечения (при изменении знака координаты y), окончательно можем записать:

$$\tau_{zy} = \frac{2n+1}{n+1} \cdot \frac{Q}{2bh} \left[1 - \left| \frac{y}{h} \right|^{(n+1)/n} \right].$$

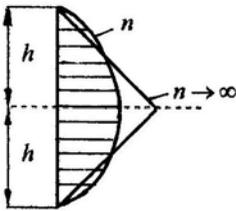


Рис. 11.3

Распределение касательного напряжения по высоте сечения в зависимости от показателя ползучести n приведено на рис. 11.3. Видим, что с ростом показателя ползучести парабола становится все более заостренной и в пределе ($n \rightarrow \infty$) вырождается в треугольник.

Прогиб балок при действии поперечных нагрузок определяется аналогично тому, как было сделано при чистом изгибе. Нужно только при интегрировании по переменной z учесть зависимость внутреннего момента от этой переменной. Константы интегрирования в каждом конкретном случае определяются из условия закрепления концов балки.

11.3. Установившаяся ползучесть при кручении круглых стержней

Рассмотрим установившуюся ползучесть круглого вала радиуса R , скручиваемого моментом M (рис. 11.4).

При анализе ползучести можно, как и в упругом случае, принимать, что поперечные сечения остаются плоскими и поворачиваются относительно оси. В этом случае угловая деформация γ на расстоянии r

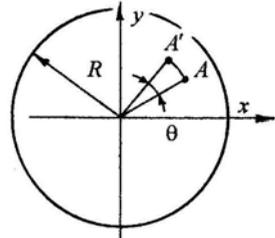


Рис. 11.4

от центра равна $\gamma = r \theta$, где θ – относительный угол закручивания.

Поскольку речь идет об установившейся ползучести, то дифференцированием введем в рассмотрение скорость угловой деформации ползучести:

$$\dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = r \frac{d\theta}{dt} .$$

Скорость угловой деформации ползучести представим степенной зависимостью

$$\dot{\gamma} = a_1 \tau^{n_1} ,$$

где τ – результирующее касательное напряжение. Формула введена по аналогии с соответствующей формулой для скорости деформации ползучести при растяжении $\dot{\epsilon} = a \sigma^n$. Значения коэффициентов ползучести a_1, n_1 , вообще-то, должны быть отличны от a, n . Исследование этого вопроса, т.е. вопроса о связи между этими постоянными материала, позволяет установить, что $a_1 = 3^{(n+1)/2} \cdot a$, а $n_1 = n$. В дальнейшем эти соотношения будут доказаны.

С учетом степенного соотношения для скорости угловой деформации ползучести и полученных значений постоянных a_1, n_1 имеем:

$$a_1 \tau^n = r \frac{d\theta}{dt} \quad \Rightarrow \quad \tau = r^{1/n} \left[\frac{1}{a_1} \frac{d\theta}{dt} \right]^{1/n} .$$

Как и в задаче о чистом изгибе, введем обозначение $\Phi = \left[\frac{1}{a_1} \frac{d\theta}{dt} \right]^{1/n}$ и тогда $\tau = \Phi \cdot r^{1/n}$.

Свяжем касательное напряжение с внешней нагрузкой – с крутящим моментом M :

$$M = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr .$$

Подстановка значения напряжения τ приводит к соотношению:

$$M = 2\pi \Phi \int_0^R r^{(2n+1)/n} dr \quad \Rightarrow \quad \Phi = M / I_{\text{пр}} ,$$

где $I_{\text{пр}} = 2\pi \int_0^R r^{(2n+1)/n} dr = 2\pi \frac{n}{3n+1} R^{(3n+1)/n}$ – приведенный (обобщенный) полярный момент инерции. В таком случае результирующее касательное напряжение имеет вид:

$$\tau = \frac{M}{I_{\text{пр}}} r^{1/n} .$$

Как следует из полученной формулы для напряжения τ , распределение напряжений при ползучести определяется нелинейным законом в отличие от распределения напряжений при упругом кручении. Так же, как и при изгибе, вследствие ползучести происходит выравнивание напряжений в поперечном сечении вала: у поверхности они несколько снижаются, а у оси вала увеличиваются (рис. 11.5).

С возрастанием показателя ползучести $n_1 = n$ распределение касательного напряжения стремится к идеально-пластическому распределению, однако в отличие от последнего, реализуется при любом значении скручивающего момента M .

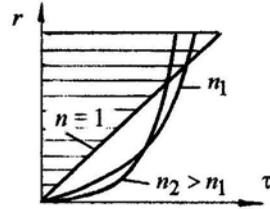


Рис. 11.5

Определим изменение относительного угла закручивания θ во времени. Ранее было получено:

$$a_1 \tau^n = r \frac{d\theta}{dt} .$$

Учет формулы для напряжения τ позволяет перейти к уравнению

$$a_1 \left(\frac{M}{I_{\text{пр}}} \cdot r^{1/n} \right)^n = r \frac{d\theta}{dt} .$$

Решение полученного уравнения относительно θ имеет вид:

$$\theta = a_1 \left(M / I_{\text{пр}} \right)^n t + C .$$

Постоянная C определяется из условия, что при $t = 0$ относительный угол закручивания θ равен упругому:

$$\theta = \theta_{\text{упр}} = \frac{M}{I_p G} \Rightarrow C = \frac{M}{I_p G} .$$

Окончательно, будем иметь:

$$\theta = \frac{M}{I_p G} + a_1 \left(\frac{M}{I_{\text{пр}}} \right)^n t .$$

Задача о кручении вала кольцевого поперечного сечения с внешним диаметром D и внутренним d рассматривается совершенно аналогично.

Для определения максимального значения касательного напряжения можем использовать понятие о приведенном (обобщенном) моменте сопротивления.

Рассмотрим задачу о релаксации крутящего момента в поперечном сечении круглого бруса.

Будем считать, что в момент времени $t = 0$ брус закручен на некоторый угол φ_0 моментом M , после чего его концы фиксируются. С течением времени происходит релаксация напряжений и, соответственно, крутящего момента в сечении. Поскольку при $t > 0$ угол кручения постоянен, можем записать уравнение релаксации напряжений в виде:

$$\frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + B_1(t) \tau^{n_1} = 0 \quad .$$

Это уравнение записано по аналогии с уравнением релаксации напряжений при растяжении.

Связь между характеристиками ползучести при кручении $B_1(t)$, n_1 и при растяжении $B(t)$, n устанавливается в виде:

$$n_1 = n \quad ,$$

$$B_1(t) = 3^{(n+1)/2} B(t) \quad ,$$

поэтому значения $B_1(t)$ и n_1 считаем известными. Разделением переменных уравнение релаксации приводится к виду:

$$d\tau / \tau^n = -G B_1(t) dt \quad .$$

Интегрируя полученное уравнение, используя начальное условие $\tau|_{t=0} = \tau(0)$, будем иметь:

$$\frac{1}{(n-1)\tau^{n-1}} = G\Omega_1(t) + C \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{(n-1)\tau(0)^{n-1}} .$$

Здесь использовано стандартное обозначение, которым неоднократно пользовались, а именно: $\int B_1(t)dt = \Omega_1(t)$.

Учитывая значение постоянной C , закон релаксации касательного напряжения получим в виде:

$$\tau^{n-1} = \frac{\tau(0)^{n-1}}{1 + (n-1)G\Omega_1\tau(0)^{n-1}}$$

или

$$\frac{\tau}{\tau(0)} = \frac{1}{\sqrt[n-1]{1 + (n-1)G\Omega_1[\tau(0)]^{n-1}}} .$$

Отметим, что полученное соотношение определяет закон релаксации результирующего касательного напряжения для любой точки поперечного сечения, поскольку $\tau = \tau(r)$.

Закон релаксации крутящего момента M можно получить, используя соотношение, определяющее релаксацию касательного напряжения, и связь между касательным напряжением и моментом M в форме

$$M = 2\pi \int_0^R \tau r^2 dr .$$

Внося значение τ и интегрируя, получим изменение крутящего момента во времени. При этом примем во внимание, что

$$\tau(0) = \frac{2M_0}{\pi R^4} r = \frac{2M_0}{\pi R^3} \cdot \frac{r}{R} = \tau(0)_{\max} \cdot \rho ,$$

где $\rho = r/R$. Для простоты записи примем:

$$\tau(0) = \tau(0)_{\max} \cdot \rho = \tau_1 \cdot \rho \quad .$$

В частности, для показателя ползучести $n = 4$ можно получить:

$$\frac{M}{M_0} = \frac{4}{3t_1} \left[(1+t_1)^{3/4} - 1 \right] \quad ,$$

где

$$t_1 = (n-1)G\Omega_1(t)\tau_1^{n-1} \quad , \quad (n-1=3) \quad .$$

11.4. Неустановившаяся и установившаяся ползучесть статически неопределимой стержневой системы

Неустановившейся ползучестью будем называть деформацию детали (элемента конструкции) при изменяющихся во времени напряжениях. Деформация детали при постоянных во времени напряжениях будем называть установившейся ползучестью.

Установившаяся ползучесть имеет место в статически определенных задачах при постоянных во времени внешних силах. В таких задачах напряжения определяются только уравнениями статики, а поскольку внешние силы постоянны, не меняются во времени и напряжения.

В статически неопределимых задачах для вычисления напряжений необходимо дополнительно привлекать деформации, которые изменяются во времени за счет ползучести материала. Соответственно, в таких задачах, даже при постоянных во времени внешних силах, изменение деформаций всегда связано с изменением напряжений и перераспределением их по объему элемента конструкции. Если при решении такой задачи приближенно предположить, что напряжения во времени постоянны, то найденные в результате решения величины напряжений и их закон распределения отличны от таковых в начальный момент времени, когда деформаций ползучести еще не было. Сам же процесс изменения напряжений во времени остается невыясненным.

В действительности ситуация несколько упрощается, поскольку, как показали исследования неустановившейся ползучести, напря-

жения в этом случае, непрерывно изменяясь во времени, приближаются к величинам, полученным в результате решения задачи установившейся ползучести. Таким образом, можно утверждать, что распределение напряжений при установившейся ползучести является предельным.

Так, например, при чистом изгибе бруса нормальные напряжения в его поперечном сечении непрерывно перераспределяются, и эпюра напряжений изменяется от линейной (если нагрузка достаточно мала) до эпюры напряжений, полученной при решении задачи установившейся ползучести. На рис. 11.6 имеем:

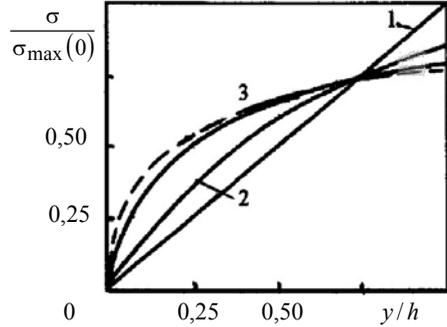


Рис. 11.6

прямая 1 – линейное распределение напряжений при $t = 0$; кривая 2 – распределение напряжений при $t = 80 \text{ ч}$; 3 – при $t = 3500 \text{ ч}$; пунктир – распределение напряжений при установившейся ползучести. Распределения построены для определенного значения показателя нелинейности материала n .

При решении задач неустановившейся ползучести условиям совместности деформаций должны удовлетворять компоненты полных деформаций. Поскольку в условиях установившейся ползучести не происходит изменений напряжений и, следовательно, изменений упругих деформаций, условиям совместности деформаций должны удовлетворять компоненты деформаций ползучести.

Чтобы наглядно проиллюстрировать представленные соображения об установившейся и неустановившейся ползучести, рассмотрим упругое и чисто пластическое состояния, а также состояния установившейся и неустановившейся ползучести для стержневой системы, представленной на рис. 11.7.

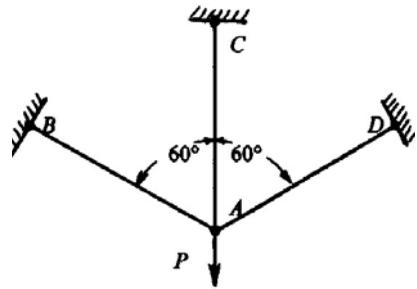


Рис. 11.7

Стержни AB (№ 1), AC (№ 2) и AD (№ 3) изготовлены из одного материала, имеют одинаковые длину l и площадь поперечного сечения F и нагружены силой P .

Определяющими уравнениями для решения представленной задачи являются уравнения равновесия и условие совместного деформирования стержней.

Легко видеть, что усилия в стержнях 1 и 3 равны ($N_1 = N_3$) и, соответственно, $N_1 + N_2 = P$. Переходя к напряжениям, имеем:

$$\sigma_1 + \sigma_2 = s \quad ,$$

где σ_1 и σ_2 – напряжения в первом (третьем) и во втором стержнях; $s = P/F$.

Условие совместного деформирования стержней имеет вид $\Delta l_2 = 2\Delta l_1$ и переходит в условие совместности деформаций

$$\varepsilon_2 = 2\varepsilon_1 \quad .$$

Решая упругую задачу ($\varepsilon = \sigma/E$), получаем следующие значения напряжений в стержнях:

$$\sigma_1^e = s/3 \quad , \quad \sigma_2^e = 2s/3 \quad .$$

При чисто пластическом состоянии системы (если упрочнение отсутствует) напряжения в стержнях одинаковы, и из уравнения равновесия в напряжениях имеем:

$$\sigma_1^p = \sigma_2^p = s/2 \quad .$$

Для определения напряжений в условиях установившейся ползучести используем степенную зависимость деформации от напряжения $\varepsilon^c = \sigma^n \Omega(t)$. Функцию времени $\Omega(t)$ не будем аппроксимировать аналитическими зависимостями, так как здесь выполнение расчетов на ползучесть, как будет видно дальше, возможно и без этого. Подставляя значения деформации ползучести в соответ-

ствии с приведенной формулой в условие совместности деформаций, будем иметь:

$$\left(\sigma_2^c\right)^n = 2\left(\sigma_1^c\right)^n .$$

Совместное решение полученного уравнения и уравнения равновесия в напряжениях позволяет получить:

$$\sigma_1^c = \frac{1}{1+2^{1/n}} s , \quad \sigma_2^c = \frac{2^{1/n}}{1+2^{1/n}} s .$$

Заметим, что из приведенных соотношений при $n = 1$ получаем упругое решение, а при $n \rightarrow \infty$ – значения напряжений в чисто пластическом состоянии. Соответственно, все приведенные выше решения можно связать следующими соотношениями:

$$\sigma_1^c = \sigma_1^p + k\left(\sigma_1^e - \sigma_1^p\right) , \quad \sigma_2^c = \sigma_2^p + k\left(\sigma_2^e - \sigma_2^p\right) ,$$

где коэффициент k имеет значение $k = 3\left(2^{1/n} - 1\right) / \left(2^{1/n} + 1\right)$.

Решим теперь задачу неустановившейся ползучести, используя теорию течения и предполагая, что в начальный момент времени напряжения в стержнях меньше предела пропорциональности материала при данной температуре. В соответствии с этим полная деформация в этом случае будет равна:

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^c = \frac{\sigma}{E} + \int_0^t \xi^c dt = \frac{\sigma}{E} + \int_0^t \sigma^n B(t) dt .$$

Подставляя значения полной деформации по этой формуле в условие совместности деформаций, получим:

$$\frac{\sigma_2}{E} + \int_0^t \sigma_2^n B(t) dt = \frac{2\sigma_1}{E} + 2 \int_0^t \sigma_1^n B(t) dt .$$

Продифференцируем последнее уравнение по времени. Будем иметь:

$$\frac{1}{E} \frac{d\sigma_2}{dt} + \sigma_2^n B = \frac{2}{E} \frac{d\sigma_1}{dt} + 2\sigma_1^n B .$$

Из уравнения равновесия имеем, что $\sigma_1 = s - \sigma_2$, и, следовательно, $d\sigma_1/dt = -d\sigma_2/dt$. С учетом полученного соотношения после некоторых преобразований придем к дифференциальному уравнению для напряжения σ_2 :

$$\frac{d\sigma_2}{2(s - \sigma_2)^n - \sigma_2^n} = \frac{s^{n-1}EB}{3} dt .$$

Введем в рассмотрение безразмерное напряжение σ_2^* и безразмерное время t^* в соответствии со следующими формулами:

$$\sigma_2^* = \sigma_2/s , \quad t^* = \left(s^{n-1}EB/3 \right) t .$$

Дифференциальное уравнение для напряжения σ_2 в этом случае принимает вид:

$$dt^* = \frac{d\sigma_2^*}{2(1 - \sigma_2^*)^n - (\sigma_2^*)^n} .$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение, учитывая, что в начальный момент времени $\sigma_2(0) = 2s/3$ или, в безразмерном виде, $\sigma_2^*(0) = 2/3$. Будем иметь:

$$t^* = \int_{2/3}^{\sigma_2^*} \frac{d\zeta}{2(1 - \zeta)^n - \zeta^n} ,$$

где ζ – переменная интегрирования.

График зависимости $\sigma_2^* = f(t^*)$ представлен на рис. 11.8 при $n = 2$. Можно видеть, что с течением времени напряжение меняется от начального упругого значения $\sigma_2^{*e} = 0,667$ до значения при установившейся ползучести $\sigma_2^{*c} = 0,586$, причем состояние установившейся ползучести реализуется достаточно быстро.

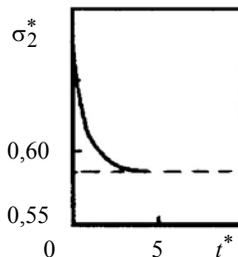


Рис. 11.8

Таким образом, поскольку расчеты на установившуюся ползучесть значительно проще, в тех случаях, когда это возможно (например, если срок службы детали достаточно велик), необходимо использовать допущение об установившейся ползучести. Естественно, если необходимо исследовать именно изменение и перераспределение напряжений во времени, как, например, в задаче о релаксации контактного давления в диске, посаженном на вал с натягом, предположение об установившейся ползучести принимать нельзя.

12. Ползучесть при сложном напряженном состоянии

Рассмотренные ранее простейшие (одномерные) теории ползучести не позволяют решать задачи о ползучести элементов конструкций, находящихся в условиях сложного напряженного состояния, но именно решение таких задач представляет интерес для практики. Очевидно, что необходимо построение теорий ползучести, которые позволили бы решать названные задачи, используя при этом экспериментальные данные о ползучести при одноосном растяжении.

Как и в случае одномерной ползучести, основной вопрос, на который должна дать ответ любая из таких теорий, это вопрос о зависимости между компонентами напряжений и компонентами деформаций (или скоростей деформаций). Различными исследователями были предложены варианты таких зависимостей, построенные на основе накопленных экспериментальных данных, однако

из-за скудности опытных данных, определяемой техническими трудностями проведения экспериментов принципиального характера, неизбежности разброса характеристик материала, а зачастую и из-за сложности полученных соотношений их применение не получило распространения. К тому же надежные эксперименты имеются только для плоского напряженного состояния, а для трехосного напряженного состояния имеется совсем мало сведений о закономерностях ползучести.

Напомним, что примерно такое же положение существует и в теории пластичности, и, подобно теориям пластичности, теория ползучести при сложном напряженном состоянии на настоящее время строятся на основе некоторых умозрительных соображений (принципов или гипотез), лишь частично подтверждаемых экспериментами. Очевидно, что в этом случае наиболее важен вопрос о том, какой именно принцип полагается в основу теории, с чем связывается переменность рассматриваемых величин по времени (с самим временем, с величиной накопленной деформации) и т.д. Различные формулировки уравнений, получаемых при этом, не слишком сильно разнятся, и при их выборе следует руководствоваться, в первую очередь, соображениями простоты и удобства.

Наиболее простые соотношения для описания ползучести при сложном напряженном состоянии следуют при применении гипотез, аналогичных введенным ранее в теориях пластичности, и поэтому соответствующие теории ползучести обычно носят такие же названия.

При решении задач ползучести в условиях сложного напряженного состояния различают, как и для одноосного растяжения, установившуюся и неуставившуюся ползучесть.

12.1. Установившаяся и неуставившаяся ползучесть

Обобщая понятие установившейся ползучести при одноосном растяжении ($\dot{\epsilon} = \text{const}$) на случай сложного напряженного состояния, можно утверждать, что это такой процесс деформирования тела (материала) во времени, при котором интенсивность скоростей деформаций $\dot{\epsilon}_i$ остается неизменной. В случае однозначной

зависимости между интенсивностью скоростей деформации $\dot{\epsilon}_i$ и интенсивностью напряжений σ_i последняя также должна оставаться постоянной в процессе установившейся ползучести. Отметим, что хотя постоянство σ_i не означает постоянства всех компонентов тензора напряжений, обычно для простоты расчетов полагается, что в условиях установившейся ползучести все напряжения не меняются во времени.

Установившаяся ползучесть всегда имеет место в случае статически определимых задач при постоянных во времени внешних силах. Действительно, в таких задачах напряжения определяются только уравнениями статики, а поскольку внешние силы постоянны, напряжения также не меняются со временем.

В статически неопределимых задачах для вычисления напряжений необходимо привлекать дополнительно уравнения, в которые входят деформации, которые за счет ползучести материала изменяются во времени. В этих задачах даже при постоянных во времени внешних силах изменение деформаций будет приводить к изменению напряжений и их перераспределению по объему тела. Как показывают исследования неустановившейся ползучести, напряжения, изменяясь во времени, приближаются к значениям, получаемым из решения задачи установившейся ползучести, и в этом плане распределение напряжений при установившейся ползучести является как бы предельным.

Можно считать, что по происшествии некоторого промежутка времени наступает состояние ползучести, близкое к установившемуся. Если этот промежуток времени мал по сравнению с длительностью «жизни» рассматриваемого тела, то изучение ползучести последнего можно проводить, основываясь на уравнениях установившейся ползучести, что значительно проще. В качестве критерия приближения к состоянию установившейся ползучести обычно принимают заметное превышение деформаций ползучести над упругими деформациями. В технических задачах это условие обычно выполняется. По этой причине, а также вследствие упомянутой выше простоты решения задач установившейся ползучести, в технике большей частью ограничиваются анализом установившейся ползучести.

12.2. Применение к установившейся ползучести теории пластического течения

Экспериментальные данные по установившейся ползучести могут быть обобщены следующими положениями, вводимыми аналогично тому, как это было сделано в теории пластического течения:

- материал в условиях ползучести несжимаем;
- главные направления тензора напряжения и тензора скорости деформации ползучести совпадают;
- главные касательные напряжения пропорциональны главным скоростям деформаций сдвига;
- процесс ползучести не зависит от гидростатического давления; интенсивность скоростей деформаций сдвига ползучести является функцией интенсивности касательных напряжений $H = f(T)T$, характерной для данного материала при данной температуре.

Реализуя третье положение, в главной системе координат имеем:

$$\frac{\xi_1 - \xi_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\xi_2 - \xi_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\xi_3 - \xi_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \psi \quad ,$$

где ψ – некоторая функция напряжений и скоростей деформаций. Отметим, что в соответствии со вторым положением индексы при скоростях деформаций и напряжениях относятся к одним и тем же направлениям, а индекс, определяющий ползучесть, здесь и в дальнейшем опускаем, поскольку речь идет только о деформациях ползучести. Выписанные соотношения перепишем в форме:

$$\begin{aligned}\xi_1 - \xi_2 &= \psi(\sigma_1 - \sigma_2) \quad , \\ \xi_2 - \xi_3 &= \psi(\sigma_2 - \sigma_3) \quad , \\ \xi_3 - \xi_1 &= \psi(\sigma_3 - \sigma_1) \quad .\end{aligned}$$

Очевидно, что задание характеристики материала в форме функциональной зависимости $H = f(T)T$ (эта зависимость анало-

гична условию упрочнения в теории пластичности) дает возможность представить функцию ψ через функцию $f(T)$. Действительно, использование полученных уравнений приводит к соотношению $H = 2\psi T$, и следовательно, $2\psi = f(T)$.

Решение полученных уравнений относительно скоростей деформаций (с использованием условия несжимаемости материала) при найденном значении функции ψ позволяет записать уравнения теории течения при ползучести в форме:

$$\xi_k = \frac{1}{2} f(T) (\sigma_k - \sigma) \quad , \quad k = 1, 2, 3 \quad .$$

Переходя от главной системы координат 1, 2, 3 к произвольной системе координат x, y, z , окончательно будем иметь:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{1}{2} f(T) (\sigma_x - \sigma) \quad , \\ &\dots, \\ \eta_{xy} &= f(T) \tau_{xy} \quad , \\ &\dots \end{aligned}$$

Отметим, что поскольку задание характеристики материала возможно в форме $\xi_i = f(\sigma_i) \sigma_i$ (напомним, что интенсивности напряжений и скоростей деформаций отличаются от интенсивностей касательных напряжений и скоростей деформаций сдвига только постоянными коэффициентами) уравнения теории течения при ползучести могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} \xi_x &= \frac{1}{2} f(\sigma_i) (\sigma_x - \sigma) \quad , \\ &\dots, \\ \eta_{xy} &= f(\sigma_i) \tau_{xy} \quad , \\ &\dots \end{aligned}$$

или, что одно и то же:

$$\xi_x = \Phi(\sigma_i)(\sigma_x - \sigma) \quad ,$$

$$\dots ,$$

$$\eta_{xy} = 2\Phi(\sigma_i)\tau_{xy} \quad ,$$

$$\dots$$

Для того, чтобы вопрос о соотношениях теории течения при ползучести можно было считать законченным, необходимо показать возможность определения функции $\Phi(\sigma_i)$ из простейшего эксперимента, например, одноосного растяжения. При одноосном растяжении, при постоянных напряжениях и температуре имеем:

$$\sigma_x = \sigma_0 \quad , \quad \sigma_i = \sigma_0 \quad , \quad \xi_x = \xi_0 \quad .$$

Использование уравнений теории течения для описания одноосного растяжения приводит к зависимости

$$\xi_0 = \Phi(\sigma_0) \cdot \frac{2}{3} \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\sigma_0) = \frac{3}{2\sigma_0} \xi_0 \quad .$$

При степенной зависимости между скоростью деформации и напряжением $\xi_0 = a\sigma_0^n$ будем иметь:

$$\Phi(\sigma_0) = \frac{3}{2} a\sigma_0^{n-1} \quad .$$

Поскольку вид функции Φ не должен зависеть от типа напряженного состояния (эта функция определяет материал, являясь его характеристикой), для сложного напряженного состояния имеем:

$$\Phi(\sigma_i) = \frac{3}{2} a\sigma_i^{n-1} \quad ,$$

и, тем самым, уравнения теории течения при ползучести определены полностью.

Легко видеть, что введение в рассмотрение функции

$$F(\sigma_i) = 2\sigma_i \Phi(\sigma_i)/3$$

позволяет переписать уравнения теории течения ползучести в виде:

$$\xi_x = \frac{3}{2\sigma_i} F(\sigma_i)(\sigma_x - \sigma) \quad ,$$

$$\begin{aligned} & \dots, \\ \eta_{xy} &= \frac{3}{\sigma_i} F(\sigma_i)\tau_{xy} \quad , \\ & \dots, \end{aligned}$$

где функция $F(\sigma_i)$ при одноосном напряженном состоянии отождествляется со скоростью деформации $F(\sigma_0) = \xi_0$, а для сложного напряженного состояния – с интенсивностью скоростей деформаций $F(\sigma_i) = \xi_i$.

Отметим, что в общем случае функциональная зависимость $\xi_0 = f(\sigma_0)$ и, соответственно, $\xi_i = f(\sigma_i)$ не обязательно должна быть степенной.

Полученные уравнения теории течения ползучести позволяют доказать используемые ранее (при решении задачи кручения круглого вала) соотношения, связывающие характеристики ползучести материала при растяжении и чистом сдвиге. Действительно, принимая для сложного напряженного состояния зависимость между интенсивностью скоростей деформаций сдвига H и интенсивностью касательных напряжений T в форме степенной функции $H = a_1 T^n$ (принимая, что $n_1 = n$), для одноосного растяжения ($\sigma_x = \sigma_0$, $\sigma_i = \sigma_0$, $\xi_x = \xi_0$) будем иметь:

$$H = \sqrt{3} \xi_0 \quad , \quad T = \sigma_0 / \sqrt{3} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sqrt{3} \xi_0 = a_1 3^{-n/2} \sigma_0^n \quad \Rightarrow \quad \xi_0 = a_1 \cdot 3^{-(n+1)/2} \sigma_0^n \quad .$$

Отсюда следует, что

$$a_1 = a \cdot 3^{(n+1)/2} .$$

12.3. Применение к установившейся ползучести деформационной теории

Основные положения деформационной теории в применении к установившейся ползучести сводятся к следующим:

- материал в условиях ползучести несжимаем;
- направления главных нормальных напряжений совпадают с направлениями главных линейных деформаций;
- главные касательные напряжения пропорциональны главным деформациям сдвига;
- интенсивность деформаций при ползучести является определенной для каждого материала функцией интенсивности напряжений.

Третье положение вместе со вторым позволяет записать в главной системе координат:

$$\frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{\sigma_1 - \sigma_2} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_3}{\sigma_2 - \sigma_3} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon_1}{\sigma_3 - \sigma_1} = \varphi .$$

Решение уравнений относительно главных деформаций ползучести с использованием условия несжимаемости материала при ползучести приводит к соотношениям

$$\varepsilon_k = \varphi (\sigma_k - \sigma) , \quad k = 1, 2, 3 .$$

Переходя к скоростям деформаций установившейся ползучести, будем иметь:

$$\xi_k = \frac{d\varphi}{dt} (\sigma_k - \sigma) , \quad k = 1, 2, 3 .$$

Использование уравнений деформационной теории для описания одноосного растяжения ($\sigma_x = \sigma_0$, $\sigma_i = \sigma_0$, $\xi_x = \xi_0$) приводит к следующему виду функции $d\varphi/dt$:

$$\xi_0 = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \frac{2}{3} \sigma_0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{3}{2\sigma_0} \xi_0 .$$

При степенной зависимости между скоростью деформации и напряжением $\xi_0 = a\sigma_0^n$ будем иметь:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{3}{2} a \sigma_0^{n-1} .$$

Для сложного напряженного состояния соответствующая зависимость принимает вид:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{3}{2} a \sigma_i^{n-1} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{3}{2} a \sigma_i^{n-1} \cdot t .$$

Использование обозначений, введенных ранее при рассмотрении теории течения ползучести, позволяет привести уравнения деформационной теории ползучести к виду:

$$\xi_k = \Phi(\sigma_i)(\sigma_k - \sigma) \quad , \quad k = 1, 2, 3 .$$

Выписанные соотношения показывают, что в случае установившейся ползучести и теория течения, и деформационная теория приводят к одному и тому же результату.

12.4. Полная система уравнений установившейся теории ползучести

Полную систему уравнений установившейся ползучести запишем с использованием теории течения ползучести:

- дифференциальные уравнения равновесия

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0 \quad ,$$

...

(силами инерции пренебрегаем, считая процесс ползучести достаточно медленным);

- зависимости между скоростями деформаций и скоростями перемещений (зависимости типа Коши)

$$\xi_x = \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad ,$$

...

$$\eta_{xy} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad ,$$

...

где v_x, v_y, v_z – скорости перемещений в направлениях осей x, y, z соответственно;

- зависимости между скоростями деформаций и напряжениями (уравнения теории течения ползучести)

$$\xi_x = \frac{3}{2\sigma_i} F(\sigma_i)(\sigma_x - \sigma) \quad ,$$

...

$$\eta_{xy} = \frac{3}{\sigma_i} F(\sigma_i)\tau_{xy} \quad ,$$

...

Представленная полная система уравнений может быть решена либо в скоростях перемещений, либо в напряжениях. Процедуры получения соответствующих систем уравнений аналогичны процедурам, приводившимся ранее в теориях упругости и пластичности.

Решение системы уравнений должно отвечать граничным условиям в напряжениях:

$$\bar{X} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n \quad ,$$

...

13. Расчеты на ползучесть при сложном напряженном состоянии

13.1. Установившаяся ползучесть тонкостенных цилиндрических оболочек

Рассмотрим ползучесть круглой тонкостенной трубы под действием следующих простых нагрузок: внутреннего давления p , осевой силы P и крутящего момента M .

Для цилиндрической оболочки с внутренним радиусом a и наружным b введем следующие обозначения:

$$b - a = h \quad , \quad b/a = \beta > 1 \quad , \quad c = (a + b)/2 \quad .$$

Для тонкостенной трубы $h/c \ll 1$, а β незначительно превышает единицу. С точностью до величин порядка h/c (по сравнению с единицей) при указанных нагрузках напряжения σ_r , σ_φ и σ_z (цилиндрическая система координат, z – ось цилиндра) по толщине трубы распределены равномерно. Можно считать, что в тонкостенной трубе имеет место однородное напряженное состояние, которое сразу определяется из уравнений статики. В связи с этим опыты по ползучести при сложном напряженном состоянии проводятся, как правило, на тонкостенных цилиндрических оболочках.

Труба под действием внутреннего давления. С указанной выше точностью напряжения в трубе, закрытой доньшками, равны:

$$\sigma_r \approx 0 \quad , \quad \sigma_\varphi = pa/h \quad , \quad \sigma_z = pa/2h \quad .$$

Максимальное касательное напряжение и интенсивность касательных напряжений в рассматриваемой задаче равны и определяются соотношением

$$\tau_{\max} = T = pa/2h \quad .$$

Использование теории ползучести типа теории течения позволяет записать скорости деформаций в виде:

$$\xi_k = f(T, t)(\sigma_k - \sigma)/2 \quad , \quad k = r, \varphi, z \quad .$$

или, с учетом значений напряжений:

$$\xi_r = -f(T, t)\sigma_\varphi/4 = -f(T, t)T/2 \quad , \quad \xi_\varphi = -\xi_r \quad , \quad \xi_z = 0 \quad .$$

При применении степенной зависимости функция $f(T, t)$ представляется соотношением

$$f(T, t) = B_1(t)T^{n-1} \quad .$$

Интенсивность скоростей деформаций сдвига в тонкостенной трубе равна:

$$H = 2\xi_\varphi \quad ,$$

а скорость относительного увеличения диаметра трубы – $2b\xi_\varphi$ или $2a\xi_\varphi$.

Труба под действием внутреннего давления и осевой силы. Заметим, что в предыдущей задаче ползучесть в осевом направлении отсутствует ($\xi_z = 0$), что определяется наличием осевого усилия $\pi a^2 p$, вызванного действием внутреннего давления на доньш-

ки трубы. Предположим теперь присутствие некоторой осевой силы P . Совместное действие внутреннего давления p и осевой силы приводит к следующим значениям напряжений

$$\sigma_r \approx 0 \quad , \quad \sigma_\varphi = pa/h \quad , \quad \sigma_z = kra/2h$$

и скоростей деформаций

$$\xi_r = -(2+k)f(T, t)\sigma_\varphi/12 \quad ,$$

$$\xi_\varphi = (4-k)f(T, t)\sigma_\varphi/12 \quad ,$$

$$\xi_z = (k-1)f(T, t)\sigma_\varphi/6 \quad ,$$

где $k = P/\pi a^2 p$. Очевидно, что при $k=1$ имеем решение задачи о действии только внутреннего давления.

Интенсивность касательных напряжений определяется формулой:

$$T = \sqrt{4 - 2k + k^2} \sigma_\varphi / 2\sqrt{3} \quad .$$

Труба под действием внутреннего давления и крутящего момента. В рассматриваемой задаче к имеющимся напряжениям и скоростям деформаций от действия внутреннего давления должны прибавить напряжения и скорости деформаций от действия крутящего момента. Будем иметь:

для напряжений

$$\sigma_r \approx 0 \quad , \quad \sigma_\varphi = pa/h \quad , \quad \sigma_z = pa/2h \quad ,$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0 \quad , \quad \tau_{\varphi z} = M/2\pi a^2 h \quad ;$$

для скоростей деформаций

$$\xi_r = -f(T, t) \sigma_\varphi / 4 \quad , \quad \xi_\varphi = -\xi_r \quad , \quad \xi_z = 0 \quad ,$$

$$\eta_{r\varphi} = \eta_{rz} = 0 \quad , \quad \eta_{\varphi z} = f(T, t) \tau_{\varphi z} \quad .$$

Величина $\eta_{\varphi z}$ представляет собой скорость угла закручивания на единицу длины трубы в осевом направлении. Интенсивность касательных напряжений здесь может быть записана в форме:

$$T = (\sigma_\varphi / 2) \sqrt{1 + (M / \pi a^3 p)^2} \quad .$$

Труба под действием осевой силы и крутящего момента. В рассматриваемой задаче суммируются напряжения и скорости деформаций, имеющие место при растяжении и кручении. Будем иметь:

для напряжений

$$\sigma_r = 0 \quad , \quad \sigma_\varphi = 0 \quad , \quad \sigma_z = P / 2\pi a h \quad ,$$

$$\tau_{r\varphi} = \tau_{rz} = 0 \quad , \quad \tau_{\varphi z} = M / 2\pi a^2 h \quad ;$$

для скоростей деформаций

$$\xi_r = -f(T, t) \sigma_z / 6 \quad , \quad \xi_\varphi = \xi_r \quad , \quad \xi_z = -2\xi_r \quad ,$$

$$\eta_{r\varphi} = \eta_{rz} = 0 \quad , \quad \eta_{\varphi z} = f(T, t) \tau_{\varphi z} \quad .$$

Экспериментальные исследования ползучести тонкостенных труб. Проверка гипотез теорий ползучести. Непосредственное изучение ползучести при сложном напряженном состоянии с проверкой основных гипотез, используемых при построении теорий ползучести, осуществляется в основном в опытах деформирования тонкостенных труб. Нагружая трубу в различных комбинациях внутренним давлением p , осевым усилием P и скручивающим моментом M (как правило, это $P + M$, $p + P$, $p + M$ – опыты), можно вызвать в стенке трубы произвольное плоское (вернее,

почти плоское) однородное напряженное состояние. Сопоставляя измеренные скорости деформаций с действующими напряжениями, судят о существующих между ними зависимостями и, соответственно, о том, в какой мере экспериментальные данные согласуются с уравнениями установившейся ползучести, полученными на основании исходных положений.

Большая часть опытов с трубами реализована в условиях простого нагружения. В этом случае главные направления тензора напряжений и тензора скоростей деформаций ползучести совпадают. Соответственно, в подобных опытах можно проверить, в какой мере выполняются:

- третье положение о пропорциональности главных касательных напряжений главным скоростям деформаций сдвига (или о подобии тензоров напряжений и скоростей деформаций сдвига, или о подобии диаграмм Мора);

- четвертое положение о существовании зависимости типа $H = f(T)T$, характерной для данного материала при данной температуре и всевозможных напряженных состояниях.

Отметим, что экспериментальные данные по ползучести при сложном напряженном состоянии характеризуются большим разбросом, объясняемым высокой чувствительностью процесса к самым малым отклонениям в условиях опыта. Несмотря на односторонние отклонения, наблюдавшиеся различными авторами, можно считать, что опытные данные, в общем, хорошо подтверждают наличие зависимости между интенсивностями H и T , хотя не всегда эта зависимость следует степенному закону. Более заметны отклонения от условия подобия тензоров напряжений и скоростей деформаций сдвига, причем при невысоких напряжениях экспериментальные данные лучше согласуются с теоретическими расчетами.

Вопрос о совпадении главных осей тензоров напряжений и скоростей деформаций ползучести можно решить только по опытам при сложном нагружении, однако данных по экспериментальному изучению ползучести при сложном нагружении на настоящее время немного. Из сравнения экспериментальных данных по величинам суммарных деформаций ползучести с теоретическими расче-

тами, следующими из разных типов теорий ползучести, можно сделать следующие выводы:

- уравнения теории течения приводят к значениям деформаций ползучести, меньшим, чем экспериментальные, а уравнения теории упрочнения – к большим;

- при использовании упомянутых теорий погрешность может достигать 100 % и более.

13.2. Установившаяся ползучесть толстостенной трубы под действием внутреннего давления

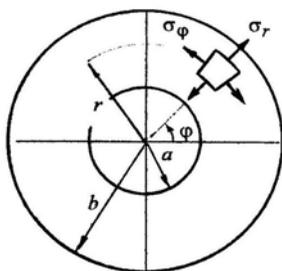


Рис. 13.1

Задачу будем решать как задачу плоской деформации, считая, что деформация ползучести в осевом направлении z отсутствует.

Выпишем полную систему уравнений, определяющую решение поставленной задачи (рис. 13.1):

- дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\phi}{r} = 0 ;$$

- граничные условия в напряжениях

$$\sigma_r|_{r=a} = -p \quad , \quad \sigma_r|_{r=b} = 0 ;$$

- зависимости типа Коши

$$\xi_r = \frac{dv}{dr} \quad , \quad \xi_\phi = \frac{v}{r} \quad , \quad \xi_z = 0 \quad ,$$

где $v = v(r)$ – скорость радиального перемещения;

- уравнения теории течения ползучести

$$\begin{aligned}\xi_r &= \Phi(\sigma_i)(\sigma_r - \sigma) \quad , \\ \xi_\varphi &= \Phi(\sigma_i)(\sigma_\varphi - \sigma) \quad , \\ \xi_z &= \Phi(\sigma_i)(\sigma_z - \sigma) \quad .\end{aligned}$$

Легко видеть, что условие $\xi_z = 0$, определяющее деформированное состояние в данной задаче как плоское, приводит к соотношению

$$\sigma_z - \sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\varphi) / 2 \quad ,$$

т.е. напряжение σ_z не является независимой неизвестной в данной задаче и может быть определено после ее решения. Оставшиеся уравнения могут быть сведены к одному уравнению относительно скорости $v = v(r)$ (решение в скоростях перемещений), однако это уравнение будет достаточно сложным.

Решение задачи можно существенно упростить, строя его по следующей схеме.

Преобразуем условия несжимаемости материала

$$\xi_r + \xi_\varphi + \xi_z = 0 \quad ,$$

подставляя в него соответствующие значения скоростей деформаций. Будем иметь:

$$\frac{dv}{dr} + \frac{v}{r} = 0 \quad .$$

Решение полученного уравнения имеет вид $v(r) = C/r$, где C – постоянная интегрирования.

С учетом полученного значения скорости радиального перемещения $v(r)$, можно определить скорости деформаций ξ_r , ξ_φ и интенсивность скоростей деформаций ξ_i в виде:

$$\xi_r = -\xi_\varphi = -C/r^2, \quad \xi_i = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C}{r^2}.$$

Вычисляя интенсивность напряжений σ_i , получаем:

$$\sigma_i = \frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\varphi - \sigma_r).$$

Поскольку интенсивности ξ_i и σ_i связаны между собой зависимостью, являющейся характеристикой материала, есть возможность представить разность напряжений $(\sigma_\varphi - \sigma_r)$ через постоянную C и параметры ползучести. Используя, например, степенную зависимость $\xi_i = a\sigma_i^n$, будем иметь:

$$\frac{2}{\sqrt{3}} \frac{C}{r^2} = a \left[\frac{\sqrt{3}}{2} (\sigma_\varphi - \sigma_r) \right]^n \Rightarrow \sigma_\varphi - \sigma_r = 2\bar{a} \left(\frac{2C}{r^2} \right)^\mu,$$

где введены обозначения $\bar{a} = a^{-1/n} \cdot 3^{-(\mu+1)/2}$, $\mu = 1/n$.

Исключая теперь разность $(\sigma_\varphi - \sigma_r)$ из дифференциального уравнения равновесия, получаем:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = 2 \frac{\bar{a}}{r} \left(\frac{2C}{r^2} \right)^\mu = \frac{A}{r^{2\mu+1}},$$

где в рассмотрении введена новая постоянная $A = 2\bar{a}(2C)^\mu$.

Решение дифференциального уравнения дает:

$$\sigma_r = -\frac{A}{2\mu} \cdot \frac{1}{r^{2\mu}} + B.$$

Значения постоянных A и B отыскиваются из граничных условий. Будем иметь:

$$A = \frac{p \cdot 2\mu \cdot b^{2\mu}}{\beta^{2\mu} - 1} = \bar{p} \cdot 2\mu \cdot b^{2\mu}, \quad B = \frac{A}{2\mu} \cdot \frac{1}{b^{2\mu}} = \bar{p},$$

где $\bar{p} = p / (\beta^{2\mu} - 1)$, $\beta = b/a$.

Учитывая найденные значения постоянных, определяем напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \bar{p} \left[1 - (b/r)^{2\mu} \right], \\ \sigma_\varphi &= \bar{p} \left[1 - (1 - 2\mu)(b/r)^{2\mu} \right], \\ \sigma_z &= \bar{p} \left[1 - (1 - \mu)(b/r)^{2\mu} \right]. \end{aligned}$$

Распределение напряжений σ_r и σ_φ для разных n при $\beta = 2$ показано на рис. 13.2. Для сравнения на этом же рисунке пунктиром показаны напряжения в упругом случае ($n = 1$).

Отметим, что с изменением n распределение радиального напряжения меняется незначительно.

Тангенциальное напряжение меняется резко: максимум напряжения перемещается с внутренней поверхности трубы в упругой задаче ($n = 1$) на внешнюю при ползучести.

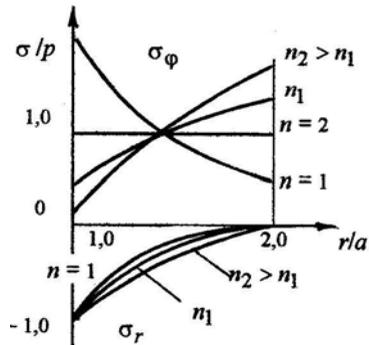


Рис. 13.2

При $n = 2$ напряжение σ_φ постоянно. С увеличением n распределение напряжений σ_r и σ_φ стремится к идеально-пластическому распределению.

Покажем, что в рассматриваемой задаче условие $\varepsilon_z = 0$ и, соответственно, $\xi_z = 0$ (плоское деформированное состояние) реализуется в случае, когда осевая сила равна силе внутреннего давления

на днища цилиндра, а именно при $N_z = 2\pi \int_a^b \sigma_z r dr = \pi a^2 p$. Дейст-

вительно, записанное равенство легко проверяется после подстановки в него полученной формулы для σ_z , интегрирования и некоторых простых преобразований. Отметим, что аналогичный результат имеет место и в теории пластичности. В теории упругости осевая сила, равная силе внутреннего давления на днища цилиндра, не обеспечивает состояние плоской деформации.

Радиальное перемещение точек цилиндра $u_r = v(r)t = Ct/r$, возникающее за счет ползучести материала, получим, определяя постоянную C из ранее записанного соотношения при известном значении постоянной A :

$$2\bar{a}(2C)^\mu = A = \bar{p} 2\mu b^{2\mu} .$$

Легко видеть, что и радиальное перемещение точек цилиндра, и, соответственно, скорость радиального перемещения имеют наибольшие значения на внутренней поверхности цилиндра.

Об оценке прочности труб в условиях ползучести при действии внутреннего давления. Цилиндрические трубы (трубопроводы), нагруженные внутренним давлением, являются важнейшим конструктивным элементом многих машин и установок. К толстостенным относят трубопроводы, для которых параметр $\beta = b/a$ имеет значение от 1,5 и выше.

Для оценки прочности труб в условиях ползучести используют достаточно простые формулы, основанные на имеющихся теоретических и экспериментальных данных и представляющие интерес для разных отраслей машиностроения.

При испытаниях толстостенных труб, так же как и при испытаниях тонкостенных, наблюдаются отклонения от условия подобия тензоров напряжений и скоростей деформаций сдвига, причем при высоких напряжениях эти отклонения носят существенный характер. Для получения более точных результатов при сопоставлении опыта и расчетных данных рекомендуется использовать вместо на-

пряжений среднее значение интенсивности касательных напряжений \bar{T} , которое может быть найдено с достаточной уверенностью. По этой же причине среднее значение \bar{T} используется и в условиях прочности.

Ранее были получены формулы, определяющие распределение напряжений по толщине трубы при действии внутреннего давления. Используя их, получим средние значения напряжений:

$$\bar{\sigma}_r = -p/2, \quad \bar{\sigma}_\varphi = p/(\beta-1), \quad \bar{\sigma}_z = p/(\beta^2-1).$$

Радиальное напряжение σ_r монотонно меняется от $-p$ на внутренней поверхности трубы до нуля на наружной; отсюда и следует выписанное соотношение $\bar{\sigma}_r = -p/2$. По средним напряжениям вычисляем среднее значение интенсивности касательных напряжений \bar{T} :

$$\bar{T} = \frac{p}{2\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{\beta^2 + \beta + 1}}{\beta - 1}.$$

Для труб с параметром $\beta < 2$ можно использовать приближенную формулу

$$\bar{T} \approx (p/4)(\beta+1)/(\beta-1).$$

Сравнивая среднюю интенсивность касательных напряжений \bar{T} в трубе с допустимой интенсивностью касательных напряжений при растяжении $T = \sigma_{\text{доп}}/\sqrt{3}$, для труб с параметром $\beta < 2$ получим расчетные формулы:

$$p = 4\sigma_{\text{доп}}(\beta-1)/\sqrt{3}(\beta+1) \quad \text{или} \quad h = 2ap/(2,3\sigma_{\text{доп}} - p).$$

При построении условия прочности можно использовать не среднее значение интенсивности касательных напряжений, а близ-

кую ей величину среднего максимального касательного напряжения

$$\bar{\tau}_{\max} = (\bar{\sigma}_{\varphi} - \bar{\sigma}_r) / 2 \quad .$$

Записав условие прочности в виде

$$(\bar{\sigma}_{\varphi} - \bar{\sigma}_r) / 2 = \sigma_{\text{доп}} / 2 \quad ,$$

будем иметь:

$$p = 2\sigma_{\text{доп}}(\beta - 1) / (\beta + 1) \quad \text{или} \quad h = 2ap / (2\sigma_{\text{доп}} - p) \quad .$$

При выборе допускаемого напряжения $\sigma_{\text{доп}}$ исходят либо из условного предела ползучести $\sigma_{\text{пп}}$ по допускаемой деформации ползучести за срок службы, либо из предела длительной прочности $\sigma_{\text{дп}}$. В первом случае будем иметь $\sigma_{\text{доп}} = \sigma_{\text{пп}} / n_1$, во втором – $\sigma_{\text{доп}} = \sigma_{\text{дп}} / n_2$, где n_1 и n_2 – коэффициенты запаса прочности.

Расхождение между расчетными формулами, построенными на среднем значении \bar{T} , и экспериментальными данными по ползучести составляет около 8 %. Это расхождение компенсируется соответствующим увеличением запаса прочности n_1 . Использование критерия с $\bar{\tau}_{\max}$ приводит к расхождению примерно на 15 %; здесь расхождение компенсируется соответствующим выбором запаса прочности n_2 . Опытные данные по длительной прочности трубопроводов лучше согласуются с формулами, полученными при применении критерия с $\bar{\tau}_{\max}$.

13.3. Установившаяся ползучесть толстостенной сферы под действием внутреннего давления

Задачу будем решать в сферической системе координат r, φ, χ . Напряжения $\sigma_r, \sigma_{\varphi}, \sigma_{\chi}$ вследствие симметрии задачи являются главными напряжениями, причем $\sigma_{\varphi} = \sigma_{\chi}$.

Полная система уравнений, определяющая решение поставленной задачи, имеет следующий вид:

- дифференциальное уравнение равновесия

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{2(\sigma_r - \sigma_\varphi)}{r} = 0 \quad ;$$

- граничные условия в напряжениях

$$\sigma_r|_{r=a} = -p \quad , \quad \sigma_r|_{r=b} = 0 \quad ;$$

- зависимости типа Коши

$$\xi_r = \frac{dv}{dr} \quad , \quad \xi_\varphi = \xi_\chi = \frac{v}{r} \quad ,$$

где $v = v(r)$ – скорость радиального перемещения;

- уравнения теории течения ползучести

$$\xi_k = \Phi(\sigma_i)(\sigma_k - \sigma) \quad , \quad k = r, \varphi, \chi \quad .$$

Решение рассматриваемой задачи проведем по схеме, принятой при решении задачи о толстостенном цилиндре.

Условие несжимаемости материала

$$\xi_r + 2\xi_\varphi = 0$$

с учетом вышеприведенных соотношений для скоростей деформаций позволяет найти скорость радиального смещения в виде $v = C/r^2$.

Определение разности напряжений $(\sigma_\varphi - \sigma_r)$ приводит к следующему результату:

$$\sigma_{\varphi} - \sigma_r = a^{-\mu} \left(\frac{2C}{r^3} \right)^{\mu} = \frac{A}{r^{3\mu}} \quad , \quad A = (2C)^{\mu} a^{-\mu} \quad .$$

Исключая разность $(\sigma_{\varphi} - \sigma_r)$ из дифференциального уравнения равновесия и интегрируя это уравнение, находим:

$$\sigma_r = -\frac{2A}{3\mu} \cdot \frac{1}{r^{3\mu}} + B \quad .$$

Постоянные интегрирования определяем из граничных условий. Получим:

$$A = p \cdot \frac{3\mu}{2} \cdot \frac{(ab)^{3\mu}}{b^{3\mu} - a^{3\mu}} = \bar{p} \cdot \frac{3\mu}{2} \cdot b^{3\mu} \quad ,$$

$$B = \frac{2A}{3\mu} \cdot \frac{1}{b^{3\mu}} = \bar{p} \quad .$$

Для напряжений окончательно имеем:

$$\sigma_r = \bar{p} \left[1 - \left(\frac{b}{r} \right)^{3\mu} \right] \quad , \quad \sigma_{\varphi} = \sigma_{\chi} = \bar{p} \left[1 + \frac{3\mu - 2}{2} \left(\frac{b}{r} \right)^{3\mu} \right] \quad .$$

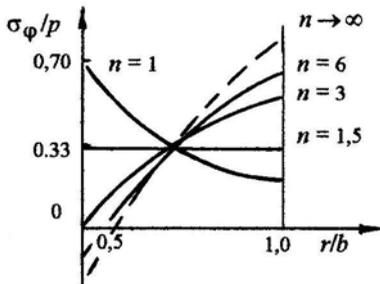


Рис. 13.3

Распределение напряжения σ_{φ} по толщине сферы для различных значений n при $a/b = 0,5$ показано на рис. 13.3. С возрастанием n распределение приближается к идеально-пластическому. Действительно, при $n \rightarrow \infty$ для напряжений будем иметь:

$$\sigma_r = -p \ln(r/b) / \ln(a/b) \quad ,$$

$$\sigma_\varphi = -p [0,5 + \ln(r/b)] / \ln(a/b) \quad .$$

Полученные соотношения определяют идеальное пластическое распределение напряжений, однако здесь оно реализуется для материала с достаточно большим значением n ($n \rightarrow \infty$) при любом значении внутреннего давления.

Радиальное напряжение σ_r по сечению меняется незначительно.

13.4. Ползучесть вращающихся дисков

Первое исследование ползучести вращающихся дисков проведено Одквистом в 1934 г., который рассмотрел диск постоянной толщины с отверстием. Одквист исходил из уравнений теории течения при степенном законе ползучести с постоянной характеристикой ползучести B . Соответствующая система дифференциальных уравнений была решена численным интегрированием при частном значении показателя ползучести $n = 5$. Далее задача решалась рядом авторов с использованием различных теорий ползучести методами последовательных приближений. Во всех работах расчет дисков связан с необходимостью выполнения значительного объема вычислений. Большие упрощения в расчет дисков вносит переход от критерия, использующего интенсивность касательных напряжений T , к критерию с τ_{\max} .

Рассмотрим тонкий, вращающийся с постоянной угловой скоростью ω диск, симметричный относительно срединной плоскости. Внутренний радиус диска – r_1 , наружный – r_2 . На внутреннем радиусе приложено равномерно распределенное давление p_1 , которое можно трактовать, как результат посадки диска на вал с натягом, на наружном – p_2 , которое отражает воздействие на диск присоединенных к нему лопаток. Поскольку общее число лопаток

велико, давление p_2 можно считать также равномерно распределенным.

Принимаем, что напряжение $\sigma_z = 0$, а напряжения σ_r и σ_φ равномерно распределены по его толщине $h = h(r)$: напряженное состояние диска – плоское.

Для радиального перемещения введем обозначение $u = u(r, t)$, а для скорости радиального перемещения – $v = v(r, t)$. Вследствие осевой симметрии для деформаций и скоростей деформаций в радиальном и тангенциальном (окружном) направлениях имеем:

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \partial u / \partial r, & \varepsilon_\varphi &= u / r; \\ \xi_r &= \partial v / \partial r, & \xi_\varphi &= v / r.\end{aligned}$$

Исключая перемещение u из первых зависимостей, получаем условия совместности деформаций в виде:

$$\frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r} + \frac{\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r}{r} = 0.$$

Дифференциальное уравнение равновесия имеет известный вид:

$$\frac{\partial}{\partial r}(rh\sigma_r) - h\sigma_\varphi + \gamma\omega^2 hr^2 / g = 0,$$

где γ – удельный вес материала диска.

Решение задачи построим в предположении равномерного нагрева диска и степенной зависимости деформации ползучести от напряжения $\varepsilon^c = \Omega\sigma^n$.

Проинтегрируем дифференциальное уравнение равновесия элемента диска в пределах от r_1 до r , учитывая, что на внутреннем контуре при $r = r_1$ имеем $\sigma_r = -p_1$. Получим:

$$\sigma_r r h + p_1 r_1 h_1 - \int_{r_1}^r \sigma_\varphi h dr + \Phi = 0 \quad , \quad (13.1)$$

где $\Phi = (\gamma \omega^2 / g) \int_{r_1}^r h r^2 dr$. Отметим, что интеграл в формуле для

функции Φ представляет собой момент инерции части радиально-го сечения диска относительно его оси, и $\Phi = 0$ при $r = r_1$.

Полагая в преобразованном уравнении равновесия (13.1) $r = r_2$ и учитывая, что на внешнем контуре $\sigma_r = p_2$, будем иметь:

$$p_2 r_2 h_2 + p_1 r_1 h_1 - \int_{r_1}^{r_2} \sigma_\varphi h dr + \Phi_2 = 0 \quad . \quad (13.2)$$

Здесь Φ_2 – значение функции Φ на внешнем контуре.

Используя теорию ползучести деформационного типа и принимая во внимание, что рассматриваемое напряженное состояние – плоское ($\sigma_z = 0$), соотношения между деформациями ползучести и напряжениями запишем в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \chi (2\sigma_r - \sigma_\varphi) / 2 \quad , \\ \varepsilon_\varphi &= \chi (2\sigma_\varphi - \sigma_r) / 2 \quad , \end{aligned}$$

где $\chi = \varepsilon_i / \sigma_i$; $\sigma_i = \sqrt{\sigma_\varphi^2 - \sigma_\varphi \sigma_r + \sigma_r^2}$.

С учетом степенной зависимости деформации ползучести от напряжения $\varepsilon^c = \Omega \sigma^n$ переменную χ можем переписать в форме:

$$\chi = \sigma_i^{n-1} \Omega = (\sigma_\varphi^2 - \sigma_\varphi \sigma_r + \sigma_r^2)^{(n-1)/2} \Omega \quad .$$

Подставим значения деформаций в условие совместности деформаций и разделим в нем каждое слагаемое на величину $\chi(2\sigma_\varphi - \sigma_r)$. После некоторых преобразований будем иметь:

$$\frac{(\partial/\partial r) [\chi(2\sigma_\varphi - \sigma_r)]}{\chi(2\sigma_\varphi - \sigma_r)} = -\frac{3}{r} \cdot \frac{1-\beta}{2-\beta}, \quad \beta = \sigma_r / \sigma_\varphi.$$

Интегрируя уравнение, получим:

$$\ln [\chi(2\sigma_\varphi - \sigma_r)] - \ln C = -3 \int_{r_1}^r \frac{1-\beta}{2-\beta} \cdot \frac{dr}{r}$$

или

$$\chi(2\sigma_\varphi - \sigma_r) = C \exp \left(-3 \int_{r_1}^r \frac{1-\beta}{2-\beta} \cdot \frac{dr}{r} \right),$$

где C – некоторая функция времени. С учетом полученного ранее значения переменной χ и введенного обозначения $\beta = \sigma_r / \sigma_\varphi$, будем иметь:

$$\sigma_\varphi^n (1 - \beta + \beta^2)^{(n-1)/2} (2 - \beta) \Omega = C \exp \left(-3 \int_{r_1}^r \frac{1-\beta}{2-\beta} \cdot \frac{dr}{r} \right).$$

Представленное соотношение можно разрешить относительно тангенциального напряжения σ_φ :

$$\sigma_\varphi = (C/\Omega)^{1/n} \eta, \quad (13.3)$$

где

$$\eta = \left[\exp \left(-3 \int_{r_1}^r \frac{1-\beta}{2-\beta} \cdot \frac{dr}{r} \right) / (1-\beta+\beta^2)^{(n-1)/2} (2-\beta) \right]^{1/n} .$$

Система трех уравнений (13.1) – (13.3) определяет три неизвестные величины: напряжения σ_r , σ_φ и функцию времени C .

Для диска без отверстия в центре диска при $r=0$ напряжения σ_r и σ_φ равны и, соответственно, $\beta=1$. Подынтегральное выражение в числителе соотношения, определяющего η в этом случае имеет неопределенность. Можно показать, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{1-\beta}{2-\beta} \cdot \frac{1}{r} = 0 ,$$

и тогда $\eta=1$ при $r=0$.

Функцию времени C определим, подставляя значение напряжения σ_φ в соответствии с формулой (13.3) в соотношение (13.2). Будем иметь:

$$C^{1/n} = (p_2 r_2 h_2 + p_1 r_1 h_1 + \Phi_2) \Omega^{1/n} / \int_{r_1}^{r_2} h \eta dr$$

и, соответственно,

$$\sigma_\varphi = (p_2 r_2 h_2 + p_1 r_1 h_1 + \Phi_2) \eta / \int_{r_1}^{r_2} h \eta dr . \quad (13.4)$$

Решая теперь уравнение (13.1) относительно σ_r , с учетом найденного значения σ_φ , получаем:

$$\sigma_r = \frac{1}{rh} \left(-p_1 r_1 h_1 + \frac{p_2 r_2 h_2 + p_1 r_1 h_1 + \Phi_2}{\int_{r_1}^{r_2} h \eta dr} \int_{r_1}^r h \eta dr - \Phi \right). \quad (13.5)$$

Проверим, к каким результатам приводят полученные формулы (13.4) и (13.5) для напряжений в центре диска без отверстия (при $r = r_1 = 0$ имеем: $\eta = 1$, $p_1 = 0$, $\Phi = 0$). Для напряжения σ_φ имеем:

$$\sigma_\varphi |_{r=0} = (p_2 r_2 h_2 + \Phi_2) / \int_{r_1}^{r_2} h \eta dr .$$

При вычислении напряжения σ_r необходимо раскрыть имеющую место неопределенность типа 0/0:

$$\sigma_r |_{r=0} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{1}{rh} \left[(p_2 r_2 h_2 + \Phi_2) \int_{r_1}^r h \eta dr / \int_{r_1}^{r_2} h \eta dr \right] .$$

После некоторых преобразований находим:

$$\sigma_r |_{r=0} = (p_2 r_2 h_2 + \Phi_2) / \int_{r_1}^{r_2} h \eta dr .$$

Можно видеть, что действительно имеем равенство напряжений $\sigma_r |_{r=0} = \sigma_\varphi |_{r=0}$, как и должно быть.

Формулы (13.4) и (13.5) являются определяющими при решении поставленной задачи о вращающемся диске. По ним можно

рассчитать напряжения σ_r и σ_φ . Далее следует определение деформаций ε_r и ε_φ по зависимостям используемой теории ползучести деформационного типа, преобразованных с учетом значения параметра χ :

$$\varepsilon_r = \frac{1}{2} \left(\sigma_\varphi^2 - \sigma_\varphi \sigma_r + \sigma_r^2 \right)^{(n-1)/2} \Omega (2\sigma_r - \sigma_\varphi) \quad ,$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{2} \left(\sigma_\varphi^2 - \sigma_\varphi \sigma_r + \sigma_r^2 \right)^{(n-1)/2} \Omega (2\sigma_\varphi - \sigma_r) \quad .$$

И, наконец, по соотношению $u = \varepsilon_r r$ можно найти радиальные перемещения точек вращающегося диска.

Представленный алгоритм расчета реализуется с применением метода последовательных приближений. В исходном нулевом приближении принимается, что напряжения σ_r и σ_φ распределены по радиусу так же, как в упругой задаче; такой выбор нулевого приближения обеспечивает достаточно быструю сходимость процесса. После подсчета напряжений в нулевом приближении определяются значения β . При известных значениях β по соответствующей формуле вычисляется функция η . Далее по формулам (13.4) и (13.5) можно рассчитать напряжения σ_r и σ_φ в первом приближении. Отметим, что в дисках без центрального отверстия на большей части радиуса (от центра до обода) очень часто окружное и радиальное напряжения почти постоянны и равны между собой. В таком случае расчет значительно упрощается, поскольку на указанном участке в первом приближении можно допустить, что величины β и η равны единице. Напряжения во втором, третьем и т.д. приближениях подсчитываются так же, как и в первом, причем за исходные принимают напряжения предыдущего приближения. Процесс является быстросходящимся, и второе приближение, как правило, дает хорошую степень точности. В случае ориентировочного расчета можно ограничиться даже первым приближением.

14. Длительная прочность при одноосном деформировании

14.1. Разрушения при ползучести

Расчет конструкций на длительную прочность проводится, как правило, с целью определения уровня напряжения, при котором гарантированы заданная долговечность или срок работы конструкции до разрушения при заданном уровне напряжений. При этом возможны два подхода: критериальный и кинетический. При критериальном подходе оценка длительной прочности ассоциируется с понятием некоторого предельного напряжения, при кинетическом рассматривается кинетика накопления повреждений, приводящих, в конечном счете, к разрушению.

Критериальный подход к оценке длительной прочности

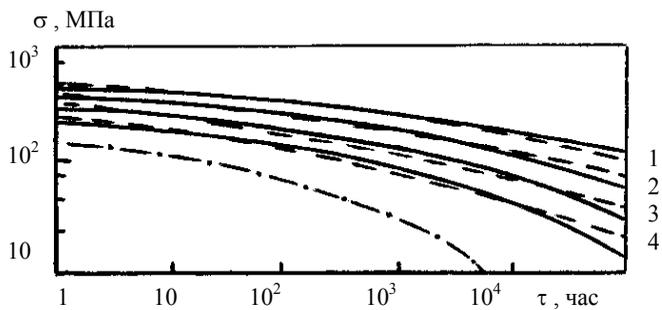
Критериальный подход, достаточно широко используемый в расчетной практике, предполагает, что повреждение материала при длительной эксплуатации происходит вследствие развития деформации ползучести и, в конце концов, приводит к разрушению. Разрушения при ползучести имеют различный характер в зависимости от температуры, напряжения и длительности испытания. Анализ соответствующих экспериментальных данных важен при выборе надежных размеров детали и условий ее эксплуатации.

Отметим, что поскольку разрушение при ползучести наступает при любом по величине напряжении, наиболее существенным показателем является зависимость разрушающего напряжения от времени – длительная прочность. В этом плане, как уже отмечалось, понятие предела прочности (в нашем случае – условного) теряет смысл, и вводится другая характеристика – предел длительной прочности – напряжение, вызывающее разрушение за заданный срок службы. Таким образом, предел длительной прочности для рассматриваемого материала зависит от температуры испытания и отрезка времени до момента разрушения (срока службы).

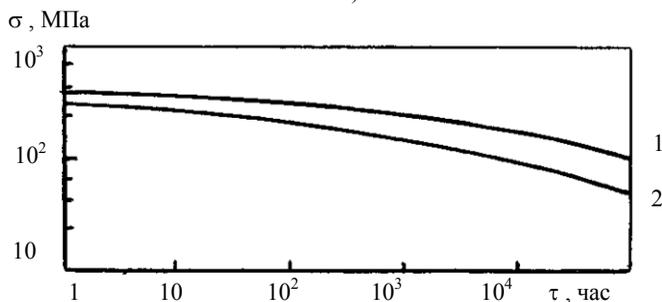
Зависимость разрушающего напряжения от времени испытания при постоянной температуре называют кривой длительной прочно-

сти или изотермой долговечности. Предел длительной прочности определяют по кривой длительной прочности в зависимости от срока службы элемента конструкции.

Представительные изотермы долговечности жаропрочных сталей X8CrNiNb 1613 и 30CrMoV9 в логарифмических координатах показаны соответственно на рис. 14.1, *а* (кривые 1 – 4 — T равно 600, 650, 700, 750 °С) и 14.1, *б* (1 – 2 — T равно 500, 550 °С).



а)



б)

Рис. 14.1

Законы (модели) долговечности при постоянной температуре. Анализ имеющихся в литературе экспериментальных данных и опыт эксплуатации ряда жаропрочных сталей при температурах, не превышающих 550–600 °С, свидетельствует о том, что кривые длительной прочности таких сталей на базе до 10^5 ч в логарифмической системе координат можно аппроксимировать линиями, близкими к прямым, или плавными кривыми линиями с малой кри-

визной (см. рис. 14.1). Именно это обстоятельство явилось причиной широкого распространения различного рода функциональных зависимостей, связывающих напряжение и время до разрушения.

Для описания кривых длительной прочности в логарифмических координатах чаще других применяют степенную зависимость $\tau = B\sigma^{-m}$, а в полулогарифмических – экспоненциальную зависимость $\tau = Ae^{-\gamma\sigma}$. В приведенных соотношениях величины B , m и A , γ – постоянные коэффициенты, значения которых определяются на основании экспериментальных данных при ограниченной базе испытаний. В практике обработки результатов испытаний на длительную прочность используют также зависимости, состоящие из комбинации степенной и экспоненциальной функций, например, $\tau = a\sigma^b e^{-c\sigma}$ (a , b , c – постоянные), и зависимости, включающие функции других видов. Прогнозирование осуществляется по той или иной зависимости с найденными значениями коэффициентов.

Среди наиболее часто используемых закономерностей (моделей длительной прочности) имеем:

- степенной закон Нортона $\tau = B\sigma^{-m}$;
- экспоненциально-степенной закон $\tau/\tau_* = (\sigma/\sigma_*)^{-n} \exp(-\sigma/\sigma_*)$ при различных значениях параметра n ($n = 0$ – модель С.Н. Журкова);
- зависимость, используемая в США, аппроксимирующая опытные данные неполной квадратичной параболой;
- зависимость, принятая в ЦКТИ им. Ползунова (парабола степени 3/2) и др.

Приведенные выше соотношения устанавливают зависимость предела длительной прочности от времени разрушения для данного материала при определенной температуре (для каждого уровня температуры имеется своя кривая длительной прочности).

Выводы о преимуществах той или иной зависимости обычно делаются на основании того, в какой мере прогнозирование с использованием выбранной модели соответствует экспериментальным данным на выбранной базе испытаний. Методологическим

недостатком всех существующих на сегодня моделей долговечности можно считать их апробацию на тривиальных экспериментах продолжительностью менее 10^4 часов (часто временная база иллюстрируемых экспериментов не превышает одного года), поскольку при продолжительности длительных испытаний около 10^3 часов, столь традиционной для механики материалов, можно доказать пригодность любой из существующих моделей долговечности.

Отметим, что один и тот же закон долговечности может давать разные отклонения экстраполируемых характеристик для разных материалов, поскольку кривые длительной прочности для них могут иметь разную форму. Естественно, выводы по отсеиванию “неподходящих” моделей безоговорочно приемлемы только лишь для рассматриваемого материала (жаропрочной стали).

Параметрические зависимости длительной прочности. На настоящее время при описании длительной прочности предпочтение отдается температурно-временным зависимостям, функционально связывающим напряжение, температуру и время и получившим название параметрических моделей. Несмотря на их значительное число (предложено свыше 50 параметрических моделей) наиболее используемыми являются следующие:

- Ларсона – Миллера – $f_1(\sigma) = T(C + \lg \tau)$, где C – постоянная, принимаемая, по предложению авторов, равной 20;

- Мэнсона – Хэферда – $f_2(\sigma) = (\lg \tau - \lg \tau_a) / (T - T_a)$, где τ_a , T_a – постоянные;

- Опп – Шерби – Дорна – $f_3(\sigma) = \lg \tau - (D/T)$; D – постоянная.

Принято считать, что зависимости Ларсона – Миллера и Опп – Шерби – Дорна построены на физически обоснованных принципах (на уравнении скоростей химических реакций Аррениуса), а зависимости Мэнсона – Хэферда и др. – на формальных (геометрических) предположениях.

Параметрический подход позволяет достаточно просто осуществлять экстраполяцию кратковременных диаграмм долговечности на более длительные сроки. Методология прогнозирования с использованием параметрических зависимостей исходит из началь-

ной гипотезы некоторого физического или геометрического подобия диаграмм, что эквивалентно допущению о наличии того или иного “семейства кривых” долговечности. При этом само прогнозирование чаще всего выполняется за счет графического совмещения соответствующим образом перестроенных кривых данного семейства. Однако во всех без исключения параметрических методах эта процедура редукции опытных данных, как и сам факт наличия семейства кривых, априори полагаются как сами собой разумеющиеся, хотя статистические методы позволяют на требуемом уровне обоснованности корректно ответить на вопрос о правомерности редукции диаграмм длительной прочности с помощью конкретного параметрического метода.

Отметим, что все приведенные соотношения определяют тот или иной способ аппроксимации опытных данных по длительной прочности материалов и назначением таких соотношений является прогнозирование поведения материала на большие сроки эксплуатации, что имеет важное практическое значение, так как определение характеристик длительной прочности на больших базах по времени оказывается чрезвычайно трудоемкой задачей. Очевидно, что параметрические подходы дают большие возможности в этом вопросе, поскольку, например, позволяют определить характеристики длительной прочности на большой базе по времени и сравнительно низких температурах по результатам относительно кратковременных испытаний, но при более высоких температурах. В литературе известны и другие методы экстраполяции¹. Отметим, однако, что на настоящее время определенных выводов в пользу какого-либо метода не сделано, поскольку все они справедливы, как правило, при соблюдении определенных условий и только для тех материалов и температурно-временных интервалов, для которых проведены контрольные эксперименты.

¹ Адамович В.К., Паничкин Ю.Н. К вопросу об экстраполяции результатов испытаний на длительную прочность // Проблемы прочности. 1972. № 2. С.32 – 36.

Гольденблат И. И., Бажанов В.Л., Копнов В.А. Длительная прочность в машиностроении. М.: Машиностроение, 1977. – 248 с.

Ковпак В.И. Прогнозирование жаропрочности металлических материалов. Киев: Наукова думка, 1981. – 240 с.

То же самое можно сказать и о физических теориях длительной прочности (Журков С.Н., Гегузин Я.Е., Пинес Б.Я. и Сиренко А.Ф., Трефилов В.И. и т.д), которые позволяют понять физическую сущность изучаемого явления, но мало пригодны для инженерных расчетов, когда необходимы конкретные числовые данные о долговечности при заданных температурах и нагрузках.

Сравнительно простая методология многовариантного температурно-временного прогнозирования деформационно-прочностных характеристик металлических и полимерных материалов предложена в работе¹. Методология изложена для случая усталостной и длительной прочности, однако пригодна и для прогнозирования ползучести, релаксации и т.д. Основой методологии является принцип аффинного подобия первичных кривых деформирования или разрушения конструкционных материалов (или метод преобразования масштабов), используемый для построения “единой кривой”, позволяющей осуществлять многовариантное температурно-временное прогнозирование. Представленная методика использована в работе² для прогнозирования ползучести составных клееных деревянных балок и в работе³ для прогнозирования длительной прочности жаропрочных сталей и сплавов.

Модели накопления рассеянных повреждений

При кинетическом подходе к оценке длительной прочности рассматривается процесс накопления рассеянных повреждений, приводящих, в конечном счете, к разрушению. Существующие методы оценки степени поврежденности параметрами, характеризующими физические свойства материала (внутреннее трение, электроспро-

¹ Маньковский В.А., Сапунов В.Т. Статистическое прогнозирование усталостной и длительной прочности в рамках теории нелинейного подобия // Заводская лаборатория (диагностика материалов). 1995. Т. 61. № 11. С. 44 – 50.

² Жоден Ф., Маньковский В.А., Сапунов В.Т. Прогнозирование ползучести слоистых клееных деревянных балок // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 1998. Т. 64. № 3. С. 47 – 51.

³ Маньковский В.А., Сапунов В.Т. Единая кривая длительной прочности конструкционных материалов и ее приложения // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2004. Т. 70. № 12. С. 39 – 46.

тивление и т.п.), приводят к разным результатам и мало пригодны для практических расчетов. Поэтому широкое распространение нашли методы, в которых в качестве меры повреждений принят формально введенный (в скалярной, векторной или тензорной форме) параметр, зависящий от длительности нагружения или накопленной деформации. Качанов Л.М., например, предложил оценивать повреждаемость скаляром $1 \geq \psi \geq 0$ (при отсутствии поврежденности $\psi = 1$), придавая ему смысл “сплошности” материала, в отличие от функции $\omega = 1 - \psi$, введенной Работновым Ю.Н., которая интерпретируется как “поврежденность”. Используются и другие параметры, учитывающие накопление поврежденности. Ильюшин А.А., рассматривая поврежденность как функционал истории нагружения, ввел понятие тензора поврежденности.

Простейшей моделью накопления повреждений является правило линейного суммирования. Если в качестве аргумента принять время, материал считать начально не поврежденным ($\omega(0) = 0$), а параметр внешних воздействий, например напряжение σ , не зависящим от времени, то линейная модель имеет вид:

$$d\omega/dt = q(\sigma) .$$

После интегрирования получаем условие предельного состояния $\omega_{\text{разр}} = \omega(t_{\text{разр}}) = 1$ в форме уравнения

$$\int_0^{t_{\text{разр}}} q(\sigma) dt = 1 ,$$

которое выполняется в случае, если

$$q(\sigma) = 1/t_{\text{разр}} .$$

Легко получить, что скорость накопления повреждений обратно пропорциональна времени до разрушения:

$$d\omega/dt = 1/t_{\text{разр}} .$$

Принцип линейного суммирования повреждений привлекателен своей простотой, однако он не учитывает ряд факторов, существенно влияющих на процесс накопления повреждений. В результате рассчитанный по приведенным уравнениям критический уровень поврежденности может значительно отличаться от единицы.

Более высокую точность достигают, применяя нелинейные модели, включающие в той или иной форме параметры текущего состояния материала, например:

$$d\omega/dt = \varphi(\sigma, \omega) .$$

Вопрос о кинетике накопления повреждений при сложном напряженном состоянии на настоящее время изучен недостаточно.

14.2. Влияние различных факторов на длительную прочность

Влияние температуры. Из испытаний на длительную прочность известно, что при постоянном напряжении повышение температуры испытания приводит к уменьшению времени до разрушения.

Зависимость длительной прочности от температуры, как уже отмечалось, используется в параметрических моделях, позволяющих находить большие времена до разрушения при низких температурах по результатам относительно кратковременных испытаний, но при более высоких температурах.

Влияние масштабного фактора. В результате испытаний образцов на длительную прочность устанавливается величина предела длительной прочности, используемая далее для оценки долговечности элементов конструкций и деталей, которые по своим размерам могут существенным образом отличаться от образцов. Данное обстоятельство и необходимость сопоставления результатов экспериментов на образцах разных размеров приводит к необходи-

мости исследовать влияние масштабного фактора на длительную прочность материалов.

Имеющиеся на настоящее время экспериментальные данные позволяют говорить, например, о влиянии на характеристики длительной прочности расчетной длины образца (увеличение длины приводит к уменьшению времени до разрушения), но еще не дают возможности однозначно ответить на вопрос о влиянии масштабного эффекта (в частности, диаметра образца). Вообще же, влияние масштабного фактора на длительную прочность материалов носит сложный характер и становится заметным для образцов небольших размеров, что связывают с возрастающим для них влиянием внешней среды.

Влияние концентраторов напряжений. Установлено, что с увеличением длительности пребывания металла в нагретом состоянии наблюдается переход от вязкого разрушения к хрупкому за счет постепенного ослабления границ зерен. Это явление названо охрупчиванием материала. Естественно, стали, склонные к охрупчиванию, чувствительны к концентрации напряжений, и утверждение, что в условиях ползучести можно не обращать внимание на концентрацию напряжений из-за сглаживания пиков напряжений (отжига), является ошибочным. В действительности, в рассматриваемом случае хрупкое разрушение начинается именно в окрестности концентратора напряжений, и изучение влияния концентрации напряжений в условиях ползучести имеет большое практическое значение.

Установлено, что при наличии концентраторов напряжений длительная прочность материалов, как правило, понижается: диаграммы длительной прочности гладких образцов располагаются выше соответствующих диаграмм, полученных на образцах с концентраторами напряжений. Однако в некоторых случаях (для материалов с достаточно высоким уровнем пластических свойств) имеет место обратный результат, но наблюдается тенденция к пересечению диаграмм длительной прочности гладких образцов и образцов с концентраторами напряжений и, следовательно, к снижению

длительной прочности за счет концентраторов напряжений при испытаниях большей продолжительности.

Исследование влияния одного и того же типа концентратора на длительную прочность разных материалов показало, что с увеличением коэффициента концентрации длительная прочность сначала увеличивается, а потом уменьшается.

14.3. Коэффициенты запаса при одноосном деформировании

Испытания на длительную прочность могут проводиться при стационарных (а) и нестационарных (б) режимах нагружения и изменения температуры (рис. 14.2).

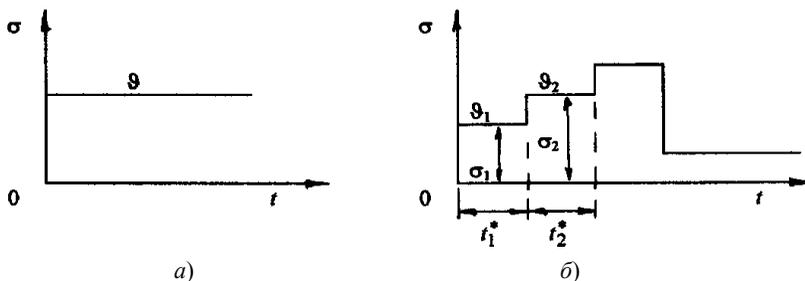


Рис. 14.2

Стационарное нагружение.

Располагая графиком зависимости предела длительной прочности от времени испытания до разрушения (рис. 14.3), можно определить коэффициенты запаса по времени (по долговечности или запас долговечности) и по напряжениям (по прочности или запас прочности).

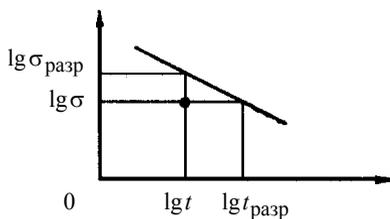


Рис. 14.3

Первый равен отношению времени разрушения $t_{\text{разр}}$ при напряжении σ ко времени t :

$$n_{\partial} = t_{\text{разр}} / t \quad ,$$

второй – отношению напряжения разрушения $\sigma_{\text{разр}}$ для времени t к напряжению σ :

$$n_e = \sigma_{\text{разр}} / \sigma \quad .$$

Используя имеющееся соотношение $t = A\sigma^{-m}$, можем записать, что $t = A\sigma_{\text{разр}}^{-m}$, $t_{\text{разр}} = A\sigma^{-m}$ и связать оба коэффициента запаса: $n_\sigma = n_e^m$. Отметим, что для коэффициентов запаса могут использоваться другие обозначения, например, $n_\sigma \equiv n_t$ и $n_e \equiv n_\sigma$.

Нестационарное нагружение. Считаем, что растягиваемый образец вначале испытывается при напряжении σ_1 и температуре ϑ_1 в течение времени t_1^* , затем при σ_2 и ϑ_2 в течение t_2^* и т.д. Процесс испытания заканчивается разрушением при напряжении σ_k , температуре ϑ_k и времени t_k^* . Общее время до разрушения составит $t_{\text{разр}} = \sum_{i=1}^k t_i^*$. Обозначим теперь через $t_{1\text{разр}}$, $t_{2\text{разр}}$ и т.д.

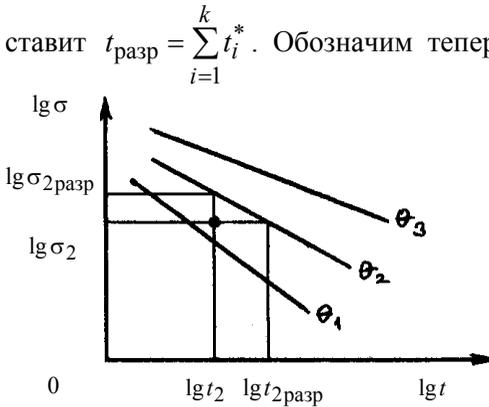


Рис. 14.4

значения времени, соответствующие моменту разрушения при напряжениях и температурах σ_1 и ϑ_1 , σ_2 и ϑ_2 и т.д. Эти значения времени определяются по соответствующим кривым длительной ползучести (рис. 14.4).

Экспериментальные исследования длительной прочности при нестационарных нагруженности (напряженности) и нагреве позволили установить связь между t_i^* и $t_{i\text{разр}}$ в следующем виде:

$$\sum_{i=1}^k t_i^* / t_{i\text{разр}} = 1 \quad .$$

Если считать отношения $t_1^*/t_{1\text{разр}}$, $t_2^*/t_{2\text{разр}}$ и т.д. повреждениями на первом, втором и т.д. режимах, то полученное соотношение представляет закон линейного суммирования повреждений, причем сумма повреждений равна единице. При непрерывном изменении напряжения и температуры закон линейного суммирования повреждений принимает вид:

$$\int_0^{t_{\text{разр}}} \frac{dt}{t_{\text{разр}}(\sigma)} = 1,$$

где $t_{\text{разр}}(\sigma)$ – время разрушения при напряжении σ . При этом напряжение σ является функцией времени и определяется по графику изменения напряжения во времени и кривым длительной прочности при различных температурах.

Рассмотрим некоторый нестационарный режим нагружения и изменения температуры (рис. 14.5). Будем считать, что напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ имеют место в течение времени t_1, t_2, \dots, t_k при температурах $\vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_k$ и процесс при этом

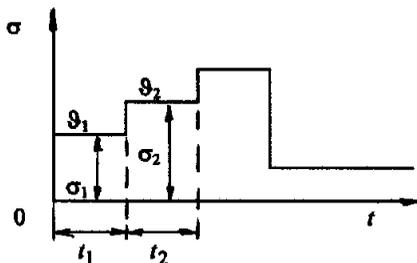


Рис. 14.5

разрушением не заканчивается. Определим коэффициенты запаса по времени n_{∂} и по напряжению n_{σ} для этого режима. Для определения запаса по времени допустим, что отрезки времени t_1, t_2 и т.д. увеличены в одинаковое число раз, так чтобы в конце нового (растянутого по оси абсцисс) режима происходило разрушение. Очевидно, что величина, указывающая во сколько раз нужно увеличить упомянутые отрезки времени, и является коэффициентом запаса по долговечности n_{∂} :

$$t_1^* = n_{\partial} t_1, \quad t_2^* = n_{\partial} t_2, \quad \dots, \quad t_k^* = n_{\partial} t_k \quad \Rightarrow \quad t_i^* = n_{\partial} t_i ;$$

$$t_{\text{разр}} = \sum_{i=1}^k t_i^* = n_{\partial} \sum_{i=1}^k t_i = n_{\partial} t .$$

Подставляя полученное соотношение $t_i^* = n_{\partial} t_i$ в закон линейного суммирования повреждений, будем иметь:

$$n_{\partial} = 1 / \sum_{i=1}^k (t_i / t_{i \text{ разр}}) .$$

Для определения коэффициента запаса по напряжениям проведем аналогичную процедуру. Напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k$ будем увеличивать в n_{σ} раз, где n_{σ} – искомый запас, так чтобы в конце нового (растянутого по оси ординат) режима происходило разрушение. В соответствии с формулой $t = A\sigma^{-m}$ можем записать:

$$t_{i \text{ разр}} = A_i (n_{\sigma} \sigma_i)^{-m_i}, \quad t_i^* = A_i (\sigma_{i \text{ разр}})^{-m_i},$$

где $\sigma_{i \text{ разр}}$ – напряжение, необходимое для разрушения через время t_i^* . Его находят по кривым длительной прочности материала, построенным при разных температурах.

Подставляя выписанные соотношения в закон линейного суммирования повреждений, получим трансцендентное уравнение для определения коэффициента запаса по напряжениям n_{σ} :

$$\sum_{i=1}^k n_{\sigma}^{m_i} (\sigma_i / \sigma_{i \text{ разр}})^{m_i} = 1 .$$

Полученное уравнение решается графически. В частном случае, когда испытание идет при постоянной температуре, формула упрощается, поскольку $m_1 = m_2 = \dots = m$. Соответственно будем иметь:

$$n_e = 1 / m \sqrt[m]{\sum_{i=1}^k (\sigma_i / \sigma_{i\text{разр}})^m} .$$

Линейный закон суммирования повреждений можно положить в основу оценки запасов прочности элементов конструкций, работающих в условиях нестационарного нагружения, и разработки программ ускоренного проведения испытаний. Однако этот закон подтверждается не для всех материалов, не для всех температур испытаний и не для всех режимов нагружений.

14.4. Время разрушения при растяжении стержня

Уже отмечалось, что в условиях ползучести характеристикой прочности растягиваемого стержня является предел длительной прочности – напряжение, которое при данной температуре и данной продолжительности испытания (срока службы) приводит к разрушению. Также отмечалось, что разрушения при ползучести могут иметь различный характер: рассматривают вязкое разрушение, хрупкое и смешанное. Добавим, что для одного и того же материала при одной и той же температуре характер разрушения может быть разным в зависимости от величины приложенного напряжения. Так при достаточно больших напряжениях (при относительно кратковременных испытаниях) разрушение может быть вязким, а при снижении уровня напряжений (при более продолжительных испытаниях) характер разрушения может измениться и стать хрупким.

Вязкое разрушение. Вязкое разрушение растягиваемого стержня можно интерпретировать как результат неограниченного течения материала при ползучести. Иными словами, задачу вязкого разрушения можно (нужно) рассматривать как задачу о ползучести растягиваемого стержня при больших деформациях. Отметим, что обычные уравнения теории течения могут применяться для описания больших деформаций, если использовать текущие значения скоростей деформаций и напряжений.

Обозначим через l_0 и F_0 начальные значения длины и площади поперечного сечения растягиваемого стержня, а через l и F – текущие на момент времени t . Поскольку будем рассматривать большие деформации ползучести, упругими деформациями пренебрегаем. Условие несжимаемости материала здесь реализуется соотношением $l_0 F_0 = l F$, а скорость деформации, соответственно, равна $\xi = (1/l)(dl/dt)$. Пренебрегая также этапом неустановившейся ползучести, для скорости ξ можем записать:

$$\frac{1}{l} \cdot \frac{dl}{dt} = B \left(\frac{P}{F} \right)^n ,$$

где P – растягивающее усилие, а P/F – напряжение в момент времени t .

Используя условие несжимаемости, из полученного уравнения исключим текущую площадь F . Далее, интегрируя уравнение при начальном условии $l=l_0$ при $t=0$, будем иметь:

$$B \sigma_0^n n t = 1 - (l_0/l)^n \quad \text{или} \quad B \sigma_0^n n t = 1 - (F/F_0)^n ,$$

где $\sigma_0 = P/F_0$ – напряжение в начальный момент времени.

Время вязкого разрушения определим из условия неограниченности течения материала, считая $F \rightarrow 0$ или $l \rightarrow \infty$. В этом случае получаем:

$$t_{\text{разр}}^{\text{вязк}} = 1/n \xi_0 ,$$

где $\xi_0 = B \sigma_0^n$ – скорость деформации при начальном напряжении.

Два последних соотношения позволяют получить формулу, определяющую изменение площади во времени:

$$F/F_0 = \sqrt[n]{1 - \left(t/t_{\text{разр}}^{\text{вязк}} \right)} .$$

Соответствующие зависимости для разных значений показателя нелинейности n представлены на рис. 14.6. Отметим, что для значений $n > 1$ производная $(d/dt)(F/F_0) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow t_{\text{вязк. разр}}$. Можно видеть, что с

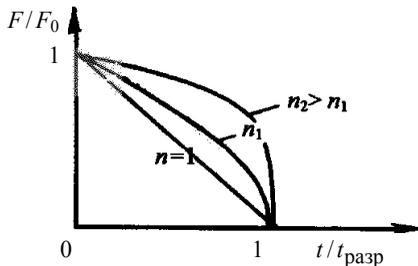


Рис. 14.6

ростом n имеет место резкое уменьшение площади сечения в последнем периоде “жизни” растягиваемого стержня.

В приведенном решении изменение площади сечения происходит равномерно по всей длине стержня и, тем самым, игнорируется появление шейки, что характерно для вязкого разрушения, но это вполне допустимо из-за кратковременности этой последней стадии разрушения.

Хрупкое разрушение. Процесс хрупкого разрушения будем интерпретировать как процесс трещинообразования, развертывающийся на фоне растущих деформаций ползучести. Поврежденность материала будем характеризовать некоторым скаляром ψ , который назовем сплошностью материала. В начальный момент времени при отсутствии поврежденности (трещин) $\psi = 1$; с течением времени сплошность убывает. При малых значениях ψ рассеянный характер разрушения становится неустойчивым и в слабых местах возникают магистральные трещины. С этой точки зрения момент разрушения можно соотносить с некоторым значением $\psi_0 > 0$ (локализация разрушения). Ниже будем считать, что при разрушении сплошность равна нулю ($1 \geq \psi \geq 0$) и тем самым исключать заключительную стадию разрушения, что, как и игнорирование появления шейки в вязком решении, допустимо из-за кратковременности этой стадии.

Зависимость, характеризующую изменение сплошности во времени, для простоты примем в форме степенного закона:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma}{\psi} \right)^m ,$$

где $A > 0$, $m \geq 0$ – некоторые постоянные материала, а $\sigma = P/F$. В случае сложного напряженного состояния вместо напряжения σ должно использоваться истинное максимальное растягивающее напряжение в данной точке σ_{\max} , поскольку хрупкое разрушение, связываемое нами с развитием трещин, определяется именно этими напряжениями.

Интегрируя принятое соотношение для $d\psi/dt$ при начальном условии $\psi = 1$ ($F = F_0$), получаем:

$$\psi^{m+1} - 1 = -A(m+1)\sigma_0^m t ,$$

где $\sigma_0 = P/F_0$ – напряжение в начальный момент времени. Поскольку разрушению соответствует значение сплошности $\psi = 0$, время чисто хрупкого разрушения будет равно:

$$t_{\text{разр}}^{\text{хр}} = 1/(m+1) A \sigma_0^m .$$

Вязкохрупкое (смешанное) разрушение. Перепишем соотношение для скорости изменения сплошности $d\psi/dt$ в виде:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{P/F}{\psi} \right)^m .$$

Исключим из рассмотрения площадь F , используя полученную ранее зависимость $F/F_0 = \sqrt[n]{1 - (t/t_{\text{разр}}^{\text{вязк}})}$, и выполним интегрирование при прежнем начальном условии. Будем иметь:

$$\psi^{m+1} - 1 = -\frac{1}{t_{\text{разр}}^{\text{хр}}} \int_0^t \left(1 - \frac{t}{t_{\text{разр}}}\right)^{-m/n} dt .$$

По смыслу задачи следует рассматривать только время $t \leq t_{\text{разр}}^{\text{вязк}}$.

Далее, поскольку экспериментальные данные показывают, что с увеличением времени разрушения наклон кривых длительной прочности в логарифмической сетке либо сохраняется (одна прямая), либо увеличивается (две прямых), надлежит полагать $n \geq m$.

Пусть $n > m$. Вычисляя интеграл и полагая $\psi = 0$, находим время вязкохрупкого разрушения t_* :

$$\frac{t_*}{t_{\text{разр}}^{\text{вязк}}} = 1 - \left(1 - \frac{n-m}{n} \cdot \frac{t_{\text{разр}}^{\text{хр}}}{t_{\text{разр}}^{\text{вязк}}}\right)^{n/(n-m)} .$$

Из ограничения $t \leq t_{\text{разр}}^{\text{вязк}}$ вытекает условие

$$\sigma_0 \leq \left(\frac{A}{B} \cdot \frac{m+1}{n-m}\right)^{1/(n-m)} = \bar{\sigma}_0 .$$

При напряжениях, больших $\bar{\sigma}_0$, имеем вязкое разрушение, при меньших – разрушение носит хрупкий характер. Кривая длительной прочности, отвечающая приведенному решению, показана на рис. 14.7 сплошной линией.

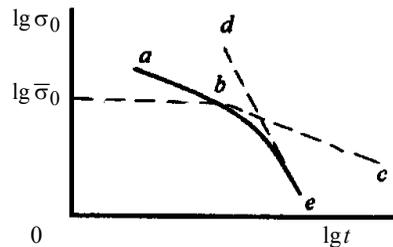


Рис. 14.7

Прямые abc и de характеризуют вязкое и чисто хрупкое разрушения. При напряжениях $\sigma_0 > \bar{\sigma}_0$ кривая длительной прочности совпадает с прямым участком ab . При напряжениях, меньших $\bar{\sigma}_0$, все больший вклад дает охрупчивание и кривая длительной проч-

ности приближается к прямой de . Постоянные A и m можно определять по данным обычных испытаний на длительную прочность (при малых деформациях) по положению линии de .

В случае $n = m$ решение имеет вид:

$$t_* = q_1 \cdot t_{\text{вязк}}^{\text{вязк}} / t_{\text{разр}}^{\text{вязк}} \quad , \quad q_1 = 1 - \exp \left[-\frac{B}{A} \cdot \frac{m}{m+1} \right] \leq 1 \quad .$$

Здесь разрушение всегда хрупкое, т.е. определяется условием $\psi = 0$, и протекает при одной и той же деформации:

$$q_1 = 1 - (l_0 / l_*)^m \quad ,$$

где l_* – длина стержня при разрушении. Экспериментальные данные подтверждают, что отношение $t_* / t_{\text{разр}}^{\text{вязк}}$ соответствует значению q_1 , определяемому по средней деформации при разрушении. Случай $n = m$ следует относить к материалам с достаточно стабильной структурой.

14.5. Время разрушения статически определимой стержневой системы

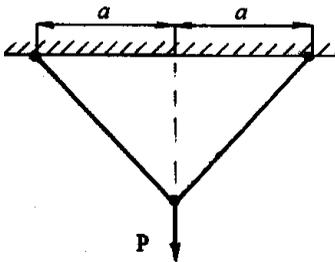


Рис. 14.8

Рассмотрим стержневую систему, показанную на рис. 14.8.

Начальные значения длины и площади поперечного сечения растягиваемого стержня l_0 и F_0 , а текущие на момент времени t – l и F . Начальное S_0 и текущее S напряжения в стержнях определяются соотношениями:

$$S_0 = \frac{P}{2F_0 \sqrt{1 - (a/l_0)^2}} \quad , \quad S = \frac{P}{2F \sqrt{1 - (a/l)^2}} \quad .$$

Условие несжимаемости материала здесь реализуется соотношением $l_0 F_0 = l F$; скорость деформации, соответственно, равна $\xi = (1/l)(dl/dt)$. Пренебрегая этапом неустановившейся ползучести, уравнение ползучести представим в уже известном виде:

$$\frac{1}{l} \cdot \frac{dl}{dt} = B(S)^n .$$

Из уравнения исключим текущую площадь стержня F , используя условие несжимаемости. После некоторых преобразований будем иметь:

$$\frac{1}{l} \cdot \frac{dl}{dt} = B \sigma_0^n \left[\frac{l}{l_0 \sqrt{1 - (a/l)^2}} \right]^n ,$$

где $\sigma_0 = P/2F_0$ – начальное напряжение в стержне, представляющим “вырожденную” стержневую систему при $a = 0$.

Интегрируя уравнение ползучести при начальном условии $l = l_0$ при $t = 0$ и вводя обозначения $J(\lambda) = \int_{\lambda_0}^{\lambda} (\lambda^2 - 1)^{n/2} d\lambda / \lambda^{2(n+1)}$, $\lambda = l/a$, $\lambda_0 = l_0/a$, получаем решение задачи в форме уравнения:

$$J(\lambda) = \frac{\lambda_0^{-n}}{n} \cdot \frac{t}{t_0} ,$$

где $t_0 = 1/nB\sigma_0^n$ – время вязкого разрушения “вырожденной” стержневой системы.

Рассмотрим частный случай $n = 4$. Определяющее уравнение будет иметь вид:

$$\frac{1}{4\lambda^4} \left(-1 + \frac{4}{3\lambda^2} - \frac{1}{2\lambda^4} \right) - \frac{1}{4\lambda_0^4} \left(-1 + \frac{4}{3\lambda_0^2} - \frac{1}{2\lambda_0^4} \right) = \frac{1}{4\lambda_0^4} \frac{t}{t_0} .$$

Вязкое разрушение системы определяется значением $\lambda \rightarrow \infty$. Соответственно, для времени вязкого разрушения получаем соотношение

$$t_{\text{разр}}^{\text{вязк}} = t_0 \left(1 - \frac{4}{3\lambda_0^2} + \frac{1}{2\lambda_0^4} \right) .$$

Из представленного соотношения следует, что время разрушения стержневой системы меньше времени разрушения стержня под действием силы $P/2$. Это объясняется большим значением усилия в стержне системы при $a > 0$.

Хрупкое и вязкохрупкое разрушение стержневой системы может быть рассмотрено по схеме, предложенной выше для растягиваемого стержня (см. раздел 14.4).

15. Длительная прочность при сложном напряженном состоянии

15.1. Прочность при длительном нагружении. Эквивалентные напряжения

Для расчета на прочность при длительном нагружении в случае одноосного напряженного состояния необходимо располагать теорией (критерием) прочности (разрушения), с помощью которой можно определить эквивалентное напряжение $\sigma_{\text{экв}}$, позволяющее заменить трехосное напряженное состояние на одноосное. Коэффициент запаса прочности для определенного интервала времени вычисляется как отношение предела длительной прочности для этого значения времени к соответствующему эквивалентному напряжению.

Опыты, проведенные на различных материалах, показали, что у поликристаллических металлов и сплавов при сравнительно низких температурах и низких уровнях напряжений разрушение является хрупким. В этом случае в качестве эквивалентного напряжения целесообразно принимать максимальное нормальное напряжение (критерий В. Джонсона):

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 \quad .$$

При высоких температурах и повышенных уровнях напряжений разрушение в большинстве случаев носит вязкий характер, что свидетельствует о целесообразности использования в качестве эквивалентного напряжения интенсивности напряжений

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_i$$

или максимального касательного напряжения

$$\tau_{\text{max}} = (\sigma_1 - \sigma_2) / 2 \quad .$$

При оценке длительной прочности элементов конструкций из некоторых жаропрочных сталей хорошие результаты позволяет получить использование в качестве эквивалентного напряжения полусуммы интенсивности напряжений и максимального нормального напряжения¹

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = (\sigma_1 + \sigma_i) / 2 \quad .$$

Отметим однако, что хотя каждый из приведенных выше критериев в отдельных случаях (для определенных групп жаропрочных сталей, никелевых сплавов и т. д.) приводит к удовлетворительным результатам, сделать выбор в пользу одного из них не представля-

¹ Сдобырев В.П. Критерий длительной прочности для некоторых жаропрочных сплавов при сложном напряженном состоянии // Изв. АН СССР. ОТН. Механика и машиностроение. 1959. № 6. С. 93 – 99.

ется возможным. В настоящее время, как правило, в качестве критериев разрушения при длительном нагружении используются различные эмпирические соотношения. Приведем некоторые из них:

- критерий И.И. Трунина¹

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{1}{2} a^{(1-2\eta)} \left[\sigma_i + \frac{(\sigma_1 + |\sigma_1|)}{2} \right],$$

где

$$\eta = \frac{\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_i + (\sigma_1 + |\sigma_1|)/2};$$

- обобщенный критерий длительной прочности А.А. Лебедева²

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \chi \sigma_i + (1 - \chi) \sigma_1$$

(при $\chi = 0$ критерий А.А. Лебедева преобразуется в критерий Джонсона, при $\chi = 1$ – в критерий интенсивности напряжений, а при $\chi = 0,5$ – в критерий В.П. Сдобырева);

- критерий Ю.К. Петрени³

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \left[\sigma_1^m + \left(\frac{\sigma_i}{\sqrt{3}} \right)^m \right]^{1/m}.$$

Критерий Ю.К. Петрени обычно применяют при $m = 13,5$.

¹ Трунин И.И. Оценка сопротивления длительному разрушению и некоторые особенности деформирования при сложном напряженном состоянии // ПМТФ. 1963. № 1. С. 110 – 114.

² Лебедев А.А. О критериях эквивалентности в условиях ползучести при сложном напряженном состоянии // Проблемы прочности. 1970. № 4. С. 26 – 30.

³ Петрени Ю.К. Длительная прочность аустенитной стали в условиях сложного напряженного состояния // Энергомашиностроение. 1980. № 10. С. 27 – 28.

Параметры a и χ , входящие в формулы И.И. Трунина и А.А. Лебедева и зависящие для рассматриваемого материала от температуры и времени испытания до разрушения, определяются по результатам двух серий испытаний, проведенных при разных напряженных состояниях.

Рассматривая формулу И.И. Трунина, находим:

- для одноосного растяжения – $\eta = 1/2$, $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma$;

- для одноосного сжатия – $\eta = -1$, $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma a^3 / 2$;

- для чистого сдвига – $\eta = 0$, $\sigma_{\text{ЭКВ}} = (1 + \sqrt{3})\tau a / 2$.

Вводя пределы длительной прочности при растяжении $\sigma_{\text{дл.р}}$, сжатии $\sigma_{\text{дл.с}}$ и чистом сдвиге $\tau_{\text{дл}}$, полученные на одной временной базе, и записывая условия разрушения для каждого типа испытания, получим:

$$a = \sqrt[3]{2\sigma_{\text{дл.р}} / \sigma_{\text{дл.с}}} \quad \text{или} \quad a = 2\sigma_{\text{дл.р}} / \left[(1 + \sqrt{3})\tau_{\text{дл}} \right].$$

Параметр χ , входящий в формулу А.А. Лебедева, также определяется по результатам двух серий испытаний, проводимых при разных напряженных состояниях:

$$\chi = \frac{1}{1 - (\sigma'_i - \sigma''_i) / (\sigma'_1 - \sigma''_1)}.$$

Если одна серия опытов проводится при одноосном растяжении, а вторая при одноосном сжатии, то

$$\chi = \sigma_{\text{дл.р}} / \sigma_{\text{дл.с}}.$$

Если же в качестве второй серии опытов использовать испытания на кручение (чистый сдвиг), будем иметь:

$$\chi = 1,37(\varphi - 1),$$

где $\varphi = \tau_{дл} / \sigma_{дл.р}$ – отношение пределов длительной прочности при кручении (чистом сдвиге) и одноосном растяжении.

Отметим, что испытания на одноосное сжатие в условиях ползучести связаны с большими методическими трудностями и их результаты не всегда достоверны. Соответственно, в качестве второй серии опытов рекомендуется использовать испытания на кручение, реализуя их на тонкостенных трубчатых образцах.

Обработка результатов испытаний на длительную прочность по различным критериям показывает, что, как правило, критерий Джонсона дает несколько заниженные значения, а критерий интенсивности напряжений – завышенные. Лучшие совпадения с результатами экспериментов дают эмпирические критерии, что вполне естественно, однако их применение ограничено соблюдением определенных условий испытаний.

Приведенные формулы для эквивалентного напряжения $\sigma_{эkv}$ являются далеко не единственными, и этот факт соответствует преобладающему в настоящее время в механике материалов мнению, что не может быть какого-либо универсального критерия, сводящего исследуемое сложное напряженное состояние к эквивалентному одноосному. Более того, принято считать, что чуть ли не для каждого материала существует свой критерий, который к тому же зависит от условий проведения эксперимента.

В работе¹ предложен достаточно общий подход, позволяющий приблизиться к решению проблемы построения именно универсальных критериев предельного напряженного состояния и с единых методологических позиций получать для различных конструкционных материалов критерии кратковременной, длительной и усталостной прочности. В частных случаях из предложенного подхода вытекают, по сути, все известные классические гипотезы прочности.

¹ Маньковский В.А., Сапунов В.Т., Бурдейный А.А. Критерии кратковременной, длительной и усталостной прочности при сложном напряженном состоянии // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. 2001. Т. 67. № 4. С. 53 – 57.

Суть предложенного подхода – использование не абсолютных, а относительных (безразмерных) величин (симплексов), трактуемых как своеобразные одноосные меры опасности для материала или его “повреждения”. Поставленную задачу можно рассматривать как задачу об определении повреждения при сложном напряженном состоянии или, другими словами, об отыскании эквивалентного повреждения, которое можно использовать для сведения сложного напряженного состояния к одноосному.

Понятие “повреждение” определяет тот или иной нормированный параметр процесса деформирования или разрушения материала. Нормирование проводится по соответствующим предельным величинам, зависящим от условий эксперимента, и, в силу этого являющимися случайными величинами. Отсевание роли случая при рассмотрении объемно-нагруженного элемента по процедуре однофакторного дисперсионного анализа Фишера позволяет получить количественную оценку фактора “нормированное напряженное состояние” (“трехосная поврежденность”), которую предлагается принять в качестве искомого критерия эквивалентности. Критерий имеет вид квадратичного полинома и содержит один экспериментально определяемый параметр.

Отметим, что оперирование нормированными, а не абсолютными величинами, позволяет учесть не только разнообразие рассматриваемых механизмов деформирования и разрушения, но и зависимость предельного состояния от условий проведения опыта. Это возможно, поскольку нормирующие величины автоматически учитывают упомянутую физику процесса: например, если речь идет о критерии пластичности, то нормирование осуществляется по соответствующим пределам текучести, если о критерии прочности – по пределам прочности, если о многоцикловой усталости – по соответствующим пределам выносливости и т.д.

Применительно к длительной прочности дисперсионный критерий поврежденности, определяющий эквивалентную величину $t_{\text{эКВ.С}}$, равную времени до разрушения при ползучести изотропного образца, подверженного двумерному растяжению $\sigma_1 \geq \sigma_2$, имеет вид:

$$\left(\frac{t}{t_{\text{ЭКВ}C}}\right)^2 = \left(\frac{t}{t_c(\sigma_1)}\right)^2 + \left(\frac{t}{t_c(\sigma_2)}\right)^2 - k_t \cdot \frac{t}{t_c(\sigma_1)} \cdot \frac{t}{t_c(\sigma_2)} \quad ,$$

где t – время выдержки образца под нагрузкой; $t_c(\sigma)$ – время до разрушения при напряжении σ ; k_t – экспериментальный параметр. Из приведенного соотношения следует:

$$t_{\text{ЭКВ}C} = t_c(\sigma_1) / \sqrt{1 - k_t \lambda + \lambda^2} \quad , \quad \lambda = t_c(\sigma_1) / t_c(\sigma_2) \quad .$$

Эквивалентные напряжения при этом определяются в зависимости от принятой математической модели долговечности. Для примера ограничимся самыми простейшими из них: зависимостями Нортон – $t_c \sim \sigma^{-n}$ и Журкова – $t_c \sim \exp(-\alpha\sigma)$, где n и α – экспериментальные параметры длительной прочности. Опуская громоздкие преобразования, приведем итоговые формулы, отвечающие принятым законам долговечности:

- степенному

$$(\sigma_{\text{ЭКВ}})^{2n} = \sigma_1^{2n} + \sigma_2^{2n} - k_t \sigma_1^n \sigma_2^n \quad ;$$

- экспоненциальному

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_1 \psi(\Delta_s) \quad ,$$

где $\psi(\Delta_s) = 1/\alpha \ln [1 + \exp(-2\alpha\Delta_s) - k_t \exp(-\alpha\Delta_s)]$, а $\Delta_s = \sigma_1 - \sigma_2$. В обоих случаях можно принять $k_t = 2 - (2 - k_s)^n \cong nk_s$, где k_s – экспериментальный параметр, по величине равный удвоенному коэффициенту поперечной деформации 2μ .

Отметим, что при $\sigma_1 \geq (1,1 \div 1,15)\sigma_2$ обе формулы вырождаются в критерий Джонсона $\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_{\text{max}}$.

Предложенные критерии апробированы на неординарных экспериментах, как правило, неадекватных известным теориям прочности.

15.2. Разрушения при неоднородном напряженном состоянии

Вязкое разрушение. В некоторых случаях при ползучести допустимы большие деформации, и их изучение позволяет определить время вязкого разрушения. Подход к решению задачи здесь остается, в общем, таким же, как в задаче о вязком разрушении растягиваемого стержня: достаточно иметь решение соответствующей задачи о больших деформациях ползучести при действии заданных нагрузок.

Хрупкое разрушение. Бóльшую сложность представляет задача о хрупком разрушении в случае малых деформаций. При решении этой задачи будем пользоваться введенным ранее представлением о сплошности материала $1 \geq \psi \geq 0$ (при отсутствии поврежденности сплошность $\psi = 1$, а в момент хрупкого разрушения $\psi = 0$). Введем, как и ранее, степенную зависимость для описания изменения сплошности во времени:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_{\max}}{\psi} \right)^m .$$

Здесь σ_{\max} – истинное максимальное растягивающее напряжение в данной точке (в задаче растягиваемом стержне $\sigma_{\max} = \sigma = P/F$). Для того, чтобы воспользоваться приведенным соотношением, необходимо знать решение задачи об установившейся ползучести рассматриваемого тела при заданных нагрузках. В этом случае можно найти распределение максимального растягивающего напряжения σ_{\max} в зависимости от времени. Следовательно, в каждой точке тела можно найти сплошность ψ , используя приведенное дифференциальное уравнение. Соответственно, время хрупкого разрушения в какой-либо точке будет определяться соотношением

$$\int_0^{t_{\text{раз}}^{\text{хр}}} [\sigma_{\text{max}}(t)]^m dt = \frac{1}{A(m+1)} .$$

Процесс хрупкого разрушения тела в рассматриваемом случае неоднородного напряженного состояния можно представить следующим образом. Пусть в момент времени $t = t_I$ в некоторой точке (или области) тела возникает хрупкое разрушение $\psi = 0$. Промежуток времени $0 \leq t < t_I$ условимся называть стадией скрытого разрушения. На этой стадии указанного временного интервала повсюду в теле сплошность $\psi > 0$, и анализ сводится к решению дифференциального уравнения для сплошности ψ в полях напряжений и деформаций, определяемых ползучестью. Возникшее в момент времени $t = t_I$ местное (локальное) разрушение с течением времени распространяется и приводит к разрушению всего тела в момент времени $t = t_{II}$.

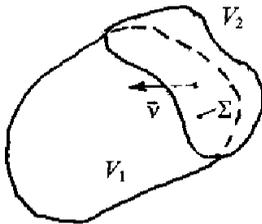


Рис. 15.1

Промежуток времени $t_I < t < t_{II}$ будем называть стадией распространения разрушения. Таким образом, к моменту времени $t > t_I$ разрушение охватывает область V_2 и здесь $\psi = 0$, а в области V_1 имеем, что сплошность ψ больше нуля (рис. 15.1).

На границе раздела областей Σ (на фронте разрушения) сплошность, как и в области V_2 , равна нулю.

Очевидно, что с течением времени фронт разрушения Σ перемещается, и его скорость движения можно описать уравнением

$$\left(\frac{d\psi}{dt} \right)_{\Sigma} = \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \cdot \frac{d\nu}{dt} \right)_{\Sigma} = 0 ,$$

где ν – нормаль к поверхности Σ . В развернутой форме это уравнение имеет вид:

$$\frac{dv}{dt} = - \left(\sigma_{\max}^m \right)_{\Sigma} / \left[\frac{\partial}{\partial v} \int_0^t \sigma_{\max}^m dt \right]_{\Sigma} .$$

В общем случае задача о движении фронта разрушения весьма трудна, поскольку форма его заранее неизвестна.

15.3. Хрупкое разрушение скручиваемого круглого вала

Примем, что круглый вал диаметром $2a_0$ скручивается моментом M .

Распределение результирующего касательного напряжения τ в круглом стержне диаметра $2a$ в состоянии установившейся ползучести определяется известным соотношением

$$\tau = \frac{3 + \mu}{2\pi a^3} \cdot M \cdot \left(\frac{r}{a} \right)^{\mu} ,$$

где $\mu = 1/n$ ($n_1 = n$). Отметим, что в данной задаче роль σ_{\max} играет напряжение τ .

В первом (скрытом) периоде разрушения $0 \leq t < t_1$ сплошность $\psi > 0$ и диаметр стержня остается равным $2a_0$. При этом

$$d\psi/dt = -A [\tau(r)/\psi]^m ,$$

и, соответственно,

$$-1 + \psi^{m+1} = -A(m+1)\tau^m(r)t .$$

В момент времени $t = t_1$ при $r = a_0$ сплошность ψ равна нулю и, следовательно,

$$t_1 = 1/A(m+1)\tau^m(a_0) .$$

Разрушение начинается на внешней поверхности, и к моменту времени $t > t_1$ радиус несущего ядра сечения равен $a > a_0$ и является функцией времени $a = a(t)$, которую в данной задаче можно найти, но эту процедуру здесь опускаем. Ограничимся приведением конечной формулы для времени полного разрушения скручиваемого стержня $t_{\text{разр}}$, которая следует из соотношения $a = a(t)$ при $a = 0$:

$$t_{\text{разр}} = \left(1 + \frac{1}{3n}\right) t_1 .$$

Поскольку показатель ползучести n обычно значительно больше единицы, можно видеть, что вторая стадия в данной задаче составляет малую долю первой. Отметим, что в других задачах (хрупкие разрушения толстостенной трубы под действием внутреннего давления, растягиваемой пластины с отверстием, изгибаемых балок и др.) стадия распространения разрушений может составлять заметную долю (до половины стадии скрытого разрушения).

15.4. Вязкое, хрупкое и вязкохрупкое разрушения тонкостенной цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления

Примем, что начальные значения внутреннего радиуса и толщины оболочки в начальный момент времени $t = 0$ равны a_0 и h_0 , а в момент времени $t > 0$ – a и h , при этом $a_0 \gg h_0$ ($a \gg h$).

Напряжения в тонкостенной трубе при действии внутреннего давления p равны:

$$\sigma_r \approx 0 , \quad \sigma_\varphi = pa/h , \quad \sigma_z = pa/2h ,$$

и, соответственно, можно найти интенсивность касательных напряжений $T = \sigma_\varphi/2$.

Вязкое разрушение. При развитых деформациях ползучести упругими деформациями и стадией неустановившейся ползучести можно пренебречь. Вследствие этого приведенные ранее формулы для скоростей деформаций установившейся ползучести справедливы и для больших деформаций, если исходить из текущих размеров трубы. Следовательно, при степенном законе ползучести имеем:

$$\xi_r = -\xi_\varphi, \quad \xi_\varphi = \frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \frac{1}{4} B_1 T^{n-1} \sigma_\varphi, \quad \xi_z = 0.$$

Уравнение ползучести, соответственно, имеет вид:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{da}{dt} = \frac{B_1}{2} \left(\frac{pa}{2h} \right)^n.$$

С точностью до величин порядка $a/h \gg 1$ условие несжимаемости материала можем представить в форме: $ah = a_0 h_0$. Исключая в уравнении ползучести толщину h с использованием условия сплошности, приведем его к виду:

$$\left(a/a_0 \right)^{-(2n+1)} da/a_0 = \xi_{\varphi_0} dt,$$

где $\xi_{\varphi_0} = (B_1/2)(pa_0/2h_0)^n$ – начальная скорость деформации.

Интегрируя полученное дифференциальное уравнение при начальном условии $a = a_0$ при $t = 0$, будем иметь:

$$\left[1 - (a_0/a)^{2n} \right] / 2n = \xi_{\varphi_0} t.$$

Время вязкого разрушения находим как время неограниченного расширения трубы, определяемого условием $a \rightarrow \infty$. Получим:

$$t_{\text{разр}}^{\text{вязк}} = 1/2n \xi_{\varphi_0} \quad .$$

Полученная формула показывает, что здесь, как и при простом растяжении, по данным ползучести материала трубы можно указать время ее разрушения.

Два последних соотношения и условие несжимаемости материала $ah = a_0h_0$, позволяющее заменить отношение радиусов на отношение толщин, дают возможность определить зависимость толщины трубы (ее уменьшение) от времени. Будем иметь:

$$h/h_0 = 2n \sqrt{1 - \left(t/t_{\text{разр}}^{\text{вязк}} \right)} \quad .$$

Если сравнить полученный результат с изменением во времени площади растягиваемого стержня, можно видеть, что для трубы “последний период жизни”, характеризуемый быстрым убыванием толщины стенки, является еще более кратким, чем для стержня. Данное обстоятельство можно объяснить ростом усилия в стенке трубы при увеличении ее диаметра.

Хрупкое разрушение. Чисто хрупкое разрушение (при малых деформациях) здесь определяется уравнением:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_{\varphi_0}}{\psi} \right)^m \quad ,$$

где $\sigma_{\varphi_0} = p a_0 / h_0$. После интегрирования, полагая $\psi = 0$, находим время хрупкого разрушения:

$$t_{\text{разр}}^{\text{хр}} = \frac{1}{m+1} \cdot \frac{1}{A \sigma_{\varphi_0}^m} \quad .$$

Вязкохрупкое разрушение. В общем случае, когда охрупчивание происходит на фоне значительных деформаций ползучести (вязкохрупкое разрушение), определяющее уравнение имеет вид:

$$\frac{d\psi}{dt} = -A \left(\frac{\sigma_{\varphi}}{\psi} \right)^m = -A \left(\frac{pa}{h\psi} \right)^m .$$

Используя условие несжимаемости материала $ah = a_0h_0$ и закон изменения толщины стенки во времени $h/h_0 = 2^n \sqrt{1 - (t/t_{\text{разр}}^{\text{вязк}})}$, приходим к дифференциальному уравнению:

$$(m+1)\psi^m \frac{d\psi}{dt} = -\frac{1}{t_{\text{разр}}^{\text{хр}}} \left(1 - \frac{t}{t_{\text{разр}}^{\text{вязк}}} \right)^{-m/n} .$$

Разделяя переменные и выполняя интегрирование, найдем, что время вязкохрупкого разрушения t_* , соответствующее условию $\psi = 0$, определяется зависимостью:

$$t_* / t_{\text{разр}}^{\text{вязк}} = 1 - \left(1 - \frac{n-m}{n} \left(t_{\text{разр}}^{\text{хр}} / t_{\text{разр}}^{\text{вязк}} \right) \right)^{n/(n-m)} .$$

Полученное соотношение совпадает по форме с соответствующим уравнением для растягиваемого стержня, однако напомним, что здесь величины $t_{\text{разр}}^{\text{вязк}}$ и $t_{\text{разр}}^{\text{хр}}$ имеют другие значения. Решение имеет смысл при $t_* \leq t_{\text{разр}}^{\text{вязк}}$, откуда следует ограничение:

$$\sigma_{\varphi_0} \leq 2^{n/(n-m)} \left(\frac{A}{B} \cdot \frac{m+1}{n-m} \right)^{1/(n-m)} = \bar{\sigma}_{\varphi_0} .$$

Кривая длительной прочности, построенная на плоскости $\lg \sigma_{\varphi_0} - \lg t_*$, аналогична соответствующей кривой для простого растяжения.

15.5. Вязкое разрушение толстостенной цилиндрической оболочки под действием внутреннего давления

Примем, что в начальный момент времени $t = 0$ значения внутреннего и внешнего радиусов оболочки равны a_0 и b_0 , а в текущий момент $t > 0$ — a и b . Введем обозначения: $b/a = \beta$ и $b_0/a_0 = \beta_0$.

Формулы для напряжений в трубе при установившейся ползучести известны, и по ним можно найти интенсивность касательных напряжений:

$$T = \mu \frac{p}{\beta^{2\mu} - 1} \left(\frac{b}{r} \right)^{2\mu} .$$

Скорости деформаций ξ_r и ξ_φ определяются через скорость радиального перемещения точек трубы $v = C_1/r$ следующим образом:

$$\xi_r = -\xi_\varphi = -C_1/r^2 .$$

Используя представленные соотношения для скоростей деформаций, находим интенсивность скоростей деформаций сдвига:

$$H = 2C_1/r^2 .$$

Поскольку интенсивности T и H при ползучести связаны зависимостью $H = B_1 T^n$, находим, что $C_1 = (1/2)r^2 B_1 T^n$. В этом случае

$$v = (1/2)r B_1 T^n .$$

Для точек, лежащих на внешней и внутренней поверхностях трубы, можем записать:

$$v|_{r=b} = db/dt \quad , \quad v|_{r=a} = da/dt \quad .$$

Легко получить, что

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{1}{a} \left(\frac{db}{dt} - \frac{b}{a} \cdot \frac{da}{dt} \right) \quad .$$

Внося сюда значения db/dt и da/dt и используя при этом соотношение для скорости радиального перемещения точек v , после некоторых простых преобразований будем иметь уравнение:

$$\frac{(1-\beta^{-2/n})^n \beta d\beta}{\beta^2 - 1} = -C p^n dt \quad ,$$

где $C = B_1 \mu^n / 2$ – новая характеристика ползучести материала. Введем обозначение:

$$\Phi(\beta) = \int_1^\beta (1-\beta^{-2/n})^n \frac{\beta}{\beta^2 - 1} d\beta \quad .$$

В этом случае решение уравнения можем записать в следующем виде:

$$C p^n t = \Phi(\beta_0) - \Phi(\beta) \quad .$$

Полученное решение и будем использовать для определения времени вязкого разрушения трубы. При неограниченном течении материала толщина трубы уменьшается, т.е. $\beta \rightarrow 1$. Поскольку $\Phi(1) = 0$, время вязкого разрушения определится соотношением

$$t_{\text{вязк}}^{\text{разр}} = \Phi(\beta_0) / C p^n \quad .$$

Время вязкого разрушения растягиваемого стержня ранее было определено следующей формулой:

$$(t_{\text{разр}}^{\text{вязк}})_{\text{стержня}} = 1 / B n \sigma_0^n .$$

Представим время вязкого разрушения толстостенной трубы в такой же форме с введением эквивалентного напряжения

$$t_{\text{разр}}^{\text{вязк}} = 1 / B n \sigma_{\text{экр}}^n ,$$

где

$$\sigma_{\text{экр}} = \left(\frac{C}{B n \Phi(\beta_0)} \right)^\mu \cdot p = k_1 p .$$

Некоторые преобразования введенного коэффициент k_1 позволяют получить для него следующую формулу:

$$k_1 = \frac{\sigma_0}{p} \left(\frac{t_{11}}{t_1} \right)^\mu ,$$

Здесь t_{11} – время вязкого разрушения растягиваемого стержня при начальном напряжении σ_0 ; t_1 – время вязкого разрушения толстостенной трубы из того же материала при давлении p . Использование коэффициента k_1 позволяет заменить испытания трубы растяжением стержня.

При малых деформациях трубы теоретический анализ трещинообразования в стадии скрытого разрушения проводится достаточно просто. Уравнение движения фронта разрушения (вторая стадия) решается численными методами.

Список литературы

1. Малинин Н.Н. Прикладная теория пластичности и ползучести. М.: Машиностроение, 1968.
2. Качанов Л.М. Основы теории пластичности. М.: Наука, 1969.
3. Бурлаков А.В. Основы теории пластичности и ползучести. Изд-во ХГУ, 1968.
4. Соколовский В.В. Теория пластичности. М.: Высшая школа, 1969.
5. Качанов Л.М. Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.
6. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
7. Безухов Н.И. Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа, 1965.

Владимир Тимофеевич Сапунов

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ И ПОЛЗУЧЕСТИ

Учебное пособие

Редактор Н.В. Шумакова

Оригинал-макет изготовлен В.Т. Сапуновым

Подписано в печать 22.04.2008. Формат 60x84 1/16.

Уч.-изд. л. 13,75. Печ. л. 13,75. Тираж 200 экз.

Изд. № 4/124. Заказ

*Московский инженерно-физический институт
(государственный университет).
115409, Москва, Каширское шоссе, 31*

*Типография издательства «Тривант».
г. Троицк Московской обл.*