

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

В.С. Ремизович

ТЕОРИЯ ПРОХОЖДЕНИЯ
БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО
ПРОСТРАНСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИЦ

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2008

УДК 539.12(075)

ББК 22.382я7

Р 38

Ремизович В.С. Теория прохождения быстрых заряженных частиц через вещество. Пространственно-энергетическое распределение частиц: Учебное пособие. – М.: МИФИ, 2008. 248 с.

В пособии излагается материал, соответствующий одному из важных разделов курса “Физическая теория переноса излучения” – современным аналитическим методам решения неодноскоростных задач теории переноса пучков быстрых тяжелых заряженных частиц (протонов, α -частиц, π -мезонов, мюонов и др.) в аморфных средах. Описаны методы расчета энергетических спектров пучков частиц и интегральных характеристик проходящего излучения – распределения поглощенной веществом энергии (кривая Брэгга) и вероятности остановившихся частиц по глубине их внедрения в среду.

Учебное пособие частично восполняет практически полное отсутствие учебного материала по вопросам курса, одновременно обеспечивая *специфическую форму подачи* материала *именно для студентов дневного отделения* МИФИ. При этом предполагается необходимый уровень знаний определенных разделов математики (теории линейных дифференциальных уравнений, теории интегральных преобразований, основных свойств специальных функций) и теоретической физики (квантовой механики, элементов физической кинетики).

При написании пособия автор стремился к максимально подробному изложению материала, включив многие промежуточные выкладки. Некоторые задачи решены одновременно несколькими способами. Это, несомненно, будет полезно для широкой студенческой аудитории с большой дифференциацией знаний и поможет легче усвоить излагаемый материал. Пособие снабжено богатым иллюстративным материалом, что придает наглядность полученным аналитическим результатам.

Данное учебное пособие может быть также полезным для студентов факультетов дневного отделения МИФИ, обучающихся по специальности “Физика плазмы”, “Физика конденсированного состояния вещества”, “Радиационная безопасность человека и окружающей среды”, “Ядерные реакторы и энергетические установки”, а так же аспирантам, специализирующимся в области теории взаимодействия излучения с веществом.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент Жданов В.М.

ISBN 978-5-7262-0980-7

© Московский инженерно-физический институт
(государственный университет), 2008

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
1. ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ БЫСТРЫХ ТЯЖЕЛЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В АМОРФНЫХ СРЕДАХ	7
1.1. Уравнение переноса быстрых заряженных частиц.....	7
1.2. Упругое рассеяние быстрых тяжелых заряженных частиц на атомах вещества	22
1.3. Неупругие столкновения быстрых тяжелых заряженных частиц с атомами среды.....	41
2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЫСТРЫХ ТЯЖЕЛЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ БЕЗ УЧЕТА УПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ.....	56
2.1. Модель непрерывного замедления.....	56
2.2. Флуктуации энергии тяжелых заряженных частиц	81
2.3. Энергетический спектр тяжелых частиц, прошедших тонкий слой вещества в диффузионном приближении	91
2.4. Энергетический спектр быстрых тяжелых частиц в тонких слоях вещества без использования диффузионного приближения	100
2.5. Распространение нерелятивистских частиц в толстых слоях вещества.....	110
2.6. Самосогласованное гауссово приближение	130
3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦ ПО ГЛУБИНЕ. КРИВАЯ БРЭГГА	155
3.1. Кривая Брэгга.....	155
3.2. Кривая Брэгга в приближении непрерывного замедления	157
3.3. Кривая Брэгга в диффузионном приближении.....	165
4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАНОВИВШИХСЯ ЧАСТИЦ ПО ГЛУБИНЕ	173
4.1. Вероятность распределения внедренных частиц по глубине проникновения.....	173
4.2. Распределение остановившихся частиц в приближении непрерывного замедления	176

4.3. Распределения остановившихся нерелятивистских частиц с учетом флуктуаций потерь энергии при неупругих столкновениях.....	188
4.4. Распределение остановившихся частиц в диффузионном приближении	194
4.5. Распределение остановившихся частиц в самосогласованном гауссовом приближении	198
ПРИЛОЖЕНИЕ I. Получение транспортного уравнения переноса быстрых заряженных частиц из кинетического уравнения Больцмана для атомов газа.....	202
ПРИЛОЖЕНИЕ II. Расчет энергетического спектра частиц в приближении непрерывного замедления от плоского источника, расположенного в глубине вещества	215
ПРИЛОЖЕНИЕ III. Вычисление интегрального потока нерелятивистских частиц	221
ПРИЛОЖЕНИЕ IV. Асимптотическое выражение для дифференциальной плотности потока излучения нерелятивистских частиц	226
ПРИЛОЖЕНИЕ V. Связь между распределением остановившихся частиц и распределением по пробегам (общий случай)	230
Вопросы для самоконтроля.....	236
Литература.....	245

Предисловие

Особенность курса “Физическая теория переноса излучения”, который более двадцати лет читается студентам дневного отделения МИФИ, состоит в том, что с *единых позиций* линейной теории переноса излагаются как классическая теория распространения светового излучения в случайных средах (односкоростные задачи переноса), так и теория распространения заряженных частиц – неодноскоростные задачи теории переноса.

В пособии рассмотрены аналитические методы описания прохождения пучков быстрых тяжелых заряженных частиц (протонов, α -частиц, π -мезонов, мюонов и др.) в аморфных средах. Именно *аналитическая теория* позволяет понять физическую картину их взаимодействия с веществом, выяснить основные закономерности формирования угловых и энергетических спектров за счет многократного упругого рассеяния и неупругого взаимодействия частиц с атомами вещества. Это необходимо для многих областей науки и техники – ядерной физики и физики элементарных частиц, радиационной физики твердого тела, радиобиологии, новейших технологий и методов анализа структуры вещества и свойств его поверхности. Кроме того, полученные аналитические результаты расчетов в относительно простых базовых задачах могут быть использованы для разработки методов (в том числе и численных) решения более сложных задач теории переноса, таких, как прохождение частиц через неоднородные среды или через вещество, находящееся во внешних полях.

Рассматриваемая область энергий ограничена снизу условием, чтобы скорость частиц была больше средней скорости атомных электронов (быстрые частицы), а сверху – требованием, чтобы сильновзаимодействующие частицы не образовывали ядерные каскады. Для протонов, например, эта область энергий простирается от нескольких сот килоэлектрон-вольт до нескольких сот мегаэлектрон-вольт в зависимости от свойств вещества. Вне этой области физическая ситуация меняется и требуются принципиально другие методы вычисления угловых и энергетических спектров излучения.

Особенностью взаимодействия быстрых тяжелых частиц в указанном диапазоне энергий является малость угла многократного рассеяния на всем пути до полной остановки с одной стороны и

малость потерь энергии при отдельных неупругих столкновениях с атомами вещества с другой. Это позволяет существенно упростить транспортное уравнение, используя малоугловое диффузионное приближение по углам и приближение Фоккера – Планка по энергии. Однако даже при этом решение *общей* проблемы о вычислении распределения частиц одновременно как по углу рассеяния, так и по энергии представляет собой весьма масштабную задачу и не может быть реализовано в ограниченных рамках только одного пособия. Поэтому ниже рассматривается задача о вычислении только энергетического распределения частиц безотносительно к направлению их движения, т.е. излагаются основные методы расчета энергетического спектра частиц внутри вещества в приближении “прямо-вперед”. Использование аналитических методов вычисления распределения частиц по энергиям в приближении “прямо-вперед” важно как подготовительный этап к решению более сложных и значимых неоднократных задач теории переноса с одновременным учетом упругих и неупругих столкновений. Кроме того, вычисление энергетических спектров частиц, прямолинейно распространяющихся в веществе, представляет и самостоятельный интерес, так как непосредственно описывает энергетическое распределение быстрых тяжелых частиц в относительно тонких слоях вещества и на любых глубинах в легких средах, когда роль искривления “траекторий” из-за многократного упругого рассеяния невелика. Используя полученное аналитическое выражение для энергетического спектра частиц, в двух последних разделах вычислены распределение поглощенной веществом энергии (кривая Брэгга) и распределение остановившихся частиц по глубине их внедрения в среду.

При написании пособия автор стремился к максимально подробному изложению материала, включив многие промежуточные выкладки. Это, несомненно, будет полезно для широкой студенческой аудитории с большой дифференциацией знаний и поможет существенно легче усвоить излагаемый материал. Пособие снабжено богатым иллюстративным материалом, что придает максимальную наглядность полученным аналитическим результатам.

Автор выражает глубокую признательность доценту кафедры “Теоретическая физика” Маринюку В.В. за неоценимую помощь при подготовке данного пособия.

1. ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ БЫСТРЫХ ТЯЖЕЛЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ В АМОРФНЫХ СРЕДАХ

1.1. УРАВНЕНИЕ ПЕРЕНОСА БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Основная задача, стоящая перед теорией распространения частиц, может быть сформулирована следующим образом: зная законы взаимодействия частиц с атомами среды, геометрию рассеивателя, распределение объемных источников (если они присутствуют) и интенсивность падающего извне излучения, вычислить угловое и энергетическое распределение излучения в любой точке как внутри объема вещества, так и на его поверхности. Вычисление углового и энергетического спектров частиц в точке \vec{r} сводится к нахождению дифференциальной плотности потока излучения $N(\vec{r}; \vec{\Omega}; T)$. Величина $N(\vec{r}; \vec{\Omega}; T) d\Omega dT$ представляет собой число частиц, пересекающих в единицу времени единичную площадку в точке \vec{r} , ориентированную перпендикулярно к направлению их движения $\vec{\Omega}$, в интервале углов $\Omega \div \Omega + d\Omega$ и в интервале энергий $T \div T + dT$. Её размерность – $[N] = 1 / (\text{Дж} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^2)$. Для определения величины $N(\vec{r}, \vec{\Omega}, T)$ необходимо решить кинетическое уравнение Больцмана с линеаризованным интегралом столкновений – транспортное уравнение (уравнение переноса). Уравнение переноса есть уравнение баланса частиц в элементе объема dV , интервале углов $d\Omega$ и интервале энергий dT . В отсутствие внешних полей в стационарном, т.е. не зависящем от времени случае, это уравнение выглядит следующим образом:

$$\Omega \frac{\partial N(\vec{r}; \vec{\Omega}; T)}{\partial \vec{r}} = B_{ct} \{N\}. \quad (1.1.1)$$

Величина $B_{ct} \{N\}$ есть линеаризованный интеграл столкновений Больцмана, описывающий столкновения частиц пучка с ато-

мами среды [1, с. 5–14]. Он представляет собой *разность* между числом частиц в точке $\overset{\Gamma}{r}$, приходящих в состояние $(\overset{\Gamma}{\Omega}, T)$ из других возможных состояний $(\overset{\Gamma}{\Omega}', T + \varepsilon)$ и уходящих из состояния $(\overset{\Gamma}{\Omega}, T)$ в единицу времени за счет различных взаимодействий с атомами вещества:

$$\begin{aligned} \dot{B}_{ct} \{N\} = & -n_0 \sigma(T) N + \\ & + n_0 \iint_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty d\varepsilon \frac{d^2\sigma(\overset{\Gamma}{\Omega}'; T + \varepsilon | \overset{\Gamma}{\Omega}; \varepsilon)}{d\varepsilon d\Omega'} N(\overset{\Gamma}{r}; \overset{\Gamma}{\Omega}'; T + \varepsilon). \end{aligned} \quad (1.1.2)$$

Здесь n_0 – среднее число атомов в единице объема; $\sigma(T) = \sigma_{упр} + \sigma_{н.упр}$ – полное сечение столкновений частицы с энергией T ; $d^2\sigma(\overset{\Gamma}{\Omega}'; T + \varepsilon | \overset{\Gamma}{\Omega}; \varepsilon) / d\Omega d\varepsilon$ – дифференциальное сечение рассеяния из состояния $(\overset{\Gamma}{\Omega}'; T + \varepsilon)$ в состояние $(\overset{\Gamma}{\Omega}; T)$, когда частица изменяет направление движения $\overset{\Gamma}{\Omega}'$ на $\overset{\Gamma}{\Omega}$ и теряет энергию ε . Если в веществе имеются дополнительные источники частиц, то в правую часть уравнения (1.1.1) нужно добавить плотность объемных источников $Q_V(\overset{\Gamma}{r}; \overset{\Gamma}{\Omega}; T)$. Величина $Q_V dV d\Omega dT$ есть число частиц, испускаемых в единицу времени источниками в элементе объема dV точки $\overset{\Gamma}{r}$ в интервал углов $\Omega \div \Omega + d\Omega$ и интервал энергий от $T \div T + dT$. Уравнение (1.1.1) должно быть дополнено условиями на границе среды, выражающими наличие или отсутствие падающего извне излучения.

Дифференциальная плотность потока излучения связана с обычной функцией распределения $f(\overset{\Gamma}{r}; \overset{\Gamma}{\Omega}; T)$ простым соотношением

$$N(\overset{\Gamma}{r}; \overset{\Gamma}{\Omega}; T) = v(T) f(\overset{\Gamma}{r}; \overset{\Gamma}{\Omega}; T), \quad (1.1.3)$$

где $v(T)$ – скорость частицы с энергией T . Величина $f(r; \Omega; T) dV d\Omega dT$ есть число частиц в элементе объема dV в окрестности точки r , распространяющихся в интервале углов $\Omega \div \Omega + d\Omega$ и в интервале энергий $T \div T + dT$. Ввиду математической сложности, получение *аналитического* решения уравнения переноса (1.1.2) в общем случае с учетом всех разнообразных физических и геометрических факторов *не представляется возможным*. Поэтому в теории переноса, как и в любой другой физической теории, ограничиваются рассмотрением более частных задач, когда за счет уменьшения общности удается построить простые, адекватные физические модели, поддающиеся *аналитическому* исследованию.

Во многих случаях рассматривается распространение потоков частиц в рассеивающих средах с плоскими границами. Если к тому же на поверхность такого слоя вещества падают *широкие* потоки частиц (или *внутри* слоя находятся *плоские* источники излучения $Q_V = Q_V(z; \Omega)$), то реализуются условия так называемой *плоской геометрии*. В таких задачах интенсивность излучения зависит только от *одной* продольной декартовой координаты (например z), направленной перпендикулярно к поверхности слоя (рис.1.1.1) и не зависит от поперечных координат x, y : $N = N(z; \theta, \varphi; T)$. Здесь θ – полярный, а φ – азимутальный углы направления распространения частиц. Проекции единичного вектора скорости частицы выражаются через углы θ и φ обычным образом:

$$\Omega_x = \sin \theta \cos \varphi, \quad \Omega_y = \sin \theta \sin \varphi, \quad \Omega_z = \cos \theta.$$

Таким образом, для реализации условий *плоской геометрии* необходимо наличие *плоского* слоя вещества произвольной толщины L , ограниченного двумя параллельными бесконечными плоскостями. Будем выбирать начало координат на одной из поверхностей (например, левой), а ось Z направлять по нормали к поверхности в глубь среды, т.е. вправо. Тогда границами вещества будут плоскости $z = 0$ и $z = L$, соответственно. Если толщина слоя $L \rightarrow \infty$, то говорят о распространении излучения в *полубесконечной* среде. С математической точки зрения, задачи с плоской гео-

метрией относятся к классу наиболее простых и наиболее распространенных и изученных задач теории переноса.

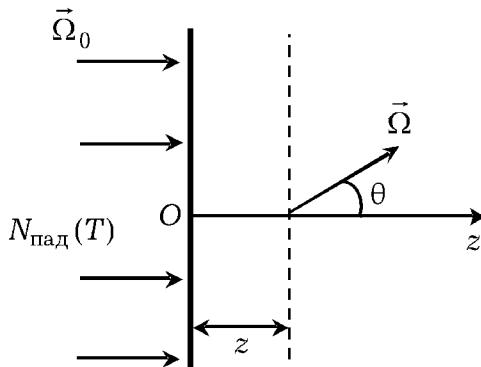


Рис.1.1.1. Условное изображение широкого потока частиц, падающих по нормали к поверхности полубесконечного слоя вещества

В дальнейшем будем предполагать, что на границу полубесконечного слоя вещества ($0 \leq z < \infty$) падает мононаправленный пучок частиц по нормали к его поверхности (вдоль оси Z) (см. рис. 1.1.1).

В этом простейшем случае зависимость от азимутального угла отсутствует. Поэтому дифференциальная плотность потока

излучения зависит только от глубины z и полярного угла θ между вектором $\vec{\Omega}$ и осью Z .

Уравнение переноса (1.1.1) и граничные условия для дифференциальной плотности потока излучения $N(z; \mu; T)$ будут выглядеть так:

$$\mu \frac{\partial N(z; \mu; T)}{\partial z} = B_{\text{ст}} \{N\}. \quad (1.1.4)$$

$$N(z = 0, \mu; T) = \frac{\delta(1 - \mu)}{2\pi} N_{\text{пад}}(T); \quad (\mu > 0) \quad (1.1.5a)$$

$$N(z \rightarrow \infty; \mu, T) = 0, \quad (1.1.5b)$$

где $\mu = \cos\theta$. Если $\mu > 0$ ($0 \leq \theta < \pi/2$), то частицы распространяются вправо в глубь среды (рис.1.1.1), если $\mu < 0$ (т.е.

$\pi/2 < \theta \leq \pi$), то частицы распространяются влево в сторону границы $z = 0$. При $\mu = 0$ (т.е. $\theta = \pi/2$) частицы движутся параллельно границе вещества. Падающему на поверхности вещества излучению соответствуют значения $\mu > 0$, а отраженному – $\mu = -|\mu| < 0$. Величина $N_{\text{пад}}(T)$ есть распределение частиц по энергии в падающем пучке. Граничное условие (1.1.5а) выражает тот факт, что на поверхности вещества известно только *падающее излучение* в интервале углов $0 \leq \theta < \pi/2$. Значение *отраженного* от среды излучения $N(z = 0; \mu < 0; T)$ в интервале углов $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$ не известно и подлежит определению в процессе решения задачи. Интеграл столкновений $B_{\text{ст}} \{N\}$ в уравнении (1.1.4) определяется выражением (1.1.2), в котором нужно осуществить замену: $N(r; \Omega; T) \rightarrow N(z; \mu; T)$.

Важными *энергетическими* характеристиками поля излучения являются односторонние энергетические потоки частиц $N_+(z; T)$ и $N_-(z; T)$:

$$N_+(z; T) = 2\pi \int_0^1 N(z; \mu; T) \mu d\mu, \\ N_-(z; T) = -2\pi \int_0^{-1} N(z; \mu; T) \mu d\mu. \quad (1.1.6)$$

Величина $N_+(z; T) dT$ – есть среднее число частиц в интервале энергий $T \div T + dT$, распространяющихся в глубь среды (т.е. вправо) и пересекающих в единицу времени единичную площадку (перпендикулярную к оси Oz) на глубине z . Величина $N_-(z; T)$ – есть среднее число частиц, в том же интервале энергий, распространяющихся в сторону *поверхности* вещества (т.е. влево) и пересекающих в единицу времени ту же площадку. Если в первой из формул (1.1.6) положить $z = 0$, то в соответствии с (1.1.5а) получим, что

$$N_+(z = 0; T) = N_{\text{пад}}(T). \quad (1.1.7)$$

Таким образом, величина $N_+(z = 0; T)$ определяет энергетический спектр *падающего* излучения.

Если во второй формуле (1.1.6) положить $z = 0$, то получим

$$N_-(z = 0; T) = 2\pi \int_0^1 N(z; -|\mu|; T) |\mu| d|\mu| = N_{\text{отр}}(T). \quad (1.1.8)$$

Величина $N_-(z = 0; T) dT = N_{\text{отр}}(T) dT$ представляет собой число частиц, вылетающих с единицы поверхности вещества в единицу времени в интервале энергий от T до $T + dT$, т.е. определяет энергетическое распределение *отраженного* излучения.

Для определения дифференциальной плотности потока излучения необходимо знать выражение для двойного дифференциального сечения рассеяния по углам и энергии $d^2\sigma(T; \Omega' | \Omega; \varepsilon) / d\Omega d\varepsilon$, которое является ядром интегрального уравнения переноса (1.1.4) для величины $N(z; \mu; T)$. Конкретный вид двойного дифференциального сечения рассеяния существенно зависит от скорости частиц. Наиболее изучен случай *быстрых* частиц, когда оказывается возможным аналитически вычислить дифференциальное сечение рассеяния частиц на атомах вещества.

Частица считается *быстрой*, если ее скорость v много больше средней скорости атомных электронов $v_{\text{ат}}$:

$$v \gg v_{\text{ат}}, \quad v_{\text{ат}} = \frac{e^2}{h} Z^{2/3} = \frac{c}{137} Z^{2/3}. \quad (1.1.9)$$

Здесь e – заряд электрона; h – постоянная Планка; c – скорость света; $e^2/hc = 1/137$ – постоянная тонкой структуры; Z – атомный номер вещества рассеивателя.

Для нерелятивистских частиц

$$p = \sqrt{2mT}, \quad v = p/m = 2T/m, \quad (T \ll mc^2). \quad (1.1.10)$$

где p, T – импульс и кинетическая энергия частицы соответственно.

Из неравенства (1.1.8) получаем ограничение “снизу” на кинетическую энергию частиц

$$T \gtrsim 2.5 \cdot 10^{-5} Z^{4/3} mc^2. \quad (1.1.11)$$

Таким образом, для частицы с заданной массой граничная энергия (1.1.11), определяемая требованием $V \gtrsim V_{\text{ат}}$, зависит только от атомного номера Z вещества рассеивателя. Например, для частиц, распространяющихся в алюминии ($Z_{\text{Al}} = 13$), $T \gg 10^{-3} mc^2$, а для свинца ($Z_{\text{Pb}} = 82$) $T \gg 10^{-2} mc^2$. Следовательно, для быстрых частиц условие (1.1.11) выполняется с большим запасом уже в нерелятивистской области энергий. Поэтому, не преуменьшая общности, ограничимся в основном изучением распространения быстрых *нерелятивистских* частиц. Все необходимые результаты для случая *произвольных* энергий можно найти, например, в монографии [2, гл. 1].

В некоторых разделах для справочных целей приводятся (курсивом) соответствующие формулы, справедливые во всем диапазоне энергий, исключая область сверхвысоких энергий, когда $T \gtrsim (m/m_e)mc^2$. Для таких энергий физическая ситуация радикально меняется, т.к. необходимо учитывать возможность ядерных взаимодействий, что требует принципиально других методов решения уравнения переноса.

Обычно частицу считают *тяжелой*, если ее масса m много больше массы электрона m_e :

$$m \gtrsim m_e. \quad (1.1.12)$$

Таким образом, к тяжелым заряженным частицам относятся все заряженные частицы, кроме электронов и позитронов: α -частицы, протоны, мюоны, π -мезоны и т.д. (табл. 1.1.1).

Таблица 1.1.1

Масса и энергия покоя некоторых тяжелых заряженных частиц

Частица	α -частица	Протон	Мюон	π^{+-} Мезон
m/m_e	7308	1836	207	273
mc^2 , МэВ	3727	938	106	139,5

Условие (1.1.11) выполняется для протонов в алюминии при $T \gtrsim 0,6$ МэВ, а для свинца при $T \gtrsim 7$ МэВ. Для мюонов эти значения энергии T на порядок меньше. Таким образом, тяжелые частицы являются быстрыми уже при очень малых нерелятивистских энергиях.

Основные процессы взаимодействия нерелятивистских частиц с атомами среды – упругое рассеяние и торможение частиц за счет возбуждения или ионизации атомов вещества. Для любых *быстрых* частиц (как легких, так и тяжелых) процессы упругого рассеяния и неупругих столкновений происходят практически независимо. Поэтому для таких частиц с хорошей точностью двойное дифференциальное сечение рассеяния можно представить в виде суммы *двух слагаемых* [5]:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\varepsilon} \approx \frac{d\sigma_{\text{упр}}(\overset{\text{r}}{\Omega'} \rightarrow \overset{\text{r}}{\Omega} | T)}{d\Omega} \delta(\varepsilon) + \frac{d\sigma_{\text{неупр}}(T|\varepsilon)}{d\varepsilon} \delta(\overset{\text{r}}{\Omega'} - \overset{\text{r}}{\Omega}). \quad (1.1.13)$$

Первое слагаемое в (1.1.13) описывает процесс *упругого* рассеяния частицы на ядре атома с учетом экранирующего действия атомных электронов. Потери энергии частицы при этом несущественны: $\varepsilon = 0$. Второе слагаемое в (1.1.13) описывает процесс *неупругого* взаимодействия с атомом, при котором частица с начальной энергией T теряет энергию ε , идущую на возбуждение или ионизацию атома. Направление движения частицы при этом остается неизменным: $\overset{\text{r}}{\Omega'} = \overset{\text{r}}{\Omega}$. Соответственно интеграл столкновений для *быстрых* частиц также разбивается на сумму двух слагаемых, описывающих процессы упругих и неупругих столкновений:

$$\dot{B}_{\text{ct}}\{N\} \approx \dot{B}_{\text{упр}}\{N\} + \dot{B}_{\text{неупр}}\{N\}, \quad (1.1.14)$$

здесь

$$\begin{aligned} \dot{B}_{\text{упр}}\{N\} &= -w_{\text{упр}}(T)N(z; \mu; T) + \\ &+ \iint_{4\pi} w_{\text{упр}}(\overset{\text{r}}{\Omega'} \rightarrow \overset{\text{r}}{\Omega} | T)N(z; \mu'; T)d\Omega', \end{aligned} \quad (1.1.15)$$

$$\begin{aligned} \dot{B}_{\text{нейупр}} \{N\} = & -W_{\text{нейупр}}(T)N(z; \mu; T) + \\ & + \int_0^\infty W_{\text{нейупр}}(T + \varepsilon | \varepsilon)N(z; \mu; T + \varepsilon)d\varepsilon \end{aligned} \quad (1.1.16)$$

упругая и неупругая части интеграла столкновений.

В уравнениях (1.1.15) и (1.1.16) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned} W_{\text{упр}}(T) &= n_0 \sigma_{\text{упр}}(T), \\ W_{\text{упр}}\left(\frac{\Gamma}{\Omega'} \rightarrow \frac{\Gamma}{\Omega} | T\right) &= n_0 \frac{d\sigma_{\text{упр}}\left(\frac{\Gamma}{\Omega'} \rightarrow \frac{\Gamma}{\Omega} | T\right)}{d\Omega'}; \end{aligned} \quad (1.1.17)$$

$$\begin{aligned} W_{\text{нейупр}}(T) &= n_0 \sigma_{\text{нейупр}}(T), \\ W_{\text{нейупр}}(T | \varepsilon) &= n_0 \frac{d\sigma_{\text{нейупр}}(T | \varepsilon)}{d\varepsilon}. \end{aligned} \quad (1.1.18)$$

Здесь $W_{\text{упр}}(T)$ – вероятность *упругого* рассеяния частицы с энергией T на единице пути; $W_{\text{упр}}\left(\frac{\Gamma}{\Omega'} \rightarrow \frac{\Gamma}{\Omega} | T\right)$ – вероятность *упругого* рассеяния частицы с энергией T на единице пути из направления Ω' в направление Ω ; $W_{\text{нейупр}}(T)$ – вероятность *неупрого*го рассеяния частицы с энергией T на единице пути; $W_{\text{нейупр}}(T | \varepsilon)$ – вероятность *неупрого*го рассеяния частицы с начальной энергией T на единице пути, при котором частица теряет энергию ε . Размерность всех четырех величин $1/M$. Естественно, что

$$\begin{aligned} W_{\text{упр}}(T) &= \iint_{4\pi} W_{\text{упр}}\left(\frac{\Gamma}{\Omega'} \rightarrow \frac{\Gamma}{\Omega} | T\right) d\Omega'; \\ W_{\text{нейупр}}(T) &= \int_0^T W_{\text{нейупр}}(T | \varepsilon) d\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Следовательно, уравнение переноса (1.1.4) для *быстрых* частиц в условиях плоской геометрии при нормальном падении излучения на поверхность вещества может быть записано в виде

$$\mu \frac{\partial N(z; \mu; T)}{\partial z} = \int_{\text{упр}} \{N\} + \int_{\text{неупр}} \{N\}. \quad (1.1.20)$$

Уравнение переноса (1.1.20) в равной мере описывает процесс распространения как легких, так и тяжелых *быстрых* частиц.

Интегрируя уравнение (1.1.20) по углам и учитывая, что

$$2\pi \int_{-1}^1 \int_{\text{упр}} \{N\} d\mu = 0,$$

получаем

$$\frac{\partial N_z(z; T)}{\partial z} = \int_{\text{неупр}} \{N(z; T)\}. \quad (1.1.21)$$

Здесь

$$\begin{aligned} N_z(z; T) &= 2\pi \int_{-1}^1 \mu N(z; \mu; T) d\mu; \\ N(z; T) &= 2\pi \int_{-1}^1 N(z; \mu; T) d\mu. \end{aligned} \quad (1.1.22)$$

Величина $N_z(z; T) dT$ представляет собой число частиц в интервале энергий от T до $T + dT$, пересекающих единичную площадку на глубине Z (перпендикулярную к оси Oz) во всех направлениях в единицу времени. В соответствии с (1.1.3) $N(z; T) = v(T) \rho(z; T)$, где $\rho(z; T)$ – плотность частиц с энергией T на глубине Z .

Взаимодействие быстрых *тяжелых* частиц с атомами вещества имеет ряд принципиальных особенностей, что позволяет существенно упростить исходное уравнение переноса (1.1.20).

Как будет показано ниже, уже при сравнительно малых нерелятивистских энергиях, де-бройлевская длина волны *тяжелой* частицы оказывается меньше размеров ядра атома. Вследствие этого, угол однократного рассеяния оказывается ограничен малой величиной

чиной $\theta \leq \theta_{\max} \ll 1$. Ограничность угла однократного рассеяния позволяет в не очень тонких слоях вещества, когда $\langle \theta^2 \rangle_z \gg \theta_{\max}^2$ ($\langle \theta^2 \rangle_z$ – средний квадрат угла рассеяния на глубине z) использовать приближение Фоккера – Планка (диффузионное приближение в пространстве углов). В этом приближении упругая часть интеграла столкновений $B_{\text{упр}} \{N\}$ записывается в виде некоторого дифференциального оператора. Другими словами, интегральное уравнение переноса по угловой переменной заменяется значительно более простым дифференциальным уравнением. Кроме того, угол многократного рассеяния тяжелых частиц оказывается малым *на всем пути* движения частиц в веществе. Это означает, что малоугловое приближение адекватно описывает процесс распространения быстрых тяжелых частиц и оказывается вполне достаточным для вычисления дифференциальной плотности потока излучения *на любых* глубинах $0 \leq z < \infty$. По этой же причине при нормальном падении потока частиц на плоскую поверхность вещества *отраженным* излучением от полубесконечной среды можно пренебречь.

Для тяжелых частиц оказывается *малой* величина энергии, передаваемой частицей атомному электрону ионизации $\varepsilon \leq \varepsilon_{\max} \ll T$. Ограничность энергии, теряемой частицей при одном столкновении с атомом, позволяет существенно упростить и неупругую часть интеграла столкновений, представив $B_{\text{неупр}} \{N\}$ в виде некоторого дифференциального оператора по энергетической переменной. Сказанное выше позволяет существенно упростить исходное уравнение переноса и получить во многих случаях аналитическое решение проблемы, т.е. вычислить дифференциальную плотность потока излучения $N(z; \mu; T)$, а также различные средние характеристики излучения, например распределение в веществе поглощенной энергии (кривая Брэгга), распределение оставшись частиц по глубине и т.д.

Заметим, что для быстрых легких частиц, например электронов, подобных ограничений на максимальное значение угла рассеяния и передаваемую энергию нет. Электрон может отклониться

на любой угол и передать атомному электрону ионизации всю свою энергию.

Условие $\langle \theta^2 \rangle_z \ll 1$ выполняется не для всех глубин, а только в тонких слоях вещества. Поэтому вычисление угловых и энергетических спектров электронов на больших глубинах представляет собой существенно более сложную задачу, если учесть к тому же, что из-за рассеяния на относительно большие углы необходимо, вообще говоря, учитывать отражение электронов средой.

В настоящем пособии изложены некоторые положения теории распространения быстрых тяжелых заряженных частиц в веществе. Решение общей задачи о вычислении полной дифференциальной плотности потока излучения $N(z; \mu; T)$, т.е. одновременное вычисление распределения частиц как по углу рассеяния, так и по энергии, даже при всех указанных выше упрощениях, представляет собой весьма масштабную задачу. Поэтому ниже рассматривается более частная задача о вычислении только энергетического распределения частиц $N(z; T)$ безотносительно к направлению их движения, т.е. излагаются основные методы расчета только энергетического спектра частиц внутри вещества.

При рассеянии на малые углы на любой глубине ($0 \leq z < \infty$) оказывается отличным от нуля только энергетический поток частиц $N_+(z; T)$, распространяющихся в глубь вещества, в то время как $N_-(z; T) = 0$. Поэтому вместо (1.1.22) будем иметь

$$N_z(z; T) \approx 2\pi \int_0^1 N(z; \mu; T) \mu d\mu = N_+(z; T), \quad (1.1.23)$$

$$N(z; T) \approx 2\pi \int_0^1 N(z; \mu; T) d\mu. \quad (1.1.24)$$

Теперь уравнение (1.1.21) запишется так

$$\partial N_+(z; T) / \partial z = B_{\text{н.упр}} \{N(z; T)\}. \quad (1.1.25)$$

Таким образом, одно уравнение (1.1.25) содержит две неизвестные величины – $N_+(z; T)$ и $N(z; T)$ и поэтому не является замкнутым.

Следовательно, даже при *малоугловом* рассеянии получить замкнутое уравнение для энергетического спектра $N(z; T)$ без каких-либо дополнительных упрощений уравнения (1.1.25) не представляется возможным.

Приближение “прямо – вперед”

При движении в веществе частицы теряют энергию в результате ионизации и возбуждения атомов среды. Доминирующим является процесс систематических потерь энергии, т.е. их непрерывное торможение в веществе. В то же время из-за вероятностного характера процесса *неупругих* столкновений частицы с первоначально *одинаковой* энергией могут потерять различную энергию, проходя слой вещества толщины Z . Этот фактор приводит к возникновению *разброса частиц по энергиям* по мере их углубления в среду. Кроме того, за счет вероятностного характера *упругих* столкновений возникают *флуктуации длины пути*. Частицы, достигающие глубины Z и прошедшие при этом больший путь, теряют большую энергию. Поэтому упругое рассеяние является еще одним фактором, приводящим к *флуктуациям энергии* частиц, прошедших слой вещества заданной толщины. Таким образом, в общем случае, ионизационные столкновения и многократное упругое рассеяние оказывают *совместное влияние* на энергетическое распределение частиц. Следовательно, для определения энергетического распределения частиц $N(z; T)$ необходимо решать соответствующее кинетическое уравнение переноса (1.1.20), в котором оба этих фактора учитываются *одновременно* [2, гл. 4, 5] и уже затем по формуле (1.1.24) вычислять величину $N(z; T)$.

Однако в случае *быстрых тяжелых* частиц *флуктуации* потерь энергии как из-за статистического характера ионизационных столкновений, так и из-за многократного малоуглового упругого рассеяния относительно невелики – много меньше средних потерь энергии. Это обстоятельство позволяет, корректно учитывая процесс систематического торможения частиц, рассматривать *независимым образом* флуктуации, вызванные упругим рассеянием, и флуктуации, обусловленные ионизационными столкновениями с

атомами вещества, поскольку корреляция этих видов флюктуаций практически отсутствует [2, гл. 4 и 5].

Наиболее радикальным и самым простым приближением, позволяющим изучить трансформацию энергетического спектра частиц только за счет ионизационных столкновений, является приближение “*прямо – вперед*”. В этом приближении полностью пре-небрегается процессом упругого рассеяния, т.е. считается, что уп-ругая часть интеграла столкновений равна нулю: $B_{\text{упр}} \{N\} = 0$.

Другими словами, движение частиц считается *прямолинейным*.

Если на плоский полубесконечный слой вещества падает широ-кий мононаправленный пучок частиц по нормали к его поверхно-сти, то в приближении “*прямо – вперед*” частицы распространяют-ся в глубь вещества вдоль оси Oz , при этом изменяется только их энергия. Поэтому дифференциальная плотность потока излучения на глубине z будет определяться выражением

$$N(z; \mu; T) = \frac{1}{2\pi} \delta(1 - \mu) N(z; T). \quad (1.1.26)$$

Подставляя (1.1.26) в (1.1.23) и (1.1.24), получим

$$N_z(z; T) = N_+(z; T) = N(z; T). \quad (1.1.27)$$

Теперь уравнение (1.1.25) и граничное условие (1.1.5а) для величины $N(z; T)$ можно записать так:

$$\frac{\partial N(z; T)}{\partial z} = B_{\text{нейупр}} \{N(z; T)\}. \quad (1.1.28)$$

$$N(z = 0; T) = N_{\text{пад}}(T). \quad (1.1.29)$$

Таким образом, в отличие от уравнения (1.1.25) уравнение (1.1.28) является замкнутым и позволяет рассчитать энергетический спектр частиц $N(z; T)$ и, следовательно, значение одностороннего энер-гетического потока частиц $N_+(z; T)$ на любой глубине z внутри вещества.

Вид интеграла неупругих столкновений в уравнении (1.1.28) для величины $N(z; T)$ следует из общего выражения (1.1.16):

$$\begin{aligned} \dot{B}_{\text{нейупр}} \{N\} = & -W_{\text{нейупр}}(T)N(z; T) + \\ & + \int_0^{\infty} W_{\text{нейупр}}(T + \varepsilon | \varepsilon) N(z; T + \varepsilon) d\varepsilon. \end{aligned} \quad (1.1.30)$$

Определив значение $N(z; T) = N_+(z; T)$, можно вычислить *полный* (интегральный) поток частиц

$$N(z) = \int_0^{\infty} N(z; T) dT, \quad [N(z)] = 1/c \cdot m^2. \quad (1.1.31)$$

Величина $N(z)$ есть среднее число частиц, проходящих в единицу времени в глубь вещества через единичную площадку (перпендикулярную к оси Oz) на глубине z .

Средняя энергия частиц $\bar{T}(z)$ на глубине z определяется обычным образом:

$$\bar{T}(z) = \frac{\int_0^{\infty} T N(z; T) dT}{\int_0^{\infty} N(z; T) dT}, \quad \text{т.е. } \bar{T}(z) = \frac{1}{N(z)} \int_0^{\infty} T N(z; T) dT. \quad (1.1.32)$$

Вычисление распределения частиц по энергиям в приближении (1.1.26), (1.1.27) важно не только как подготовительный этап к решению уравнения переноса с одновременным учетом упругих и неупругих столкновений, но представляет и *самостоятельный интерес*, т.к. вычисленная в приближении “*прямо – вперед*” величина $N(z; T)$ описывает энергетическое распределение быстрых тяжелых частиц в относительно тонких слоях вещества, когда роль искривления траектории из-за многократного упругого рассеяния небольшой, а также на любой глубине [2, гл. 5] в *легких* средах, когда $Z = 2\sqrt{m/m_e}$.

Следующие два раздела посвящены обсуждению элементарных процессов упругих и неупругих столкновений быстрых тяжелых заряженных частиц с атомами вещества.

1.2. УПРУГОЕ РАССЕЯНИЕ БЫСТРЫХ ТЯЖЕЛЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ НА АТОМАХ ВЕЩЕСТВА

Особенности упругого рассеяния быстрых тяжелых частиц

Пролетающая вблизи атома частица массой m с зарядом ze взаимодействует как с ядром, так и с электронной оболочкой и в результате изменяет направление своего движения.

Распределение частиц по углу отклонения ϑ при однократном рассеянии характеризуется дифференциальным сечением рассеяния $d\sigma_{\text{упр}} / d\Omega$. Характер упругого рассеяния быстрых заряженных частиц существенно зависит от соотношений между их де-бройлевской длиной волны, размерами атома $r_{\text{ат}}$ и его ядра $r_{\text{ядр}}$. Де-бройлевская длина волны *нерелятивистской* частицы связана с её кинетической энергией соотношением

$$D = \frac{h}{p} = D_K \frac{m_e c}{\sqrt{2m T}},$$

т.е. $D = 0.7 D_K \frac{m_e}{m} \frac{1}{\sqrt{E_k}}, \quad (E_k = T / mc^2)$. (1.2.1)

Здесь $D_K = h / m_e c = 0.38 \cdot 10^{-10}$ см – комптоновская длина волны электрона; E_k – кинетическая энергия частицы в единицах энергии покоя. Характерные значения радиуса атома $r_{\text{ат}}$ и ядра атома $r_{\text{ядр}}$ обычно оцениваются по формулам

$$r_{\text{ат}} : a_B Z^{1/3}, \quad r_{\text{ядр}} : 0.5 r_e A^{1/3}. \quad (1.2.2)$$

Здесь a_B – боровский радиус атома водорода; r_e – классический радиус электрона:

$$a_B = h^2 / m_e e^2 = 0.5 \cdot 10^{-8} \text{ см},$$
$$r_e = e^2 / m_e c^2 = 2.8 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (1.2.3)$$

A – атомная масса. Для величины A справедлива оценка $A \approx 2Z$.

Из формул (1.2.1), (1.2.2), находим отношение длины волны частицы к атомному радиусу:

$$\frac{D}{r_{\text{ат}}} = \frac{Z^{1/3}}{137} \frac{m_e c}{\sqrt{2mT}}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{D}{r_{\text{ат}}} \approx 5 \cdot 10^{-3} Z^{1/3} \frac{m_e}{m} \frac{1}{\sqrt{E_k}}. \quad (1.2.4)$$

Для быстрых частиц, энергия которых удовлетворяет условию (1.1.11), получаем, что

$$D/r_{\text{ат}} = 10^{-1} (m_e/m) Z^{-1/3}. \quad (1.2.5)$$

Таким образом, во всем рассматриваемом диапазоне энергий (1.1.11) длина волны частицы значительно меньше характерных размеров атома

$$D = r_{\text{ат}}. \quad (1.2.6)$$

Это очень важное неравенство. Оно приводит к тому, что упругое рассеяние быстрых частиц (как легких, так и тяжелых) на атомах среды оказывается *резко анизотропным*, т.е. рассеяние таких частиц с наибольшей вероятностью происходит в узком интервале углов относительно направления первоначального движения частицы:

$$\vartheta \leq \vartheta_{\text{эфф}}, \quad \vartheta_{\text{эфф}} \sim D/r_{\text{ат}} \ll 1, \quad (1.2.7)$$

$\vartheta_{\text{эфф}}$ – “эффективный” угол однократного рассеяния.

Отношение длины волны частицы к размеру атомного ядра можно определить по формуле

$$\frac{D}{r_{\text{ядр}}} = \frac{2 \cdot 137}{A^{1/3}} \frac{m_e c}{\sqrt{2mT}}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{D}{r_{\text{ядр}}} \approx 200 A^{-1/3} \frac{m_e}{m} \frac{1}{\sqrt{E_k}}. \quad (1.2.8)$$

Здесь учтено, что $D_K / r_e = 137$. Из выражения (1.2.8) находим, что в области энергий

$$\begin{aligned} T &>> 4 \cdot 10^4 (m_e/m) A^{-2/3} m_e c^2 = \\ &= 2 \cdot 10^4 (m_e/m) A^{-2/3} (\text{МэВ}) \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

($m_e c^2 \approx 0,5 \text{ МэВ}$), длина волны частицы оказывается *меньше размеров ядра атома*:

$$D = r_{\text{ядр}}. \quad (1.2.10)$$

Следовательно, для *тяжелых* частиц из-за малости отношения $m_e/m \ll 1$ величина $D/r_{\text{ядр}}$ тоже может оказаться малой. Например, для протонов в алюминии ($A_{\text{Al}} = 27$) условие (1.2.10) вы-

полняется при $T \gtrsim 1,2$ МэВ, а в свинце ($A_{\text{Pb}} = 205$) при $T \gtrsim 0,3$ МэВ. Таким образом, даже при *нерелятивистских* энергиях длина волны тяжелых частиц оказывается малой не только по сравнению с размерами атомов вещества, но и по сравнению с размерами их ядер. Из-за малости длины волны частицы по сравнению с радиусом ядра последнее нельзя рассматривать как точечное. Учет конечных размеров ядра приводит к тому, что возникает *ограничение* на максимальный угол рассеяния:

$$\vartheta \leq \vartheta_{\max}, \quad \vartheta_{\max} = D/r_{\text{ядр}} \ll 1. \quad (1.2.11)$$

Заметим, что $\vartheta_{\max} / \vartheta_{\text{эфф}} = r_{\text{ядр}} / r_{\text{ат}} \ll 1$, т.е. $\vartheta_{\max} \ll \vartheta_{\text{эфф}}$.

Дифференциальное сечение рассеяния быстрых частиц на атоме

Дифференциальное сечение рассеяния быстрых частиц ($v \gg v_{\text{ат}}$) может быть рассчитано в первом борновском приближении (М. Борн, 1926) и в *нерелятивистском* случае ($T \ll mc^2$) определяется квадратом модуля компоненты Фурье сферического потенциала поля $\varphi(r)$, созданного в точке \vec{r} ядром атома и его электронной оболочкой, усредненного по основному состоянию атома [5]:

$$\frac{d\sigma_{\text{упр}}}{d\Omega} ; \quad \left(\frac{ze}{2\pi\hbar^2} m \right)^2 |\varphi(\vec{q})|^2, \quad (1.2.12)$$

$$\varphi(\vec{q}) = \int d\vec{r} \varphi(r) \exp\left(-i\frac{\vec{q}\cdot\vec{r}}{\hbar}\right) = \frac{4\pi\hbar}{q} \int_0^\infty r \varphi(r) \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) dr. \quad (1.2.13)$$

Подставляя (1.2.13) в (1.2.12) получаем

$$\frac{d\sigma_{\text{упр}}}{d\Omega} = \left(2 \frac{ze}{\hbar q} m \right)^2 \left\{ \int_0^\infty r \varphi(r) \sin\left(\frac{qr}{\hbar}\right) dr \right\}^2. \quad (1.2.14)$$

где $\vec{q} = \vec{p} - \vec{p}_0$ – изменение импульса частицы в процессе рассеяния; \vec{p}_0 и \vec{p} – импульсы частицы до и после рассеяния.

При упругом рассеянии величина импульса частицы не изменяется: $|\vec{p}| = |\vec{p}_0| = p$. Поэтому модуль вектора \vec{q} связан с углом однократного рассеяния ϑ между векторами \vec{p} и \vec{p}_0 соотношением (рис. 1.2.1)

$$\begin{aligned} q &= 2p \sin(\vartheta/2) = \\ &= 2\sqrt{2mT} \sin(\vartheta/2). \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Средний потенциал взаимодействия может быть определен из уравнения Пуассона, если известны средняя плотность протонов в ядре $n_{\text{ядр}}(r)$ и средняя плотность электронов в атоме $n_e(r)$:

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -4\pi|\epsilon| \{n_{\text{ядр}}(r) - n_e(r)\}. \quad (1.2.16)$$

Из уравнения (1.2.16) следует, что

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{q}) &= \varphi_{\text{ядр}}(\vec{q}) + \varphi_e(\vec{q}) = \\ &= (-4\pi|\epsilon|/q^2) \{n_{\text{ядр}}(\vec{q}) - n_e(\vec{q})\}. \end{aligned} \quad (1.2.17)$$

Здесь $n_{\text{ядр}}(\vec{q})$ и $n_e(\vec{q})$ – компоненты Фурье плотности протонов в ядре и электронной плотности, соответственно.

Упругое рассеяние быстрых частиц на атоме с *точечным ядром*

Будем считать ядро атома *точечным*. Тогда

$$n_{\text{ядр}}(\vec{r}) = Z\delta(\vec{r}), \quad \varphi_{\text{ядр}}(\vec{r}) = Ze/r, \quad \varphi_{\text{ядр}}(\vec{q}) = (-4\pi Z|\epsilon|/q^2).$$

Из формул (1.2.14), (1.2.17) получаем выражение для дифференциального сечения упругого рассеяния быстрых нерелятивистских частиц на атоме с *точечным ядром*

$$\frac{d\sigma_{\text{упр}}}{d\Omega} = \frac{1}{4} r_e^2 Z^2 \left(\frac{m_e c^2}{T} \right)^2 \frac{[Z - F(q)]^2}{(1 - \cos \vartheta)^2}. \quad (1.2.18)$$

Величина $F(q)$ называется атомным форм-фактором и определяется по формуле



Рис. 1.2.1. Диаграмма столкновения частицы с атомом.
 ϑ – угол рассеяния

$$\begin{aligned}
 F(q) &= \frac{4\pi h}{q} \int_0^{\infty} n_e(r) \sin\left(\frac{qr}{h}\right) r dr = \\
 &= \frac{4\pi h}{q} \int_0^{\infty} n_e(r) \sin\left[2\sin\left(\frac{9}{2}\right)\frac{r}{D}\right] r dr.
 \end{aligned} \tag{1.2.19}$$

Появление величины $F(q)$ в формуле для сечения упругого рассеяния (1.2.18) связано с наличием атомных электронов, экранирующих поле ядра. Плотность электронов $n_e(r)$ существенно отлична от нуля только в области атомных размеров $0 \leq r \leq r_{\text{ат}}$. Поэтому значение атомного форм-фактора становится пренебрежимо малым, если в эффективной области интегрирования $r \leq r_{\text{ат}}$ подынтегральное выражение в (1.2.19) содержит быстро осциллирующий множитель. Появление быстрых осцилляций имеет место при рассеянии на *относительно большие углы* $\vartheta \geq D/r_{\text{ат}}$, когда $qr_{\text{ат}}/h \gg 1$. При рассеянии на такие углы величиной $F(q)$ в формуле (1.2.18) можно пренебречь по сравнению с Z . В результате приходим к обычной *формуле Резерфорда* для дифференциального сечения рассеяния в кулоновском поле *точечного* ядра

$$\frac{d\sigma_{\text{упр}}^{(\text{яд})}(\vartheta|T)}{d\Omega} = \frac{1}{4} r_e^2 Z^2 Z^2 \left(\frac{m_e c^2}{T} \right)^2 \frac{1}{(1 - \cos \vartheta)^2}. \tag{1.2.20}$$

Малость атомного форм-фактора $F(q)$ по сравнению с величиной Z означает, что рассеяние на *относительно большие углы* $\vartheta > D/r_{\text{ат}}$ происходит при *малых* прицельных параметрах столкновений $\rho \ll r_{\text{ат}}$, где поле атомных электронов пренебрежимо мало по сравнению с кулоновским полем ядра.

При рассеянии на *относительно малые углы* $\vartheta \leq D/r_{\text{ат}}$ углы прицельные параметры столкновения велики $\rho \gg r_{\text{ат}}$ и необходимо учитывать как поле ядра, так и поле атомных электронов. Наиболее последовательный метод учета экранировки поля ядра полем атомных электронов состоит в квантово-механическом расчете средней плотности электронов $n_e(r)$ с помощью волновой функции основ-

ного состояния атома и в вычислении затем форм-фактора $F(q)$ по формуле (1.2.19). Поскольку для многоэлектронных атомов последовательный расчет волновой функции крайне сложен, при определении величины $n_e(r)$ в средних и тяжелых атомах ($Z \gg 1$) обычно используют значение электронной плотности в приближении Томаса – Ферми. Но даже в этом случае соответствующие расчеты оказываются достаточно громоздкими и, как правило, не могут быть выполнены без использования ЭВМ.

Однако, как показал Бете, экранирующий эффект атомных электронов можно хорошо описать простой эмпирической формулой путем введения в теорию всего одного параметра – *параметра экранирования* η . Для этого достаточно в формуле Резерфорда (1.2.20) осуществить замену

$$(1 - \cos \vartheta)^2 \rightarrow (1 + 2\eta - \cos \vartheta)^2. \quad (1.2.21)$$

Следует также учесть вклад *неупругих столкновений* с атомными электронами в процесс упругого рассеяния, т.к. при неупругом взаимодействии с атомным электроном частица не только передает ему некоторую энергию, но и изменяет направление движения. Для этого нужно добавить в числителе формулы Резерфорда к величине Z^2 величину Z , т.е. заменить Z^2 на $Z(Z + 1)$. Такая процедура вполне оправдана, так как для быстрых тяжелых частиц $D \ll r_{\text{ат}}$, и неупругое взаимодействие с атомными электронами происходит некогерентным, независимым образом. За счет этого складываются не амплитуды взаимодействия, а сечения рассеяния на отдельных электронах, число которых в атоме равно Z . С учетом всех сделанных выше замечаний выражение для *дифференциального сечения* упругого рассеяния быстрых нерелятивистских частиц на атоме вещества с точечным ядром будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma_{\text{упр}}(\vartheta|T)}{d\Omega} & ; \quad \frac{r_e^2 Z^2 Z(Z + 1)}{4(1 + 2\eta - \cos \vartheta)^2} \left(\frac{m_e c^2}{T} \right)^2 = \\ & = \frac{r_e^2 Z^2 Z(Z + 1)}{(1 + 2\eta - \cos \vartheta)^2} \left(\frac{m_e}{m} \right)^2 \frac{1}{E_k^2} \end{aligned} \quad (1.2.22)$$

$(E_k = T/mc^2)$. Интегрируя (1.2.22) по углам $\theta(Z)$ эВ, получаем полное сечение упругого рассеяния частицы на атоме при условии, что ядро атома считается точечным

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{упр}}(T) &= \pi r_e^2 Z^2 \frac{Z(Z+1)}{4\eta(1+\eta)} \left(\frac{m_e c^2}{T} \right)^2 = \\ &= \pi r_e^2 Z^2 \frac{Z(Z+1)}{4\eta(1+\eta)} \left(\frac{m_e}{m} \right)^2 \frac{1}{E_k^2}.\end{aligned}\quad (1.2.23)$$

Следует иметь в виду, что параметр экранирования η зависит от энергии частицы: $\eta = \eta(T)$.

Если разделить (1.2.22) на (1.2.23), получим зависимость индикатрисы рассеяния от угла однократного рассеяния θ :

$$\chi(\cos \theta | T) = \frac{1}{\sigma_{\text{упр}}(T)} \frac{d\sigma_{\text{упр}}(\theta | T)}{d\Omega} = \frac{\eta(1+\eta)}{\pi(1+2\eta-\cos \theta)^2}. \quad (1.2.24)$$

Величина $\chi(\theta)d\Omega$, по своему определению, есть вероятность упругого рассеяния в элемент телесного угла $d\Omega$. Индикатриса рассеяния нормирована условием

$$\iint_{4\pi} \chi(\cos \theta)d\Omega = 2\pi \int_0^\pi \chi(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 1. \quad (1.2.25)$$

Таким образом, все основные физические величины, характеризующие процесс упругого рассеяния быстрых тяжелых частиц: $d\sigma_{\text{упр}}(\theta | T)/d\Omega$, $\sigma_{\text{упр}}(T)$, $\chi(\cos \theta | T)$, могут быть определены по формулам (1.2.22) – (1.2.24) при условии, что известно значение параметра экранирования $\eta(T)$.

Наиболее просто значение параметра η можно определить, если воспользоваться широко распространенной аппроксимацией реального атомного потенциала *экранированным кулоновским потенциалом* (потенциал типа Юкавы)

$$\varphi(r) = \frac{Z|e|}{r} \exp\left(-\frac{r}{r_{\text{ат}}}\right). \quad (1.2.26)$$

Подставляя (1.2.26) в (1.2.14), получаем выражение для дифференциального сечения рассеяния на атоме с точечным ядром:

$$\frac{d\sigma_{\text{упр}}}{d\Omega} = \frac{r_e^2 Z^2 Z^2}{4 \left[1 + 0,5(D/r_{\text{ат}})^2 - \cos \vartheta \right]^2} \left(\frac{m_e c^2}{T} \right)^2. \quad (1.2.27)$$

Сравнивая формулы (1.2.27) и (1.2.22), видим, что в приближении экранированного кулоновского потенциала (1.2.26), параметр экранирования η связан с величиной эффективного угла однократного рассеяния $\vartheta_{\text{эф}}$ (1.2.7) простым соотношением

$$\eta = \frac{1}{4} \vartheta_{\text{эф}}^2. \quad (1.2.28)$$

С учетом формулы (1.2.4) из (1.2.7), получаем значение эффективного угла однократного рассеяния для *нерелятивистских* частиц:

$$\vartheta_{\text{эф}} = \frac{Z^{1/3}}{137} \frac{m_e c}{\sqrt{2m T}},$$

$$\text{т.е. } \vartheta_{\text{эф}} \approx 5 \cdot 10^{-3} Z^{1/3} \frac{m_e}{m} \frac{1}{\sqrt{E_k}}, \quad (E_k = T/m c^2). \quad (1.2.29)$$

Более точные расчеты параметра экранирования η были выполнены Мольер*. Данные о величине η можно найти в многочисленной литературе.

В случае произвольных энергий

$$\vartheta_{\text{эф}} ; \quad 7,6 \cdot 10^{-3} Z^{1/3} \frac{m_e c^2}{\sqrt{T(T+2m c^2)}} \ll 1. \quad (1.2.30a)$$

В общем случае кинетическая энергия частицы T определяется как разность между полной энергией и энергией покоя:

$$T = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2; \quad E_k = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1. \quad (1.2.30b)$$

В ультрарелятивистском случае, когда $1 \ll T/m c^2 \ll m/m_e$,

* Moliere G. Z. Naturforsch. 1947. Bd. 2a. S. 133–145.

$$\vartheta_{\text{эфф}}(T) = 7,6 \cdot 10^{-3} Z^{1/3} \frac{m_e c^2}{T}. \quad (1.2.30\text{в})$$

Таким образом, для частиц ультрарелятивистских энергий величина $\vartheta_{\text{эфф}}$ убывает с увеличением энергии значительно быстрее ($\vartheta_{\text{эфф}} \sim 1/T$), чем для частиц нерелятивистских энергий ($\vartheta_{\text{эфф}} \sim 1/E$).

Поскольку для быстрых частиц эффективный угол однократного рассеяния мал ($\vartheta_{\text{эфф}} = 1$), то в соответствии с формулой (1.2.27) дифференциальное сечение рассеяния быстрых тяжелых частиц всегда резко анизотропно, т.е. сосредоточено в области малых углов (1.2.7). При $\vartheta \ll 1$ значение $\cos \vartheta \approx 1 - \vartheta^2/2$ и выражения для дифференциального сечения (1.2.22), полного сечения (1.2.23) и индикаторы рассеяния (1.2.24) можно записать в виде

$$\frac{d\sigma_{\text{упр}}(\vartheta|T)}{d\Omega} \approx \frac{r_e^2 Z^2 Z(Z+1)}{\left(\vartheta_{\text{эфф}}^2 + \vartheta^2\right)^2} \left(\frac{m_e c^2}{T}\right)^2. \quad (1.2.31)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{упр}}(T) &\approx \frac{\pi r_e^2 Z^2 Z(Z+1)}{\vartheta_{\text{эфф}}^2} \left(\frac{m_e c^2}{T}\right)^2 = \\ &= \frac{\pi r_e^2 Z^2 Z(Z+1)}{\vartheta_{\text{эфф}}^2} \left(\frac{m_e}{m}\right)^2 \frac{1}{E_k^2}, \end{aligned} \quad (1.2.32\text{а})$$

$$\sigma_{\text{упр}} \approx 4\pi \cdot 10^{-4} r_e^2 Z^2 \frac{Z^{1/3}(Z+1)}{E_k}, \quad (1.2.32\text{б})$$

$$\chi(\vartheta|T) \approx \frac{\vartheta_{\text{эфф}}^2(T)}{\pi \left[\vartheta_{\text{эфф}}^2(T) + \vartheta^2\right]^2} \quad (\vartheta_{\text{эфф}}, \vartheta \ll 1). \quad (1.2.33)$$

В приближении малых углов $d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta \approx 2\pi \vartheta d\vartheta$. Поэтому условие нормировки (1.2.25) запишется так:

$$2\pi \int_0^\infty \chi(\vartheta) \vartheta d\vartheta = 1. \quad (1.2.34)$$

Ввиду быстрого убывания индикатрисы рассеяния с ростом угла ϑ , верхний предел интегрирования в формуле (1.2.34), как это принято в теории малоуглового рассеяния, распространен до бесконечности. Непосредственной проверкой легко убедиться, что малоугловая индикатриса (1.2.33) удовлетворяет условию нормировки (1.2.34).

В полученных выше соотношениях всюду подразумевалось, что масса ядра $m_{\text{ядр}}$ бесконечно велика. Однако эти формулы остаются справедливыми и в том случае, если процесс рассеяния рассматривать в системе центра масс налетающей частицы и ядра атома (Ц-системе), если понимать под массой и энергией приведенную массу и энергию относительного движения в Ц-системе соответственно: $\mu = m_{\text{ядр}} / (m + m_{\text{ядр}})$, $T_{\text{ц}} = T \cdot m_{\text{ядр}} / (m + m_{\text{ядр}})$. При этом под углом ϑ следует понимать угол рассеяния χ в Ц-системе. При рассеянии на малые углы формулы для сечений в лабораторной системе вообще не зависят от величины $m_{\text{ядр}}$ и поэтому, будучи получены в приближении $m_{\text{яд}} \rightarrow \infty$, остаются справедливыми и в общем случае [2, гл. 1].

Упругое рассеяние частиц на атоме с ядром конечных размеров

До сих пор при изучении процесса рассеяния ядро атома считалось точечным. Однако, как об этом говорилось ранее, начиная уже с достаточно низких энергий (1.2.9), длина волны тяжелой частицы становится меньше размеров ядра: $D \ll r_{\text{ядр}}$. Поэтому при квантово-механическом расчете сечения упругого рассеяния необходимо учитывать конечные размеры ядра. В простейшей модели ядро атома можно считать равномерно заряженным шаром радиусом $r = r_{\text{ядр}}$. В этом приближении плотность протонов в ядре будет определяться выражением

$$n_{\text{ядр}}(r) = 3Z(4\pi r_{\text{ядр}}^3)^{-1}, \quad (0 \leq r \leq r_{\text{ядр}}). \quad (1.2.35)$$

Поле равномерно заряженного шара отличается от кулоновского поля точечного ядра только внутри самого ядра. Поэтому конечность размеров ядра будет проявляться лишь при малых при цель-

ных параметрах $\rho \leq r_{\text{ядр}} \ll r_{\text{ат}}$, т.е. при рассеянии на относительно большие углы. При таких параметрах столкновений экранирующим действием атомных электронов можно пренебречь и положить в формуле (1.2.16) $n_e(r) = 0$. Тогда

$$\varphi(r) \approx \varphi_{\text{ядр}}(r) = \begin{cases} \frac{Z|\epsilon|}{r} \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2} \frac{r^2}{r_{\text{ядр}}^2} \right), & 0 \leq r \leq r_{\text{ядр}}; \\ \frac{Z|\epsilon|}{r}, & r_{\text{ядр}} < r \ll r_{\text{ат}}. \end{cases} \quad (1.2.36)$$

Подставляя (1.2.36) в общую формулу (1.2.14), получим

$$\frac{d\sigma_{\text{упр}}^{(\text{ядр})}}{d\Omega} = \frac{1}{4} r_e^2 Z^2 \left(\frac{m_e c^2}{T} \right)^2 \frac{1}{(1 - \cos \vartheta)^2} \Phi(u), \quad (1.2.37)$$

где

$$\Phi(u) = \frac{9\pi}{2u^3} [J_{3/2}(u)]^2, \quad \left(u = 2 \frac{r_{\text{ядр}}}{D} \sin \frac{\vartheta}{2} \approx \frac{r_{\text{ядр}}}{D} \vartheta \right). \quad (1.2.38)$$

Здесь $J_{3/2}(u)$ – функция Бесселя.

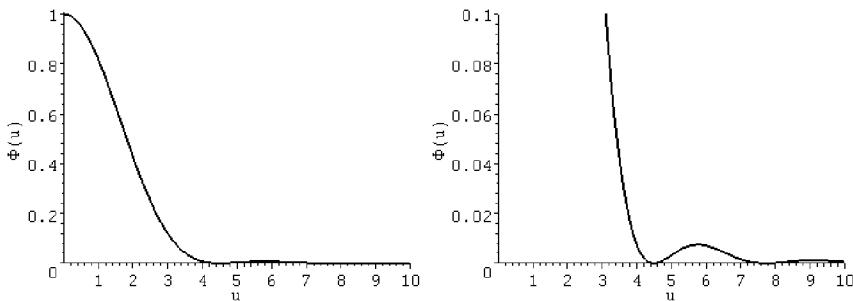


Рис. 1.2.2. Зависимость функции $\Phi(u)$ от величины u

Таким образом, в выражении для дифференциального сечения рассеяния быстрых тяжелых частиц на сферическом ядре радиуса $r_{\text{ядр}}$ появляется дополнительный сомножитель $\Phi(u)$, зависящий от отношения $r_{\text{ядр}}/D$ и угла рассеяния ϑ . Функция $\Phi(u)$ имеет

резкий максимум при $u = 0$ (при $\vartheta = 0$). С увеличением u (с увеличением угла рассеяния ϑ) функция $\Phi(u)$ совершают быстро затухающие колебания (рис. 1.2.2). Усредненное по осцилляциям значение $\overline{\Phi(u)}$ убывает пропорционально u^{-4} , т.е. пропорционально $(\sin \vartheta / 2)^{-4}$. Первый нуль функции $\Phi(u)$ находится вблизи значения $u = 3\pi/2$, а второй ближайший максимум достигается при $u \approx 6$. Его значение примерно равно $7 \cdot 10^{-3}$, т.е. пренебрежимо мало по сравнению с главным максимумом при $u = 0$, где $\Phi(u = 0) = 1$. Таким образом, область углов рассеяния определяется условием $u \approx (r_{\text{ядр}} / D) \vartheta \leq 1$, т.е. условием (1.2.11).

Учитывая исключительную быстроту убывания сечения с увеличением угла рассеяния ($d\sigma_{\text{упр}}^{(\text{ядр})} : \vartheta^{-8}$), часто используется следующая *аппроксимация* для дифференциального сечения рассеяния быстрых тяжелых частиц в области энергий (1.2.9), когда $D \ll r_{\text{ядр}}$. Считают, что сечение рассеяния частиц описывается формулой (1.2.31) в области углов рассеяния ϑ от нуля до максимального угла ϑ_{\max} : $D/r_{\text{ядр}}$ и *равно нулю* в области углов $\vartheta > \vartheta_{\max}$

$$\frac{d\sigma_{\text{упр}}}{d\Omega} \approx \begin{cases} \frac{r_e^2 Z^2 Z(Z+1)}{(\vartheta_{\text{эфф}}^2 + \vartheta^2)^2} \left(\frac{m_e}{m} \right)^2 \frac{1}{E_k^2}, & 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_{\max}; \\ 0, & \vartheta > \vartheta_{\max}. \end{cases} \quad (1.2.39)$$

Для нерелятивистских частиц значение $\vartheta_{\text{эфф}}$ определяется выражением (1.2.29). Для величины ϑ_{\max} получаем

$$\text{т.е. } \vartheta_{\max} ; 270 A^{-1/3} \frac{m_e c}{\sqrt{2mT}},$$

$$\vartheta_{\max} ; 190 A^{-1/3} \frac{m_e}{m} \frac{1}{\sqrt{E_k}}. \quad (1.2.40)$$

Теперь полное сечение упругого рассеяния можно определить по формуле

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{упр}} &= 2\pi \int_0^{\vartheta_{\max}} \frac{d\sigma_{\text{упр}}}{d\Omega} \vartheta d\vartheta = \\ &= \frac{1}{\vartheta_{\text{эфф}}^2} \frac{\pi r_e^2 Z^2 Z(Z+1)}{\left[1 + \left(\vartheta_{\text{эфф}} / \vartheta_{\max}\right)^2\right]} \left(\frac{m_e}{m}\right) \frac{1}{E_k^2}.\end{aligned}\quad (1.2.41)$$

Учитывая формулу (1.2.29) для $\vartheta_{\text{эфф}}(E_k)$ и то, что $\vartheta_{\text{эфф}}/\vartheta_{\max}$; $r_{\text{ядр}}/r_{\text{ат}} \ll 1$, выражение для полного сечения упругого рассеяния запишется так

$$\sigma_{\text{упр}} \approx 35 \cdot 10^3 \pi r_e^2 Z^2 Z^{1/3} (Z+1) \frac{1}{E_k}. \quad (1.2.42)$$

Теперь малоугловая индикаториса рассеяния (1.2.33) быстрой тяжелой частицы на атоме с учетом конечных размеров его ядра будет выглядеть следующим образом

$$\chi(\vartheta | T) \approx \begin{cases} \frac{\vartheta_{\text{эфф}}^2(T)}{\pi \left[\vartheta_{\text{эфф}}^2(T) + \vartheta^2 \right]^2}, & 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_{\max}; \\ 0, & \vartheta > \vartheta_{\max}. \end{cases} \quad (1.2.43)$$

В случае произвольных энергий

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma_{\text{упр}}}{d\Omega} &\approx \\ &\approx \begin{cases} 4r_e^2 Z^2 Z(Z+1) \left(\frac{m_e}{m}\right)^2 \left[\frac{(1+E_k)}{E_k(2+E_k)(\vartheta_{\text{эфф}}^2 + \vartheta^2)} \right]^2, & 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_{\max}; \\ 0, & \vartheta > \vartheta_{\max}. \end{cases}\end{aligned}\quad (1.2.44)$$

$$\sigma_{\text{упр}} = 7 \cdot 10^4 \pi r_e^2 Z^2 Z^{1/3} (Z+1) \frac{(1+E_k)^2}{E_k (2+E_k)}. \quad (1.2.45)$$

При $T \ll mc^2$ ($E_k \ll 1$) более общие формулы (1.2.44) и (1.2.45) переходят в (1.2.39) и (1.2.41) соответственно.

Изложенные выше результаты получены на основе простейшей модели учета конечных размеров атомного ядра. Более детальное обсуждение вопроса о рассеянии заряженных частиц на ядре и соответствующие расчеты можно найти, например в монографии [4].

Основные средние характеристики упругого рассеяния быстрых тяжелых частиц

Средний квадрат угла однократного рассеяния

Зная индикатору рассеяния (1.2.43), можно определить средний квадрат угла однократного рассеяния

$$\langle \vartheta^2 \rangle = 2\pi \int_0^{\vartheta_{\max}} \vartheta^2 \chi(\vartheta) \vartheta d\vartheta. \quad (1.2.46)$$

Для нерелятивистских частиц значения $\vartheta_{\text{эфф}}$ и ϑ_{\max} определяются формулами (1.2.29) и (1.2.40). После интегрирования получаем

$$\langle \vartheta^2 \rangle \approx 4\vartheta_{\text{эфф}}^2(T)L_K = 1,2 \cdot 10^{-4} Z^{2/3} \left(\frac{m_e}{m} \right)^2 \frac{L_K}{E_k}, \quad (1.2.47)$$

где $L_K = \ln\{210(AZ)^{-1/6}\} -$ (1.2.48)

так называемый *кулоновский логарифм*.

Из формулы (1.2.48) следует, что значение кулюновского логарифма не зависит от энергии, заряда и массы частиц, а определяется только *параметрами вещества* рассеивателя. Из таблицы 1.2.1 видно, что при изменении величины Z от 1 до 82 значение кулюновского логарифма L_K меняется незначительно – от 5,35 до 3,72.

Таблица 1.2.1

Значение кулоновского логарифма L_K для различных веществ

Элемент	Z	A	L_K
H	1	1	5,35
C	6	12	4,63
O	8	16	4,53
H_2O	10	18	4,48
Al	13	27	4,37
Fe	26	56	4,13
Cu	29	64	4,09
Ag	47	108	3,96
Au	79	197	3,74
Pb	82	207	3,72

Средняя длина свободного пробега при упругом рассеянии

Средняя длина свободного пробега при упругом рассеянии определяется обычным образом [5]:

$$l_{\text{упр}}(T) = \frac{1}{n_0 \sigma_{\text{упр}}(T)}. \quad (1.2.49)$$

Число атомов в единице объема вещества n_0 ($1/\text{см}^3$) связано с плотностью вещества ρ ($\text{г}/\text{см}^3$) соотношением

$$n_0 = \rho N_A / A. \quad (1.2.50)$$

Здесь A – атомная масса; $N_A = 6,02 \cdot 10^{23}$ (моль $^{-1}$) – число Авогадро. Учитывая, что $\pi N_A r_e^2 \approx 0,15$, находим:

$$\pi n_0 r_e^2 = \frac{\rho}{A} \pi N_A r_e^2 \approx 0,15 \frac{\rho}{A}, \quad (1.2.51)$$

Величина полного сечения определяется формулой (1.2.42). Подставляя (1.2.42) в (1.2.49) с учетом соотношения (1.2.51), получаем

следующее выражение для длины упругого рассеяния нерелятивистских частиц

$$l_{\text{упр}} = 2 \cdot 10^{-4} \frac{A}{Z^2 Z^{1/3} (Z + 1)} \frac{E_k}{\rho} \text{ (см)} \quad (1.2.52)$$

(в этой формуле плотность вещества ρ в г/см^3).

Например, для нерелятивистских протонов с энергией $T = 50 \text{ МэВ}$ ($E_k \approx 0,05$) в алюминии ($Z_{\text{Al}} = 13$, $A_{\text{Al}} = 27$, $\rho_{\text{Al}} = 2,7 \text{ г/см}^3$) $l_{\text{упр}} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ см}$, т.е. длина упругого рассеяния является величиной микроскопической.

Выражение для длины упругого рассеяния при произвольных энергиях выглядит так

$$l_{\text{упр}} = 10^{-4} \frac{A}{Z^2 Z^{1/3} (Z + 1)} \frac{E_k (2 + E_k)}{(1 + E_k)^2} \frac{1}{\rho} \text{ (см).} \quad (1.2.53)$$

При $E_k \ll 1$, из общей формулы (1.2.53) приходим к нерелятивистскому выражению (1.2.52).

Средний квадрат угла рассеяния на единице пути

В теории переноса быстрых частиц важную роль играет величина *среднего квадрата угла рассеяния на единице пути* $\langle \theta_s^2 \rangle$. Поскольку при движении в веществе на единице пути частица испытывает в среднем $1/l_{\text{упр}}$ столкновений, а в каждом из столкновений значение среднего квадрата угла рассеяния есть $\langle \vartheta^2 \rangle$, то

$$\langle \theta_s^2 \rangle = \langle \vartheta^2 \rangle / l_{\text{упр}}. \quad (1.2.54)$$

Подставляя значения (1.2.47), (1.2.52) для величин $\langle \vartheta^2 \rangle$ и $l_{\text{упр}}$ в формулу (1.2.54), получаем выражение для среднего квадрата угла рассеяния быстрых нерелятивистских частиц на единице пути

$$\langle \theta_s^2 \rangle = 0,6 Z^2 \frac{Z(Z + 1)}{A} \left(\frac{m_e}{m} \right)^2 \rho \frac{L_K}{E_k^2}. \quad (1.2.55)$$

Для быстрых частиц произвольной энергии

$$\langle \theta_s^2 \rangle = 2,4 \frac{Z^2 Z(Z+1)}{A} \left(\frac{m_e}{m} \right)^2 \frac{(1+E_K)^2}{E_K^2 (2+E_K)^2} \rho L_K . \quad (1.2.56)$$

Для частиц нерелятивистских энергий, когда $E_K \ll 1$ из (1.2.56) приходим к формуле (1.2.55). Из общей формулы (1.2.56) следует, что значение $\langle \theta_s^2 \rangle$ монотонно уменьшается с увеличением энергии частиц. При этом как для частиц нерелятивистских энергий, так и в ультрарелятивистской области, значение $\langle \theta_s^2 \rangle$ обратно пропорционально квадрату энергии частиц: $\langle \theta_s^2 \rangle : 1/E_K^2$.

Транспортная длина упругого рассеяния

С величиной $\langle \theta_s^2 \rangle$ тесно связана важная характеристика процесса упругого рассеяния – *транспортная длина рассеяния*

$$l_{\text{тр}}(T) = 1/n_0 \sigma_{\text{тр}}(T) . \quad (1.2.57)$$

Транспортное сечение рассеяния $\sigma_{\text{тр}}$ определяется выражением [5]:

$$\sigma_{\text{тр}} = 2\pi \int_0^\pi (1 - \cos \vartheta) \left(d\sigma_{\text{упр}} / d\Omega \right) \sin \vartheta d\vartheta . \quad (1.2.58)$$

При рассеянии на малые углы $1 - \cos \vartheta \approx 0,5\vartheta^2$. Поэтому в маловугловом приближении

$$\sigma_{\text{тр}} \approx \pi \int_0^\infty \vartheta^2 \left[d\sigma_{\text{упр}}(\vartheta) / d\Omega \right] \vartheta d\vartheta = \frac{\langle \vartheta^2 \rangle \sigma_{\text{упр}}}{2} . \quad (1.2.59)$$

Следовательно,

$$l_{\text{тр}} = 2l_{\text{упр}} / \langle \vartheta^2 \rangle = 2 / \langle \theta_s^2 \rangle . \quad (1.2.60)$$

Таким образом, транспортная длина рассеяния в $2/\langle g^2 \rangle$ раз больше средней длины упругого рассеяния. По своему физическому смыслу величина $l_{\text{тр}}$ есть средний путь, пройдя который первоначально мононаправленный пучок частиц почти изотропизуется за счет чисто упругого рассеяния. Используя формулу (1.2.55) для нерелятивистских частиц получаем

$$l_{\text{тр}} \approx 3.2 \frac{A}{z^2 Z(Z+1)} \left(\frac{m}{m_e} \right)^2 \frac{E_k^2}{\rho L_K} \text{ (см)}, \quad (E_k = T/m c^2 \ll 1) \quad (1.2.61)$$

(в этой формуле плотность вещества ρ в $\text{г}/\text{см}^3$). Например, для протонов с энергией $T = 50 \text{ МэВ}$ ($E_k \approx 0.05$) в алюминии $l_{\text{тр}} \approx 3.5 \text{ м}$! Таким образом, в отличие от длины свободного пробега, транспортная длина упругого рассеяния является величиной *макроскопической*.

Для частиц произвольных энергий

$$l_{\text{тр}} \approx 0.8 \frac{A}{z^2 Z(Z+1)} \left(\frac{m}{m_e} \right)^2 \frac{E_k^2 (2+E_k)^2}{(1+E_k)^2} \frac{1}{\rho L_K}. \quad (1.2.62)$$

Для нерелятивистских частиц из общей формулы (1.2.62) получаем (1.2.61).

Уравнение переноса в диффузионном приближении по угловым переменным

Ограниченностю угла однократного рассеяния позволяет использовать приближение Фоккера – Планка по угловым переменным θ, φ (диффузионное приближение в пространстве углов). В этом приближении упругая часть интеграла столкновений записывается в виде *дифференциального* оператора [2, гл. 3]

$$B_{\text{упр}} \{N\} \approx \frac{\langle \theta_s^2(T) \rangle}{4} \Delta_{\theta, \varphi} N(\vec{r}; \theta, \varphi; T). \quad (1.2.63)$$

Здесь $\Delta_{\theta, \varphi}$ – угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах

$$\Delta_{\theta,\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (1.2.64)$$

Уравнение переноса (1.1.20) для быстрых частиц в условиях *плоской геометрии* при *нормальном падении* излучения на поверхность вещества, когда дифференциальная плотность потока излучения не зависит от азимутального угла φ , будет выглядеть так

$$\begin{aligned} \cos \theta \frac{\partial N(z; \theta; T)}{\partial z} &= \\ = \frac{\langle \theta_s^2(T) \rangle}{4} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial N(z; \theta; T)}{\partial \theta} \right) + B_{\text{нейпр}} \{N\}. \end{aligned} \quad (1.2.65)$$

В рамках *стандартного малоуглового диффузационного приближения* (СМДП), когда не учитывается искривление “траектории” частиц из-за рассеяния, в уравнении (1.2.65) можно положить $\cos \theta \approx 1$, $\sin \theta \approx \theta$, после чего уравнение (1.2.65) принимает вид

$$\frac{\partial N(z; \theta; T)}{\partial z} = \frac{\langle \theta_s^2(T) \rangle}{4} \frac{1}{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\theta \frac{\partial N(z; \theta; T)}{\partial \theta} \right) + B_{\text{нейпр}} \{N\}. \quad (1.2.66)$$

Интегрируя уравнение (1.2.66) по всем углам рассеяния $d\Omega \approx 2\pi \vartheta d\vartheta$ в пределах $0 \leq \vartheta < \infty$, с учетом того, что в рамках малоуглового приближения $N(z; \theta \rightarrow \infty; T) \rightarrow 0$, получим

$$\frac{\partial N(z; T)}{\partial z} = B_{\text{нейпр}} \{N(z; T)\}. \quad (1.2.67)$$

Здесь $N(z; T)$ – энергетический спектр частиц (1.1.24) при малоугловом рассеянии

$$N(z; T) = 2\pi \int_0^\infty N(z; \theta; T) \theta d\theta. \quad (1.2.68)$$

Уравнение (1.2.67) совпадает с уравнением (1.1.28), полученным в приближении “*прямо – вперед*”. Следовательно, результаты расчета энергетического спектра частиц в приближении “*прямо – вперед*”, определяют энергетический спектр частиц и в рамках СМДП.

Чтобы в рамках малоуглового диффузационного приближения (МДП) учесть искривление “траектории” частиц из-за рассеяния, необходимо в уравнении (1.2.65) учсть отличие $\cos \theta$ от единицы [2, гл. 4].

1.3. НЕУПРУГИЕ СТОЛКНОВЕНИЯ БЫСТРЫХ ТЯЖЕЛЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ С АТОМАМИ СРЕДЫ

Особенности неупругого рассеяния быстрых тяжелых частиц

Заряженная частица, проходя через вещество, теряет свою энергию в результате столкновений с атомными электронами, радиационного торможения и передачи части своей кинетической энергии ядру при упругом рассеянии (энергия отдачи). Для быстрых тяжелых заряженных частиц радиационные потери энергии и потери энергии при упругих столкновениях малы. Поэтому основным механизмом торможения таких частиц в веществе является процесс *возбуждения* или *ионизации* атомов среды.

Неупругие столкновения частиц с атомами среды характеризуются дифференциальным $d\sigma_{\text{неупр}}(T|\varepsilon)/d\varepsilon$ и полным $\sigma_{\text{неупр}}(T)$ сечениями неупротого рассеяния. Величина $\sigma_{\text{неупр}}(T|\varepsilon)/d\varepsilon$ описывает процесс неупротого взаимодействия с атомом, при котором частица с начальной энергией T теряет энергию ε , идущую на возбуждение или ионизацию атома. Обе эти величины входят в неупругую часть Больцмановского интеграла столкновений (1.1.16).

В равновесном веществе практически все атомы находятся в основном состоянии с энергией электронного движения ε_0 . Это связано с тем, что в нормальных условиях энергия тепловых колебаний недостаточна для возбуждения атома. При неупротом столкновении с заряженной частицей атом переходит в возбужденное состояние с энергией $\varepsilon_n > \varepsilon_0$ и энергия частицы уменьшается на величину $\Delta\varepsilon_n = \varepsilon_n - \varepsilon_0$. Если энергия, передаваемая атомному электрону, оказывается больше энергии связи, то происходит *ионизация* атома. При ионизации атома частица теряет наибольшую энергию.

Важной особенностью процесса взаимодействия быстрой тяжелой частицы с атомами среды является *малость энергии*, теряемой частицей при *одном* столкновении.

Действительно, пусть энергия, передаваемая атомному электрону в процессе столкновения, значительно превосходит энергию

связи электронов в атоме ($\varepsilon \gg \varepsilon_{\text{ат}}$). Такой процесс можно рассматривать как упругое столкновение частицы массой m со свободным покоящимся электроном. Пусть ϑ – угол отклонения налетающей частицы, а α – угол вылета электрона после взаимодействия; \vec{p}_0 и \vec{p} – импульсы частицы до и после столкновения, а \vec{p}_e – импульс электрона после рассеяния (рис. 1.3.1). Законы сохранения энергии и импульса для рассматриваемого процесса столкновения частицы со свободным электроном имеют вид

$$\begin{cases} T_0 = T + T_e; \\ p_0 = p \cos \vartheta + p_e \cos \alpha; \\ p \sin \vartheta - p_e \sin \alpha = 0. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

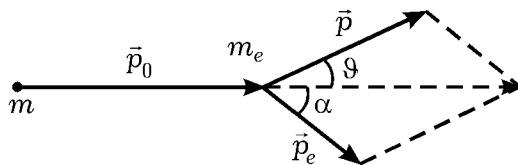


Рис. 1.3.1. Диаграмма столкновения частицы массой m с покоящимся электроном: ϑ – угол отклонения частицы; α – угол вылета электрона

Энергия электрона отдачи после взаимодействия с налетающей частицей становится максимальной при $\alpha = 0$. Это соответствует центральному удару. При этом значение максимальной кинетической энергии $(T_e)_{\max}$ электрона ионизации равно значению максимальной энергии, теряемой налетающей частицей при “лобовом” столкновении: $(T_e)_{\max} = \varepsilon_{\max}$. Полагая в (1.3.1) $\alpha = 0$, $\vartheta = 0$, получим

$$\begin{cases} T_0 = T + \varepsilon_{\max}; \\ p_0 = p + (p_e)_{\max}. \end{cases} \quad (1.3.2)$$

В нерелятивистском случае $p_0 = \sqrt{2mT_0}$, $p = \sqrt{2mT}$, $(p_e)_{\max} = \sqrt{2m_e\varepsilon_{\max}}$. Из системы уравнений (1.3.2) находим, что

$$\varepsilon_{\max} = 4T_0 \frac{m_e/m}{(1 + m_e/m)^2} \approx 4 \frac{m_e}{m} T_0. \quad (1.3.3)$$

Так как для тяжелых частиц, т.е. когда $m_e/m \ll 1$, получаем, что

$$\varepsilon_{\max} = T_0. \quad (1.3.4)$$

Как уже отмечалось ранее, в общем случае произвольных энергий кинетическая энергия частицы T определяется как разность между ее полной энергией и энергией покоя (1.2.30б). Величина импульса частицы p связана с её кинетической энергией соотношением

$$p = \frac{\sqrt{T(T + 2mc^2)}}{c}, \text{ т.е., } p = mc\sqrt{E_k(E_k + 2)}, \\ (E_k = T/mc^2). \quad (1.3.5)$$

Если использовать точную формулу (1.3.5), то из системы уравнений (1.3.2) в широкой области энергий $T/mc^2 \ll m/m_e$, т.е. $E_k \ll m/m_e$, выражение для величины ε_{\max} будет выглядеть так:

$$\varepsilon_{\max} \approx 2 \frac{m_e}{m} \left(2 + \frac{T_0}{mc^2} \right) T_0. \quad (1.3.6)$$

Таким образом, в широком диапазоне энергий, исключая лишь случай сверхвысоких энергий, когда $T/mc^2 \geq m/m_e$, всегда выполняется неравенство $\varepsilon_{\max} = T_0$.

Тормозная способность среды

Зная дифференциальное сечение неупругого взаимодействия частиц с атомными электронами, можно рассчитать среднюю энергию, которую теряет быстрая частица с кинетической энергией T при одном столкновении:

$$\overline{\Delta\varepsilon}(T) = \frac{\sum_n (\varepsilon_n - \varepsilon_0) d\sigma_{\text{неупр}}(T|\varepsilon)}{\sigma_{\text{неупр}}(T)}. \quad (1.3.7)$$

В выражении (1.3.7) суммирование проводится по всем состояниям ε_n дискретного спектра (при возбуждении атома) и интегрирование по всем состояниям непрерывного спектра (при ионизации атома). Величина

$$l_{\text{неупр}}(T) = 1 / n_0 \sigma_{\text{неупр}}(T), \quad (1.3.8)$$

есть средняя длина неупругого рассеяния частицы с энергией T . Среднее число неупругих столкновений на единице пути:

$$W_{\text{неупр}}(T) = 1 / l_{\text{неупр}} = n_0 \sigma_{\text{неупр}}(T). \quad (1.3.9)$$

Следовательно, средняя энергия $\bar{\varepsilon}(T)$, теряемая частицей с энергией T на единице пути, будет определяться выражением

$$\bar{\varepsilon}(T) = \overline{\Delta\varepsilon}(T) \cdot n_0 \sigma_{\text{неупр}}(T) = \int_0^{\varepsilon_{\max}(T)} \varepsilon W_{\text{неупр}}(T|\varepsilon) d\varepsilon. \quad (1.3.10)$$

Здесь $W_{\text{неупр}}(T|\varepsilon) = n_0 \cdot d\sigma_{\text{неупр}}(T|\varepsilon) / d\varepsilon$ – вероятность того, что на единице пути частица с кинетической энергией T потеряет энергию ε из-за столкновений с атомными электронами – $[W_{\text{неупр}}(T|\varepsilon)] = 1 / (\text{м} \cdot \text{Дж})$. Величина $\bar{\varepsilon}(T)$ определяет *тормозную способность* среды и имеет размерность силы $[\bar{\varepsilon}] = \text{Дж} / \text{м} = \text{Н}$. Поэтому величину $\bar{\varepsilon}(T)$ можно рассматривать как *среднюю силу*, действующую на частицу с энергией T при ее движении в веществе. В задачах теории переноса частиц величина $\bar{\varepsilon}(T)$ является *важнейшей* характеристикой процесса неупругих столкновений частицы с атомами вещества.

Как следует из формулы (1.3.4), для определения $\bar{\varepsilon}(T)$ необходимо знать дифференциальное сечение неупругого рассеяния. Для *быстрых* заряженных частиц, скорость которых велика по сравнению со скоростями атомных электронов ($v \gg v_{\text{ат}}$), дифференциальное сечение рассеяния может быть рассчитано в борновском приближении. Квантовая теория ионизационного торможения быстрых заряженных частиц в веществе была развита Бете¹ и Блохом²

¹ Bethe H.A.// Ann. Phys. Ser. 5. 1930. Vol. 5. P. 325–341.

² Bloch F.// Ann. Phys. (Leipz.). 1933. Vol. 16. P. 275–296.

и уточнялась затем во многих работах (см. многочисленные ссылки в монографии¹).

При *больших* прицельных параметрах частица в основном теряет энергию за счет возбуждения атомов среды. Поэтому для вычисления величины $\bar{\varepsilon}(T)$ нужно знать энергетический спектр всех дискретных состояний атома ε_n и соответствующие им волновые функции. При *малых* прицельных параметрах, когда энергия, передаваемая частицей атомным электронам велика по сравнению с энергией их связи, электроны атома можно считать свободными. В этом случае происходит ионизация атома, а в качестве дифференциального сечения можно использовать выражение для сечения рассеяния на свободном электроне, когда $d\sigma_{\text{нейтр}}(T|\varepsilon)/d\varepsilon \sim 1/\varepsilon$. Столкновения частиц с большими и малыми прицельными параметрами дают соизмеримый вклад в тормозную способность среды и поэтому должны учитываться совместно.

Значение тормозной способности $\bar{\varepsilon}(T)$ для быстрых тяжелых нерелятивистских частиц ($T \ll mc^2$) определяется формулой Бете – Блоха [5]

$$\bar{\varepsilon}(T) \approx 0,3\rho \frac{Z^2 Z}{A} \frac{L_{\text{ион}}(E_\kappa; Z)}{E_\kappa} m_e c^2, \quad (E_\kappa = T/mc^2). \quad (1.3.11)$$

Здесь ρ – плотность вещества, $\text{г}/\text{см}^3$. Величина $L_{\text{ион}}(E; Z)$ есть так называемый *ионизационный логарифм*:

$$L_{\text{ион}} \approx \ln \left\{ 4E_\kappa \frac{m_e c^2}{I(Z)} \right\} - \frac{1}{Z} \sum_{i=K, L, \dots} C_i. \quad (1.3.12)$$

Величина $I(Z)$ есть средний потенциал ионизации атомов [5]. Именно в величине $I(Z)$ сосредоточена вся информация о волновых функциях и дискретных уровнях энергий атома. При расчетах, не требующих высокой точности, полагают

$$I(Z) \approx 10,3 \cdot Z \cdot \left(1 - 0,793 Z^{-1/3} \right) \text{ эВ}, \quad (Z \geq 30). \quad (1.3.13)$$

¹ Готт Ю.В. Взаимодействие частиц с веществом в плазменных исследованиях. М.: Атомиздат. 1978.

При проведении более точных расчетов величину $I(Z)$ обычно определяют из эксперимента. В таблице 1.3.1 приведены значения величины $I(Z)$ для ряда веществ из работы*.

Таблица 1.3.1

Средний ионизационный потенциал различных элементов

Элемент	Z	$I(Z)$ эВ
H	1	20,4
He	2	38,5
C	6	73,8
O	8	115,7
Al	13	160,1
Fe	26	278,5
Cu	29	323,3
Ag	47	469,3
Au	79	806,6
Pb	82	818,6

Величины C_i , входящие в формулу (1.3.12) для ионизационного логарифма, есть поправки, учитывающие связь электронов на K -, L - и т.д. оболочках атома, которые зависят только от скорости налетающей частицы. Необходимость введения поправок C_i вызвана тем, что скорости внутренних электронов атомов быстро увеличиваются с ростом Z . Для K -оболочек эта скорость $v \sim cZ/137$ и для тяжелых атомов может оказаться близкой к скорости света. Это приводит к нарушению исходного предположения о малости скорости атомных электронов по сравнению со скоростью частицы – частица уже не может рассматриваться как быстрая. Для учета малой вероятности ионизации электронов с внутренних оболочек и вводятся соответствующие поправки C_i , значения которых табулированы. Вклад поправок C_K , C_L ,... может оказаться существ-

* Janni J.I. Atom Data and Nucl. Data Tabl. 1982. Vol. 27. P.147–339.

венным для нерелятивистских энергий, когда скорость частицы оказывается сравнимой со скоростями электронов на внутренних оболочках атома.

Как следует из приведенных выше формул, для нерелятивистских частиц тормозная способность растет с уменьшением энергии. Если пренебречь зависимостью ионизационного логарифма от энергии и поправками, учитывающими связь атомных электронов, то $\bar{\varepsilon}(T) \sim 1/T$.

Для частиц произвольных энергий

$$\bar{\varepsilon} = 0,6\rho z^2 \frac{Z}{A} \frac{(1+E_K)^2}{E_K(2+E_K)} L_{\text{ион}}(E_K) \cdot m_e c^2, \quad (1.3.14)$$

$$L_{\text{ион}} \approx \ln \left\{ 2 \frac{m_e c^2}{I(Z)} E_K (2 + E_K) \right\} - \frac{E_K (2 + E_K)}{(1 + E_K)^2} - \frac{1}{Z} \sum_{K,L,\dots} C_i - \bar{\delta}(E_K). \quad (1.3.15a)$$

Здесь C_i – указанные выше поправки, учитывающие связь электронов на K -, L - и т.д. оболочках атома; $\bar{\delta}(E_K)$ – поправка на эффект плотности, вызванная поперечным “сплющиванием” поля релятивистской частицы. Часто в заданном интервале энергий для ионизационного логарифма используют приближенную формулу

$$L_{\text{ион}} \approx \ln \left\{ 2E_K (2 + E_K) \frac{m_e c^2}{I_{\text{adj}}(Z)} \right\}. \quad (1.3.15b)$$

Здесь $I_{\text{adj}}(Z)$ – подгоночное значение ионизационного потенциала, при котором достигается наилучшее согласие с экспериментом. Для нерелятивистских частиц ($E_K \ll 1$) общая формула (1.3.14) переходит в (1.3.11), если пренебречь поправкой на эффект плотности, который не существен в нерелятивистской области энергий. Для ультрарелятивистских частиц ($E_K \gg 1$) тормозная способность среды очень слабо, логарифмически, зависит от энергии частицы:

$$\bar{\varepsilon}(E_K \gg 1) \approx 0.6\rho Z^2 \frac{Z}{A} L_{\text{ион}}(E_K) \cdot m_e c^2,$$

$$L_{\text{ион}} \approx \ln \left(2E_K^2 \frac{m_e c^2}{I(Z)} \right) - 1 - \delta(E_K). \quad (1.3.16)$$

По этой причине во многих случаях считают, что для релятивистиках частиц $\bar{\varepsilon} \approx \text{const}$. При энергиях $E_K \approx 1$ тормозная способность достигает минимального значения.

Иногда под тормозной способностью среды понимают величину $\bar{\varepsilon}/\rho$, размерность которой $\text{Дж} \cdot \text{м}^2/\text{кг}$ или $\text{МэВ} \cdot \text{см}^2/\text{г}$. Типичная зависимость $\bar{\varepsilon}(E_K)$ от энергии быстрых частиц представлена на рис. 1.3.2.

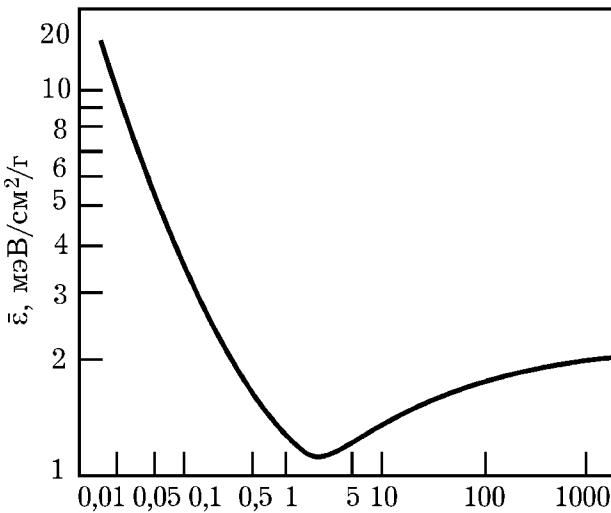


Рис. 1.3.2. Зависимость тормозной способности от энергии быстрых частиц (Pb, протоны)

К настоящему времени для определения тормозной способности среды в различных диапазонах энергий составлены подробные таблицы¹. Кроме того, на основе обобщения теоретических расчетов и

¹ Janni J.I., Atom Data and Nucl. Data Tabl. 1982. Vol. 27. P.147–339.

экспериментальных данных для величины $\bar{\varepsilon}(T)$ предложены различные аппроксимационные формулы¹.

Как отмечалось выше, при прохождении через вещества заряженная частица часть энергии передает ядрам атомов отдачу. Вызвано это тем, что чисто упругое рассеяние в Ц-системе за счет отдачи ядра приводит к уменьшению энергии частицы в Л-системе. Энергия, теряемая движущейся нерелятивистской частицей массой m при рассеянии на малый угол χ (в Ц-системе) на ядре массой $m_{\text{ядр}}$, легко определяется из законов сохранения энергии и импульса

$$\varepsilon_{\text{ядр}} = 4 \frac{m m_{\text{ядр}}}{(m + m_{\text{ядр}})^2} T \sin^2 \frac{\chi}{2} \approx \frac{m m_{\text{ядр}}}{(m + m_{\text{ядр}})^2} \chi^2 T.$$

Поскольку при рассеянии на малые углы $\chi = \vartheta (m + m_{\text{ядр}}) / m_{\text{ядр}}$, где ϑ – угол рассеяния в Л-системе, получаем

$$\varepsilon_{\text{ядр}} \approx (m / m_{\text{ядр}}) \vartheta^2 T.$$

Вследствие однозначной связи между углом рассеяния ϑ и теряемой при этом энергией $\varepsilon_{\text{ядр}}$ (предполагается, что масса частицы меньше массы ядра: $m < m_{\text{ядр}}$), дифференциальное сечение рассеяния выглядит следующим образом:

$$d^2\sigma_{\text{ядр}}(\varepsilon, \vartheta | T) = 2\pi Z^2 r_e^2 Z^2 \left(\frac{m_e c^2}{T} \right)^2 \frac{\delta \left(\varepsilon - \frac{m}{m_{\text{ядр}}} \vartheta^2 T \right)}{\left(\vartheta^2 + \vartheta_{\text{эфф}}^2 \right)^2} \vartheta d\vartheta d\varepsilon.$$

Средняя энергия, теряемая частицей на единице пути из-за отдачи ядер атомов, по определению есть

$$\bar{\varepsilon}_{\text{ядр}}(T) = n_0 \int_0^\infty \int_0^{\vartheta_{\text{max}}} \varepsilon d^2\sigma_{\text{ядр}}(\varepsilon, \vartheta | T).$$

¹ Andersen H.H., Ziegler J.F. Hydrogen stopping powers and ranges in all elements. N.Y., Pergamon Press, 1977.

Подставляя сюда значение $d^2\sigma_{\text{ядр}}(\varepsilon, \vartheta | T)$ и учитывая, что ϑ_{\max} для нерелятивистских частиц определяется формулой (1.2.40), после интегрирования получаем

$$\bar{\varepsilon}_{\text{ядр}}(T); \quad \frac{m}{m_{\text{ядр}}} \langle \theta_s^2(T) \rangle T = 0,6 \frac{m_e}{m_{\text{ядр}}} \frac{z^2 Z(Z+1)}{A} \frac{\rho L_K}{E_k} m_e c^2.$$

Здесь $\langle \theta_s^2(T) \rangle$ — средний квадрат угла рассеяния частиц на единице пути (1.2.55). Теперь можно легко оценить отношение потерь энергии из-за отдачи ядер к ионизационным потерям энергии

$$\frac{\bar{\varepsilon}_{\text{ядр}}}{\bar{\varepsilon}}; \quad 2 \frac{m_e}{m_{\text{ядр}}} (Z+1) \frac{L_K}{L_{\text{ион}}}.$$

Из-за малости отношения $m_e / m_{\text{ядр}} \ll 1$ отношение $\bar{\varepsilon}_{\text{ядр}} / \bar{\varepsilon} \ll 1$. Следовательно, для быстрых тяжелых заряженных частиц основным механизмом потерь энергии, как и отмечалось выше, являются неупругие столкновения, сопровождающиеся возбуждением и ионизацией атомов среды.

Средний квадрат энергии, теряемой частицей на единице пути

Введенная выше величина $\bar{\varepsilon}(T)$ описывает лишь систематические потери энергии частиц, совершенно не учитывая вероятностного характера неупругих столкновений, который приводит к разбросу частиц по энергиям. Флуктуации энергии частиц из-за неупругих столкновений в первом приближении можно описать величиной $\bar{\varepsilon}^2(T)$, которая представляет собой средний квадрат энергии, теряемой частицей с энергией T на единице пути:

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}^2(T) &= n_0 \int_0^{\varepsilon_{\max}(T)} \varepsilon^2 \frac{d\sigma_{\text{неупр}}(T|\varepsilon)}{d\varepsilon} d\varepsilon = \\ &= \int_0^{\varepsilon_{\max}(T)} \varepsilon^2 W_{\text{неупр}}(T|\varepsilon) d\varepsilon. \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

Если скорость частицы велика по сравнению со скоростью атомных электронов, то при расчете величины $\overline{\varepsilon^2}(T)$ основной вклад в интеграл (1.3.17) дают столкновения с большой передачей энергии, приводящие к ионизации атомов среды. Поэтому можно *пренебречь связью электронов* в атоме – считать электроны свободными. В модели свободных электронов для частиц нерелятивистских энергий вероятность рассеяния на одном электроне определяется формулой Резерфорда. Поэтому

$$W_{\text{нейтр}}(T|\varepsilon) = n_0 Z \frac{d\sigma_{\text{нейтр}}(T|\varepsilon)}{d\varepsilon} = \pi n_0 r_e^2 Z^2 Z \frac{m_e c^2}{T} \frac{mc^2}{\varepsilon^2}. \quad (1.3.18)$$

В (1.3.18) учтено, что число электронов в единице объема есть $n_0 Z$. Подставляя (1.3.18) в (1.3.17), получаем выражение для величины $\overline{\varepsilon^2}(T)$:

$$\begin{aligned} \overline{\varepsilon^2}(T) &= \pi n_0 r_e^2 Z^2 Z \frac{m_e c^2 m c^2}{T} \varepsilon_{\max}(T) = 0,6 Z^2 \frac{Z}{A} \rho \cdot (m_e c^2)^2, \\ &\quad (T = mc^2). \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Здесь учтено, что $\pi n_0 r_e^2 \approx 0,15 \rho / A$. Таким образом, в модели свободных электронов величина $\overline{\varepsilon^2}$ при нерелятивистских энергиях не зависит от энергии частиц.

Как отмечалось выше, в области нерелятивистских энергий модель свободных электронов можно использовать только как первое приближение. Для более точного определения $\overline{\varepsilon^2}$ необходимо учитывать связь электронов на K -, L -... оболочках атомов. Впервые значение $\overline{\varepsilon^2}$ с учетом оболочечных эффектов было вычислено в работе Бете и Ливингстона. Согласно данным статьи¹

$$\overline{\varepsilon^2}(T) = 4\pi n_0 r_e^2 Z^2 (m_e c^2)^2 \cdot K(T). \quad (1.3.20)$$

¹ Livingston M.S., Bethe H.A. // Rev. Mod. Phys. 1937. Volю9. P. 261–287.

Здесь $K(T)$ – коэффициент, учитывающий поправку на эффект связи электронов в атоме. Как следует из табл.1.3.2, учет связи электронов более важен для тяжелых элементов при малых энергиях частиц.

Таблица 1.3.2

Поправка на эффект связи электронов в атоме $K(T)$

T , МэВ (протоны)	Be	Al	Pb	T , МэВ (протоны)	Be	Al	Pb
2	1,24	1,33	—	50	1,02	1,06	1,19
5	1,12	1,27	1,31	100	—	1,04	1,16
10	1,07	1,19	1,22	200	—	—	1,11

Для случая произвольных энергий выражение для $\overline{\varepsilon^2}$ выглядит так:

$$\overline{\varepsilon^2}(T) = 0,3z^2 \frac{Z}{A} \rho \left[1 + (1 + E_K)^2 \right] K(E_K) \cdot (m_e c^2)^2. \quad (1.3.21)$$

Для частиц ультрарелятивистских энергий ($E_K \gg 1$) поправка на эффект связи электронов на K -, L -,... оболочках атомов несущественна $K(E_K \gg 1) \approx 1$. В этом случае из (1.3.21) получаем

$$\overline{\varepsilon^2} = 0,3z^2 \frac{Z}{A} \rho E_K^2 \cdot (m_e c^2)^2, \quad (E_K \gg 1). \quad (1.3.22)$$

Таким образом, в ультрарелятивистской области значение $\overline{\varepsilon^2}$ пропорционально квадрату энергии частиц: $\overline{\varepsilon^2} : E_K^2$.

Интеграл неупругих столкновений для быстрых тяжелых частиц

Интеграл неупругих столкновений (1.1.30) можно записать иначе, представив его в виде ряда по передаваемой энергии. Разлагая произведение $W_{\text{неуп}}(T + \varepsilon | \varepsilon)N(z, T + \varepsilon)$ в ряд по $\varepsilon \lim_{x \rightarrow \infty}$, запишем

$$\begin{aligned} \dot{B}_{\text{неупр}} \{N\} &= -W_{\text{неупр}}(T)N(z; T) + \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial T^k} \left\{ N(z; T) \cdot \int_0^{\infty} \varepsilon^k W_{\text{неупр}}(T | \varepsilon) d\varepsilon \right\}. \end{aligned} \quad (1.3.23)$$

Поскольку при $k = 0$,

$$N(z; T) \int_0^{\infty} W_{\text{неупр}}(T | \varepsilon) d\varepsilon = W_{\text{неупр}}(T)N(z; T),$$

то выражение (1.3.23) для неупругой части интеграла столкновений будет выглядеть так:

$$\dot{B}_{\text{неупр}} \{N\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial T^k} \left\{ \bar{\varepsilon}^k(T) N(z; T) \right\}. \quad (1.3.24)$$

Здесь

$$\bar{\varepsilon}^k(T) = \int_0^{\infty} \varepsilon^k W_{\text{неупр}}(T | \varepsilon) d\varepsilon. \quad (1.3.25)$$

Интегрирование по ε в (1.3.25) формально распространено до бесконечности, т.к. вся информация о максимальной энергии ε_{\max} , теряемой частицей при одном столкновении, содержится в подынтегральном выражении для $W_{\text{неупр}}(T | \varepsilon)$.

Если в разложении (1.3.24) удерживать все члены ряда $k = 1, 2, 3, \dots$, то формула (1.3.24) будет давать *точное выражение* для интеграла неупругих столкновений, даже если в одном акте столкновения с атомом вещества частица может потерять любую энергию $0 \leq \varepsilon \leq T$ (например, электрон). Из (1.3.25) в частности видно, что значение $\bar{\varepsilon}^1(T) = \bar{\varepsilon}(T)$ есть тормозная способность среды (см. 1.3.10).

Для тяжелых частиц $W_{\text{неупр}}(T | \varepsilon) = 0$ при $\varepsilon > \varepsilon_{\max}(T)$, где $\varepsilon_{\max}(T)$ – максимальная энергия (1.3.3), которую нерелятивистская частица с энергией T передает атомному электрону в процессе лобового столкновения. При $k \geq 2$ основной вклад в интеграл

(1.3.25) дают столкновения с большой передачей энергии атомным электронам. Поэтому для расчета величин $\overline{\varepsilon^k}(T)$ можно использовать модель свободных электронов. Подставляя в (1.3.25) значение $W_{\text{неупр}}(T|\varepsilon)$, определяемое формулой (1.3.18), получим

$$\overline{\varepsilon^k}(T) = \int_0^{\varepsilon_{\max}(T)} \varepsilon^k W_{\text{неупр}}(T|\varepsilon) d\varepsilon = \pi n_0 r_e^2 Z \frac{m_e c^2}{T} m c^2 \frac{(\varepsilon_{\max})^{k-1}}{k-1}, \quad (k \geq 2). \quad (1.3.26)$$

Для нерелятивистских частиц $\varepsilon_{\max} = (4m_e/m)T$. Поэтому

$$\overline{\varepsilon^k}(T) = 0,6Z^2 \frac{Z}{A} \rho \frac{4^{k-2}}{k-1} \left(\frac{T}{mc^2} \right)^{k-2} (m_e c^2)^k, \quad (k \geq 2). \quad (1.3.27)$$

Здесь учтено, что $\pi n_0 r_e^2 \approx 0,15 \rho / A$. При $k = 2$ из (1.3.27) получаем формулу (1.3.19) для среднего квадрата энергии, теряемой частицей на единице пути.

Учитывая особую значимость слагаемого, в которое входит тормозная способность среды, интеграл неупругих столкновений (1.3.24) удобно представить в виде

$$\begin{aligned} \dot{B}_{\text{неупр}} \{N\} &= \\ &= \frac{\partial}{\partial T} \{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial T^k} \{ \overline{\varepsilon^k}(T) N(z; T) \}. \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

Малость энергии ε , теряемой частицей в отдельных актах неупругих столкновений, означает, что быстрая тяжелая частица при движении в веществе теряет энергию малыми порциями, т.е. почти непрерывно. Именно это и определяет первое слагаемое в (1.3.28). Поэтому для описания *только деградации* энергии частицы достаточно оставить в разложении (1.3.28) только это слагаемое, что соответствует приближению *непрерывного замедления*. Остальные слагаемые являются следствием вероятностного характера процесса неупругих столкновений. Поскольку для нерелятивистских частиц $T/mc^2 \ll 1$, то величина

$$\frac{\overline{\varepsilon^k}(T)}{(m_e c^2)^k} \sim \left(\frac{T}{mc^2} \right)^{k-2}; \dots \dots (k \geq 2),$$

убывает с ростом k . Поэтому для учета *флуктуаций* потерь энергии можно в разложении (1.3.28) ограничиться конечным числом слагаемых, заменяя точный интеграл неупругих столкновений некоторым приближенным *дифференциальным* оператором по энергетической переменной, что значительно упрощает задачу вычисления энергетического спектра частиц. Обычно оказывается достаточным ограничиться только слагаемым с $k = 2$ – приближение Фоккера – Планка – *диффузионное приближение* в пространстве энергий.

2. ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ БЫСТРЫХ ТЯЖЕЛЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ БЕЗ УЧЕТА УПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЙ

2.1. МОДЕЛЬ НЕПРЕРЫВНОГО ЗАМЕДЛЕНИЯ

Уравнение переноса в приближении непрерывного замедления

Пусть на плоский полубесконечный слой вещества падает *мононаправленный* пучок частиц по *нормали* к его поверхности (вдоль оси z). Распределение частиц по энергии в падающем пучке $N_{\text{пад}}(T)$ может быть произвольным. В приближении “*прямо – вперед*” частицы не изменяют направление своего движения – изменяется только их энергия. Энергетическое распределение частиц $N(z; T)$ на глубине z определяется уравнением (1.1.28), а интеграл неупругих столкновений выражением (1.3.28). Поэтому уравнение переноса для величины $N(z; T) = N_+(z; T)$ имеет вид

$$\frac{\partial N(z; T)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \right\} + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial T^k} \left\{ \bar{\varepsilon}^k(T) N(z; T) \right\}. \quad (2.1.1)$$

Как уже отмечалось выше, ввиду малости энергии, теряемой частицей в отдельных актах неупругих столкновений, доминирующим процессом, формирующим энергетический спектр тяжелых частиц, является их систематическое торможение в веществе, которое определяется первым слагаемым в правой части уравнения (2.1.1). Ограничивааясь только этим слагаемым, получаем уравнение переноса в приближении *непрерывного замедления*

$$\frac{\partial N(z; T)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \right\}, \quad (2.1.2)$$

$$N(z = 0; T) = N_{\text{пад}}(T). \quad (2.1.3)$$

Здесь $\bar{\varepsilon}(T)$ – тормозная способность вещества (1.3.10), т.е. средняя энергия, теряемая частицей с энергией T на единице пути,

$$\bar{\varepsilon}(T) = -\frac{\Delta T}{\Delta S} = \int_0^{\varepsilon_{\max}(T)} \varepsilon W_{\text{неупр}}(T|\varepsilon) d\varepsilon. \quad (2.1.4)$$

Уравнение (2.1.2) является дифференциальным уравнением в частных производных *первого порядка* по глубине z и энергии T и может быть *решено точно* при произвольной зависимости тормозной способности среды $\bar{\varepsilon}(T)$ от энергии и произвольном распределении по энергии $N_{\text{пад}}(T)$ падающего излучения. Это обстоятельство является безусловным преимуществом модели непрерывного замедления по сравнению с другими приближениями.

Соотношение “пробег-энергия”

Введем вместо энергии частицы T новую переменную

$$R(T) = - \int_0^T \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}(T')} = \int_0^T \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}(T')}, \quad dR = \frac{dT}{\bar{\varepsilon}(T)}. \quad (2.1.5)$$

Так как величина $(-\Delta T' / \bar{\varepsilon}(T'))$ представляет собой средний путь ΔS , на котором частица с энергией T' теряет энергию $\Delta T'$, то $R(T)$ представляет собой длину пути, который частица с энергией T проходит до полной остановки. Величина $R(T)$ называется *остаточным пробегом* или просто *пробегом* частицы с энергией T .

Вместо распределения частиц по энергиям $N(z; T)$ можно рассматривать распределение по пробегам $N(z; R)$, которое связано с пространственно-энергетическим распределением $N(z; T)$ соотношением

$$N(z; R)dR = N(z; T)dT, \quad N(z; R) = \bar{\varepsilon}(T)N(z; T), \quad (2.1.6)$$

т.е.

$$N(z; T) = N(z; R)/\bar{\varepsilon}(R), \quad R = R(T). \quad (2.1.7)$$

Следует иметь в виду, что величины $N(z; T)$ и $N(z; R)$ имеют разные размерности: $[N(z; T)] = 1/(\text{с} \cdot \text{Дж} \cdot \text{м}^2)$, $[N(z; R)] = 1/(\text{с} \cdot \text{м}^3)$. Умножая обе части уравнений (2.1.2), (2.1.3) на $\bar{\varepsilon}(T)$ и учитывая первое соотношение (2.1.6), получим

$$\frac{\partial N(z; R)}{\partial z} = \frac{\partial N(z; R)}{\partial R}, \quad (2.1.8)$$

$$N(z=0; R) = N_{\text{пад}}(R). \quad (2.1.9)$$

Здесь

$$N_{\text{пад}}(R) = \bar{\varepsilon}(T)N_{\text{пад}}(T), \quad T = T(R) - \quad (2.1.10)$$

распределение падающего излучения по пробегам

Важной особенностью уравнения (2.1.8), записанного в терминах глубины и остаточного пробега, является то, что оно *не зависит от свойств среды* и в этом смысле является универсальным.

Решение уравнения (2.1.8) можно получить, переходя от переменных (z, R) к новым переменным (z', R')

$$z' = z, \quad R' = z + R.$$

Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial R'}{\partial z} \frac{\partial}{\partial R'} = \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial}{\partial R'},$$

$$\frac{\partial}{\partial R} = \frac{\partial z'}{\partial R} \frac{\partial}{\partial z'} + \frac{\partial R'}{\partial R} \frac{\partial}{\partial R'} = \frac{\partial}{\partial R},$$

то в новых переменных уравнение (2.1.8) запишется так:

$$\frac{\partial N(z'; R')}{\partial z'} = 0.$$

Отсюда находим, что

$$N = f(R') = f(z + R),$$

где f – произвольная функция. Конкретный вид функции f определяется только граничным условием (2.1.9). Полагая $z = 0$, получаем, что $f(R) = N_{\text{пад}}(R)$. Следовательно,

$$N(z; R) = N_{\text{пад}}(R^*), \quad \text{где } R^* = z + R. \quad (2.1.11)$$

Таким образом, на глубине Z остаточный пробег R имеют только те частицы, которые на поверхности вещества имели пробег R^* , больший, чем остаточный пробег R на величину Z .

Чтобы из распределения по пробегам получить распределение по энергиям, нужно воспользоваться соотношениями (2.1.7) и (2.1.10)

$$N(z; T) = N(z; R) / \bar{\varepsilon}(T) = N_{\text{пад}}(R^*) / \bar{\varepsilon}(T),$$

$$N_{\text{пад}}(R^*) = \bar{\varepsilon}(T^*) N_{\text{пад}}(T^*).$$

В результате получаем

$$N(z; T) = \frac{\bar{\varepsilon}[T^*(z; T)]}{\bar{\varepsilon}(T)} N_{\text{пад}}[T^*(z; T)]. \quad (2.1.12)$$

Здесь $T^*(z; T)$ – энергия, соответствующая побегу $R^* = R + z$.

Значение $T^*(z; T)$ определяется из уравнения

$$R(T^*) = R(T) + z, \quad \text{т.е.} \quad \int_T^{T^*(z; T)} \frac{dT''}{\bar{\varepsilon}(T'')} = z. \quad (2.1.13)$$

Величина $T^*(z; T)$ – такая энергия частиц в *падающем* пучке, при которой энергия тех же частиц на глубине Z равна заданному значению T . Дифференцируя (2.1.13) по глубине, получаем *дифференциальное уравнение* для определения величины $T^*(z; T)$:

$$dT^*/dz = \bar{\varepsilon}(T^*), \quad T^*(z=0) = T. \quad (2.1.14)$$

Поскольку $dT^*/dz > 0$, то значение $T^*(z; T) \geq T$ и монотонно *возрастает* с увеличением z . Действительно, чтобы на глубине z частица имела бы *заданную* энергию T , её энергия на поверхности вещества, т.е. $T^*(z; T)$, должна возрастать с увеличением z при фиксированном значении T . Дополнительное условие отражает тот факт, что если энергия T задана на поверхности вещества, то $T^*(z=0; T) = T$. Таким образом, величина T играет в уравнении (2.1.14) роль параметра.

Выражения (2.1.11), (2.1.12) определяют распределение частиц по остаточным пробегам R и по энергии T на глубине z при нормальном падении пучка на поверхность среды при *произвольном* распределении по энергии $N_{\text{пад}}(T)$ в падающем пучке.

Энергетический спектр частиц при облучении поверхности монозергетическим потоком

Приступая к анализу общего решения (2.1.12), рассмотрим сначала случай, когда на плоскую поверхность полубесконечного слоя вещества ($0 \leq z < \infty$) по нормали к поверхности (вдоль оси z) падает монозергетический пучок частиц с начальной энергией T_0 и

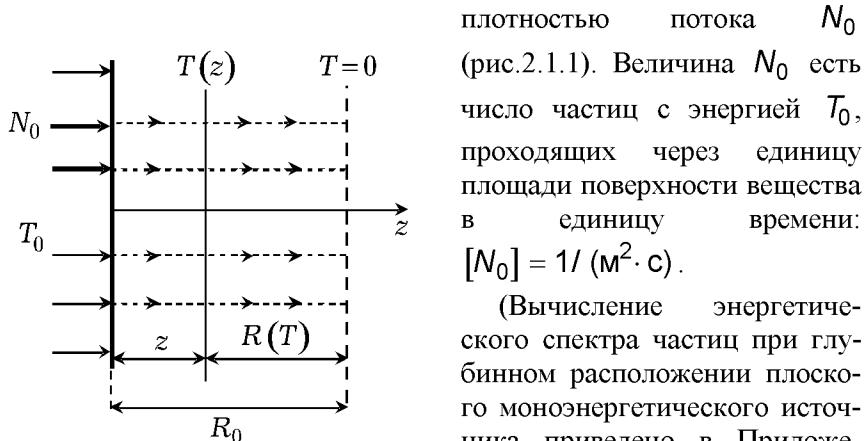


Рис. 2.1.1. Условное изображение пучка частиц прямолинейно распространяющихся в веществе в приближении непрерывного замедления

плотностью потока N_0 (рис. 2.1.1). Величина N_0 есть число частиц с энергией T_0 , проходящих через единицу площади поверхности вещества в единицу времени:
 $[N_0] = 1 / (\text{м}^2 \cdot \text{с})$.

(Вычисление энергетического спектра частиц при глубинном расположении плоского монозергетического источника приведено в Приложении I).

При облучении поверхности вещества монозергетическим потоком частиц граничное условие (2.1.3) выглядит так:

$$N(z = 0; T | T_0) = N_{\text{пад}}(T | T_0) = N_0 \delta(T - T_0). \quad (2.1.15)$$

В терминах остаточного пробега, выражение (2.1.15) принимает вид

$$N(z = 0; R | R_0) = N_{\text{пад}}(R | R_0) = N_0 \delta(R - R_0). \quad (2.1.16)$$

Здесь

$$R_0 = R(T_0) = \int_0^{T_0} \frac{dT'}{\bar{\epsilon}(T')} - \quad (2.1.17)$$

полный пробег частиц с начальной энергией T_0 .

Действительно, так как $|dR/dT|_{T_0} = 1/\bar{\varepsilon}(T_0)$, то

$$\delta[R(T) - R(T_0)] = \delta(T - T_0) / |dR/dT|_{T_0} = \bar{\varepsilon}(T) \delta(T - T_0). \quad (2.1.18)$$

Учитывая, что в соответствии с (2.1.10) $N_{\text{пад}}(R|R_0) = N_0 \bar{\varepsilon}(T) \delta(T - T_0)$, приходим к граничному условию (2.1.16) для распределения по пробегам в падающем пучке.

Теперь из общей формулы (2.1.11) находим распределение частиц *по пробегам* при облучении поверхности моноэнергетическим потоком частиц

$$N(z; R|R_0) = N_{\text{пад}}(z + R) = N_0 \delta(R_0 - R - z). \quad (2.1.19)$$

Для энергетического спектра частиц $N(z, T|T_0)$ из (2.1.19) с учетом соотношения (2.1.7), находим

$$N(z; T|T_0) = \frac{N_0}{\bar{\varepsilon}(T)} \delta \left\{ z - \int_T^{T_0} dT' / \bar{\varepsilon}(T') \right\}. \quad (2.1.20)$$

Проанализируем полученные результаты. Наличие δ -функции в формулах (2.1.19) и (2.1.20) означает, что в случае *моноэнергетического* падающего пучка все частицы на глубине z имеют вполне определенный остаточный пробег $R(z; T_0)$ и энергию $T(z; T_0)$, которые зависят от начальной энергии T_0 как от параметра. Это означает, что на любой глубине z пучок *остается моноэнергетическим*. Величины $R(z; T_0)$ и $T(z; T_0)$ определяются из уравнений

$$R(z; T_0) = R(T_0) - z = R_0 - z, \quad (2.1.21)$$

$$\int_{T(z; T_0)}^{T_0} \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}(T')} = z. \quad (2.1.22)$$

Дифференцируя (2.1.22) по глубине z , можно получить *дифференциальное* уравнение для определения энергии частиц $T(z; T_0)$ на глубине z

$$\begin{cases} dT(z; T_0) / dz = -\bar{\varepsilon}(T); \\ T(z = 0; T_0) = T_0. \end{cases} \quad (2.1.23)$$

Поскольку $dT(z; T_0) / dz < 0$, то величина $T(z; T_0) \leq T_0$ и монотонно убывает с глубиной.

Уравнение (2.1.23) описывает процесс деградации энергии от её наибольшего значения T_0 на поверхности вещества, т.е. процесс обратный тому, который описывается уравнением (2.1.14). Уравнение (2.1.14) получается из уравнения (2.1.23), если в последнем сделать формальную замену $z \rightarrow -z$, $T_0 \rightarrow T$, $T \rightarrow T^*$. Тогда получим, что

$$T^*(z; T) = T(-z; T_0 = T). \quad (2.1.24)$$

Формула (2.1.24) позволяет определить значение $T^*(z; T)$, если известно значение $T(z; T_0)$.

Из уравнения (2.1.23) видно, что величину $\bar{\varepsilon}(T)$ действительно можно рассматривать как *тормозящую силу*, действующую на частицу с энергией T . Действительно, изменение (уменьшение) кинетической энергии частицы в слое dz на глубине z равно работе, совершаемой “силой” $\bar{\varepsilon}(z)$: $dT = -\bar{\varepsilon}(z)dz$. За счет действия этой силы происходит *непрерывное* уменьшение (деградация) кинетической энергии частицы от начального значения T_0 на поверхности вещества до нуля на глубине $z = R_0$: $T(z = R_0; T_0) = 0$. Именно поэтому рассматриваемое приближение и называется приближением непрерывного замедления. Таким образом, в приближении непрерывного замедления движение частиц полностью детерминировано, т.к. не учитывается статистический характер их взаимодействия с веществом: энергию частиц на глубине Z можно определить из обычного *механического* уравнения движения (2.1.23), вообще не используя уравнение переноса.

Поскольку

$$\delta[R(T_0) - R(T) - z] = \frac{\delta[T - T(z; T_0)]}{(dR/dT)_{T(z; T_0)}} = \bar{\varepsilon}[T(z; T_0)] \delta[T - T(z; T_0)],$$

то выражение (2.1.20) можно представить в виде

$$N(z; T | T_0) = N_0 \delta [T - T(z; T_0)] \quad (2.1.25)$$

Формула (2.1.25), в отличие от (2.1.20), в явном виде определяет зависимость энергетического спектра частиц от T . Таким образом, образом, для расчета распределения частиц по энергиям нужно, зная зависимость $\bar{\epsilon}(T)$, определить только величину $T(z; T_0)$ из уравнений (2.1.22) или (2.1.23).

Используя общую формулу (1.1.31), вычислим зависимость *интегрального потока* частиц от глубины:

$$N(z) = \int_0^{\infty} N(z; T | T_0) dT = \int_0^{\infty} N(z; R | R_0) dR. \quad (2.1.26)$$

Подставляя (2.1.19) в (2.1.26) получим

$$\begin{aligned} N(z; R_0) &= N_0 \int_0^{\infty} \delta(R_0 - R - z) dR = \\ &= \begin{cases} N_0, & 0 \leq z < R_0; \\ 0, & z > R_0. \end{cases} = N_0 \eta(R_0 - z). \end{aligned} \quad (2.1.27)$$

Здесь $\eta(R_0 - z)$ – единичная функция.

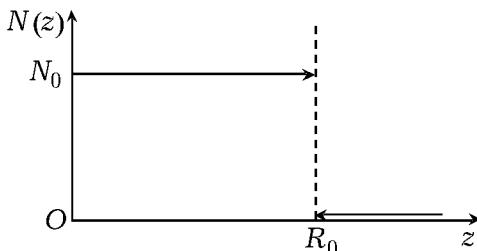


Рис. 2.1.2. Зависимость полного потока от глубины в приближении непрерывного замедления при моноэнергетическом облучении поверхности

Полученный результат означает, что при прямолинейном движении в приближении непрерывного замедления остановка частиц с начальной энергией T_0 происходит на одной и той же глубине

$z = R_0$. Во всей области глубин, меньших R_0 , поток остается постоянным и равным потоку N_0 в падающем пучке. На глубинах $z \geq R_0$ поток частиц равен нулю (рис.2.1.2).

Подставляя (2.1.25) в общее выражение (1.1.32), получим выражение для средней энергии $\bar{T}(z)$ на глубине z :

$$\begin{aligned}\bar{T}(z) &= \int_0^{\infty} T \delta[T - T(z; T_0)] dT = \\ &= \begin{cases} T(z; T_0), & 0 \leq z < R_0, \\ 0, & z \geq R_0. \end{cases}\end{aligned}\quad (2.1.28)$$

Как и следовало ожидать, в силу моноэнергетичности спектра, средняя энергия частиц на глубине z совпадает с энергией $T(z; T_0)$ на этой глубине. В области глубин $z \geq R_0$ значение $\bar{T}(z \geq R_0) = 0$.

Решение (2.1.20), полученное при облучении поверхности моноэнергетическим пучком частиц, легко обобщить на случай, когда частицы в падающем пучке имеют разброс по энергии. Для этого нужно учесть, что любое энергетическое распределение в падающем пучке всегда можно представить в виде

$$N_{\text{пад}}(T) = \int_0^{\infty} N_{\text{пад}}(T') \delta(T' - T) dT'. \quad (2.1.29)$$

Выражение (2.1.20), с точностью до множителя N_0 , есть поверхностная функция Грина уравнения (2.1.2). В силу линейности уравнения переноса, его решение для произвольного энергетического распределения частиц $N_{\text{пад}}(T)$ в падающем пучке можно записать в виде суперпозиции решений вида (2.1.20) при моноэнергетическом облучении поверхности вещества частицами с начальной энергией $T_0 = T'$:

$$N(z; T) = \frac{1}{\varepsilon(T)} \int_0^{\infty} \delta \left\{ \int_T^{T'} \frac{dT''}{\varepsilon(T'')} - z \right\} N_{\text{пад}}(T') dT'. \quad (2.1.30)$$

Учитывая, что

$$\delta \left\{ \int_7^T \frac{dT''}{\bar{\varepsilon}(T'')} - z \right\} = \bar{\varepsilon}(T') \delta \{ T' - T^*(z; T) \}, \quad (2.1.31)$$

получаем

$$N(z; T) = \frac{\bar{\varepsilon}[T^*(z; T)]}{\bar{\varepsilon}(T)} N_{\text{пад}}[T^*(z; T)]. \quad (2.1.32)$$

Величина $T^*(z; T)$ – такая энергия в падающем пучке, при которой энергия частиц на глубине z равна T и определяется из уравнения (2.1.13) или (2.1.14). Естественно, что выражение (2.1.32), полученное с использованием метода функций Грина, полностью совпадает с формулой (2.1.12).

Главным результатом приближения непрерывного замедления являются введение понятия «пробег» частицы и соотношения (2.1.5) пробег-энергия $R = R(T)$. В исследованиях прохождения быстрых частиц через вещество понятие "пробег" играет центральную роль, а измерение пробега является одним из основных экспериментальных методов определения параметров частиц и характеристики взаимодействий с атомами среды*. Для зависимости $R(T)$ так же, как и для тормозной способности $\bar{\varepsilon}$, на основе обобщения экспериментальных данных и численных расчетов составлены подробные таблицы и предложен ряд интерполяционных формул.

Распространение моноэнергетического пучка нерелятивистских частиц

Рассмотрим случай прохождения быстрых нерелятивистских частиц ($T \ll mc^2$), когда тормозная способность среды определяется формулой Бете – Блоха (1.3.11). Если пренебречь зависимостью ионизационного логарифма от энергии, т.е. считать, что

* Andersen H.H. Bibliography and index of experimental ranges and stopping power data. N.Y.: Pergamon Press. 1977.

$L_{\text{ион}}(T) \approx L_{\text{ион}}(T_0)$, то тормозная способность среды оказывается обратно пропорциональной энергии частиц:

$$\bar{\varepsilon}(T) \approx \frac{a}{T}. \quad (2.1.33)$$

Формулу (2.1.33) можно записать так:

$$\bar{\varepsilon}(T) = \bar{\varepsilon}_0 \frac{T_0}{T},$$

где $\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}(T = T_0) \approx 0,3\rho \frac{Zz^2}{A} m_e c^2 \frac{mc^2}{T_0} L_{\text{ион}}(T_0)$. $(2.1.34)$

Величина $\bar{\varepsilon}_0$ есть тормозная способность среды для частиц с энергией T_0 . Значение энергии T_0 в формулах (2.1.34) может быть произвольным ($T_0 \ll mc^2$) и не должно обязательно рассматриваться, например, как начальная (или наиболее вероятная) энергия частиц в падающем пучке.

Подставляя (2.1.33) в общую формулу (2.1.5) для пробега, получаем, что

$$R(T) = \frac{1}{a} \int_0^T T' dT' = \frac{T^2}{2a} \quad \text{или} \quad R(T) = \frac{T^2}{2\bar{\varepsilon}_0 T_0}. \quad (2.1.35)$$

Из выражения (2.1.35) следует, что пробег нерелятивистских частиц пропорционален квадрату их энергии: $R(T) \sim T^2$. Полагая в формуле (2.1.35) $T = T_0$, получаем выражение для полного пробега нерелятивистских частиц при облучении поверхности вещества *моноэнергетическим* пучком с начальной энергией T_0 :

$$R_0 = \frac{T_0^2}{2a} = \frac{T_0}{2\bar{\varepsilon}_0} = 1,67 \frac{A}{z^2 Z} \rho L_{\text{ион}}(T_0) \frac{m}{m_e} \left(\frac{T_0}{mc^2} \right)^2 \text{ (см).} \quad (2.1.36)$$

(В (2.1.34), (2.1.36) значение плотности вещества ρ берется в единицах г/см^3). Учитывая формулы (2.1.36), (2.1.33), получаем, что

$$a = \frac{T_0^2}{2R_0}; \quad \bar{\varepsilon}_0 = \frac{T_0}{2R_0}; \quad \bar{\varepsilon}(T) = \frac{T_0^2}{2R_0 T}; \quad (2.1.37)$$

$$R(T) = R_0 (T/T_0)^2 \quad (T_0 \ll mc^2). \quad (2.1.38)$$

Выражение (2.1.38) определяет соотношение пробег-энергия для быстрых тяжелых нерелятивистских частиц в приближении (2.1.33). Из формул (2.1.37), (2.1.38) можно выразить тормозную способность среды и энергию частиц через пробег:

$$\bar{\varepsilon}(R) = \bar{\varepsilon}_0 \sqrt{\frac{R_0}{R}} = \frac{T_0}{2\sqrt{R_0 R}}, \quad T(R) = T_0 \sqrt{\frac{R}{R_0}}. \quad (2.1.39)$$

Формулы (2.1.39) удобны тем, что по ним можно определить тормозную способность среды и остаточный пробег, если известно значение полного пробега R_0 , соответствующее произвольной начальной энергии T_0 . Но именно величина полного пробега R_0 может быть с высокой точностью определена из эксперимента.

В модели непрерывного замедления при облучении поверхности вещества моноэнергетическим потоком частиц с энергией T_0 энергия частицы на глубине z определяется из уравнения (2.1.22). Подставляя в (2.1.22) $\bar{\varepsilon} = a/T$, находим, что

$$T(z; T_0) = \sqrt{T_0^2 - 2az}. \quad (2.1.40)$$

Поскольку $a = T_0^2 / 2R_0$, получаем

$$T(z; T_0) = T_0 \sqrt{1 - z/R_0} = T_0 \sqrt{1 - \xi}, \quad (2.1.41)$$

$$\text{где } \xi = z/R_0 - \quad (2.1.42)$$

приведенная глубина, т.е. глубина в единицах полного пробега R_0 . Из (2.1.41) видим, что $T(z=0) = T_0$ и $T(z=R_0) = 0$. Теперь, подставляя (2.1.41) в (2.1.25), получим явное выражение для энергетического спектра частиц:

$$N(z; T|T_0) = N_0 \delta[T - T_0 \sqrt{1 - \xi}]. \quad (2.1.43)$$

Формулы (2.1.40) – (2.1.43) в определенной степени являются *основным конечным* результатом модели непрерывного замедления, так как позволяют непосредственно определить энергию и энергетический спектр нерелятивистских частиц на глубине Z , если известен полный пробег R_0 , соответствующий начальной энергии частиц T_0 в падающем моноэнергетическом пучке.

Полученные выше равенства являются *приближенными*, так как не учитывалась зависимость ионизационного логарифма от энергии частицы. Однако они правильно описывают главные особенности зависимости энергетического спектра от параметров торможения частиц в среде при различных энергиях и очень полезны для анализа предельных случаев в сложных аналитических расчетах взаимодействия заряженных частиц с веществом.

На практике для оценок значений пробегов заряженных частиц часто используют различные *эмпирические* соотношения, справедливые в определенных интервалах энергий. Например, учитывая, что в интервале энергий $T \approx (0,01 \div 0,3) mc^2$ в ядерной фотоэмulsionии ($\rho = 3,92 \text{ г/см}^3$) пробеги заряженных частиц имеют степенную зависимость от энергии

$$R : (T / mc^2)^\alpha, \quad (T \text{ в МэВ}) \quad (2.1.44a)$$

с показателем $\alpha \approx 1,7 \div 1,8$, применяют интерполяционное соотношение

$$R \approx 1,027 \cdot 10^{-3} (m_p / m)^{0,74} T^{1,74}. \quad (2.1.44b)$$

Здесь m_p – масса протона. Аналогичные формулы особенно часто применяются для нерелятивистских частиц относительно малых энергий $T : (10^{-3} \div 10^{-2}) mc^2$, при которых значение $L_{\text{ион}}$ теоретически вычислить не удается из-за существенной роли поправок на эффекты связи электронов в атоме. В этом диапазоне энергий

$$R(T); \quad b \cdot T^{3/2}. \quad (2.1.45)$$

Коэффициент b в формуле (2.1.45) зависит от параметров вещества, заряда и массы частицы. Например, для α -частиц в воздухе

$b \approx 0,32$. В формулах (2.1.44) и (2.1.45) R измеряется в см, а энергия T в МэВ.

Важно отметить, что в соответствии с (2.1.36) величина $\rho \cdot R_0$ может быть выражена через универсальную функцию $f(E_0)$, не зависящую от массы m и заряда Z частицы:

$$\rho R_0 \approx 1,67 \frac{A}{z^2 Z} \frac{1}{L_{\text{ион}}} \frac{m}{m_e} \left(\frac{T_0}{mc^2} \right)^2 = \frac{m}{z^2} f(E_0) \\ (E_0 = T_0 / mc^2). \quad (2.1.46)$$

Здесь E_0 – кинетическая энергия частицы в единицах mc^2 . Соотношение (2.1.46) справедливо для частиц во всем диапазоне энергий, включая и *релятивистские* частицы. Для *нерелятивистских* частиц, как видно из (2.1.36), $f(E_0) \sim E_0^2$. Поскольку кинетическая энергия частиц есть разность между полной энергией и энергией покоя

$$E_0 = \left\{ 1 / \sqrt{1 - (v_0^2/c^2)} \right\} - 1,$$

то функция $f(E_0)$ зависит *только от скорости* налетающей частицы и свойств тормозящего вещества (если не учитывать эффект плотности, то только электронными свойствами атомов). Закономерность (2.1.45) подтверждена многочисленными экспериментами в широком диапазоне энергий.

Из формулы (2.1.45) следует, что пробеги различных частиц m_1 и m_2 с одинаковыми начальными скоростями v_0 связаны простым соотношением

$$\frac{\rho_1 R_1}{\rho_2 R_2} = \frac{m_1}{m_2} \left(\frac{z_2}{z_1} \right)^2. \quad (2.1.47)$$

Правило (2.1.47) позволяет находить связь между пробегом и энергией для *любых частиц*, с массой m и зарядом ze , если известна зависимость $R_0 = R(T_0)$ от энергии для частиц какого-либо одного вида, например для *протонов* – $R_2 = R_p$, $m_2 = m_p$ (см. табл. 2.1.1), распространяющихся в том же веществе $\rho_1 = \rho_2$:

$$R_0 = (R_0)_p \frac{m}{m_p} \left(\frac{1}{z}\right)^2. \quad (2.1.48)$$

Таблица 2.1.1
Пробеги быстрых протонов $R_0 \cdot \rho$ в различных веществах*

T_0 , МэВ	C $\rho = 2,25 \text{ г/см}^3$	Al $\rho = 2,70 \text{ г/см}^3$	Cu $\rho = 8,93 \text{ г/см}^3$	Pb $\rho = 11,34 \text{ г/см}^3$
50	2,488	2,928	3,599	5,275
75	5,160	6,021	7,321	10,52
100	8,623	10,01	12,01	17,17
150	17,63	20,34	24,35	34,11
200	29,02	33,34	39,71	55,14
300	57,53	65,79	77,82	107,0
400	91,99	104,9	123,5	168,6
500	131,0	148,9	174,9	237,6
600	173,4	196,7	230,5	312,0
700	218,6	247,6	289,5	390,5
800	265,9	300,0	350,9	472,2
1000	365,3	412,0	479,4	642,2

Энергетический спектр частиц при облучении поверхности не monoэнергетическим потоком

Теперь рассмотрим более общий случай, когда на поверхность вещества падает пучок нерелятивистских частиц, имеющих *разброс по энергиям* в виде гауссова распределения с наиболее вероятной энергией $(T_{\text{пад}})_{\text{н.в.}} = T_0$ и дисперсией $\sigma_{\text{пад}}^2$.

$$N_{\text{пад}}(T) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{пад}}^2}} \exp\left[-\frac{(T - T_0)^2}{2\sigma_{\text{пад}}^2}\right]. \quad (2.1.49)$$

Если дисперсия распределения в падающем потоке стремится к нулю, то

* Таблицы физических величин / Под ред. Кикоина И.К. М.: Атомиздат, 1976.

$$\lim_{\sigma_{\text{пад}} \rightarrow 0} N_{\text{пад}}(T) = N_0 \delta(T - T_0),$$

т.е. возвращаемся к рассмотренной выше задаче распространения частиц при моноэнергетическом облучении поверхности вещества.

Полное число частиц, входящее в вещество через единичную площадку в единицу времени:

$$N_{\text{пад}} = \int_0^{\infty} N_{\text{пад}}(T) dT. \quad (2.1.50)$$

Подставляя (2.1.49) в (2.1.50), после интегрирования получим

$$N_{\text{пад}} = \frac{N_0}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{T_0}{\sigma_{\text{пад}}} \right) \right\}. \quad (2.1.51)$$

Здесь $\operatorname{erf}(x)$ – нормированный интеграл ошибок (интеграл вероятности)

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt. \quad (2.1.52)$$

Функция $\operatorname{erf}(x)$ является нечетной функцией $\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$ и при $-\infty < x < \infty$ изменяется в пределах от -1 до 1 (рис. 2.1.3). Асимптотическое выражение для интеграла ошибок имеет вид

$$\operatorname{erf}(x \gg 1) \approx 1 - \frac{\exp(-x^2)}{x \sqrt{\pi}}. \quad (2.1.53)$$

Интеграл ошибок очень быстро достигает своего асимптотического значения. Уже при $x = 2$ значение $\operatorname{erf}(2) \approx 0,995$!

Если относительный разброс по энергиям в падающем пучке мал

$$\overline{\delta T_{\text{пад}}} / \bar{T}_{\text{пад}} = \sqrt{T_{\text{пад}}^2 - (\bar{T}_{\text{пад}})^2} / \bar{T}_{\text{пад}} = \sigma_{\text{пад}} / T_0 \ll 1, \quad (2.1.54)$$

то с высокой степенью точности можно считать, что

$$N_{\text{пад}} \approx N_0. \quad (2.1.55)$$

В этом случае

$$\bar{T}_{\text{пад}} = \int_0^{\infty} T N_{\text{пад}}(T | T_0) dT \approx \int_{-\infty}^{\infty} T N_{\text{пад}}(T | T_0) dT = T_0, \quad (2.1.56a)$$

$$\overline{T_{\text{пад}}^2} = \int_0^\infty T^2 N_{\text{пад}}(T|T_0) dT \approx \int_{-\infty}^\infty T^2 N_{\text{пад}}(T|T_0) dT = T_0^2 + \sigma_{\text{пад}}^2. \quad (2.1.56\bar{b})$$

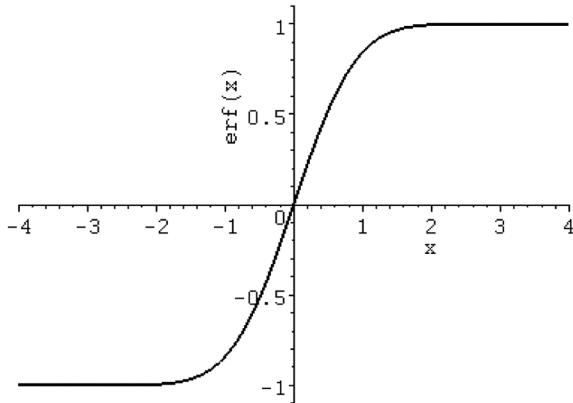


Рис. 2.1.3 График функции $\text{erf}(x)$

В соответствии с общей формулой (2.1.12), распределение частиц по энергиям определяется выражением

$$N(z; T) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{пад}}^2}} \frac{\bar{\varepsilon}[T^*(z; T)]}{\bar{\varepsilon}(T)} \exp \left\{ -\frac{[T^*(z; T) - T_0]^2}{2\sigma_{\text{пад}}^2} \right\}. \quad (2.1.57)$$

Здесь, как и ранее, величина $T^*(z; T)$ есть такая энергия в *падающем* пучке ($z = 0$), при которой энергия частиц на глубине $z > 0$ равна заданному значению T . Значение $T^*(z; T)$ определяется из уравнения (2.1.13). Так как для нерелятивистских частиц $\bar{\varepsilon}(T) = a/T$, то получаем

$$\int_T^{T^*(z; T)} T'' dT'' = a \cdot z, \quad \text{т.е.,} \quad T^*(z; T) = \sqrt{T^2 + 2az}. \quad (2.1.58)$$

В соответствии с первой формулой (2.1.37) $a = \gamma c / 2R$, где γ – некоторая энергия, а R – соответствующий этой энергии пробег. Поскольку γ – произвольно, то в качестве γ можем выбрать зна-

чение наиболее вероятной энергии в падающем потоке, т.е. положить $\gamma_0 = T_0$. Тогда $R_0 = R_0$ – пробег частиц с наиболее вероятной энергией T_0 . В результате находим, что

$$T^*(z; T | T_0) = \sqrt{T^2 + T_0^2 \frac{z}{R_0}} = \sqrt{T^2 + T_0^2 \cdot \xi}, \quad (\xi = z / R_0). \quad (2.1.59)$$

Здесь ξ – приведенная глубина, т.е. глубина в единицах пробега для частиц с *наиболее вероятной* энергией в падающем пучке.

Конечно тот же результат можно получить из формулы (2.1.24) $T^*(z; T) = T(-z; T_0 = T)$, если известна энергия частицы $T(z; T_0)$ на глубине z , при облучении поверхности вещества моноэнергетическим потоком. Для нерелятивистских частиц в соответствии с (2.1.40) $T(z; T_0) = \sqrt{T_0^2 - 2az}$. Учитывая сказанное выше, будем иметь $T^*(z; T) = \sqrt{T^2 + 2az}$, что полностью совпадает с результатом (2.1.58).

Теперь, подставляя (2.1.59) в (2.1.57), окончательно получаем выражение для энергетического спектра частиц на приведенной глубине ξ :

$$N(\xi; T) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{пад}}^2}} \frac{T}{\sqrt{T^2 + T_0^2 \cdot \xi}} \exp \left\{ -\frac{[\sqrt{T^2 + T_0^2 \cdot \xi} - T_0]^2}{2\sigma_{\text{пад}}^2} \right\}. \quad (2.1.60)$$

Если ввести относительную энергию $u = T / T_0$, то для распределения $N(\xi; u)$, связанного с энергетическим распределением $N(\xi; T)$ обычным соотношением

$$N(\xi; u) du = N(\xi; T) dT, \quad \text{т.е.} \quad N(\xi; u) = T_0 N(\xi; T), \quad (2.1.61)$$

получим

$$N(\xi; u) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{пад}}^2}} \frac{u}{\sqrt{u^2 + \xi}} \exp \left\{ -\frac{[\sqrt{u^2 + \xi} - 1]^2}{2\sigma_{\text{пад}}^2} \right\},$$

где $\vartheta_{\text{пад}} = \frac{\sigma_{\text{пад}}}{T_0}$. (2.1.62)

В предельном случае $\sigma_{\text{пад}} \rightarrow 0$ будем иметь

$$N(\xi; u; \sigma_{\text{пад}} \rightarrow 0) = N_0 \frac{u}{\sqrt{u^2 + \xi}} \delta \left[\sqrt{u^2 + \xi} - 1 \right] = N_0 u \delta \left[\sqrt{u^2 + \xi} - 1 \right].$$

Поскольку

$$\delta \left[\sqrt{u^2 + \xi} - 1 \right] = \frac{\delta(u - \sqrt{1 - \xi})}{u},$$

то $N(\xi; u; \sigma_{\text{пад}} \rightarrow 0) = N_0 \delta(u - \sqrt{1 - \xi})$, что полностью совпадает с выражением (2.1.43), записанным в терминах относительной энергии (2.1.61).

Формулы (2.1.60), (2.1.62) определяют энергетический спектр нерелятивистских частиц на произвольной глубине $0 \leq z < \infty$ при облучении поверхности вещества мононаправленным немоноэнергетическим потоком частиц, имеющих гауссов разброс по энергиям с наиболее вероятной энергией T_0 и дисперсией $\sigma_{\text{пад}}^2$. Видим, что внутри вещества энергетический спектр частиц уже *не является гауссовым*.

На рис. 2.1.4 представлены энергетические спектры частиц на различных глубинах при облучении поверхности вещества гауссовым потоком ($N_0 = 1$) и при $\vartheta_{\text{пад}} = 0,2$.

Видим, что с увеличением глубины значение наиболее вероятной энергии уменьшается, энергетический спектр уширяется и становится асимметричным, что особенно заметно на приведенной глубине $\xi = 1,5$.

Вычислим полный поток частиц $N(\xi)$ на произвольной глубине $0 \leq \xi < \infty$:

$$N(\xi) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\vartheta_{\text{пад}}^2}} \int_0^\infty \frac{udu}{\sqrt{u^2 + \xi}} \exp \left\{ -\frac{\left[\sqrt{u^2 + \xi} - 1 \right]^2}{2\vartheta_{\text{пад}}^2} \right\}.$$

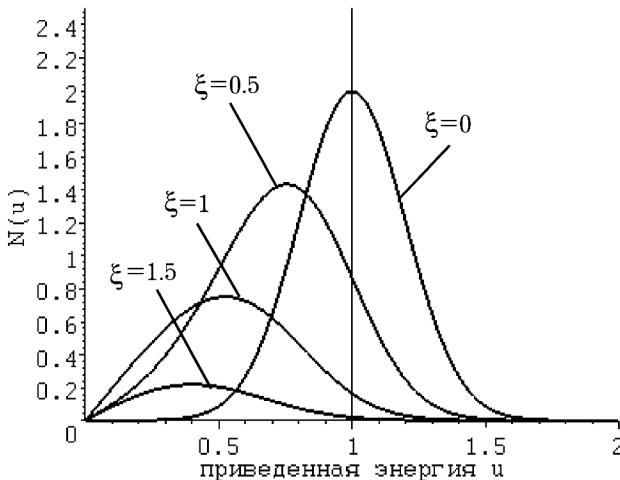


Рис. 2.1.4. Энергетический спектр частиц на различных приведенных глубинах, рассчитанный по формуле (2.1.62)

Учитывая, что $udu / \sqrt{u^2 + \xi} = d\sqrt{u^2 + \xi}$, после интегрирования получаем

$$N(\xi) = \frac{N_0}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{1 - \sqrt{\xi}}{\sqrt{2 \theta_{\text{пад}}}} \right) \right\}, \quad (0 \leq \xi < \infty). \quad (2.1.63)$$

Полагая в (2.1.63) $\xi = 0$ и учитывая, что $\theta_{\text{пад}} = \sigma_{\text{пад}} / T_0$, приходим к формуле (2.1.51) для потока частиц на поверхности вещества. На относительно больших глубинах ($\xi \gg 1$), используя асимптотическое выражение (2.1.53) для интеграла ошибок, получаем

$$N(\xi \gg 1) \approx N_0 \frac{\theta_{\text{пад}}}{\sqrt{2\pi\xi}} \exp \left\{ -\frac{(\sqrt{\xi} - 1)^2}{2\theta_{\text{пад}}^2} \right\}. \quad (2.1.64)$$

Из (2.1.64) видно, что на больших глубинах интегральный поток быстро стремится к нулю.

На рис. 2.1.5 представлены графики зависимости интегрального потока частиц от приведенной глубины при различных значениях дисперсии в падающем потоке ($N_0 = 1$), рассчитанные по формуле

(2.1.63). Видим, что интегральный поток монотонно уменьшается с глубиной. Из рисунка так же, как и из формулы (2.1.63) следует, что на приведенной глубине $\xi = 1$, т.е. при $z = R_0$, интегральный поток $N(\xi = 1) = N_0 / 2$, независимо от значения дисперсии $\sigma_{\text{пад}}$ в падающем потоке.

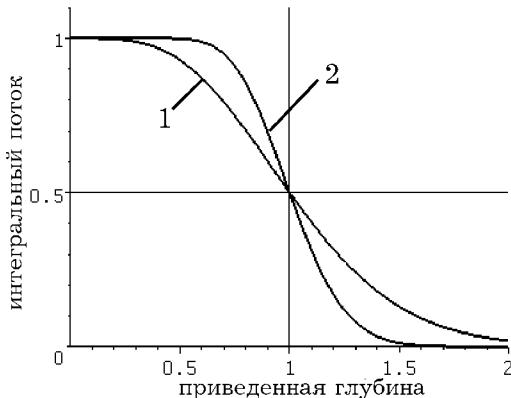


Рис. 2.1.5 Зависимость интегрального потока частиц от приведенной глубины: 1 – $\sigma_{\text{пад}} = 0,2$; 2 – $\sigma_{\text{пад}} = 0,1$

Приведем ряд формул в модели непрерывного замедления для частиц произвольных энергий. Остаточный и полный пробеги

$$R = 1,67 \frac{A}{z^2 Z} \frac{1}{\rho L_{\text{ион}}(E)} \frac{m}{m_e} \frac{E^2}{1+E} \text{ (см)}, \quad (E = T / mc^2); \quad (2.1.65a)$$

$$R_0 = 1,67 \frac{A}{z^2 Z} \frac{1}{\rho L_{\text{ион}}(E_0)} \frac{m}{m_e} \frac{E_0^2}{1+E_0} \text{ (см)}, \quad (E_0 = T_0 / mc^2). \quad (2.1.65b)$$

В нерелятивистском случае $E_0 \ll 1$ из формулы (2.1.65b) получаем (2.1.36).

Для ультрарелятивистских частиц несверхвысоких энергий ($1 \ll E \ll m / m_e$)

$$R \approx 1,67 \frac{A}{z^2 Z} \frac{1}{\rho L_{\text{ион}}(E)} \frac{m}{m_e} E \text{ (см)}. \quad (2.1.66)$$

Таким образом, пробег ультрарелятивистских частиц зависит от энергии не квадратично, а линейно: $R(T \gg mc^2) \sim T$. Погрешность полученных выше формул для пробега частиц порядка 10 %. Точность может быть заметно улучшена, если вместо $L_{\text{ион}}(E)$ подставить $L_{\text{ион}}(\frac{E}{E_0})$, где^{*}

$$\frac{E_0}{E} = \frac{1+E}{E} \left(1 + \frac{E}{2} - \frac{\ln(1+E)}{E} \right) - 1, \quad (E = T/mc^2). \quad (2.1.67)$$

В предположении $L_{\text{ион}} = \text{const}$ из формул (2.1.65) следует, что

$$R(E) \approx R_0 \left(\frac{E}{E_0} \right)^2 \frac{1+E_0}{1+E}, \quad \text{т.е.} \quad R(T) \approx R_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^2 \frac{T_0 + mc^2}{T + mc^2}. \quad (2.1.68)$$

Тормозная способность среды определяется формулой (1.3.14). Поскольку, как это следует из (2.1.65б)

$$\begin{aligned} \frac{z^2 Z}{A} \rho L_{\text{ион}} &\approx \frac{1,67}{R_0} \frac{m}{m_e} \frac{E_0^2}{1+E_0}, \\ \text{то} \quad \bar{\varepsilon} &= \frac{1}{R_0} \frac{E_0^2}{1+E_0} \frac{(1+E)^2}{E(2+E)} mc^2, \\ \text{т.е.} \quad \bar{\varepsilon}(T) &\approx \frac{1}{R_0} \frac{T_0^2}{mc^2 + T_0} \frac{(mc^2 + T)^2}{T(2mc^2 + T)}. \end{aligned} \quad (2.1.69)$$

^{*} Формула (2.1.58) получена на основе приближенного соотношения для интеграла $I = \int_0^{E_0} f_1(E) f_2(E) dE$, где функции $f_1(E)$ сильно, а $f_2(E)$ слабо зависят от аргумента E : $I = \int_0^{E_0} f_1(E) [f_2(\tilde{E}) + (E - \tilde{E}) f_2'(\tilde{E})] dE = f_2(\tilde{E}) \int_0^{E_0} f_1(E) dE$. Значение \tilde{E} определяется из условия $\int_0^{E_0} (E - \tilde{E}) f_1(E) dE = 0$.

Формулы (2.1.68) и (2.1.69) удобны тем, что по ним можно определить остаточный пробег и тормозную способность среды, если известно значение полного пробега R_0 , которое может быть с высокой точностью определено из эксперимента.

В модели непрерывного замедления энергия частицы на глубине z определяется из уравнения $R(z) = R_0 - z$. Подставляя сюда значение для остаточного пробега (2.1.68), получим

$$\frac{E^2}{E_0^2} \frac{1 + E_0}{1 + E} = 1 - \xi. \quad (2.1.70)$$

Решая это уравнение относительно энергии частицы, находим

$$E(\xi) = E_0 \frac{\sqrt{1 - \xi}}{1 + b} \left\{ \sqrt{1 - \xi} + \sqrt{b^2 - \xi} \right\}. \quad (2.1.71)$$

Здесь

$$\xi = z / R_0, \quad b = (2 + E_0) / E_0 = p_0^2 / E_0^2. \quad (2.1.72)$$

ξ – приведенная глубина, т.е. глубина в единицах полного пробега R_0 ; p_0 – импульс частицы (1.3.6а) в единицах $m\cdot c$. Естественно, что $E(\xi = 0) = E_0$, а $E(\xi = 1) = 0$.

Выражение (2.1.71) позволяет определить энергию частицы на глубине ξ в общем случае произвольных энергий.

При нерелятивистских энергиях, ($E_0, E \ll 1$), $b \sim (d v_0)^2 \gg 1$, находим, что

$$\bar{\varepsilon}(T) \approx \frac{1}{2R_0} \frac{T_0^2}{T}, \quad R(T) \approx R_0 \frac{T^2}{T_0^2}, \quad T(\xi) = T_0 \sqrt{1 - \xi}. \quad (2.1.73)$$

Это в точности совпадает с полученными выше формулами (2.1.37), (2.1.38) и (2.1.41).

В ультрарелятивистской области ($E_0, E \gg 1$), $b \approx 1$, будем иметь

$$R(T) \approx R_0 \frac{T}{T_0}, \quad \bar{\varepsilon}(T) \approx \frac{T_0}{R_0} = \text{const}, \quad T(\xi) \approx T_0 \cdot (1 - \xi) \quad (2.1.74)$$

На рис.2.1.6 представлены графики зависимости относительной энергии частицы $u(\xi) = T(\xi) / T_0$ от приведенной глубины, рас-

считанные по формуле (2.1.71). Верхняя кривая – нерелятивистский случай – $E_0 = 0,01$: $u(\xi) = \sqrt{1 - \xi}$, нижняя кривая – ультрарелятивистский случай – $E_0 = 100$: $u(\xi) = 1 - \xi$.

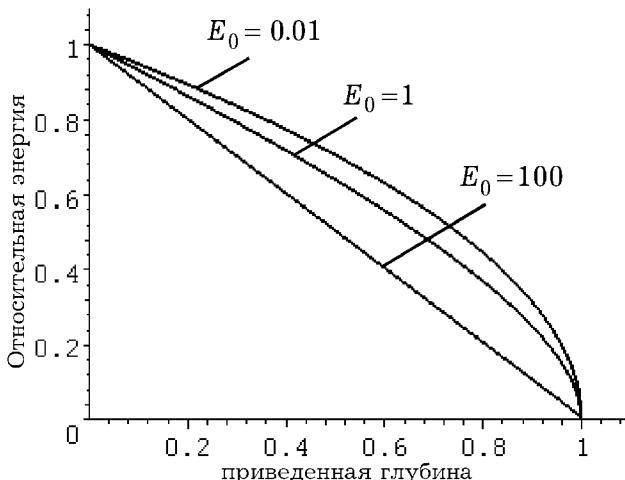


Рис. 2.1.6. Зависимость относительной энергии $u(\xi) = T(\xi)/T_0$ от приведенной глубины $\xi = z/R_0$ при различных начальных энергиях $E_0 = T_0/mc^2$ в приближении “прямо-вперед”

Обоснование малоуглового приближения для быстрых тяжелых частиц

Применяя модель непрерывного замедления, можно обосновать использование малоуглового приближения. Для этого достаточно оценить значение среднего квадрата угла рассеяния на полном пробеге и убедиться в малости этого угла, т.е. убедиться в выполнении неравенства

$$\langle \theta_s^2 \rangle_{R_0} \sim \langle \theta_s^2 \rangle \cdot R_0 \ll 1. \quad (2.1.75)$$

Здесь $\langle \theta_s^2 \rangle$ – средний квадрат угла рассеяния на единице пути (1.2.54). Поскольку в соответствии с (1.2.60) $\langle \theta_s^2 \rangle = 2I l_{tp}$, где

$l_{\text{тр}}$ – транспортная длина упругого рассеяния, то неравенство (2.1.75) означает, что

$$\gamma = R_0 / l_{\text{тр}} \ll 1. \quad (2.1.76)$$

Таким образом, безразмерный параметр γ , представляющий отношение полного пробега частиц к транспортной длине упругого рассеяния, должен быть мал.

Для нерелятивистских частиц, используя формулы (2.1.36), (1.2.61) для величин R_0 и $l_{\text{тр}}$, получим

$$\gamma = \frac{Z+1}{2} \frac{m_e}{m} \frac{L_K}{L_{\text{ион}}(T_0)}. \quad (2.1.77)$$

Параметр γ очень слабо (логарифмически) зависит от энергии нерелятивистских частицы. Как следует из (2.1.77), величина параметра γ пропорциональна атомному номеру вещества рассеивателя и обратно пропорциональна массе частиц. Поскольку для тяжелых частиц $m_e/m \ll 1$, то $\gamma \ll 1$. Например, для протонов с энергией $T_0 = 100$ МэВ $\gamma \approx 2,2 \cdot 10^{-3}$ в Al и $\gamma \approx 1,5 \cdot 10^{-2}$ в Pb. Для мюонов той же энергии $\gamma \approx 1,3 \cdot 10^{-2}$ и $\gamma \approx 8 \cdot 10^{-2}$ соответственно.

В общем случае произвольных энергий, используя формулы (2.1.65б) и (1.2.62) для величин R_0 и $l_{\text{тр}}$, находим следующее выражение для параметра γ :

$$\gamma = 2 \frac{m_e}{m} (Z+1) \frac{L_K(Z)}{L_{\text{ион}}(E_0)} \frac{1+E_0}{(2+E_0)^2}, \quad (E_0 = T_0 / mc^2). \quad (2.1.78)$$

Для нерелятивистских частиц ($E_0 \ll 1$) из (2.1.78) возвращаемся к формуле (2.1.77).

Для релятивистских частиц ($E_0 \gg 1$) из (2.1.78) находим, что

$$\gamma \approx \frac{m_e}{m} \frac{Z+1}{2} \frac{L_K(Z)}{L_{\text{ион}}(E_0)} \frac{1}{E_0}. \quad (2.1.79)$$

Таким образом, с ростом энергии частиц (в ультрарелятивистском диапазоне) параметр γ уменьшается с ростом энергии частиц – $\gamma \sim 1/E_0$. Следовательно, с увеличением энергии частиц

условие применимости малоуглового приближения (2.1.76) выполняется с ещё большим запасом, чем для нерелятивистских частиц.

Таблица значений параметра γ для протонов и мюонов в различных средах для широкого диапазона энергий приведена в монографии [2, гл., 4, с. 109].

2.2. ФЛУКТУАЦИИ ЭНЕРГИИ ТЯЖЕЛЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ

Уравнение переноса в диффузионном приближении в пространстве энергий

При прохождении тяжелых частиц в относительно толстых слоях вещества, когда средние потери энергии намного превышают флуктуации энергетических потерь, *в первом приближении* прохождение частиц можно описать в модели непрерывного замедления (2.1.2). В этом приближении в разложении интеграла неупругих столкновений (1.3.28) сохраняется только одно первое слагаемое, отвечающее систематическим потерям энергии. При этом совершенно не учитывается вероятностный характер при неупругих столкновениях.

Для того чтобы учесть *флуктуации энергетических потерь*, вызванные статистическим характером неупругих столкновений частиц с атомами вещества, необходимо сохранить в интеграле неупругих столкновений, по крайней мере, еще одно слагаемое. Тогда интеграл неупругих столкновений (1.3.28) будет выглядеть так:

$$B_{\text{неупр}} \{N\} \approx \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \bar{\varepsilon}^*(T) N(z; T) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \bar{\varepsilon}^2(T) \frac{\partial}{\partial T} N(z; T) \right\}. \quad (2.2.1)$$

Здесь $\bar{\varepsilon}^2(T)$ – средний квадрат энергии (1.3.17), теряемой частицей с энергией T на единице пути. Величина $\bar{\varepsilon}^*(T)$ определяется выражением

$$\bar{\varepsilon}^*(T) = \bar{\varepsilon}(T) + \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\varepsilon}^2(T)}{\partial T}. \quad (2.2.2)$$

Для нерелятивистских частиц ($T = mc^2$) значение величины $\bar{\varepsilon}^2(T)$, если не учитывать связь электронов на K - L -... оболочках атомов, определяется формулой (1.3.19) и не зависит от энергии частиц: $\bar{\varepsilon}^2 \approx \bar{\varepsilon}_0^2 = \text{const}$. Поэтому для нерелятивистских частиц $\bar{\varepsilon}^*(T) = \bar{\varepsilon}(T)$.

Для релятивистских энергий $1 \ll T/mc^2 \ll m/m_e$ значение $\bar{\varepsilon}^2(T)$ в соответствии с (1.3.22) пропорционально квадрату энергии частиц $\bar{\varepsilon}^2 \sim T^2$. Поэтому при прохождении ультрарелятивистских частиц через вещества флуктуации энергии в основном формируются на той части пути, где частица имеет ещё ультрарелятивистскую энергию. На этом этапе прохождения частиц велико как само значение $\bar{\varepsilon}^2(T)$, так и длина пути, где частица остается ультрарелятивистской. Последняя в T/mc^2 раз превышает нерелятивистскую часть пробега. Для ультрарелятивистских частиц значения величин $\bar{\varepsilon}$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ определяются формулами с (1.3.16) и (1.3.22) соответственно. Поэтому

$$\frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\varepsilon}^2(T)/\partial T}{\bar{\varepsilon}} = \frac{1}{2L_{\text{ион}}} \frac{m_e}{m} \frac{T}{mc^2} \ll 1, \text{ т.е. } \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\varepsilon}^2(T)}{\partial T} \ll \bar{\varepsilon}.$$

Таким образом, и для релятивистских частиц $\bar{\varepsilon}^*(T) \approx \bar{\varepsilon}(T)$.

Энергетическое распределение частиц $N(z; T)$ будет определяться уравнением

$$\frac{\partial N(z; T)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \bar{\varepsilon}^2(T) \frac{\partial}{\partial T} N(z; T) \right\}. \quad (2.2.3)$$

$$N(z = 0; T) = N_0 \delta(T_0 - T). \quad (2.2.4)$$

Приближение (2.2.1) (и вытекающее из него уравнение (2.2.3)) соответствует приближению Фоккера – Планка, или диффузионному приближению по энергии.

Можно показать [2, гл. 2], что в толстых слоях вещества диффузионное приближение описывает одновременно как торможение быстрых тяжелых заряженных частиц, так и флуктуации их энергетических потерь с достаточно высокой точностью и в большинстве случаев нет необходимости оставлять в разложении интеграла неупругих столкновений (1.3.28) последующие слагаемые, содержащие $\bar{\varepsilon}^3(T)$, $\bar{\varepsilon}^4(T)$ и т.д.

Если вместо энергии T ввести энергию Δ , теряемую частицей:

$$\Delta = T_0 - T, \quad (2.2.5)$$

то уравнение (2.2.3) запишется так:

$$\frac{\partial N(z; T)}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial \Delta} \{ \bar{\varepsilon}(\Delta) N(z; \Delta) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \Delta} \left\{ \bar{\varepsilon}^2(\Delta) \frac{\partial}{\partial \Delta} N(z; \Delta) \right\}, \quad (2.2.6)$$

$$N(z = 0; \Delta) = N_0 \delta(\Delta). \quad (2.2.7)$$

Здесь $\bar{\varepsilon}(\Delta) = \bar{\varepsilon}(T = T_0 - \Delta)$ и $\bar{\varepsilon}^2(\Delta) = \bar{\varepsilon}^2(T = T_0 - \Delta)$.

Рассмотрим, как и ранее, случай, когда на плоский слой вещества по нормали к его поверхности (вдоль оси z) падает моноэнергетический пучок частиц с начальной энергией T_0 и плотностью потока N_0 (рис. 2.2.1).

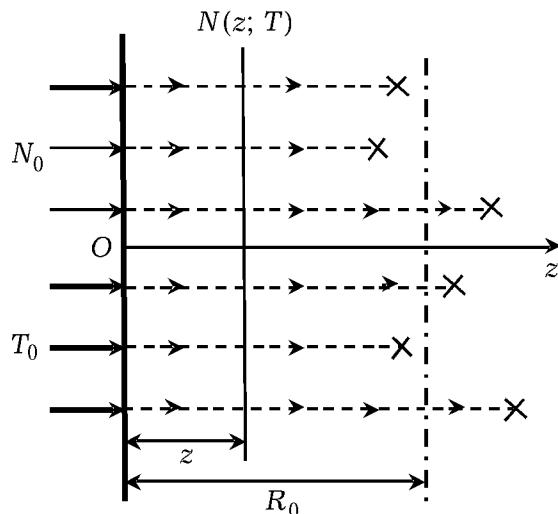


Рис. 2.2.1. Условное изображение распространения пучка частиц с начальной энергией T_0 . Крестиками отмечены места остановки частиц, разбросанные относительно R_0 из-за вероятностного характера процесса неупругих столкновений

В отличие от уравнения переноса в приближении непрерывного замедления (2.1.2), уравнения (2.2.3), (2.2.6) являются дифференциальными уравнениями в частных производных *второго порядка* и их аналитическое решение нельзя получить при произвольной зависимости величин $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ от энергии частиц T .

Уравнение переноса (2.2.6) по виду полностью совпадает с уравнением одномерной *пространственной* диффузии, которое получается из интегрального уравнения Эйнштейна – Смолуховского^{*} (см. также [6, гл. 2]) и называется уравнением Фоккера – Планка:

$$\frac{\partial C(x; t)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \{ \langle v(x) \rangle C(x; t) \} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ D(x) \frac{\partial C(x; t)}{\partial x} \right\}. \quad (2.2.8)$$

Здесь $C(x; t)$ – концентрация частиц на глубине X в момент времени t ; $\langle v(x) \rangle = \langle \Delta x / \Delta t \rangle$ – средняя дрейфовая скорость частиц на глубине X , вызванная действием внешних сил; $D(x)$ – коэффициент *пространственной* диффузии на глубине X ; $[D(x)]$ в $\text{м}^2/\text{с}$. Если в начальный момент времени концентрация частиц отлична от нуля только в плоскости $x = 0$, то *начальное* условие имеет вид

$$C(x; t = 0) = S_0 \delta(x). \quad (2.2.9)$$

Если средняя дрейфовая скорость и коэффициент диффузии *не зависят* от глубины, то уравнение (2.2.8) выглядит так:

$$\frac{\partial C(x; t)}{\partial t} = -\langle v \rangle \frac{\partial C(x; t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 C(x; t)}{\partial x^2}. \quad (2.2.10)$$

Уравнение пространственной диффузии легко получить, используя уравнение непрерывности для плотности вещества:

$$\frac{\partial C(r; t)}{\partial t} + \operatorname{div} j(r; t) = 0.$$

* Маннинг Д. Кинетика диффузии атомов в кристаллах: Пер. с англ. М.: Мир. 1971.

Плотность потока вещества обуславливается двумя факторами – движением частиц во внешних полях и наличием градиента концентрации плотности

$$\overset{\text{I}}{j}(\overset{\text{r}}{r}; t) = \langle \overset{\text{r}}{v}(\overset{\text{r}}{r}) \rangle \cdot C(\overset{\text{r}}{r}; t) + \overset{\text{I}}{j}_D(\overset{\text{r}}{r}; t).$$

Диффузная составляющая плотности тока определяется правилом Фика

$$\overset{\text{I}}{j}_D(\overset{\text{r}}{r}; t) = -D(\overset{\text{r}}{r}) \cdot \text{grad } C(\overset{\text{r}}{r}; t).$$

Здесь $D(\overset{\text{I}}{r})$ – коэффициент пространственной диффузии.

С учетом рассмотренного получаем уравнение для концентрации атомов $C(\overset{\text{I}}{r}; t)$:

$$\frac{\partial C(\overset{\text{I}}{r}; t)}{\partial t} = \text{div} \left\{ -\langle \overset{\text{r}}{v}(\overset{\text{r}}{r}) \rangle C(\overset{\text{r}}{r}; t) + D(\overset{\text{r}}{r}) \text{grad } C(\overset{\text{r}}{r}; t) \right\}.$$

Это и есть трехмерное уравнение диффузии.

В одномерном случае, когда $C = C(x; t)$, $\langle \overset{\text{I}}{v}(\overset{\text{I}}{r}) \rangle = \langle \overset{\text{I}}{v}(x) \rangle$ и $D(\overset{\text{I}}{r}) = D(x)$, приходим к уравнению (2.2.8). Сравнивая уравнения (2.2.6) и (2.2.8) видим, что они отличаются только обозначениями:

$$t \rightarrow z, \quad x \rightarrow \Delta, \quad C(x; t) \rightarrow N(z; \Delta), \quad S_0 \rightarrow N_0, \\ \langle v \rangle \rightarrow \bar{\varepsilon}, \quad D \rightarrow \bar{\varepsilon}^2 / 2. \quad (2.2.11)$$

Средняя дрейфовая скорость в пространстве энергий, т.е. быстрота изменения энергии частицы с глубиной, имеет размерность силы и равна тормозной способности среды $\langle \Delta T / \Delta z \rangle = \bar{\varepsilon}(T)$. Коэффициент диффузии в пространстве энергий есть $D_T = \bar{\varepsilon}^2(T) / 2$ и имеет размерность $[D_T]$ в Дж²/м.

Уравнение переноса (2.2.8) удобно записать несколько в ином виде. Как и в приближении непрерывного замедления, введем вместо кинетической энергии частицы T новую переменную $R(T)$, связанную с энергией T , как и прежде, соотношением (2.1.5):

$$R(T) = \int_0^T dT' / \bar{\varepsilon}(T'), \quad \text{т.е.} \quad dR = dT / \bar{\varepsilon}(T). \quad (2.2.12)$$

Распределение частиц $N(z; R)$ на глубине z по новой переменной R связано с пространственно-энергетическим спектром $N(z; T)$ прежними соотношениями (2.1.6), (2.1.7):

$$N(z; R) dR = N(z; T) dT, \text{ т.е. } N(z; T) = N[z; R(T)] / \bar{\varepsilon}(T).$$

Преобразуем правую часть уравнения (2.2.3). Поскольку

$$\frac{\partial}{\partial T} = \frac{\partial R}{\partial T} \frac{\partial}{\partial R} = \frac{1}{\bar{\varepsilon}(R)} \frac{\partial}{\partial R},$$

то последовательно будем иметь

$$\frac{\partial}{\partial T} [\bar{\varepsilon}(T) N(z; T)] = \frac{\partial}{\partial T} N(z; R) = \frac{1}{\bar{\varepsilon}(R)} \frac{\partial N(z; R)}{\partial R}. \quad (2.2.13a)$$

$$\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \bar{\varepsilon}^2(T) \frac{\partial}{\partial T} N(z; T) \right\} = \frac{1}{2 \bar{\varepsilon}(R)} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}^2(R)}{\bar{\varepsilon}(R)} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{N(z; R)}{\bar{\varepsilon}(R)} \right] \right\}. \quad (2.2.13b)$$

Подставляя (2.2.13a) в уравнение (2.2.3) с учетом того, что $\bar{\varepsilon}(R) N(z; T) = N(z; R)$, получим

$$\frac{\partial N(z; R)}{\partial z} = \frac{\partial N(z; R)}{\partial R} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}^2(R)}{\bar{\varepsilon}(R)} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{N(z; R)}{\bar{\varepsilon}(R)} \right] \right\}. \quad (2.2.14)$$

Границное условие (2.1.16) в рассматриваемой задаче остается прежним

$$N(z = 0; R) = N_0 \delta(R_0 - R). \quad (2.2.15)$$

Здесь, как и ранее,

$$R_0 = R(T = T_0) = \int_0^{T_0} dT / \bar{\varepsilon}(T).$$

Величины $\bar{\varepsilon}(R)$ и $\bar{\varepsilon}^2(R)$, входящие в уравнение (2.2.14), есть тормозная способность среды и средний квадрат энергии, теряемой частицей не единице пути, выраженные не через энергию T , а через новую переменную R :

$$\bar{\varepsilon}(R) = \bar{\varepsilon}[T(R)], \quad \bar{\varepsilon}^2(R) = \bar{\varepsilon}^2[T(R)]. \quad (2.2.16)$$

Для нерелятивистских частиц ($T = mc^2$) в соответствии с (2.1.37), (1.3.17) будем иметь

$$\bar{\varepsilon}(R) \approx \frac{T_0}{2\sqrt{R_0 R}}, \quad \bar{\varepsilon^2} = \bar{\varepsilon_0^2} = \frac{m_e}{m} \frac{1}{R_0} \frac{T_0^2}{L_{\text{ион}}} = \text{const}. \quad (2.2.17)$$

Значение величины R_0 определяется формулой (2.1.36)

$$R_0 = \frac{T_0}{2\bar{\varepsilon}_0} = 1,67 \frac{A}{z^2 Z} \frac{1}{\rho L_{\text{ион}}} \frac{m}{m_e} \left(\frac{T_0}{mc^2} \right)^2 \text{ (см)}. \quad (2.2.18)$$

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что в диффузионном приближении *нет никаких оснований* отождествлять величину $R(T)$ с длиной пути, которую частица с энергией T проходит до полной остановки, как это имело место в модели непрерывного замедления. За счет вероятностного характера процесса неупругих столкновений, частицы, имеющие на глубине Z одну и ту же энергию T , будут проходить разный путь до остановки. Часть из них остановится, пройдя путь меньший, чем величина, определяемая формулой (2.2.12), а часть – больший путь. Все изложенное в полной мере относится и к величине R_0 . Только в модели непрерывного замедления величина R_0 определяла максимальную глубину, на которую частица с начальной энергией T_0 могла проникнуть в глубь вещества, так что на глубинах $Z > R_0$ дифференциальная плотность излучения $N(z; T)$ и полный поток $N(z)$ были равны нулю. Учет флуктуаций энергетических потерь приводит к тому, что частица с начальной энергией T_0 может проникать в вещество на глубину большую R_0 . Некоторые частицы будут останавливаться на глубинах $Z < R_0$ (рис. 2.1.1). Более того, величину R_0 нельзя отождествлять ни со средней, ни с наиболее вероятной глубиной проникновения частиц в глубь среды [2, гл. 2]. Поэтому введенная в диффузионном приближении величина $R(T)$ должна рассматриваться только как новая *независимая переменная*, связанная с энергией частицы соотношением (2.2.12). То же относится и к величине R_0 , которая является *параметром* в рассматриваемой задаче, величина которого зависит от начальной энергии частиц T_0 и тормозной способности вещества. Однако следуя традиции, мы

будем иногда называть, там, где это не вызывает недоразумений, величины $R(T)$ и R_0 остаточным и полным пробегом соответственно.

Поскольку в рассматриваемой задаче при облучении поверхности вещества моноэнергетическим потоком частиц естественным масштабом длины является величина R_0 , то вместо глубины Z и остаточного пробега R удобно ввести безразмерную приведенную глубину ξ и приведенный пробег r :

$$\xi = \frac{Z}{R_0}, \quad r = \frac{R}{R_0}. \quad (2.2.19)$$

Кроме того, вместо размерных величин $\bar{\varepsilon}(r)$ и $\bar{\varepsilon}^2(r)$ вводятся безразмерные величины $\bar{\varepsilon}^*(r)$ и $\bar{\varepsilon}^{2*}(r)$:

$$\bar{\varepsilon}^*(r) = \frac{\bar{\varepsilon}(r)}{\bar{\varepsilon}_0}, \quad \bar{\varepsilon}^{2*}(r) = \frac{\bar{\varepsilon}^2(r)}{\bar{\varepsilon}_0^2}; \quad (2.2.20)$$

$$\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}(R=R_0) = \bar{\varepsilon}(T=T_0), \quad \bar{\varepsilon}_0^2 = \bar{\varepsilon}^2(R=R_0) = \bar{\varepsilon}^2(T=T_0). \quad (2.2.21)$$

В соответствии с (2.2.17) для нерелятивистских частиц

$$\bar{\varepsilon}(r) \approx \frac{T_0}{2R_0\sqrt{r}}, \quad \bar{\varepsilon}_0 \approx \frac{T_0}{2R_0}, \quad \text{поэтому} \quad \bar{\varepsilon}^*(r) = \frac{1}{\sqrt{r}}; \quad (2.2.22)$$

$$\bar{\varepsilon}^2(r) = \frac{m_e}{m} \frac{1}{R_0} \frac{T_0^2}{L_{\text{ион}}} = \bar{\varepsilon}_0^2, \quad \text{поэтому} \quad \bar{\varepsilon}^{2*}(r) = 1. \quad (2.2.23)$$

В новых переменных уравнение (2.2.14) для величины $N(\xi; r)$, связанной с распределением $N(\xi; R)$ соотношением

$$N(\xi; r)dr = N(\xi; R)dR, \quad \text{т.е.} \quad N(\xi; r) = R_0 N(\xi; R), \quad (2.2.24)$$

будет выглядеть так:

$$\frac{\partial N(\xi; r | v)}{\partial \xi} = \frac{\partial N(\xi; r | v)}{\partial r} + \frac{1}{2v} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}^{2*}(r)}{\bar{\varepsilon}^*(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{N(\xi; r | v)}{\bar{\varepsilon}^*(r)} \right] \right\}; \quad (2.2.25)$$

$$N(\xi = 0; r) = N_0 \delta(1 - r). \quad (2.2.26)$$

Уравнение (2.2.25), записанное в терминах приведенной глубины и пробега с безразмерными коэффициентами $\bar{\varepsilon}^*(r)$ и $\bar{\varepsilon}^{2*}(r)$, содержит всего один численный параметр v , который принято называть *флуктуационным* параметром

$$v = \frac{(\bar{\varepsilon}_0)^2 R_0}{\bar{\varepsilon}_0^2}. \quad (2.2.27)$$

Величина этого безразмерного параметра определяет ширину энергетического спектра частиц из-за вероятностного характера неупругих столкновений. При $v \rightarrow \infty$ уравнение (2.2.25) принимает вид

$$\frac{\partial N(\xi; r | v \rightarrow \infty)}{\partial \xi} = \frac{\partial N(\xi; r | v \rightarrow \infty)}{\partial r}, \quad (2.2.28)$$

т.е. совпадает с уравнением (2.1.8) в приближении непрерывного замедления, записанное в терминах безразмерных переменных ξ и r . Решение уравнения (2.2.28) определяется формулой (2.1.19), которая в безразмерных переменных выглядит так:

$$N(\xi; r | v \rightarrow \infty) = N_0 \delta(1 - r - \xi). \quad (2.2.29)$$

Таким образом, предельный переход $v \rightarrow \infty$ соответствует полному пренебрежению вероятностным характером неупругих столкновений и возвращению к модели непрерывного замедления. В модели непрерывного замедления на глубине Z частица имеет вполне определенную энергию и остаточный пробег, т.е. вполне определенное значение величины r , которое определяется из формулы (2.2.29):

$$r(\xi | v \rightarrow \infty) = 1 - \xi, \quad (0 \leq \xi \leq 1). \quad (2.2.30)$$

Учет вероятностного характера неупругих столкновений частиц с атомами среды приводит к тому, что энергетический спектр частиц перестает быть моноэнергетическим. Из сказанного выше понятно, что *чем больше* значение флуктуационного параметра v , *тем меньше* разброс по энергиям относительно наиболее вероятного значения энергии на глубине ξ .

Для тяжелых частиц

$$\overline{\varepsilon^2}(T) = \int_0^{\varepsilon_{\max}} \varepsilon^2 W_{\text{нейпр}}(T|\varepsilon) d\varepsilon \leq \varepsilon_{\max} \int_0^{\varepsilon_{\max}} \varepsilon W_{\text{нейпр}}(T|\varepsilon) d\varepsilon,$$

т.е. $\overline{\varepsilon^2}(T) \leq \varepsilon_{\max}(T) \bar{\varepsilon}(T), \quad \overline{\varepsilon_0^2} \leq \varepsilon_{\max}(T_0) \bar{\varepsilon}_0.$

Поэтому

$$\nu > \frac{(\bar{\varepsilon}_0)^2 R_0}{\varepsilon_{\max}(T_0) \bar{\varepsilon}_0} = \frac{\bar{\varepsilon}_0 R_0}{\varepsilon_{\max}(T_0)} \sim \frac{T_0}{\varepsilon_{\max}(T_0)} \gg 1. \quad (2.2.31)$$

Вычислим значение параметра ν для нерелятивистских частиц.

Подставляя в (2.2.27) значения величин $\bar{\varepsilon}_0$, $\overline{\varepsilon_0^2}$, например из (2.2.17), (2.2.18), при $R = R_0$, получим

$$\nu \approx \frac{1}{4} \frac{m}{m_e} L_{\text{ион}}(T_0; Z). \quad (2.2.32)$$

Поскольку для нерелятивистских частиц $\bar{\varepsilon}_0 \approx T_0 / 2R_0$, т.е. $\bar{\varepsilon}_0 R_0 \approx T_0 / 2$, то параметр ν можно записать в виде

$$\nu = \frac{\bar{\varepsilon}_0 T_0}{2\overline{\varepsilon_0^2}} = \frac{T_0^2}{4\overline{\varepsilon_0^2} R_0}. \quad (2.2.33)$$

Напомним, что простая формула (2.2.32) получена без учета зависимости ионизационного логарифма от энергии частиц. Для тяжелых частиц ($m \gg m_e$) параметр ν велик и слабо (логарифмически) зависит от начальной энергии частиц T_0 и атомного номера Z атомов вещества. Для нерелятивистских протонов с энергией $10 - 100$ МэВ значения параметра ν лежит в пределах $2300 \leq \nu \leq 3400$ для Al и $1400 \leq \nu \leq 2500$ для Pb. Для мюонов и π -мезонов соответствующие значения параметра ν примерно на порядок меньше.

2.3. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ, ПРОШЕДШИХ ТОНКИЙ СЛОЙ ВЕЩЕСТВА В ДИФФУЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Приступая к вычислению энергетического спектра частиц в диффузионном приближении в пространстве энергий, рассмотрим сначала простейший случай прохождения частиц через относительно *тонкие слои* вещества, когда потери энергии незначительны:

$$\Delta = T_0 - T \ll T_0. \quad (2.3.1)$$

В этой ситуации можно пренебречь зависимостью величин $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ от энергии и положить в уравнении (2.2.6)

$$\bar{\varepsilon}(T) \approx \bar{\varepsilon}(T_0) \equiv \bar{\varepsilon}_0; \quad \bar{\varepsilon}^2(T) \approx \bar{\varepsilon}^2(T_0) \equiv \bar{\varepsilon}_0^2. \quad (2.3.2)$$

В приближении (2.3.2) уравнение переноса (2.2.6) сводится к уравнению диффузии (в пространстве энергий) с *постоянными* коэффициентами

$$\frac{\partial N(z; \Delta)}{\partial z} = -\bar{\varepsilon}_0 \frac{\partial N(z; \Delta)}{\partial \Delta} + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_0^2 \frac{\partial^2 N(z; \Delta)}{\partial \Delta^2}; \quad (2.3.3)$$

$$N(z = 0; \Delta) = N_0 \delta(\Delta); \quad (2.3.4)$$

$$N(z; \Delta < 0) = 0. \quad (2.3.5)$$

Последнее условие (2.3.5) отражает тот факт, что при $\Delta < 0$, т.е. при $T > T_0$, поток частиц отсутствует. Уравнение (2.3.3) только обозначениями отличается от уравнения (2.2.10) одномерной пространственной диффузии:

$$\begin{cases} \frac{\partial C(x; t)}{\partial t} = -\langle v \rangle \frac{\partial C(x; t)}{\partial x} + D \frac{\partial^2 C(x; t)}{\partial x^2}, \\ C(x; t = 0) = S_0 \delta(x). \end{cases} \quad (2.3.6)$$

Решение уравнения (2.3.6) хорошо известно*

* Тихонов А.А., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1972.

$$C(x; t) = \frac{S_0}{\sqrt{4\pi D t}} \exp \left\{ -\frac{(x - \langle v \rangle t)^2}{4Dt} \right\}. \quad (2.3.7)$$

Производя указанные ранее замены (2.2.11)

$$\begin{aligned} t &\rightarrow z, \quad x \rightarrow \Delta, \quad C(x; t) \rightarrow N(z; \Delta), \quad S_0 \rightarrow N_0, \\ \langle v \rangle &\rightarrow \bar{\varepsilon}_0, \quad D \rightarrow \bar{\varepsilon}_0^2 / 2, \end{aligned}$$

из формулы (2.3.7) получаем

$$N(z; \Delta) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi z \bar{\varepsilon}_0^2}} \exp \left\{ -\frac{(\Delta - z \bar{\varepsilon}_0)^2}{2z \bar{\varepsilon}_0^2} \right\}, \quad (2.3.8)$$

или

$$N(z; T) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi \sigma_T^2(z)}} \exp \left\{ -\frac{(T_0 - T - z \bar{\varepsilon}_0)^2}{2\sigma_T^2(z)} \right\}, \quad \sigma_T^2(z) = z \bar{\varepsilon}_0^2. \quad (2.3.9)$$

Таким образом, распределение частиц по энергии имеет гауссов вид с дисперсией $\sigma_T^2(z)$.

Для полноты изложения приведем здесь один из методов решения уравнения переноса (2.3.3) с помощью преобразования Лапласа. Это тем более оправдано, т.к. именно тем же способом вычисляется энергетический спектр частиц из уравнения переноса в тонких слоях вещества без использования диффузионного приближения.

Так как $N(z; \Delta) = 0$ если $\Delta < 0$, то для решения уравнения (2.3.3) можно использовать преобразование Лапласа по переменной Δ :

$$N(z; p) = \int_0^\infty N(z; \Delta) e^{-p\Delta} d\Delta. \quad (2.3.10)$$

Здесь $N(z; p)$ – лаплас-образ величины $N(z; \Delta)$. Определив значение $N(z; p)$, энергетический спектр частиц на глубине z можно определить с помощью формулы обращения

$$N(z; \Delta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty + p_0}^{i\infty + p_0} N(z; p) e^{p\Delta} dp. \quad (2.3.11)$$

Интегрирование в (2.3.11) ведется в комплексной p плоскости вдоль вертикальной прямой, параллельной мнимой оси и лежащей правее всех особенностей функции $N(z; p)$, т.е. по любой вертикальной прямой $\text{Re } p \geq p_0$ (рис. 2.3.1). Поскольку порядок роста функции $N(z; \Delta)$ равен нулю, так как отсутствует экспоненциальный рост $N(z; \Delta)$ с увеличением Δ , то $p_0 = 0$. Это означает, что интегрирование в выражении (2.3.11) можно проводить вдоль мнимой оси $\text{Re } p = 0$.

Делая замену переменной интегрирования $p = i\omega$, получаем

$$N(z; \Delta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} N(z; p = i\omega) e^{i\omega\Delta} d\omega. \quad (2.3.12)$$

Подставляя (2.3.11) в уравнение (2.3.3), получаем уравнение для лаплас-образа $N(z; p)$:

$$\frac{\partial N(z; p)}{\partial z} = \left\{ -\bar{\varepsilon}_0 p + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_0^2 p^2 \right\} N(z; p); \quad (2.3.13)$$

$$N(z = 0; p) = N_0. \quad (2.3.14)$$

Решение уравнения (2.3.13), удовлетворяющее условию (2.3.14), находится элементарно:

$$N(z; p) = N_0 \exp \left\{ \left(-\bar{\varepsilon}_0 p + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_0^2 p^2 \right) z \right\}. \quad (2.3.15)$$

Полагая в (2.3.14) $p = i\omega$, из формулы обращения (2.3.11) находим

$$N(z; \Delta) = \frac{N_0}{\pi} \int_0^{\infty} \exp \left(-\frac{z}{2} \bar{\varepsilon}_0^2 \omega^2 \right) \cos \{ \omega (\Delta - z \bar{\varepsilon}_0) \} d\omega. \quad (2.3.16)$$

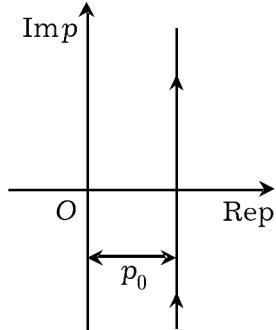


Рис. 2.3.1. Контур интегрирования в формуле (2.3.11)

Интеграл вида (2.3.15) является табличным [9]:

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\beta^2 \omega^2) \cos(b\omega) d\omega = \frac{1}{2\beta\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{b^2}{4\beta^2}\right). \quad (2.3.17)$$

В нашем случае $\beta^2 = z\bar{\varepsilon}_0^2/2$ и $b = \Delta - z\bar{\varepsilon}_0 = T_0 - T - z\bar{\varepsilon}_0$. Поэтому из (2.3.15) находим, что

$$N(z; T) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi z \bar{\varepsilon}_0^2}} \exp\left\{-\frac{(T_0 - T - z\bar{\varepsilon}_0)^2}{2z\bar{\varepsilon}_0^2}\right\}.$$

Полученный результат в точности совпадает с формулой (2.3.9).

Сравним выражение (2.3.9) для энергетического спектра частиц $N(z; T)$ на глубине Z в диффузационном приближении с аналогичным выражением (2.1.20) для величины $N(z; T)$ в приближении непрерывного замедления, когда считается, что тормозная способность среды не зависит от энергии частиц. Полагая в (2.1.20) $\bar{\varepsilon}(T) = \bar{\varepsilon}_0$, получаем

$$N(z; T) \approx \frac{N_0}{\bar{\varepsilon}_0} \delta\left\{z - \int_T^{T_0} \frac{dT''}{\bar{\varepsilon}_0}\right\} = N_0 \delta\{T_0 - T - z\bar{\varepsilon}_0\}. \quad (2.3.18)$$

Из (2.3.18) видно, что в модели непрерывного замедления частицы на глубине Z имеют вполне определенную энергию

$$T(z) = T_0 - z\bar{\varepsilon}_0, \quad (z\bar{\varepsilon}_0 \ll T_0). \quad (2.3.19)$$

Учет вероятностного характера процесса неупругих столкновений приводит к тому, что распределение (2.3.9) для $N(z; T)$ перестает быть моноэнергетическим, а имеет гауссов вид. Наиболее вероятная $T_{\text{H.B}}$ энергия частиц на глубине Z совпадает с величиной $T(z)$ (2.3.19):

$$T_{\text{H.B}}(z) = T_0 - z\bar{\varepsilon}_0. \quad (2.3.20)$$

Смысл такого совпадения состоит в следующем. В приближении непрерывного замедления не учитываются флуктуации потерь энергии. Поэтому величина $T_{\text{H.B}}(z)$ в этом приближении определяет “истинную” энергию частиц на глубине z . Учет вероятностного

характера процесса неупругих столкновений приводит к тому, что возникает некоторый разброс по энергиям относительно наиболее вероятного значения с дисперсией $\sigma^2(z) = \bar{\varepsilon}_0^2 z$.

Величина $N(z; T)$ на глубине z достигает своего наибольшего значения при $T = T_{\text{H.B.}}(z)$

$$N_{\max}(z) = N(z; T = T_0 - z\bar{\varepsilon}_0) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi z \bar{\varepsilon}_0^2}}. \quad (2.3.21)$$

Таким образом, по мере проникновения в глубь вещества значение $T_{\text{H.B.}}(z)$ уменьшается. Уменьшается и значение плотности потока излучения в максимуме распределения по закону $N_{\max}(z) \sim 1/\sqrt{z}$.

Обсудим область применимости полученного решения (2.3.9). Ограничение на глубину «сверху» определяется требованием малости потерянной энергии $\Delta = z\bar{\varepsilon}_0 \ll T_0$, т.е. $z \ll T_0 / \bar{\varepsilon}_0$. Поскольку вся энергия частиц теряется на глубинах $z \sim R_0$, то малость потерянной энергии означает, что глубина должна быть мала по сравнению с полным пробегом

$$z \ll R_0. \quad (2.3.22)$$

Ограничение на глубину «снизу» определяется из условия, что энергетический спектр $N(z; T)$ должен быть достаточно *плавной функцией* энергетической переменной T , чтобы оправдать допустимость диффузационного приближения. Действительно, при разложении интеграла неупругих столкновений (1.3.23) в ряд по ε небольшим числом слагаемых можно ограничиться только в том случае, если функция $N(z; T + \varepsilon)$ мало меняется при изменении ε от нуля до ε_{\max} , т.е. является плавной на масштабе ε_{\max} . Для этого необходимо, чтобы

$$\sigma_T(z) = \sqrt{z \bar{\varepsilon}_0^2} \gg \varepsilon_{\max}(T_0), \quad \text{т.е. } z \gg \varepsilon_{\max}^2(T_0) / \bar{\varepsilon}_0^2. \quad (2.3.23)$$

Два неравенства (2.3.22) и (2.3.23) можно объединить в одно двойное неравенство

$$\frac{\varepsilon_{\max}^2(T_0)}{\varepsilon_0^2} \ll z \ll R_0,$$

т.е.

$$\frac{\varepsilon_{\max}^2(T_0)}{\varepsilon_0^2 R_0} \ll \xi \ll 1, \quad (\xi = z/R_0). \quad (2.3.24)$$

Подставляя в (2.3.24) значения $\varepsilon_{\max}(T_0) \approx 4(m_e/m)T_0$, значения величин ε_0^2 и R_0 , определяемые формулами (1.3.20) и (2.1.36), для нерелятивистских частиц ($T_0 \ll mc^2$) получим

$$16 \frac{m_e}{m} \frac{L_{\text{ион}}}{K(T_0)} \ll \xi \ll 1. \quad (2.3.25)$$

Здесь $K(T_0)$ – поправка на эффект связи электронов в атоме. Двойное неравенство (2.3.25) может выполняться не всегда, а только при условии, что

$$16 \frac{m_e}{m} \frac{L_{\text{ион}}}{K(T_0)} \ll 1. \quad (2.3.26)$$

Из неравенства (2.2.26) видно, что область применимости диффузационного приближения расширяется с увеличением массы частиц. Например, при $T_0 \sim 0,1 mc^2$ значение величины $16(m_e/m)(L_{\text{ион}}/K)$ для протонов равно 0,07 для Al и 0,05 для Pb. Следовательно, для протонов распределение (2.3.9) можно использовать в достаточно широкой области глубин (2.3.25). В случае более легких частиц, например для мюонов, получаем 0,6 и 0,4, соответственно. Таким образом, для мюонов условие (2.3.26) не выполняется. Это означает, что для таких частиц *диффузационное приближение без учета зависимости величин $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ от энергии неприменимо никогда*.

Для частиц произвольных энергий условие (2.3.25) выглядит так:

$$8 \frac{m_e}{m} \frac{(2+E_0)^2(1+E_0)}{\left[1+(1+E_0)^2\right] K(T_0)} L_{\text{ион}} \ll \xi \ll 1, \quad (E_0 = T_0/mc^2). \quad (2.3.27a)$$

Для нерелятивистских частиц ($E_0 \ll 1$) из (2.3.27а) возвращаемся к предыдущему результату (2.3.25). Для частиц ультрарелятивистских энергий ($E_0 \gg 1$) поправкой на эффект связи электронов в атоме можно пренебречь и получаем, что

$$8 \frac{m_e}{m} \frac{T_0}{mc^2} L_{\text{ион}} \ll \xi \ll 1, \quad (T_0 / mc^2 \gg 1). \quad (2.3.27б)$$

Из сравнения выражений (2.3.27а) и (2.3.25) видно, что для ультрарелятивистских частиц ($1 \ll T_0 / mc^2 \ll m / m_e$) условие применимости диффузационного приближения более жесткое и оправдано на больших глубинах, чем в случае частиц нерелятивистских энергий.

В области глубин $z\bar{\varepsilon}_0 \gg \sqrt{z\varepsilon_0^2}$ и $T_0 - z\bar{\varepsilon}_0 \gg \sqrt{z\varepsilon_0^2}$ энергетический спектр достаточно узкий. Поэтому полный поток частиц $N(z)$ на глубине z можно рассчитать по формуле

$$N(z) = \int_0^{T_0} N(z; T) dT \approx \int_0^{\infty} N(z; \Delta) d\Delta = N_0. \quad (2.3.28)$$

Полученный результат имеет простое физическое объяснение. В тонких слоях вещества флуктуации энергии настолько малы, что вероятность остановки частиц практически равна нулю. Поэтому полный интегральный поток не изменяется с глубиной и равен потоку падающих частиц.

Средняя энергия частиц $\langle T \rangle_z$ на глубине z определяется обычным образом:

$$\langle T \rangle_z = \frac{1}{N(z)} \int_0^{\infty} N(z; T) T dT = T_0 - z\bar{\varepsilon}_0 = T_{\text{н.в.}}(z). \quad (2.3.29)$$

Значение средней энергии частиц в гауссовом распределении (2.3.9) совпадает с результатом приближения непрерывного замедления, конечно при условии, что потери энергии малы: $\bar{\varepsilon}(T) \approx \bar{\varepsilon}_0$.

Из (2.3.9) следует, что абсолютный разброс по энергиям возрастает с увеличением глубины:

$$\delta_T(z) = \sigma_T(z) = \sqrt{z\varepsilon_0^2} \sim \sqrt{z}. \quad (2.3.30)$$

В то же время *относительный* разброс потерь энергии

$$\delta_T^{(\text{отн})}(z) = \frac{\delta_T(z)}{T - \langle T \rangle_z} = \frac{\sqrt{z\bar{\epsilon}_0^2}}{z\bar{\epsilon}_0} = \sqrt{\frac{\bar{\epsilon}_0^2}{z(\bar{\epsilon}_0)^2}}. \quad (2.3.31)$$

Если перейти к приведенной глубине $\xi = z/R_0$, то выражение (2.3.31) принимает вид

$$\delta(T)_\xi = \sqrt{\frac{\bar{\epsilon}_0^2}{(\bar{\epsilon}_0)^2 R_0}} \frac{1}{\sqrt{\xi}} = \frac{1}{\sqrt{v\xi}}, \quad \left(v = \frac{(\bar{\epsilon}_0)^2 R_0}{\bar{\epsilon}_0^2} \right). \quad (2.3.32)$$

Здесь v – флюктуационный параметр (2.2.27). Ввиду очень больших значений параметра v , относительный разброс по энергиям оказывается малым в области несверхмальных глубин, когда $\xi \gg 1/v$, т.е. $z\bar{\epsilon} \gg \epsilon_{\max}$. Существенно, что *относительное* значение разброса потерь энергии (2.3.30), в отличие от абсолютного разброса (2.30) уменьшается с ростом глубины: $\delta_T(\xi) \sim 1/\sqrt{\xi}$. Именно это обстоятельство оправдывает использование приближения непрерывного замедления в качестве первого приближения при исследовании прохождения тяжелых частиц через *толстые* слои вещества.

В заключение этого раздела запишем выражение (2.3.9) для энергетического спектра частиц в терминах приведенной энергии $u = T/T_0$ и приведенной глубины. Тогда для функции $N(\xi; u)$, связанной с $N(z; T)$ обычным соотношением

$$N(z; T) dT = N(z; u) du, \quad \text{т.е. } N(z; u) = T_0 N(z; T = uT_0),$$

получим

$$N(\xi; u) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\xi \cdot (\bar{\epsilon}_0^2 R_0 / T_0^2)}} \exp \left\{ -\frac{[1 - u - \xi \cdot (R_0 \bar{\epsilon}_0 / T_0)]^2}{2\xi \cdot (\bar{\epsilon}_0^2 R_0 / T_0^2)} \right\}. \quad (2.3.33)$$

Для нерелятивистских частиц в соответствии с (2.1.37) $T_0 = 2R_0\bar{\epsilon}_0$.

Поэтому

$$\frac{R_0 \bar{\epsilon}_0}{T_0} = \frac{1}{2}, \quad \frac{\bar{\epsilon}_0^2 R_0}{T_0^2} = \frac{1}{4} \frac{\bar{\epsilon}_0^2}{R_0 (\bar{\epsilon}_0)^2} = \frac{1}{4v}. \quad (2.3.34)$$

Тогда распределение частиц (2.3.33) по приведенным энергиям будет выглядеть так

$$N(\xi; u) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2(\xi)}} \exp\left\{-\frac{[1-u-\xi/2]^2}{2\sigma_u^2(\xi)}\right\},$$

$$\sigma_u^2(\xi) = \frac{\sigma_T^2(z)}{T_0^2} = \frac{\xi}{4v}. \quad (2.3.35)$$

Из (2.3.35) видим, что при $\xi \ll 1$ значение $\sigma_u^2(\xi) \ll 1$, т.е. энергетический спектр имеет резко выраженный максимум в окрестности наиболее вероятного значения относительной энергии $u_{\text{н.в.}} = 1 - \xi/2$.

На рис. 2.3.2 представлены графики зависимости $N(\xi; u)/N_0$ при значении флюктуационного параметра $v = 2000$, рассчитанные по формуле (2.3.35) на различных приведенных глубинах: $\xi = 0,1$, $\xi = 0,2$ и $\xi = 0,3$.

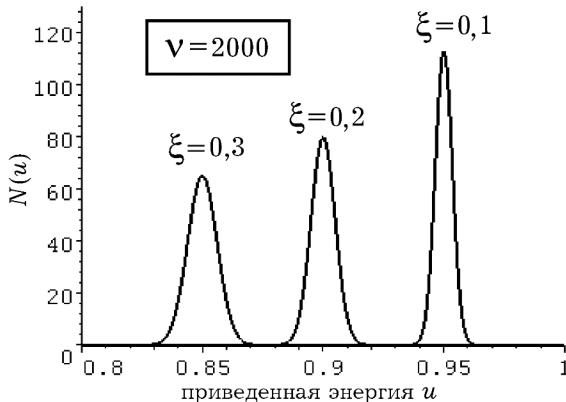


Рис. 2.3.2. Энергетические спектры частиц на малых глубинах

Видим, что с увеличением глубины энергетический спектр становится более размытым. В соответствии с (2.3.21) значение в максимуме распределения уменьшается с возрастанием глубины ξ . Значения наиболее вероятной относительной энергии $u_{\text{н.в.}} = 1 - \xi/2$ соответственно равны 0,95, 0,9 и 0,85.

2.4. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЙ СПЕКТР БЫСТРЫХ ТЯЖЕЛЫХ ЧАСТИЦ В ТОНКИХ СЛОЯХ ВЕЩЕСТВА БЕЗ ИСПОЛЬЗОВАНИЯ ДИФФУЗИОННОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Пусть, как и прежде, на плоский слой вещества по нормали к его поверхности (вдоль оси Z) падает моноэнергетический пучок частиц с начальной энергией T_0 и плотностью потока N_0 (рис. 2.1.1). Вычислим энергетический спектр быстрых тяжелых заряженных частиц в тонких слоях, когда средние потери энергии много меньше начальной энергии частиц:

$$T_0 - T \ll T_0, \quad \text{т.е.} \quad z \ll T_0 / \bar{\varepsilon}_0 \sim R_0. \quad (2.4.1)$$

В предыдущем разделе та же задача рассматривалась в диффузионном приближении в пространстве энергий. Однако это приближение было оправдано в области не очень малых глубин, когда выполнялось условие

$$z \gg \varepsilon_{\max}^2 (T_0) / \bar{\varepsilon}_0^2 = 16 \frac{m_e}{m} \frac{L_{\text{ион}}}{K(T_0)} R_0. \quad (2.4.2)$$

Два ограничения на глубину – сверху (2.4.1) и снизу (2.4.2) совместны только при выполнении неравенства (2.3.26), которое не выполняется, например, для мезонов.

Здесь мы рассмотрим более общий случай малых потерь энергии (2.4.1), но без ограничения на глубину снизу. На очень малых глубинах энергетический спектр может оказаться настолько узким, что функция $N(z; T + \varepsilon)$ значительно меняется при изменении ε от нуля до ε_{\max} . Поэтому для вычисления величины $N(z; T)$ уже нельзя использовать диффузионное приближение.

Для вычисления энергетического спектра частиц в области *малых* глубин $0 \leq z \ll R_0$, где может нарушаться условие (2.4.2), необходимо решать уравнение переноса с интегралом столкновений общего вида:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(z; T)}{\partial z} &= -W_{\text{нейтр}}(T)N(z; T) + \\ &+ \int_0^\infty W_{\text{нейтр}}(T + \varepsilon | \varepsilon)N(z; T + \varepsilon)d\varepsilon; \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

$$N(z=0; T) = N_0 \delta(T_0 - T). \quad (2.4.4)$$

Если потери энергии малы (2.4.1), то можно пренебречь зависимостью сечения неупругих столкновений от энергии частиц и положить

$$W_{\text{неупр}}(T) \approx W_{\text{неупр}}(T_0), \quad W_{\text{неупр}}(T + \varepsilon | \varepsilon) \approx W_{\text{неупр}}(T_0 | \varepsilon). \quad (2.4.5)$$

После этого уравнение переноса (2.4.3) и граничное условие (2.4.4) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial N(z; \Delta)}{\partial z} &= -W_{\text{неупр}}(T_0)N(z; \Delta) + \\ &+ \int_0^{\Delta} W_{\text{неупр}}(T_0 | \varepsilon)N(z; \Delta - \varepsilon)d\varepsilon; \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

$$N(z=0; \Delta) = N_0 \delta(\Delta); \quad (2.4.7)$$

$$N(z=0; \Delta < 0) = 0. \quad (2.4.8)$$

Здесь $\Delta = T_0 - T$ – потеряная энергия, потерянная частицей. Условие (2.4.8) означает, что $N(z; T) = 0$ если $T > T_0$. Так как величина T_0 может быть любой, то переменная Δ изменяется в пределах $0 \leq \Delta < \infty$. При этом $W_{\text{неупр}}(T_0 | \varepsilon) = 0$ при $\varepsilon > \varepsilon_{\max}(T_0)$.

Поскольку $N(z, \Delta) = 0$ при $\Delta < 0$, то для решения уравнения (2.4.6) воспользуемся преобразованием Лапласа по переменной Δ :

$$N(z; p) = \int_0^{\infty} N(z; \Delta) e^{-p\Delta} d\Delta. \quad (2.4.9)$$

Умножая обе части уравнения (2.4.6) и граничное условие на $e^{-p\Delta} d\Delta$ и интегрируя затем по Δ в пределах $0 \leq \Delta < \infty$, получим уравнение для лаплас-образа $N(z; p)$ плотности потока излучения

$$\frac{\partial N(z; p)}{\partial z} = -W(p | T_0)N(z; p), \quad N(z=0; p) = N_0. \quad (2.4.10)$$

Здесь

$$W(p) = \int_0^{\varepsilon_{\max}(T_0)} W_{\text{неупр}}(T_0 | \varepsilon) \{1 - e^{-p\varepsilon}\} d\varepsilon, [W] = 1/\text{м}. \quad (2.4.11)$$

Решение уравнения (2.4.10) находится элементарно:

$$N(z; p) = N_0 \exp \{-zW(p | T_0)\}. \quad (2.4.12)$$

Теперь, используя формулу обращения Лапласа (2.3.11), получаем окончательное выражение для энергетического спектра быстрых тяжелых заряженных частиц после прохождения тонкого слоя вещества:

$$N(z; T) = \frac{N_0}{2\pi i} \int_{-i\infty + p_0}^{i\infty + p_0} dp \exp \{p(T_0 - T) - zW(p | T_0)\}. \quad (2.4.13)$$

Решение (2.4.13) справедливо при *произвольной зависимости* вероятности неупругих столкновений $W_{\text{неупр}}(T_0 | \varepsilon)$ от энергии и поэтому носит *общий характер*. Единственным ограничением является требование малых потерь энергии (2.4.1).

Для проведения на основе выражения (2.4.13) дальнейших расчетов необходимо конкретизировать вид функции $W_{\text{неупр}}(T_0 | \varepsilon)$. Однако явный аналитический вид вероятности неупругих столкновений $W_{\text{неупр}}(T_0 | \varepsilon)$ во всем диапазоне изменения $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{\max}(T)$ неизвестен. Особенно трудно вычислить значение $W_{\text{неупр}}(T_0 | \varepsilon)$ в области очень малых передаваемых энергий, сравнимых с энергией связи атомных электронов $\varepsilon \leq \varepsilon_{\text{ат}}$, когда столкновение приводит к возбуждению атомов среды. Соответствующий квантово-механический расчет требует знания всех волновых функций возбужденных состояний атома и невозможен без привлечения ЭВМ. Наоборот, в области относительно больших (по сравнению с атомной энергией связи) передаваемых энергий ($\varepsilon \gg \varepsilon_{\text{ат}}$), когда происходит ионизация атома, при вычислении $W_{\text{неупр}}(T_0 | \varepsilon)$ с хорошей точностью можно пренебречь связью

электронов в атоме и использовать упоминаемую ранее модель *свободных электронов*. В этом приближении, при нерелятивистских энергиях, величина $W_{\text{нейпр}}(T_0 | \varepsilon)$ определяется формулой Резерфорда

$$W_{\text{нейпр}}(T_0 | \varepsilon) \approx \frac{\alpha_0}{\varepsilon^2}, \quad [\alpha_0] = \text{Дж/м}. \quad (2.4.14)$$

Используя формулу для среднего квадрата энергии, теряемой частицей на единице пути в модели свободных электронов

$$\overline{\varepsilon_0^2} = \int_0^{\varepsilon_{\max}(T_0)} \varepsilon^2 W_{\text{нейпр}}(T_0 | \varepsilon) d\varepsilon = \alpha_0 \varepsilon_{\max}(T_0), \quad (2.4.15)$$

выражение для коэффициент α_0 можно записать в виде

$$\alpha_0 = \frac{\overline{\varepsilon_0^2}}{\varepsilon_{\max}(T_0)}. \quad (2.4.16)$$

На практике для вычисления $W(p | T_0)$ часто используют следующий подход. Прибавляя и вычитая под знаком интеграла в (2.4.11) величину $p\varepsilon$, функцию $W(p)$ записывают в виде

$$W(p) = p\bar{\varepsilon}_0 + \int_0^{\varepsilon_{\max}(T_0)} W_{\text{нейпр}}(T_0 | \varepsilon) \{1 - p\varepsilon - e^{-p\varepsilon}\} d\varepsilon. \quad (2.4.17)$$

Здесь учтено, что

$$p\bar{\varepsilon}_0 = p \int_0^{\varepsilon_{\max}(T_0)} \varepsilon W_{\text{нейпр}}(T_0 | \varepsilon) d\varepsilon,$$

где $\bar{\varepsilon}_0$ – тормозная способность среды для частицы с энергией T_0 .

Цель проделанной процедуры состоит в том, чтобы обойти трудности вычисления интеграла (2.4.11) в области малых передаваемых энергий $\varepsilon \leq \varepsilon_{\text{ат}}$, где точное значение $W_{\text{нейпр}}(T_0 | \varepsilon)$ неизвестно. За счет такого приема удается выразить вклад в интеграл от указанной области через известную величину – тормозную способность среды $\bar{\varepsilon}_0$. Величина $\bar{\varepsilon}_0$ для быстрых частиц может быть

приближенно рассчитана теоретически по формуле Бете – Блоха или более точно определена из независимого эксперимента.

Теперь, подставляя в (2.4.17) значение $W_{\text{нейтр}}(T_0|\varepsilon)$ (2.4.14), получаем

$$W(p) = p\bar{\varepsilon}_0 + \alpha_0 \int_0^{\varepsilon_{\max}(T_0)} \frac{1 - p\varepsilon - e^{-p\varepsilon}}{\varepsilon^2} d\varepsilon. \quad (2.4.18)$$

Входящий в выражение (2.4.18) интеграл выражается через известные функции [8]:

$$W(p) = p\bar{\varepsilon}_0 + p\alpha_0 \times \\ \times \left\{ Ei(-p\varepsilon_{\max}) - \ln(p\varepsilon_{\max}) - \gamma - \frac{1 - p\varepsilon_{\max} - e^{-p\varepsilon_{\max}}}{p\varepsilon_{\max}} \right\}. \quad (2.4.19)$$

Здесь $Ei(x)$ – интегральная показательная функция; $\gamma = 0,5772$ – постоянная Эйлера.

При вычислении интеграла (2.4.13) в выражении для энергетического спектра можно совместить контур интегрирования с мнимой осью и сделать замену $p = i\omega$. Следует учесть, что

$$Ei(-i\omega\varepsilon_{\max}) = Ci(\omega\varepsilon_{\max}) - iSi(\omega\varepsilon_{\max}) - i\pi/2,$$

где

$$Ci(x) = \gamma + \ln(x) + \int_0^x \frac{\cos t - 1}{t} dt \quad \text{и} \quad Si(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt - \quad (2.4.20)$$

интегральные косинус и синус.

Теперь, после несложных преобразований, с учетом формулы (2.4.16) для α_0 , получаем

$$N(z; T) = \frac{N_0}{\pi\varepsilon_{\max}} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -z \frac{\bar{\varepsilon}_0^2}{\varepsilon_{\max}^2} a(t) \right\} \times \\ \times \cos \left\{ \frac{T_0 - T - z\bar{\varepsilon}_0}{\varepsilon_{\max}} t - z \frac{\bar{\varepsilon}_0^2}{\varepsilon_{\max}^2} b(t) \right\} dt. \quad (2.4.21)$$

Функции $a(t)$ и $b(t)$, входящие в (2.4.21), выглядят так:

$$\begin{aligned} a(t) &= t \operatorname{Si}(t) + \cos t - 1, \\ b(t) &= t - \sin t + t [\operatorname{Ci}(t) - \ln t - \gamma]. \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

Графики функций $a(t)$ и $b(t)$ представлены на рис. 2.4.1.

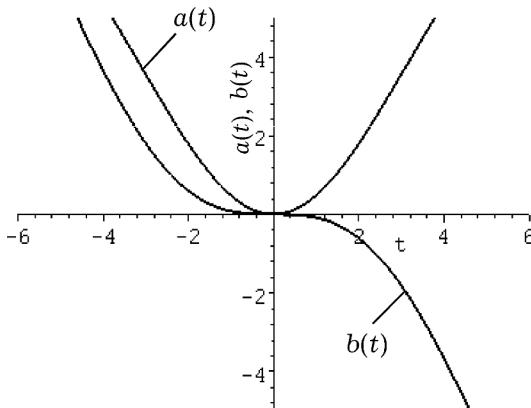


Рис. 2.4.1. Графики функций $a(t)$ и $b(t)$

Выражение (2.4.22) определяет энергетический спектр быстрых нерелятивистских частиц в области энергий

$$\varepsilon_{\text{ат}} \ll T_0 - T \ll T_0. \quad (2.4.23)$$

Впервые распределение (2.4.21) получил П.В. Вавилов* как обобщение известного результата Л.Д. Ландау (1944г.) на случай заряженных частиц, более тяжелых, чем электроны. Распределение Ландау для быстрых электронов следует из (2.4.21), если положить в нем $\varepsilon_{\max} = T_0$.

В области глубин (2.4.2), когда $Z\varepsilon_0^2 \gg \varepsilon_{\max}^2$, довольно сложное выражение (2.4.21) существенно упрощается. На таких глубинах основной вклад в интеграл в (2.4.21) определяется областью малых значений t ($t \ll 1$), когда не проявляется сильное экспоненциаль-

* Вавилов П.В. // ЖЭТФ. 1957. Т.32. С. 920–923.

ное затухание подынтегрального выражения. При $t \ll 1$ функции $a(t)$ и $b(t)$ можно разложить в ряд, ограничившись первыми членами ряда

$$a(t) \approx t^2/2, \quad b(t) \approx -t^3/12. \quad (2.4.24)$$

При этом основной вклад в интеграле (2.4.21) будет определяться условием

$$z \frac{\bar{\varepsilon}_0^2}{\varepsilon_{\max}^2} t_{\text{эфф}}^2 \leq 1, \quad \text{т.е.} \quad 0 \leq t_{\text{эфф}} \leq \frac{\varepsilon_{\max}}{\sqrt{z\bar{\varepsilon}_0^2}} \ll 1. \quad (2.4.25)$$

В этой области глубин второе слагаемое в аргументе косинуса оказывается малым:

$$z \frac{\bar{\varepsilon}_0^2}{\varepsilon_{\max}^2} \frac{t_{\text{эфф}}^3}{12} \leq \frac{t_{\text{эфф}}}{12} \ll 1. \quad (2.4.26)$$

Поэтому этим слагаемым можно пренебречь. Тогда общее выражение (2.4.21) принимает вид

$$N(z; T) = \frac{N_0}{\pi} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{z\bar{\varepsilon}_0^2}{2}\omega^2\right) \cos[(T_0 - T - z\bar{\varepsilon}_0)\omega] d\omega. \quad (2.4.27)$$

В (2.4.27) $\omega = t / \varepsilon_{\max}$. Используя соотношение (2.3.16), после интегрирования получаем

$$N(z; T) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi z\bar{\varepsilon}_0^2}} \exp\left(-\frac{(T_0 - T - z\bar{\varepsilon}_0)^2}{2z\bar{\varepsilon}_0^2}\right). \quad (2.4.28)$$

Выражение (2.4.28) в точности совпадает с формулой (2.3.9) для энергетического спектра частиц в диффузионном приближении. Таким образом, приходим к очень важному выводу: когда разброс частиц по энергиям (дисперсия распределения (2.4.28)) становится больше максимальной энергии, теряемой частицей в одном столкновении $\sqrt{z\bar{\varepsilon}_0^2} \gg \varepsilon_{\max}$, т.е. в области глубин (2.4.2), энергетический спектр частиц становится гауссовым.

При получении выражения (2.4.21) для энергетического спектра частиц использовалась модель свободных электронов для вычисления интегрального слагаемого в формуле (2.4.17). Очевидно, что с уменьшением энергии частиц, по мере того как их скорость приближается к характерному значению скорости атомных электронов, точность такой процедуры постепенно падает. При этом с уменьшением скорости частицы модель свободных электронов сначала становится неприменимой для описания столкновения с электронами K -оболочки атома, затем L -оболочки и т.д. Таким образом, при нарушении неравенства $\varepsilon_{\max} \gg \varepsilon_{K,L}$ ($\varepsilon_{K,L}$ – энергия связи электронов на K -, L -... оболочках) для вычисления интеграла (2.4.17) необходимо использовать результаты более точных квантово-механических расчетов функции $W_{\text{нейтр}}(T_0 | \varepsilon)$ (например, в модели водородоподобных волновых функций). Расчеты энергетических спектров частиц с последовательным учетом связи атомных электронов на K -, L -... оболочках требуют достаточно трудоемких численных вычислений.. Однако информация о влиянии оболочечных эффектов на флуктуации энергии быстрых частиц в тонких слоях важна только в тех задачах, где требования к точности определения энергетического спектра достаточно высоки, например в расчетах спектрометров тяжелых заряженных частиц.

В заключение этого раздела запишем выражение (2.4.21) в терминах приведенной глубины $\xi = z / R_0$ и относительной энергии $u = T / T_0$. Учитывая, что как обычно $N(\xi; T) dT = N(\xi; u) du$, т.е. $N(\xi; u) = T_0 N(\xi; T = u T_0)$, получим

$$N(\xi; u) = \frac{N_0}{\pi (\varepsilon_{\max} / T_0)} \int_0^{\infty} \exp \left\{ -\xi \frac{R_0 \bar{\varepsilon}_0^2}{\varepsilon_{\max}^2} a(t) \right\} \times \\ \times \cos \left\{ \frac{1 - u - \xi (R_0 \bar{\varepsilon}_0 / T_0) t - \xi \frac{R_0 \bar{\varepsilon}_0^2}{\varepsilon_{\max}^2} b(t)}{(\varepsilon_{\max} / T_0)} \right\} dt. \quad (2.4.29)$$

Для нерелятивистских частиц $\varepsilon_{\max} / T_0 = 4m_e / m$, $R_0 \bar{\varepsilon}_0 = T_0 / 2$, $\bar{\varepsilon}_0^2 R_0 = T_0^2 / 4v$. Поэтому выражение (2.4.29) принимает вид

$$N(\xi; u) = \frac{N_0}{\pi k} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{\xi}{4v} \frac{1}{k^2} a(t) \right\} \times \times \cos \left\{ \frac{1-u-\xi/2}{k} t - \frac{\xi}{4v} \frac{1}{k^2} b(t) \right\} dt. \quad (2.4.30)$$

Здесь $k = 4m_e / m$. Таким образом, распределение Вавилова, в отличие от гауссова распределения (2.3.36), зависит от двух параметров – флуктуационного параметра v и отношения масс m_e / m . Поскольку $v = (m / 4m_e)L_{\text{ион}}$, то выражение (2.4.30) можно записать в несколько ином виде:

$$N(\xi; u) = \frac{N_0}{\pi k} \int_0^\infty \exp \left\{ -\frac{\xi}{\beta} a(t) \right\} \times \times \cos \left\{ \frac{1-u-\xi/2}{k} t - \frac{\xi}{\beta} b(t) \right\} dt. \quad (2.4.31)$$

Здесь $\beta = 4kL_{\text{ион}}$. Таким образом, энергетический спектр Вавилова, записанный в форме (2.4.31), зависит от двух параметров: отношения масс m_e / m и значения ионизационного логарифма $L_{\text{ион}}$.

В области не слишком малых глубин $\xi / \beta \gg 1$, т.е. при $\xi \gg 16(m_e / m)L_{\text{ион}}$, (что совпадает с условием (2.3.25) ($K \approx 1$)), в выражении (2.4.30) можно положить $a(t) \approx t^2/2$, а слагаемым с $b(t)$ пренебречь. После интегрирования получим

$$N(\xi; u) = N_0 \sqrt{\frac{2v}{\pi\xi}} \exp \left\{ -2v \frac{[1-u-\xi/2]^2}{\xi} \right\}. \quad (2.4.32)$$

Это в точности совпадает с полученным ранее гауссовым распределением (2.3.35).

На рис. 2.4.2 представлен энергетический спектр мюонов ($k_\mu = 4m_e / m_\mu \approx 0,02$) с начальной энергией $T_0 = 20$ МэВ ($v \approx 410$, $R_0 \approx 1,4$ см) в Al на приведенной глубине $\xi = 0,2$, рассчитанный по формуле (2.4.30) (кривая 1 – распределение Вавилова). На том же рисунке представлен энергетический спектр гауссова вида, рассчитанный по формуле (2.4.32) (кривая 2).

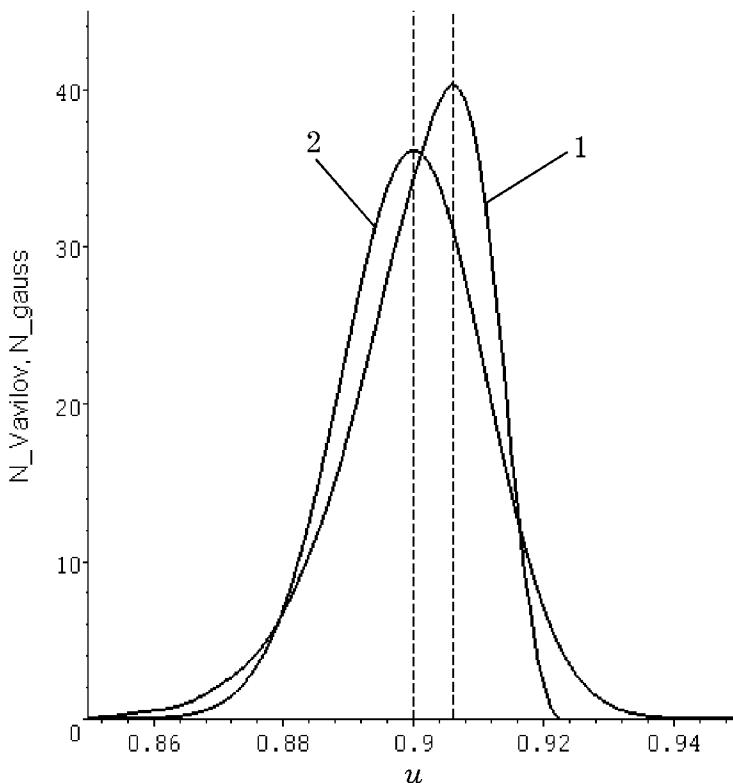


Рис. 2.4.2. Энергетические спектры мюонов с энергией 20 МэВ в алюминии на глубине $\xi = 0,2$.

Кривая 1 – распределение Вавилова (2.4.30);
кривая 2 – гауссово распределение (2.4.32)

Из рисунка видно, что, что кривые 1 и 2 сильно отличаются. Максимумы распределений не совпадают. Максимум гауссова распределения достигается при $u_{\max}^{(G)} = 1 - \xi/2 = 0,9$. Максимуму распределения Вавилова соответствует значение $u_{\max}^{(V)} \approx 0,906$. Значительно отличаются также и значения в максимумах распределений. Кроме того, в отличие от симметричного гауссова распределения, распределение Вавилова *существенно асимметрично* – оно более вытянуто в область энергий $u < u_{\max}^{(V)}$ и значительно круче спадает в области энергий $u > u_{\max}^{(V)}$. (Аналогичные черты имеет распределение Ландау для быстрых электронов).

2.5. РАСПРОСТРАНЕНИЕ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ В ТОЛСТЫХ СЛОЯХ ВЕЩЕСТВА

Для вычисления энергетического спектра быстрых тяжелых частиц на большой глубине, когда потери энергии становятся сравнимыми с энергией частиц $T_0 - T \sim T$, уже нельзя использовать приближенное уравнение диффузии (2.3.3) с постоянными коэффициентами $\bar{\varepsilon}(T) \approx \bar{\varepsilon}_0$ и $\bar{\varepsilon}^2(T) \approx \bar{\varepsilon}_0^2$. Необходимо решать уравнение (2.2.3) с учётом зависимости величин $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ от энергии:

$$\frac{\partial N(z; T)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial T} \{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \bar{\varepsilon}^2(T) \frac{\partial}{\partial T} N(z; T) \right\}. \quad (2.5.1)$$

При облучении поверхности *мононаправленным*, моноэнергетическим потоком частиц с энергией T_0 граничное условие имеет обычный вид

$$N(z = 0; T) = N_0 \delta(T_0 - T). \quad (2.5.2)$$

Прежде чем рассмотреть приближённый метод решения уравнения переноса (2.5.1) при *произвольной* зависимости $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ от

энергии, полезно исследовать это уравнение на одном точно решаемом примере^{1,2}.

Оказывается, что можно получить *точное аналитическое решение* уравнения переноса (2.5.1), если пренебречь зависимостью от энергии ионизационного логарифма в выражении (1.3.11) для $\bar{\varepsilon}(T)$ и в коэффициенте для поправки на эффект связи атомных электронов в (1.3.20) для $\bar{\varepsilon}^2(T)$, полагая $L_{\text{ион}}(T) \approx L_{\text{ион}}(T_0)$, $K(T) \approx K(T_0)$. Не умаляя общности будем в дальнейшем считать, что $K(T_0) = 1$. При таких предположениях тормозная способность частиц будет обратно пропорциональна их энергии, а средний квадрат энергии теряемый частицами на единице пути, вообще не будет зависеть от их энергии:

$$\bar{\varepsilon}(T) = \bar{\varepsilon}_0 \frac{T_0}{T}, \quad \bar{\varepsilon}^2(T) = \bar{\varepsilon}_0^2 = \text{const}. \quad (2.5.3)$$

Здесь, в соответствии с (2.2.17)

$$\bar{\varepsilon}_0 = \bar{\varepsilon}(R = R_0) \approx \frac{T_0}{2R_0}, \quad \bar{\varepsilon}_0^2 \approx \frac{m_e}{m} \frac{1}{R_0} \frac{T_0^2}{L_{\text{ион}}(T_0)}. \quad (2.5.4)$$

В приближении (2.5.3) уравнение переноса (2.5.1) можно решить точно. Такое решение позволяет понять особенности энергетического спектра частиц в толстых слоях вещества, включая и область $z > R_0$, недоступную в модели непрерывного замедления. Кроме того, появляется возможность указать достаточно простой и точный метод вычисления энергетического спектра частиц в толстых слоях вещества при *произвольной зависимости* величин $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ от энергии частиц.

¹ Ремизович В.С. // ЖЭТФ. 1972, Т. 63. С. 1599–1608.

² Ремизович В.С. // Атомная энергия. 1974. Т.36. С. 394–395.

Вычисление энергетического спектра и полного потока частиц на произвольных глубинах

Для решения уравнения (2.5.1) удобно ввести безразмерные переменные – приведенную глубину ξ и относительную энергию u

$$\xi = \frac{z}{R_0}, \quad u = \frac{T}{T_0}. \quad (2.5.5)$$

Теперь формулы (2.5.3) можно записать в виде:

$$\bar{\varepsilon}(u) = \frac{\bar{\varepsilon}_0}{u}, \quad \bar{\varepsilon}_0^2 = \frac{T_0^2}{4R_0 v}. \quad (2.5.6)$$

Безразмерный флуктуационный параметр v определяется выражением (2.2.27)

$$v = \frac{(\bar{\varepsilon}_0)^2 R_0}{\bar{\varepsilon}_0^2} \approx \frac{1}{4} \frac{m}{m_e} L_{\text{ион}}(T_0). \quad (2.5.7)$$

Как отмечалось выше, параметр v определяет роль флуктуаций энергетических потерь частиц из-за статистического характера неупругих столкновений. Чем больше параметр v , тем меньше флуктуации и тем уже распределение частиц по энергиям. Приближению непрерывного замедления соответствует предельный переход $v \rightarrow \infty$. Для тяжелых частиц $m/m_e \gg 1$ значение $v \gg 1$. Для нерелятивистских протонов значение v составляет несколько тысяч, а для мезонов несколько сотен.

В переменных (2.5.5) уравнение переноса (2.5.1) и граничное условие (2.5.2) для функции $N(z; u)$, связанной с $N(z; T)$ обычным соотношением

$$N(z; T) dT = N(z; u) du,$$

т.е. $N(z; T) = N(\xi = z/R_0; u = T/T_0)/T_0$, (2.5.8)

будут выглядеть следующим образом:

$$\frac{\partial N(\xi; u)}{\partial \xi} = \frac{1}{2u} \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{N}{2u^2} + \frac{1}{8v} \frac{\partial^2 N}{\partial u^2}; \quad (2.5.9)$$

$$N(\xi = 0; u) = N_0 \delta(1 - u). \quad (2.5.10)$$

Решение уравнения (2.5.9) будем искать в виде

$$N(\xi; u) = N_0 \frac{F(\xi; u)}{u^{2v-1/2}}. \quad (2.5.11)$$

Подставляя (2.5.11) в (2.5.9), получаем уравнение для функции $F(\xi; u)$:

$$8v \frac{\partial F(\xi; u)}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 F}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\mu^2}{u^2} F(\xi; u),$$

где

$$\mu = 2v + 1/2, \quad (2.5.12)$$

$$F(\xi = 0; u) = \delta(1 - u). \quad (2.5.13)$$

Для нахождения решения уравнения (2.5.12) воспользуемся преобразованием Ханкеля по переменной u

$$F(\xi; u) = \int_0^\infty J_\mu(\omega u) F_\omega(\xi) \omega d\omega. \quad (2.5.14)$$

Учитывая уравнение для функций Бесселя

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{1}{u} \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\mu^2}{u^2} \right\} J_\mu(\omega u) = -\omega^2 J_\mu(\omega u),$$

для функции $F_\omega(\xi)$ получаем следующее уравнение:

$$8v \frac{\partial F_\omega(\xi)}{\partial \xi} = -\omega^2 F_\omega(\xi); \quad F_\omega(\xi = 0) = J_\mu(\omega). \quad (2.5.15)$$

При получении граничного условия для величины F_ω учтено известное представление для δ -функции

$$\frac{\delta(u - u')}{u'} = \int_0^\infty J_\mu(\omega u) J_\mu(\omega u') \omega d\omega. \quad (2.5.16)$$

В нашем случае $u' = 1$. Решение уравнения (2.5.15) находится элементарно

$$F_\omega(\xi) = J_\mu(\omega) \exp(-\omega^2/8v). \quad (2.5.17)$$

Подставляя (2.5.17) в (2.5.14), получаем

$$F(\xi; u) = \int_0^\infty J_\mu(u\omega) J_\mu(\omega) \exp(-\omega^2/8v) \omega d\omega. \quad (2.5.18)$$

Теперь, в соответствии с формулой (2.5.11) находим, то

$$N(\xi; u) = N_0 u^{-\mu+1} \int_0^\infty J_\mu(u\omega) J_\mu(\omega) \exp(-\omega^2/8v) \omega d\omega, \\ (\mu = 2v + 1/2). \quad (2.5.19)$$

Входящий в (2.5.19) интеграл является табличным [8, с. 732]:

$$\int_0^\infty J_\mu(\alpha\omega) J_\mu(\beta\omega) e^{-\rho^2\omega^2} \omega d\omega = \frac{1}{2\rho^2} \exp\left(-\frac{\alpha^2 + \beta^2}{4\rho^2}\right) I_\mu\left(\frac{\alpha\beta}{2\rho^2}\right), \\ (\alpha, \beta > 0). \quad (2.5.20)$$

Здесь $I_\mu(x)$ – модифицированная функция Бесселя (функция Бесселя мнимого аргумента).

В нашем случае $\alpha = u$, $\beta = 1$, $\rho^2 = \xi/8v$. Поэтому

$$N(\xi; u) = N_0 \frac{4v}{\xi} u^{-\mu+1} \exp\left(-2v \frac{1+u^2}{\xi}\right) I_\mu\left(4v \frac{u}{\xi}\right), \\ (\mu = 2v + 1/2). \quad (2.5.21)$$

Выражение (2.5.21) определяет энергетический спектр быстрых тяжелых нерелятивистских частиц в приближении (2.5.6) на любых приведенных глубинах $0 \leq \xi < \infty$ и во всем диапазоне относительных энергий $0 \leq u \leq 1$.

В обычных единицах распределение (2.5.21) с учетом соотношения (2.5.8) выглядит так:

$$N(z; T) = N_0 \frac{4v R_0}{T_0 z} \left(\frac{T_0}{T}\right)^{2v-1/2} \times \\ \times \exp\left\{-2v \frac{R_0}{z} \left(1 + \frac{T^2}{T_0^2}\right)\right\} I_{2v+1/2}\left(4v \frac{R_0}{z} \frac{T}{T_0}\right), \\ (0 \leq z < \infty), \quad (0 \leq T \leq T_0). \quad (2.5.22)$$

В области малых глубин потери энергии малы и поэтому $u_{\text{эфф}} = T / T_0 \sim 1$. Если аргумент функции $I_\mu(x)$ больше квадрата её индекса, то можно воспользоваться её асимптотическим выражением

$$I_\mu(x) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}}, \quad (x \gg \mu^2). \quad (2.5.23)$$

В рассматриваемом случае $\mu = 2\nu + 1/2$, $x = 4\nu u / \xi$. На малых глубинах $\xi \leq 1/\nu$ формула (2.5.21) будет выглядеть следующим образом:

$$N(\xi; u) \approx N_0 \sqrt{\frac{2\nu}{\pi\xi}} \exp \left\{ -\frac{2\nu}{\xi} \left[(u - 1)^2 + \xi \ln u \right] \right\}. \quad (2.5.24)$$

Так как $\nu/\xi \gg 1$, то (2.5.24) имеет резкий максимум при $2u = 1 + \sqrt{1 - 2\xi} \approx 1 - \xi/2$. Разлагая выражение в квадратных скобках формулы (2.5.24) в ряд по u в окрестности максимума и сохранив первые три члена этого разложения, будем иметь

$$N(\xi; u) \approx N_0 \sqrt{\frac{2\nu}{\pi\xi}} \exp \left\{ -2\nu \frac{[u - (1 - \xi/2)]^2}{\xi} \right\}, \quad (\xi \leq 1/\nu). \quad (2.5.25)$$

Это в точности совпадает с полученным ранее результатом (2.3.40) для энергетического спектра на малых глубинах, когда не учитывалась зависимость величин $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ от энергии частиц.

На рис. 2.5.1 представлены графики зависимости дифференциальной плотности потока излучения $N(\xi; u)$, рассчитанные по точной формуле (2.5.21) для нерелятивистских мюонов в алюминии с начальной энергией $T_0 = 20$ МэВ ($\nu \approx 410$) на глубинах $\xi = 0,9$, $\xi = 1,0$ и $\xi = 1,05$ при единичной плотности потока падающего излучения ($N_0 = 1$).

Видим, что с увеличением глубины дифференциальная плотность потока частиц убывает. При этом плотность излучения отлична от нуля как на глубине $\xi = 1$ (т.е. $z = R_0$), так и на глубине

$\xi = 1,05$ (т.е. $z > R_0$). Это принципиально отличает найденное решение (2.5.21) от энергетического спектра (2.1.43) в модели непрерывного замедления, когда на глубине $\xi = 1$ все частицы останавливаются, т.е. $N(\xi \geq 1; u) = 0$.

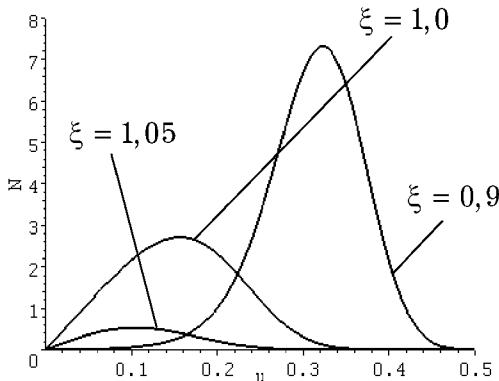


Рис. 2.5.1. Энергетические спектры мюонов с энергией 20 МэВ в алюминии на различных приведенных глубинах, рассчитанные по точной формуле (2.5.21)

Полученное выражение для энергетического спектра частиц (2.5.21) позволяет вычислить зависимость *полного потока* частиц $N(\xi)$ от глубины:

$$N(\xi) = \int_0^1 N(\xi; u) du \approx \int_0^\infty N(\xi; u) du. \quad (2.5.26)$$

В (2.5.26) учтено, что число частиц с энергией, равной начальной, т.е. $u = 1$, в глубине вещества ($z \gg l_{\text{нейтр}}$, $l_{\text{нейтр}}$ – длина свободного пробега при неупругих столкновениях) ничтожно мало, и верхний предел интегрирования по u можно заменить на бесконечность. После выполнения интегрирования (см. Приложение 3) получим следующее выражение для полного потока частиц на произвольной глубине $0 \leq \xi < \infty$:

$$N(\xi|v) = N_0 \left\{ 1 - \frac{\Gamma(\mu; 2v/\xi)}{\Gamma(\mu)} \right\}, \quad (\mu = 2v + 1/2). \quad (2.5.27)$$

$$\Gamma(\mu) = \int_0^{\infty} t^{\mu-1} \exp(-t) dt - \quad (2.5.28)$$

гамма-функция Эйлера,

$$\text{где } \Gamma(\mu; 2v/\xi) = \int_{2v/\xi}^{\infty} t^{\mu-1} \exp(-t) dt - \quad (2.5.29)$$

неполная гамма-функция Эйлера.

При $\xi \rightarrow 0$, когда $2v/\xi \rightarrow \infty$ неполная гамма-функция $\Gamma(\mu; 2v/\xi) \rightarrow 0$. Поэтому из формулы (2.5.27) следует, что на поверхности вещества $N(\xi = 0) = N_0$.

На рис. 2.5.2 представлен график зависимости полного потока $N(\xi)$, рассчитанный по точной формуле (2.5.27) для нерелятивистских мюонов в алюминии с начальной энергией $T_0 = 20$ МэВ ($v \approx 410$) при единичной плотности потока падающего излучения ($N_0 = 1$) в области глубин $0,9 \leq \xi \leq 1,1$.

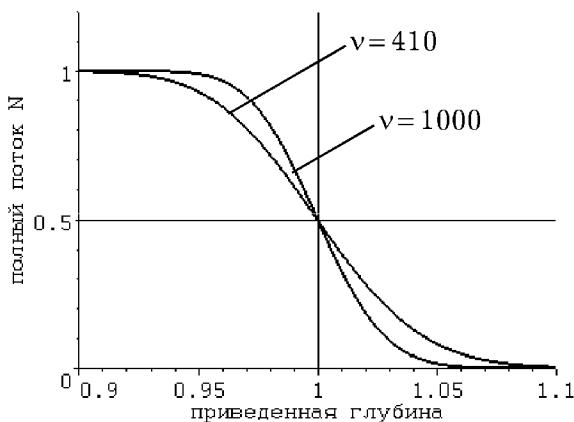


Рис. 2.5.2 Зависимость полного потока мюонов с энергией 20 МэВ в алюминии ($v = 410$)

Из рис. 2.5.2 отчетливо видно, что поток частиц практически постоянен до глубин $\xi \approx 0,9$ и равен потоку падающего излучения. В области глубин $\xi \sim 1$ поток монотонно уменьшается с увеличением приведенной глубины. На глубине $\xi = 1$ поток уменьшается в два раза: $N(\xi = 1) / N_0 = 0,5$. Из рисунка также видно, что поток частиц существенно отличен от нуля в области глубин $\xi > 1$, недоступной в модели непрерывного замедления, когда не учитывается вероятностный характер процесса неупругих столкновений. Для сравнения на рисунке изображен полный поток частиц, для большего значения флюктуационного параметра $v = 1000$. Как и следовало ожидать, уменьшение потока в этом случае начинается на больших глубинах, так как увеличение параметра v означает уменьшение роли вероятностного характера неупругих столкновений. Однако интегральный поток частиц на глубине $\xi = 1$ всё равно в два раза меньше потока падающих частиц. Другими словами, поток частиц на глубине $\xi = 1$ практически не зависит от параметра v .

Полученные выше формулы являются точными в том смысле, что они определяются точным решением уравнения (2.5.9) с граничным условием (2.5.10). Однако практическое использование выражений (2.5.21), (2.5.27) для дифференциальной плотности потока излучения $N(\xi; u)$ и для полного потока $N(\xi)$ осложняется тем обстоятельством, что флюктуационный параметр v очень велик – несколько сотен для мюонов и несколько тысяч для протонов. Но именно это обстоятельство позволяет с высокой точностью заменить выражения (2.5.21), (2.5.27) для $N(\xi; u)$ и $N(\xi)$ значительно более простыми формулами, которые легко поддаются анализу и удобны для проведения конкретных расчетов.

Асимптотическое выражение для полного потока частиц $N(\xi)$ при больших значениях флюктуационного параметра

Используя то обстоятельство, что $v \gg 1$, точную формулу (2.5.27) для полного потока частиц $N(\xi)$ можно заменить более

простым выражением, справедливым во всей области глубин, вплоть до остановки частиц в веществе. Как показано в (П.III), при $v \gg 1$ выражение для полного интегрального потока определяется простой приближенной формулой

$$N(\xi) \approx \frac{N_0}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\sqrt{v} \frac{1 - \xi}{\xi} \right) \right\}. \quad (2.5.30)$$

Здесь $\operatorname{erf}(x)$ – нормированный интеграл ошибок (2.1.52). Поскольку при $\xi \rightarrow 0$ $\operatorname{erf} \left(\sqrt{v} (1 - \xi) / \xi \right) \rightarrow 1$, то на поверхности вещества $N(\xi = 0) = N_0$. При $\xi = 1$ $\operatorname{erf} \left(\sqrt{v} (1 - \xi) / \xi \right) = 0$ и полный поток равен половине падающего потока

$$N(\xi = 1) = N_0 / 2. \quad (2.5.31)$$

Это совпадает с результатом численных расчетов по точной формуле (2.5.27) (см. рис. 5.2.2.).

На рис. 2.5.3 представлены для сравнения графики зависимости полного интегрального потока частиц $N(\xi)$ в области глубин $0,8 \leq \xi \leq 1,2$, рассчитанные по точной формуле (2.5.27) (кривая 1)

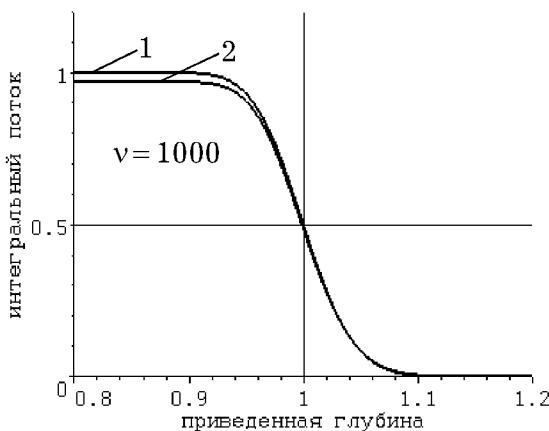


Рис. 2.5.3. Графики зависимости $N(\xi)$: 1 – расчет по точной формуле (2.5.27); 2 – расчет по приближенной формуле (2.5.30)

и по приближенной формуле (2.5.30) (кривая 2) при $v = 100$. Видим, что кривая 2 идет чуть ниже кривой 1. Но это отличие вызвано искусственно умножением приближенного выражения (2.5.30) на дополнительный численный множитель 0,97. В противном случае кривые сливаются и неразличимы на рисунке. Это означает, что даже при сравнительно небольшом значении параметра v приближенная формула (2.5.31) практически не отличима от точной формулы (2.5.28). С увеличением v отличие будет ещё меньше. Поэтому для расчетов интегрального потока целесообразно использовать простую формулу (2.5.30).

Теперь выясним, как сильно отличается поток частиц в области глубин не очень близких к единице $1 - \xi \gg 1/\sqrt{v}$, рассчитанный в диффузионном приближении по формуле (2.5.30), от потока частиц в приближении непрерывного замедления. При $1 - \xi \gg 1/\sqrt{v}$ аргумент интеграла ошибок в формуле (2.5.30) много больше единицы. Поэтому, используя выражение (2.1.53) для асимптотики интеграла ошибок, получаем

$$N(\xi) \approx N_0 \left\{ 1 - \frac{\xi}{2\sqrt{\pi v}(1-\xi)} \exp \left[-v \left(\frac{1-\xi}{\xi} \right)^2 \right] \right\}, \\ (1 - \xi \gg 1/\sqrt{v}). \quad (2.5.32)$$

Из (2.5.32) видим, что в рассматриваемой области глубин различие между $N(\xi)$ и N_0 экспоненциально мало и полностью исчезает на поверхности вещества при $\xi = 0$. Таким образом, в широкой области глубин

$$1 - \xi \gg 1/\sqrt{v}, \quad (2.5.33)$$

полный поток частиц практически равен падающему потоку N_0 . Быстрое убывание потока происходит на сравнительно небольшом интервале глубин $|1 - \xi| \leq 1/\sqrt{v}$. Но уменьшение потока означает, что некоторые частицы полностью теряют свою энергию и останавливаются в веществе. Поэтому условие

$$|1 - \xi| \leq 1/\sqrt{v}, \text{ т.е. } 1 - 1/\sqrt{v} \leq \xi \leq 1 + 1/\sqrt{v}, \quad (2.5.34)$$

определяет область глубин, где расположены остановившиеся частицы.

На рис. 2.5.4 представлены графики зависимости интегрального потока μ -мезонов и протонов с энергией 50 МэВ от приведенной глубины ξ в железе ($v_\mu = 425$, $v_p = 2700$). Пунктиром изображена зависимость потока частиц $N(\xi)$ в модели непрерывного замедления.

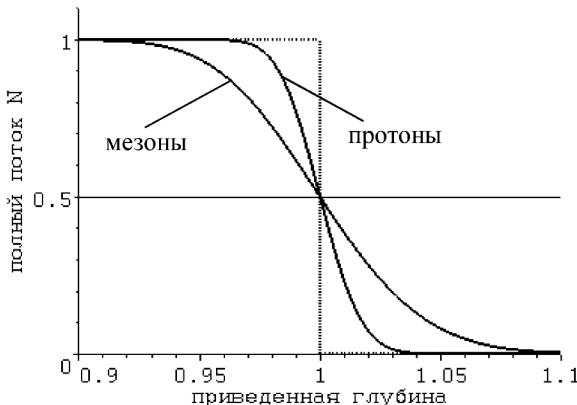


Рис. 2.5.4. Графики зависимости интегрального потока μ -мезонов и протонов с энергией 50 МэВ в железе

Поскольку флуктуационный параметр для протонов больше чем для мезонов, то интегральный поток протонов уменьшается от значения N_0 на границе вещества до нуля в более узкой области глубин (2.5.34) в окрестности значения $\xi = 1$.

Асимптотическое выражение для дифференциальной плотности потока излучения $N(\xi; u)$ при больших значениях флуктуационного параметра

Используя то обстоятельство, что $v \gg 1$, точную формулу (2.5.21) можно заменить более простым выражением, справедли-

вым и в области глубин $\xi > 1$. Для этого воспользуемся асимптотическим представлением модифицированной функции Бесселя при большом значении порядка* (формула Мейселя)

$$I_\mu(\mu x) \approx \frac{x^\mu \exp\left(\mu\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{2\pi\mu} (1+x^2)^{1/4} \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^\mu}, \quad (\mu \gg 1). \quad (2.5.35)$$

Полагая $\mu = 2v + 1/2$, $x = 2u/\xi$, после соответствующих преобразований (см. П. IV) находим

$$N(\xi; u) \approx N_0 \sqrt{\frac{2v}{\pi\xi}} \sqrt{\frac{y-1}{y}} \exp\{-2vB(\xi; y)\}. \quad (2.5.36)$$

Здесь

$$B(\xi; y) = \frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{4}(y^2 - 1) - y + \ln\left\{\frac{\xi}{2}(1+y)\right\}, \quad (2.5.37)$$

$$y = \sqrt{1 + 4 \frac{u^2}{\xi^2}}. \quad (2.5.38)$$

На рис. 2.5.5 представлены графики зависимости величины $N(\xi; u)/N_0$, рассчитанные по точной формуле (2.5.21) (жирные кривые) и по приближенной формуле (2.5.36) (тонкие кривые) на глубинах $\xi = 0,9$ и $\xi = 1$ для значения параметра $v = 100$.

Видим, что тонкие кривые расположены чуть ниже жирных кривых. Но это отличие вызвано искусственно, умножением приближенного выражения (2.5.36) на дополнительный численный множитель 0,95, так как иначе кривые сливаются и неразличимы на рисунке. С увеличением v отличие становится ещё меньше. Это позволяет рассчитывать энергетические спектры частиц с высокой точностью по простой формуле (2.5.36).

* Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовича М., Стиган И.: Пер. с англ. М.: Наука. 1979. С. 199.

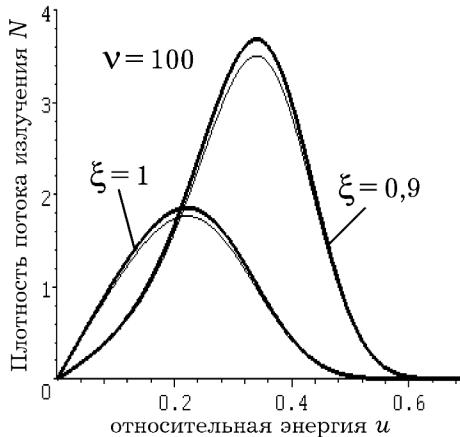


Рис. 2.5.5. Графики зависимости $N(\xi; u)$, рассчитанные формуле (2.5.21) (жирные кривые) и по формуле (2.5.36) (тонкие кривые)

Полученное выражение для энергетического спектра частиц (2.5.36) позволяет легко определить значение *наиболее вероятной* относительной энергии $u_{\text{н.в.}}(\xi | \nu)$ на приведенной глубине ξ из уравнения

$$\frac{dN(\xi; u)}{du} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{dN(\xi; y)}{dy} = 0. \quad (2.5.39)$$

Выполняя дифференцирование формулы (2.5.36), получаем следующее уравнение:

$$\frac{dB(\xi; y)}{dy} - \frac{1}{4\nu} \frac{1}{y(y-1)} = 0,$$

где
$$\frac{dB(\xi; y)}{dy} = y \left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{1+y} \right). \quad (2.5.40)$$

Поскольку $\nu \gg 1$, то значение $u_{\text{н.в.}}$ в *первом приближении* определяется из условия минимума функции $B(\xi; u)$, т.е. может быть найдено из уравнения $dB(\xi; y)/dy = 0$:

$$y \left(\frac{\xi}{2} - \frac{1}{1+y} \right) = 0. \quad (2.5.41)$$

Уравнение (2.5.41) не содержит параметра v , т.е. не учитывает вероятностный характер процесса неупругих столкновений. Следовательно, заранее можно ожидать, что значение $U_{H,B}(\xi)$, полученное из приближенного уравнения (2.5.41), будет определяться формулой (2.1.41) для энергии нерелятивистских частиц на глубине ξ в модели *непрерывного замедления*. Это предположение оказывается действительно правильным.

Обозначим решение уравнения (2.5.41) $y_0(\xi)$. Поскольку в соответствии с (2.5.38) $y \geq 1$, из (2.5.41) находим, что

$$y_0(\xi) = 2/\xi - 1. \quad (2.5.42)$$

Подставляя это в (2.5.38), получаем, что

$$U_{H,B}(\xi) \approx \sqrt{1-\xi}. \quad (2.5.43)$$

Как и предполагалось, значение $U_{H,B}(\xi)$ в точности совпадает с результатом (2.1.41) в модели непрерывного замедления.

Поскольку уравнение (2.5.41) следует из точного уравнения при $v \rightarrow \infty$, когда совершенно не учитывается вероятностный характер неупругих столкновений, то выражение (2.5.42) можно рассматривать как решение уравнения (2.5.40) в “нулевом” приближении по малому параметру $1/v$. Поэтому найденное значение для наиболее вероятной энергии (2.5.43) не может быть использовано на глубинах ξ близких к единице и, тем более, в области глубин $\xi > 1$. Действительно, как это видно из (2.5.42), при $\xi \rightarrow 1$ значение $y_0 \rightarrow 1$. Но при этом нельзя пренебрегать вторым слагаемым в точном уравнении (2.5.40), так как при $y \rightarrow 1$ значение $(1/(1-y)) \rightarrow \infty$ и это слагаемое становится аномально большим.

Чтобы получить выражение для $U_{H,B}(\xi|v)$, справедливое на любых глубинах, можно поступить следующим образом. Из соотношения (2.5.43) следует, что $\xi/2 = 1/(y_0 + 1)$. Поэтому производную dB/dy можно записать так:

$$\frac{dB}{dy} = y \frac{y - y_0}{(1 + y_0)(1 + y)}. \quad (2.5.44)$$

С учетом этого, перепишем точное уравнение (2.5.40) в несколько ином эквивалентном виде

$$\frac{1}{4v} \frac{1}{y-1} = \frac{y^2}{1+y} \frac{y-y_0}{1+y_0}. \quad (2.5.45)$$

Чтобы получить приближенное решение уравнения (2.5.45), положим в этом уравнении $y^2/(1+y) \approx y_0^2/(1+y_0)$. Тогда получим

$$\frac{1}{y-1} \approx 4v \left(\frac{y_0}{1+y_0} \right)^2 (y - y_0). \quad (2.5.46)$$

Уравнение (2.5.46) сводится к квадратному и легко решается. В результате находим, что

$$y \approx \frac{(y_0 + 1) + \sqrt{(y_0 - 1)^2 + \frac{1}{v} \left(\frac{y_0 + 1}{y_0} \right)^2}}{2}. \quad (2.5.47)$$

Учитывая, что

$$y_0 + 1 = 2/\xi, \quad y_0 - 1 = 2(1 - \xi)/\xi, \quad (y_0 + 1)/y_0 = 2/(2 - \xi),$$

запишем решение (2.5.47) в виде

$$y \approx \frac{1 + \sqrt{(1 - \xi)^2 + \frac{1}{v} \left(\frac{\xi}{2 - \xi} \right)^2}}{\xi}. \quad (2.5.48)$$

Как было показано выше, вплоть до глубин $\xi \sim 1 - 1/\sqrt{v}$ поток частиц практически равен N_0 , а начиная с глубин $\xi \sim 1 + 1/\sqrt{v}$, практически равен нулю. Поэтому второе слагаемое под радикалом формулы (2.5.48) существенно влияет на значение величины $U_{H,B}$ только в области глубин близких к единице, когда $1 - 1/\sqrt{v} \leq \xi \leq 1 + 1/\sqrt{v}$. Поэтому в уравнении (2.5.48) можно

положить $\xi / (2 - \xi) \approx 1$. Тогда, подставляя найденное значение y в (2.5.38), получаем уравнение для определения $u_{H.B}(\xi | v)$:

$$\sqrt{\xi^2 + 4u^2} = 1 + \sqrt{(1 - \xi)^2 + \frac{1}{v}}. \quad (2.5.49)$$

Из уравнения (2.5.48) находим следующее выражение для наиболее вероятной энергии частиц

$$u_{H.B}(\xi | v) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 - \xi) + \sqrt{(1 - \xi)^2 + \frac{1}{v}}}. \quad (2.5.50)$$

(В (2.5.50) опущено малое слагаемое $\sim 1/v$ под знаком первого радикала). Полученное окончательное выражение для $u_{H.B}(\xi | v)$ справедливо во всей области глубин, где поток частиц реально отличен от нуля.

Рассмотрим некоторые частные случаи. Если $\xi = 0$, то, как и должно быть, $u_{H.B}(\xi = 0 | v) = 1$. При $v \rightarrow \infty$, получаем прежний результат модели непрерывного замедления

$$u_{H.B}(\xi | v \rightarrow \infty) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \xi + |1 - \xi|} = \begin{cases} \sqrt{1 - \xi}, & \xi < 1; \\ 0, & \xi > 1. \end{cases} \quad (2.5.51)$$

На глубине $\xi = 1$ из формулы (2.5.50) находим, что

$$u_{H.B}(\xi = 1 | v) \approx (1/4v)^{1/4}. \quad (2.5.52)$$

Для иллюстрации точности полученной формулы (2.5.50) рассмотрим два случая, когда $v = 250$ и $v = 2500$. При $\xi = 1$ из (2.5.52) следует, что $u_{H.B}(v = 250) \approx 0,178$ и $u_{H.B}(v = 2500) \approx 0,1$ соответственно. На рис.2.5.6 представлены графики плотности потока излучения $N(u | v = 250)$ и $N(u | v = 2500)$ на глубине $\xi = 1$ ($N_0 = 1$). Видим, что в первом случае распределение действительно имеет максимум при $u_{H.B} \approx 0,18$, а во втором случае при $u_{H.B} \approx 0,1$.

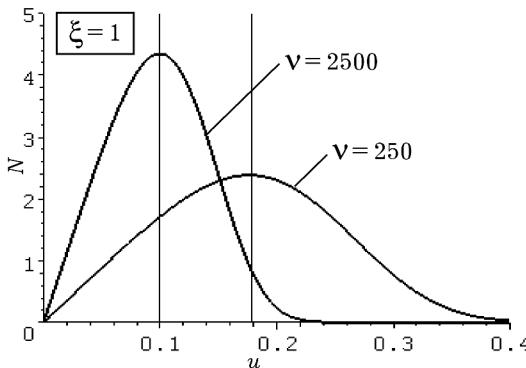


Рис. 2.5.6. Энергетический спектр частиц на глубине $\xi = 1$ для двух значений параметра ν . Вертикальные линии соответствуют наиболее вероятным значениям энергии, рассчитанным по формуле (2.5.50)

На рис. 2.5.7 представлены графики зависимости наиболее вероятной энергии $u_{\text{н.в.}}(\xi | \nu)$ от приведенной глубины ξ при различных значениях параметра ν : $\nu = 100, 500, 2000$ в области глубин $0 \leq \xi \leq 1,2$. Жирная кривая — значение наиболее вероятной энергии в модели непрерывного замедления ($\nu = \infty$):

$$u_{\text{н.в.}} = \sqrt{1 - \xi}. \quad (2.5.53)$$

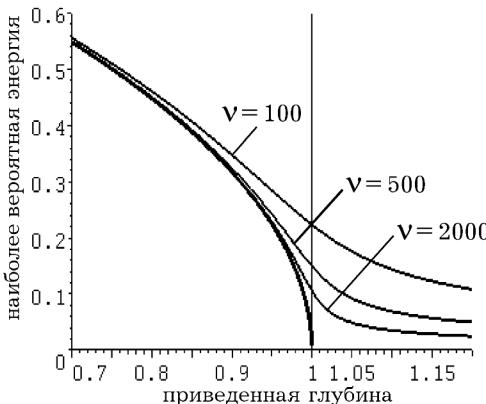


Рис. 2.5.7. Зависимость наиболее вероятной энергии от приведенной глубины при различных значениях ν

Видно, что в области глубин $\xi \sim 1$ при вычислении наиболее вероятной энергии *принципиально необходимо* учитывать вероятностный характер неупругих столкновений частиц с атомами среды.

Разлагая величину $B(\xi; u)$ в ряд в окрестности $u_{\text{H.B.}}(\xi)$, получим выражение для энергетического спектра в области его максимума в широкой области глубин $1 - \xi \gg 1/\sqrt{v}$, где *ещё не происходит остановки* частиц и полный поток $N(\xi) \approx N_0$

$$N(\xi; u) \approx \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma^2(\xi)}} \exp \left\{ -\frac{(u - \sqrt{1-\xi})^2}{2\sigma^2(\xi)} \right\}, \quad 1 - \xi \gg 1/\sqrt{v}. \quad (2.5.54)$$

Таким образом, энергетический спектр частиц имеет гауссов вид с дисперсией

$$\sigma_u^2(\xi) = \frac{\xi(2-\xi)}{8v(1-\xi)} = \frac{1-(1-\xi)^2}{8v(1-\xi)}. \quad (2.5.55)$$

В *тонких слоях* вещества ($\xi \leq 1/v$, $\sqrt{1-\xi} \approx 1 - \xi/2$) из (2.5.55) следует, что $\sigma_u^2(\xi) \approx \xi/4v$, т.е. приходим к полученному ранее результату (2.3.40).

В обычных единицах распределение (2.5.54) выглядит так:

$$N(z; T) \approx \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2(z)}} \exp \left\{ -\frac{[T - T_{\text{H.B.}}(z)]^2}{2\sigma_T^2(z)} \right\},$$

$$R_0 - z \gg R_0 / \sqrt{v}. \quad (2.5.56)$$

$$T_{\text{H.B.}} = T_0 \sqrt{1 - z/R_0};$$

$$\sigma_T^2 = T_0^2 \frac{z(2R_0 - z)}{8vR_0(R_0 - z)} = T_0^2 \frac{1 - (z/R_0)^2}{8v(1 - z/R_0)}. \quad (2.5.57)$$

На рис.2.5.8 приведены энергетические спектры протонов с начальной энергией $T_0 = 20$ МэВ в алюминии ($v \approx 2620$, $R_0 \approx 0,2$ см) .

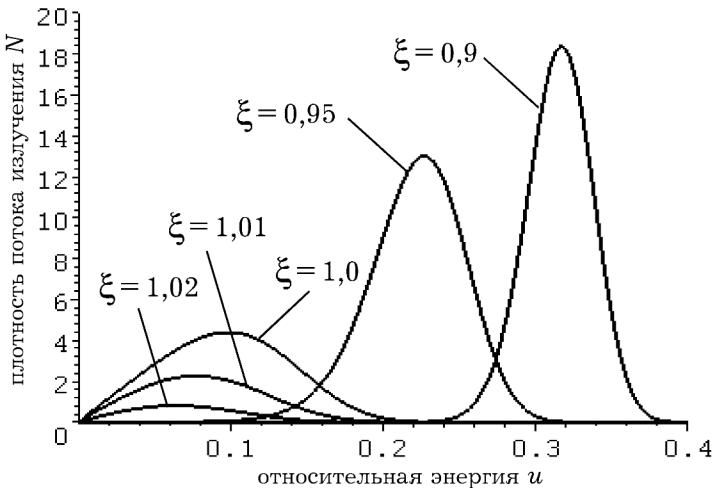


Рис. 2.5.8. Энергетические спектры протонов с начальной энергией 20 МэВ после прохождения слоев алюминия различной толщины

Вплоть до глубин $\xi ; 0,95$ кривые имеют гауссов вид (2.5.54). С увеличением глубины возникает асимметрия распределения, его максимум становится выражен не так резко. При этом площадь под кривыми уменьшается из-за ослабления полного потока вследствие остановки частиц.

Аналогичные кривые приведены на рис.2.5.9 для энергетических спектров мюонов в алюминии с той же начальной энергией $T_0 = 20$ МэВ ($v \approx 410$, $R_0 \approx 1,4$ см). В этом случае, отмеченные выше особенности энергетического спектра, начинают проявляться на меньшей глубине и область пригодности гауссовой формулы (2.5.54) ограничена глубиной $\xi \leq 0,9$. Это находится в соответствии с условием её применимости: $1 - \xi \gg 1/\sqrt{v}$.

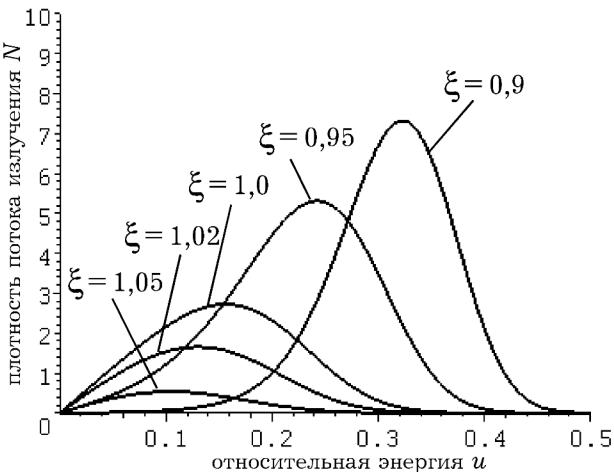


Рис.2.5.9. Энергетические спектры мюонов с начальной энергией 20 МэВ после прохождения слоев алюминия различной толщины

2.6. САМОСОГЛАСОВАННОЕ ГАУССОВО ПРИБЛИЖЕНИЕ

В предыдущем разделе на примере точно решаемой модели, когда тормозная способность среды считалась обратно пропорциональной энергии $\bar{\varepsilon}(T) \sim 1/T$, а средний квадрат энергии, теряемой частицами на единице пути $\bar{\varepsilon}^2(T) \approx \text{const}$, в рамках диффузационного приближения было получено выражение (2.5.21) для энергетического спектра $N(\xi; u|v)$ нерелятивистских тяжелых частиц и выражение (2.5.27) для интегрального потока частиц $N(\xi|v)$ на произвольных глубинах $0 \leq \xi < \infty$. Учитывая, что флуктуационный параметр велик ($v \gg 1$), из точных формул были получены простые асимптотические выражения (по параметру v) (2.5.30) и (2.5.36), позволяющие с высокой точностью рассчитывать величины $N(\xi|v)$ и $N(\xi; u|v)$. Было показано, что в широкой области глубин $1 - \xi \gg 1/\sqrt{v}$, где *ещё не происходит остановки* частиц, полный интегральный поток экспоненциально мало (2.5.32)

отличается от потока падающих частиц. В этой области глубин из точной формулы (2.5.21) следовала простая формула гауссова вида (2.5.54) для дифференциальной плотности потока излучения

$$N(\xi; u) \approx \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2(\xi)}} \exp\left\{-\frac{(u - \sqrt{1-\xi})^2}{2\sigma_u^2(\xi)}\right\}, \quad (1 - \xi \gg 1/\sqrt{\nu}), \quad (2.6.1)$$

$$\sigma_u^2(\xi) = \frac{\xi(2-\xi)}{8\nu(1-\xi)} \sim \frac{1}{\nu}. \quad (2.6.2)$$

Поскольку в этой области глубин полный поток $N(\xi) \approx N_0$, то величина

$$W(\xi; u) du = \frac{N(\xi; u)}{N_0} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2(\xi)}} \exp\left\{-\frac{(u - \sqrt{1-\xi})^2}{2\sigma_u^2(\xi)}\right\} du \quad (2.6.3)$$

есть вероятность обнаружить частицу в интервале относительных энергий $u \div u + du$ на глубине ξ . Наиболее вероятная $u_{\text{н.в.}}(\xi) = u(\xi)$ (и средняя) энергия частиц в интервале глубин $1 - \xi \gg 1/\sqrt{\nu}$ не зависит от параметра ν и определяется тем же выражением, что и в модели непрерывного замедления

$$u(\xi) = \bar{u}(\xi) \approx \sqrt{1 - \xi}. \quad (2.6.4)$$

Средний квадрат энергии и относительный разброс по энергиям на таких глубинах

$$\overline{u^2}(\xi) = \int_0^\infty u^2 W(\xi; u) du \approx \bar{u}^2 + \sigma_u^2(\xi) = (1 - \xi)^2 + \sigma_u^2(\xi); \quad (2.6.5)$$

$$\delta_u(\xi) = \frac{\sigma_u(\xi)}{\bar{u}(\xi)} = \frac{\sqrt{\xi(2-\xi)}}{2\sqrt{2\nu}(1-\xi)}, \quad (1 - \xi \gg 1/\sqrt{\nu}). \quad (2.6.6)$$

Как и должно быть, при $\xi = 0$ $\delta_u(\xi = 0) = 0$. Даже на “предельной” глубине $1 - \xi = 2/\sqrt{\nu}$, $\delta_u = \sqrt{2}/8 \approx 0.18 \ll 1$. Поскольку $\delta_u(\xi) \ll 1$, то из рассмотренной выше точно решаемой модели

следует, что энергетический спектр тяжелых частиц имеет резко выраженный максимум в широкой области глубин $1 - \xi \ll 1/\sqrt{v}$, в окрестности максимума распределения. При этом наиболее вероятное значение энергии частиц с высокой точностью определяется соответствующим результатом в приближении непрерывного замедления. В то же время величины $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ являются более плавными функциями энергии, чем само распределение $N(z; T)$. Это обстоятельство наталкивают на мысль, что в уравнении переноса можно заменить величины $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ на их значения в максимуме распределения. Однако эта процедура должна быть реализована таким образом, чтобы при $v \rightarrow \infty$ из полученного приближенного уравнения следовало *точное уравнение* в модели непрерывного замедления. Следовательно, необходимо использовать уравнение переноса для распределения частиц не по энергиям, а по остаточным пробегам (2.2.14):

$$\frac{\partial N(z; R)}{\partial z} = \frac{\partial N(z; R)}{\partial R} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial R} \left\{ \frac{\bar{\varepsilon}^2(R)}{\bar{\varepsilon}(R)} \frac{\partial}{\partial R} \left[\frac{N(z; R)}{\bar{\varepsilon}(R)} \right] \right\}.$$

В первое слагаемое в правой части этого уравнения, которое и определяет процесс систематического торможения частиц, вообще не входят величины $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$. Поэтому указанная выше замена величин $\bar{\varepsilon}(R)$ и $\bar{\varepsilon}^2(R)$ на их значения в максимуме распределения никак не меняет вид этого уравнения при $\bar{\varepsilon}^2 \rightarrow 0$. Это означает, что в предельном случае $v \rightarrow \infty$ мы возвращаемся к “точному” уравнению в приближении непрерывного замедления. Реализуя указанную процедуру, оказывается возможным получить затем аналитическое решение полученного приближенного уравнения переноса при *произвольной зависимости* величин $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ от энергии частиц. Поскольку при таком методе решения уравнения переноса распределение по пробегам имеет гауссов вид, то его условно можно назвать *самосогласованным гауссовым приближением*.

Решение уравнения переноса в самосогласованном гауссовом приближении. Распределение по пробегам.

Воспользуемся уравнением переноса в форме (2.2.25) для распределения частиц $N(\xi; r)$ по приведенному пробегу $r = R / R_0$, в которое явно входит флуктуационный параметр v , определяющий влияние флуктуаций потеря энергии при неупругих столкновениях на вид распределения $N(\xi; r)$:

$$\frac{\partial N(\xi; r | v)}{\partial \xi} = \frac{\partial N(\xi; r)}{\partial r} + \frac{1}{2v} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{\overline{\varepsilon^2}^*(r)}{\overline{\varepsilon}^*(r)} \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{N(\xi; r)}{\overline{\varepsilon}^*(r)} \right] \right\},$$

$$v = \frac{(\overline{\varepsilon}_0)^2 R_0}{\overline{\varepsilon}_0^2}. \quad (2.6.7)$$

При облучении поверхности *мононаправленным*, моноэнергетическим потоком частиц с энергией T_0 граничное условие имеет вид

$$N(\xi = 0; r) = N_0 \delta(1 - r). \quad (2.6.8)$$

$$r(u) = \frac{R(u)}{R_0} = \frac{T_0}{R_0} \int_0^u \frac{du'}{\overline{\varepsilon}(u')} - \quad (2.6.9)$$

приведенный пробег; где $u = T / T_0$ – относительная энергия частиц.

Величины $N(\xi; u)$ и $N(\xi; r)$ связаны обычным соотношением

$$N(\xi; r) dr = N(\xi; u) du,$$

т.е., $N(\xi; u) = N[\xi; r(u)] T_0 / R_0 \overline{\varepsilon}(u).$ (2.6.10)

Безразмерные величины $\overline{\varepsilon}^*(r)$ и $\overline{\varepsilon^2}^*(r)$ определяются соотношениями

$$\overline{\varepsilon}^*(r) = \overline{\varepsilon}(r) / \overline{\varepsilon}_0, \quad \overline{\varepsilon^2}^*(r) = \overline{\varepsilon^2}(r) / \overline{\varepsilon}_0^2. \quad (2.6.11)$$

В уравнении (2.6.7) от переменных (ξ, r) перейдем к новым переменным (ξ', τ)

$$\xi' = \xi, \quad \tau = 1 - r - \xi. \quad (2.6.12)$$

Поскольку

$$\partial I / \partial \xi = \partial I / \partial \xi' - \partial I / \partial \tau \quad \text{и} \quad \partial I / \partial r = -\partial I / \partial \tau,$$

то в новых переменных уравнение (2.6.7) и граничное условие (2.6.8) будут выглядеть так:

$$\frac{\partial N(\xi; \tau)}{\partial \xi} = \frac{1}{2v} \frac{\partial}{\partial \tau} \left\{ \frac{\overline{\varepsilon^2}^*(1 - \xi - \tau)}{\overline{\varepsilon}^*(1 - \xi - \tau)} \frac{\partial}{\partial \tau} \left[\frac{N(\xi; \tau)}{\overline{\varepsilon}^*(1 - \xi - \tau)} \right] \right\}, \quad (2.6.13)$$

$$N(\xi = 0; \tau) = N_0 \delta(\xi + \tau)|_{\xi=0} = N_0 \delta(\tau). \quad (2.6.14)$$

В модели непрерывного замедления, когда $\overline{\varepsilon^2} \rightarrow 0$, т.е. $v \rightarrow \infty$, решение уравнения (2.6.13) с граничным условием (2.6.14) имеет вид

$$N(\xi; \tau) = N_0 \delta(\tau), \quad (2.6.15)$$

т.е. отлично от нуля только при $\tau = 0$. Учет вероятностного характера неупругих столкновений приводит к тому, что распределение $N(\xi; \tau)$ при $v \gg 1$ на глубинах, не слишком близких к пробегу, будет отлично от нуля вблизи максимума распределения в малой окрестности значений $|\tau| \ll 1$. Поскольку величины $\overline{\varepsilon}^*(r)$ и $\overline{\varepsilon^2}^*(r)$ являются более плавными функциями пробега, чем само распределение $N(\xi; r)$, то можно приближенно положить, что

$$\overline{\varepsilon}^*(1 - \xi - \tau) \approx \overline{\varepsilon}^*(1 - \xi), \quad \overline{\varepsilon^2}^*(1 - \xi - \tau) \approx \overline{\varepsilon^2}^*(1 - \xi). \quad (2.6.16)$$

Приближение (2.6.16) радикально упрощает уравнение переноса (2.6.13), поскольку его коэффициенты теперь не зависят от переменной τ , а зависят только от переменной ξ , относительно которой уравнение (2.6.13) является дифференциальным уравнением первого порядка. Подставляя (2.6.16) в (2.6.13) получаем следующее *приближенное уравнение* для определения величины $N(\xi; \tau)$:

$$\frac{\partial N(\xi; \tau)}{\partial \xi} = \frac{1}{2v} \frac{\overline{\varepsilon^2}^*(1 - \xi)}{\left[\overline{\varepsilon}^*(1 - \xi) \right]^2} \frac{\partial^2 N(\xi; \tau)}{\partial \tau^2}. \quad (2.6.17)$$

Уравнение (2.6.17) легко решить аналитически при *произвольной* зависимости величин $\bar{\varepsilon}^*(1 - \xi)$ и $\bar{\varepsilon}^{2*}(1 - \xi)$ от приведенной глубины ξ . Переходя от переменной ξ к новой безразмерной переменной ζ

$$d\zeta = \frac{1}{2\nu} \frac{\bar{\varepsilon}^{2*}(1 - \xi)}{\left[\bar{\varepsilon}^*(1 - \xi)\right]^2} d\xi, \text{ т.е. } \zeta = \frac{1}{2\nu} \int_0^\xi \frac{\bar{\varepsilon}^{2*}(1 - \xi')}{\left[\bar{\varepsilon}^*(1 - \xi')\right]^2} d\xi', \quad (2.6.18)$$

приводим уравнение (2.6.17) к стандартному уравнению диффузии (2.3.6) с постоянными коэффициентами:

$$\frac{\partial N(\zeta; \tau)}{\partial \zeta} = \frac{\partial^2 N(\zeta; \tau)}{\partial \tau^2}.$$

Решение этого уравнения определяется выражением (2.3.7)

$$N(\zeta; \tau) = \frac{N_0}{\sqrt{4\pi\zeta}} \exp\left\{-\frac{\tau^2}{4\zeta}\right\}. \quad (2.6.19)$$

Подставляя сюда значения τ и ζ , заданные формулами (2.6.12) и (2.6.18), получаем следующее выражение для распределения частиц *по приведенным пробегам*:

$$N(\xi; r) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_r^2(\xi|v)}} \exp\left\{-\frac{(1 - r - \xi)^2}{2\sigma_r^2(\xi|v)}\right\}. \quad (2.6.20)$$

В рассматриваемом приближении, распределение частиц *по приведенному пробегу* имеет гауссов вид с дисперсией

$$\sigma_r^2(\xi|v) = \frac{1}{v} \int_0^\xi \frac{\bar{\varepsilon}^{2*}(1 - \xi')}{\left[\bar{\varepsilon}^*(1 - \xi')\right]^2} d\xi' = \frac{1}{v} \int_{1-\xi}^1 \frac{\bar{\varepsilon}^{2*}(r')}{\left[\bar{\varepsilon}^*(r')\right]^2} dr'. \quad (2.6.21)$$

Таким образом, дисперсия распределения (2.6.21) обратно пропорциональна флюктуационному параметру: $\sigma_r^2 \sim 1/v \ll 1$.

Энергетический спектр частиц в самосогласованном гауссовом приближении

Поскольку $N(\xi; u) = N[\xi; r(u)] T_0 / R_0 \bar{\varepsilon}(u)$, то из формулы (2.6.20) получаем следующее выражение для распределения частиц по относительной энергии:

$$N(\xi; u) = \frac{N_0 T_0}{\bar{\varepsilon}(u) R_0 \sqrt{2\pi \sigma_r^2(\xi)}} \exp \left\{ -\frac{[1 - r(u) - \xi]^2}{2\sigma_r^2(\xi)} \right\},$$

$$r(u) = \frac{T_0}{R_0} \int_0^u \frac{du'}{\bar{\varepsilon}(u')}.$$
(2.6.22)

Так как $dr = T_0 du / R_0 \bar{\varepsilon}(u)$, а $v = (\bar{\varepsilon}_0)^2 R_0 / \bar{\varepsilon}_0^2$, то безразмерную величину $\sigma_r^2(\xi)$ (2.6.21) можем записать в виде

$$\sigma_r^2(\xi) = \frac{T_0}{R_0^2} \int_{u(\xi)}^1 \frac{\bar{\varepsilon}^2(u')}{[\bar{\varepsilon}(u')]^3} du'.$$
(2.6.23)

Величина $u(\xi)$ в формуле (2.6.23) определяется из уравнения

$$1 - r(u) = \xi, \quad \text{т.е.} \quad \int_0^{u(\xi)} \frac{du'}{\bar{\varepsilon}(u')} = \frac{R_0}{T_0} (1 - \xi).$$
(2.6.24)

В области глубин $1 - \xi ? 1/\sqrt{v}$, где энергетический спектр частиц имеет резко выраженный максимум, распределения (2.6.20) и (2.6.22) нормированы условием

$$\int_0^1 N(\xi; r) dr = \int_0^1 N(\xi; u) du \approx N_0.$$
(2.6.25)

Из формулы (2.6.22) следует, что в отличие от распределения по приведенным пробегам (2.6.20), распределение (2.6.22) по относительным энергиям не является гауссовым.

В обычных единицах энергетический спектр частиц (2.6.22) на глубине Z имеет вид

$$N(z; T) = \frac{N_0}{\bar{\varepsilon}(T)\sqrt{2\pi\sigma_R^2(z)}} \exp\left\{-\frac{[R_0 - R(T) - z]^2}{2\sigma_R^2(z)}\right\},$$

$$R(T) = \int_0^T \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}(T')}.$$
(2.6.26)

Дисперсия распределения по пробегам R определяется выражением

$$\sigma_R^2(z) = R_0^2 \sigma_r^2(\xi) = \int_{T(z)}^{T_0} \frac{\bar{\varepsilon}^2(T)}{[\bar{\varepsilon}(T)]^3} dT, \quad [\sigma_R^2] = M^2.$$
(2.6.27)

Величина $T(z)$ определяется из уравнения

$$R_0 - R(T) = z, \quad \text{т.е.} \quad \int_0^{T(z)} dT' / \bar{\varepsilon}(T') = R_0 - z.$$
(2.6.28)

Если величина X распределена по нормальному закону с дисперсией σ_X , то ее распределение имеет обычный гауссов вид

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}} \exp\left\{-\frac{(x - x_0)^2}{2\sigma_X^2}\right\}.$$
(2.6.29)

Среднее и наиболее вероятное значения при этом совпадают: $\bar{X} = X_{\text{н.в.}} = x_0$. Если поциальному закону распределена не сама величина X , а некоторая функция $f(x)$, то распределение $W(x)$ выглядит так:

$$W(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{[f(x) - f(x_0)]^2}{2\sigma^2}\right\} \left| \frac{df}{dx} \right|.$$
(2.6.30)

Такой закон называется распределением Кэптэйна.

В тонких слоях вещества, когда потери энергии малы ($T_0 - T \ll T_0$), можно пренебречь зависимостью коэффициентов уравнения переноса от энергии, полагая $\bar{\varepsilon}(T) \approx \bar{\varepsilon}_0$, $\bar{\varepsilon}^2(T) \approx \bar{\varepsilon}_0^2$. В этом случае

$$R(T) = \frac{T}{\bar{\varepsilon}_0}, \quad R_0 = \frac{T_0}{\bar{\varepsilon}_0}, \quad T(z) = T_0 - z\bar{\varepsilon}_0,$$

$$\sigma_R^2(z) = \frac{\bar{\varepsilon}_0^2}{(\bar{\varepsilon}_0)^3} [T_0 - T(z)] = \frac{\bar{\varepsilon}_0^2}{(\bar{\varepsilon}_0)^2} z.$$

Подставляя данное выражение в формулу (2.6.26), находим, что

$$N(z; T) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2(z)}} \exp\left\{-\frac{[T_0 - T - z\bar{\varepsilon}_0]^2}{2\sigma_T^2(z)}\right\},$$

$$\sigma_T^2(z) = \bar{\varepsilon}_0^2 z. \quad (2.6.31)$$

Это в точности совпадает с полученным ранее выражением (2.3.9) для энергетического спектра частиц на глубине Z в тонких слоях вещества.

На больших глубинах, когда за счет торможения энергия частиц уменьшается, необходимо учитывать зависимость величин $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ от энергии. В этом случае нормальным оказывается распределение (2.6.20) по пробегу r . Относительно энергии распределение (2.6.26) есть *распределение Кэлтэйна*, в котором роль функции f играет приведенный пробег $r(u)$, $f(x_0)$ есть $1 - \xi$, а $|df/dx|$ есть $|dr/du| = T_0/R_0\bar{\varepsilon}(u)$.

За счет предэкспоненциального множителя $1/\bar{\varepsilon}(u)$ максимум распределения (2.6.22) $u_{\text{н.в.}}(\xi|\nu)$ не совпадает с его значением в модели непрерывного замедления, а определяется из уравнения $dN(\xi; u)/du = 0$:

$$1 - r(u) = \xi + \sigma_r^2(\xi|\nu) \frac{R_0}{T_0} \frac{d\bar{\varepsilon}(u)}{du}. \quad (2.6.32)$$

Уравнение (2.6.32) для определения наиболее вероятной энергии $u_{\text{н.в.}}(\xi|v)$ отличается от уравнения для определения $u_{\text{н.в.}}(\xi|v \rightarrow \infty) = u(\xi)$ в модели непрерывного замедления последним слагаемым в его правой части, которое $\sim 1/v$. При $\bar{\varepsilon}^2 = 0$ $\sigma_r^2(\xi) = 0$ и уравнение (2.6.32) сводится к уравнению (2.6.24), которое пригодно для определения наиболее вероятной энергии в области глубин $1 - \xi \gg 1/\sqrt{v}$, где ещё не происходит остановки частиц. В области глубин близких к пробегу $1 - \xi \sim 1/\sqrt{v}$ для определения наиболее вероятной энергии необходимо использовать уравнение (2.6.32). Как будет показано ниже, уравнение (2.6.32) дает правильное значение наиболее вероятной энергии *во всей области глубин*, включая и область глубин $\xi \geq 1$ (т.е. $z \geq R_0$), недоступную в модели непрерывного замедления.

К настоящему времени, на основе уравнения переноса с интегралом неупругих столкновений в диффузационном приближении предложено немало решений. Эти распределения часто используются в практических расчетах и поэтому важно указать соответствие между ними и областью применимости каждого из результатов. Наиболее часто используются распределение Бора (1915г.) и распределение Симона (1948г.)

1. Распределение Бора¹:

$$N_B(z, T) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_B^2(z)}} \exp\left\{-\frac{[T - T(z)]^2}{2\sigma_B^2(z)}\right\}, \quad (2.6.33a)$$

$$\sigma_B^2(z) = \int_{T(z)}^{T_0} \frac{\bar{\varepsilon}^2(T')}{\bar{\varepsilon}(T')} dT', \quad [\sigma_B^2] = \Delta \mathbf{J}^2. \quad (2.6.33b)$$

2. Распределение Симона²:

¹ Bohr N. // Phil Mag. 1915. Vol. 30. P. 581–613.

² Symon K.R.// Phil. Diss. Harvard University, 1948.

$$N_C(z, T) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_C^2(z)}} \exp \left\{ -\frac{[T - T(z)]^2}{2\sigma_C^2(z)} \right\}, \quad (2.6.34a)$$

$$\sigma_C^2(z) = [\bar{\varepsilon}(T(z))]^2 \int_{T(z)}^{T_0} \frac{\bar{\varepsilon}^2(T')}{[\bar{\varepsilon}(T')]^3} dT', \quad [\sigma_C^2] = \text{Дж}^2. \quad (2.6.34b)$$

Значение $T(z)$ в обоих распределениях определяется из уравнения (2.6.28).

Оба распределения (2.6.33) и (2.6.34) имеют гауссов вид по энергии. Поэтому представляет интерес выяснить, при каких условиях распределение Кэптэйна (2.6.26) может быть представлено в виде гауссова распределения частиц по энергии.

Для этого перепишем выражение (2.6.22) для $N(\xi; u)$ в виде

$$N(\xi; u) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_r^2(\xi|v)}} \exp \left\{ -f(\xi; u|v) \right\}, \quad (2.6.35)$$

где

$$f(\xi; u|v) = \frac{[1 - r(u) - \xi]^2}{2\sigma_r^2(\xi|v)} + \ln \frac{\bar{\varepsilon}(u)R_0}{T_0}. \quad (2.6.36)$$

Распределение (2.6.35) на глубине ξ имеет максимум при $u = u_{\text{H.B.}}(\xi|v)$, где $u_{\text{H.B.}}(\xi|v)$ определяется из условия минимума функции $f(\xi; u|v)$, т.е. определяется из уравнения $df(\xi; u)/du = 0$. Нетрудно убедиться, что это уравнение сводится к уравнению (2.6.32). Разлагая функцию $f(\xi; u)$ в ряд по u в окрестности её минимума, получим следующее выражение для энергетического спектра частиц гауссова вида

$$N^{(G)}(\xi; u) \approx \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_u^2(\xi|v)}} \exp \left\{ -\frac{[u - u_{\text{H.B.}}(\xi|v)]^2}{2\sigma_u^2(\xi|v)} \right\}. \quad (2.6.37)$$

Дисперсия $\sigma_u^2(\xi|v)$ распределения (2.6.37) по относительной энергии определяется выражением

$$\sigma_u^2(\xi|v) = \left[\frac{R_0 \bar{\varepsilon}(u_{\text{H.B}})}{T_0} \right]^2 \cdot \sigma_r^2(\xi|v) = \frac{[\bar{\varepsilon}(u_{\text{H.B}})]^2}{T_0} \int_{u(\xi)}^1 \frac{\bar{\varepsilon}^2(u)}{[\bar{\varepsilon}(u)]^3} du . \quad (2.6.38)$$

Поскольку при получении распределения (2.6.37) функция $f(\xi; u)$ в распределении Кэптэйна (2.6.35) заменялась её приближенным значением в окрестности максимума распределения, то отличие гауссова распределения (2.6.37) от распределения (2.6.35) *наименьшее в окрестности максимума* энергетического спектра, когда u близко к $u_{\text{H.B}}(\xi|v)$.

В обычных размерных единицах формулы (2.6.37) и (2.6.38) выглядят так:

$$N^{(G)}(z; T) \approx \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_T^2(z)}} \exp \left\{ -\frac{[T - T_{\text{H.B}}(z)]^2}{2\sigma_T^2(z)} \right\} . \quad (2.6.39)$$

$$\sigma_T^2(z) = T_0^2 \sigma_u^2(z) = [\bar{\varepsilon}(T_{\text{H.B}})]^2 \int_{T(z)}^{T_0} \frac{\bar{\varepsilon}^2(T)}{[\bar{\varepsilon}(T)]^3} dT , \quad [\sigma_T^2] = \text{Дж}^2 . \quad (2.6.40)$$

Входящие в эти формулы величины $T(z)$ и $T_{\text{H.B}}(z)$ определяются из уравнений

$$\int_0^{T(z)} \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}(T')} = R_0 - z . \quad (2.6.41)$$

$$\int_0^{T_{\text{H.B}}(z)} \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}(T')} = R_0 - z - \sigma_R^2(z) \frac{d\bar{\varepsilon}(T)}{dT} . \quad (2.6.42)$$

Величина $T(z)$ определяет энергию частиц в приближении непрерывного замедления и в отличие от $T_{\text{Н.В.}}(z)$ не зависит от v .

Теперь, используя формулы (2.6.39) и (2.6.40), можем установить область применимости распределений (2.6.33) и (2.6.34). В обоих распределениях считается, что $T_{\text{Н.В.}}(z) = T(z)$. Следовательно, они применимы только в области глубин, где поток частиц остается неизменным $N(\xi) \approx N_0$, т.е. при $R_0 - z \gg R_0 / \sqrt{v}$. В области глубин близких к R_0 эти распределения неприменимы.

Выражение для дисперсии распределения Бора (2.6.33,) получается из формулы (2.6.40) при условии, что $\bar{\varepsilon}(T) = \text{const}$. Поэтому для *нерелятивистских* частиц распределение Бора физически оправдано только в области *малых потерь* энергии, когда можно считать, что $\bar{\varepsilon}(T) \approx \bar{\varepsilon}(T_0) = \bar{\varepsilon}_0$. При этом, естественно, предполагается, что выполнено условие применимости диффузационного приближения – ширина спектра превышает максимальную энергию, теряемую частицей в одном столкновении.

Распределение Бора применимо также для описания энергетического спектра частиц ультрарелятивистских энергий $(mc^2 \ll \ll T_0 \ll m^2 c^2 / m_e)$, так как для таких частиц в соответствие с (1.3.16) тормозная способность среды практически не зависит от их энергии.

Распределение Симона (2.6.34) получается из формул (2.6.39), (2.6.40) при выполнении только одного условия – $T_{\text{Н.В.}}(z) \approx T(z)$. Поэтому оно определяет энергетический спектр частиц при *произвольной* зависимости величин $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ от энергии во всей области глубин $R_0 - z \gg R_0 / \sqrt{v}$. Распределение Симона тем лучше описывает энергетический спектр частиц, чем меньше их энергия отличается от значения $T(z)$, рассчитанного в приближении непрерывного замедления.

Рассмотренное выше можно наглядно проиллюстрировать на примере распространения *нерелятивистских* частиц, когда имеется

точное решение (2.5.21) уравнения переноса, полученное без использования самосогласованного гауссова приближения.

Распределение нерелятивистских частиц по энергиям в самосогласованном гауссовом приближении

Рассмотрим случай *нерелятивистских* частиц ($T_0 \ll mc^2$). Если пренебречь зависимостью ионизационного логарифма от энергии и считать $K(T) \approx K(T_0) = 1$, то

$$\bar{\varepsilon}(u) = T_0 / 2R_0 u, \quad r = u^2, \quad u(\xi) = \sqrt{1 - \xi}, \quad \bar{\varepsilon}^2(u) = \bar{\varepsilon}_0^2. \quad (2.6.43)$$

Подставляя это в (2.6.22), (2.6.23), получим

$$N(\xi; u) = N_0 \frac{2u}{\sqrt{2\pi\sigma_r^2(\xi|v)}} \exp \left\{ -\frac{[1 - \xi - u^2]^2}{2\sigma_r^2(\xi|v)} \right\}. \quad (2.6.44)$$

Так как $dr = T_0 du / R_0 \bar{\varepsilon}(u)$, то безразмерную величину $\sigma_r^2(\xi|v)$ можем записать в виде

$$\sigma_r^2(\xi|v) = \frac{2R_0 \bar{\varepsilon}_0^2}{T_0^2} [1 - u^4(\xi)] = \frac{\xi(2 - \xi)}{2v}. \quad (2.6.45)$$

При получении (2.6.45) учтено, что $T_0 = 2R_0 \bar{\varepsilon}_0$. (Естественно, что то же значение для $\sigma_r^2(\xi|v)$ получается из формулы (2.6.21), если учесть, что для нерелятивистских частиц, в соответствии с (2.2.22), (2.2.23) $\bar{\varepsilon}^*(r) = 1/\sqrt{r}$ и $\bar{\varepsilon}^{*2} = 1$).

Подставляя (2.6.45) в (2.6.44), получаем следующее выражение для распределения частиц по относительной энергии U на приведенной глубине ξ

$$N(\xi; u) = 2N_0 u \sqrt{\frac{v}{\pi\xi(2 - \xi)}} \exp \left\{ -v \frac{[1 - \xi - u^2]^2}{\xi(2 - \xi)} \right\}. \quad (2.6.46)$$

Наиболее вероятное значение энергии $U_{\text{H.B}}(\xi|v)$ определяется из уравнения (2.6.32), которое для нерелятивистских частиц выглядит так:

$$1 - u^2 = \xi - \frac{\sigma_r^2(\xi|v)}{2u^2}, \quad \text{т.е.} \quad u^2 - \frac{\sigma_r^2(\xi|v)}{2u^2} - (1 - \xi) = 0. \quad (2.6.47)$$

Решая это биквадратное уравнение, получаем

$$u_{\text{H.B}}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \xi + \sqrt{(1 - \xi)^2 + 2\sigma_r^2(\xi|v)}}. \quad (2.6.48)$$

Подставляя сюда значение $\sigma_r^2(\xi|v)$, определяемое формулой (2.6.45), будем иметь

$$u_{\text{H.B}}(\xi|v) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 - \xi + \sqrt{(1 - \xi)^2 + \frac{\xi(2 - \xi)}{v}}}. \quad (2.6.49)$$

Поскольку $v >> 1$, то второе слагаемое во внутреннем радикале формулы (2.6.49) существенно влияет на значение величины $u_{\text{H.B}}(\xi|v)$ в области глубин близких к единице: $1 - 1/\sqrt{v} \leq \xi \leq 1 + 1/\sqrt{v}$. Поэтому в выражении (2.6.49) можно положить $\xi/(2 - \xi) \approx 1$. В результате для наиболее вероятной энергии частиц находим

$$u_{\text{H.B}}(\xi|v) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1 - \xi) + \sqrt{(1 - \xi)^2 + \frac{1}{v}}}. \quad (2.6.50)$$

Значение наиболее вероятной относительной энергии $u_{\text{H.B}}(\xi|v)$ в самосогласованном гауссовом приближении (2.6.50) в точности совпадает с результатом (2.5.50), полученным ранее из точного решения диффузационного уравнения переноса для нерелятивистских частиц.

Из формулы (2.6.50) следует, что при $v \rightarrow \infty$ значение наиболее вероятной энергии $U_{\text{H.B}}(\xi) = \sqrt{1 - \xi}$, что соответствует значению $U(\xi)$ в модели непрерывного замедления. Важно подчеркнуть, что выражение (2.6.50) для $u_{\text{H.B}}(\xi|v)$ справедливо *во всей*

области глубин, где поток частиц реально отличен от нуля, включая и область глубин $\xi \geq 1$, недоступную в модели непрерывного замедления. Так, на глубине $\xi = 1$ значение $u_{\text{н.в.}}(\xi = 1) = 1/\sqrt[4]{4v}$ (что совпадает с (2.5.53)), а значение величины $N(\xi = 1; u)$ в максимуме распределения $N_{\max}(\xi = 1) = N_0 \sqrt[4]{4v / \pi^2 e}$.

На рис. 2.6.1 представлены графики зависимости $N(\xi; u)$ от относительной энергии u на различных приведенных глубинах $\xi = 0,95$, $\xi = 1,0$ и $\xi = 1,05$ при единичной плотности потока падающего излучения ($N_0 = 1$). Сплошные кривые – расчет по точной формуле

$$N(\xi; u) = N_0 \frac{4v}{\xi} u^{-2v+1/2} \exp\left(-2v \frac{1+u^2}{\xi}\right) I_{2v+1/2}\left(4v \frac{u}{\xi}\right). \quad (2.6.51)$$

Штриховые кривые – расчет по формуле (2.6.46) в самосогласованном гауссовом приближении (распределение Кэлптэйна).

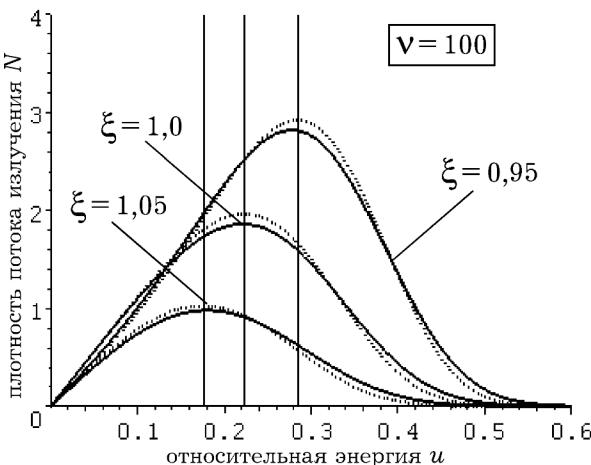


Рис. 2.6.1. Энергетические спектры частиц на различных глубинах.

Сплошные кривые – расчет по формуле (2.6.51).

Штриховые кривые – расчет по приближенной формуле (2.6.46)

Вертикальные линии указывают значение наиболее вероятной энергии, рассчитанной по формуле (2.6.50). Для того чтобы визуально увидеть разницу между результатами расчета по точной и приближенной формулам, значение флюктуационного параметра выбрано сравнительно небольшим – $v = 100$. При таком значении v на глубине $\xi = 1$ $u_{\text{Н.В.}}(\xi = 1) = 0,22$ и $N_{\max}(\xi = 1) = 1,96$, что видно из рисунка. Из рисунка следует, что различие между сплошными и пунктирными кривыми незначительно, в том числе и в области $\xi > 1$.

С увеличением значения параметра v , различие между расчетом по точной и приближенной формулам становится существенно меньшее. На рис. 2.6.2 представлены энергетические спектры мюонов в алюминии с начальной энергией $T_0 = 20 \text{ МэВ}$ ($v \approx 420$, $R_0 \approx 1,4 \text{ см}$) на тех же глубинах. Видим, что сплошные и штриховые кривые практически совпадают.

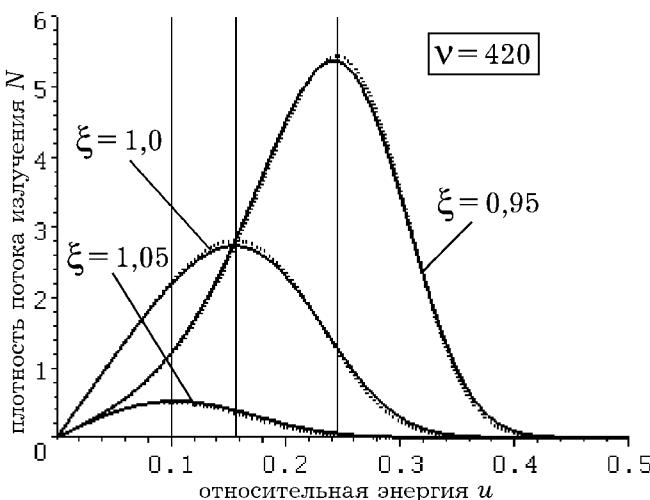


Рис. 2.6.2. Энергетические спектры мюонов с энергией 20 МэВ в алюминии на различных глубинах.

Сплошные кривые – расчет по точной формуле (2.6.51).

Штриховые кривые – расчет по приближенной формуле (2.6.46)

Для протонов, когда параметр v равен нескольким тысячам, различие между результатами расчетов по точной и приближенной формулами визуально неразличимо на рисунке обычного формата. Все сказанное выше означает, что энергетический спектр быстрых тяжелых частиц (2.6.51) с высокой точностью совпадает с распределением Кэптэйна (2.6.46).

Теперь проанализируем точность выражения (2.6.37), которое определяет энергетический спектр частиц по энергии в *гауссовом* приближении. Дисперсия распределения $\sigma_u^2(\xi)$ определяется выражением (2.6.38). Поскольку $\bar{\epsilon}(u_{\text{H.B}}) = T_0 / 2R_0 u_{\text{H.B}}(\xi|v)$, то для величины $\sigma_u^2(\xi|v)$ из (2.6.38) получим

$$\sigma_u^2(\xi) = \left[\frac{R_0 \bar{\epsilon}(u_{\text{H.B}})}{T_0} \right]^2 \sigma_r^2(\xi|v) = \frac{\sigma_r^2(\xi|v)}{4u_{\text{H.B}}^2(\xi|v)} = \frac{1}{8v} \frac{\xi(2-\xi)}{u_{\text{H.B}}^2(\xi|v)}. \quad (2.6.52)$$

Подставляя (2.6.52) в (2.6.37), получаем выражение для энергетического спектра частиц гауссова вида:

$$N^{(G)}(\xi; u|v) = 2N_0 \frac{u_{\text{H.B}}(\xi|v)}{\sqrt{\pi\xi(2-\xi)/v}} \exp \left\{ -4v u_{\text{H.B}}^2(\xi|v) \frac{[u - u_{\text{H.B}}(\xi|v)]^2}{\xi(2-\xi)} \right\}. \quad (2.6.53)$$

Важно отметить, что значение наиболее вероятной энергии $u_{\text{H.B}}(\xi|v)$ в распределении (2.6.53) определяется формулой (2.6.50), справедливой и в области глубин $\xi > 1$.

На рис. 2.6.3 представлены энергетические спектры мезонов с энергией $T_0 = 20$ МэВ в алюминии ($v \approx 420$) на различных глубинах рассчитанные по формуле (2.6.46) (распределение *Кэптэйна*) – сплошные кривые и по формуле (2.6.53) (*гауссово* распределение) – штриховые кривые.

Видим, что даже на сравнительно большой глубине $\xi = 0,9$, т.е. $z = 0,9R_0$, гауссово распределение практически совпадает с распределением Кэптэйна *вблизи его максимума*, определяемого формулой (2.6.50): $u_{\text{H.B}}(\xi = 0,9) \approx 0,33$. По мере удаления от максимума, различие между распределением Кэптэйна (2.6.46) и резуль-

татами расчета по формуле (2.6.53) существенно возрастает. При заданном значении флюктуационного параметра $v = 420$, полный поток частиц уменьшается, начиная с глубин $\xi \sim 1 - 1/\sqrt{v} \approx 0,95$. Поэтому уже на глубине $\xi = 0,95$ различие между результатами расчета по формулам (2.6.46) и (2.6.53) становится заметным для всех энергий, включая и точку максимума распределения. При этом положение самого максимума обоих энергетических распределений совпадают, так как они фактически определяются одной и той же формулой (2.6.50). На глубине $\xi = 1,0$ различие очень значительное. Таким образом, как это уже отмечалось ранее, гауссово распределение (2.6.53) применимо только в области глубин, где еще не происходит остановки частиц.

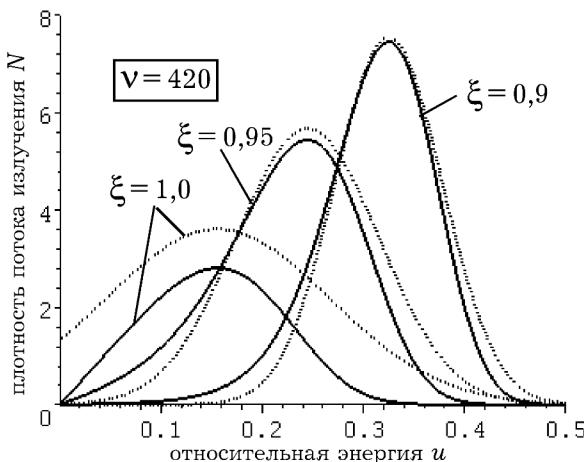


Рис. 2.6.3. Энергетические спектры мюонов с энергией 20 МэВ в алюминии на различных глубинах. Сплошные кривые – расчет по формуле (2.6.46) (Распределение Кэлтэйна). Штриховые кривые – расчет по гауссовой формуле (2.6.53)

Теперь сравним результаты расчета энергетического спектра по формуле (2.6.53) и распределение Симона (2.6.34). Распределение Симона (2.6.34) имеет тоже гауссов вид и отличается от гауссова распределения (2.6.53) только заменой $u_{\text{Н.В.}}(\xi|v) \rightarrow u(\xi)$, где

$u(\xi)$ – энергия частиц на глубине ξ в модели *непрерывного замедления*. Для нерелятивистских частиц $u(\xi) = \sqrt{1 - \xi}$. Поэтому распределение Симона (2.6.34) для нерелятивистских частиц в безразмерных единицах выглядит так:

$$N_C(\xi; u) = 2N_0 \sqrt{\frac{(1-\xi)v}{\pi\xi(2-\xi)}} \exp \left\{ -4v(1-\xi) \frac{[u - \sqrt{1-\xi}]^2}{\xi(2-\xi)} \right\}, \quad (2.6.54)$$

что полностью совпадает с (2.6.1).

На рис.2.6.4 представлены энергетические спектры мюонов в алюминии с начальной энергией $T_0 = 20$ МэВ ($v \approx 420$) на различных глубинах $\xi = 0,85$, $\xi = 0,9$ и $\xi = 0,95$ рассчитанные по формуле (2.6.46) (сплошные кривые), и гауссово распределение Симона (2.6.54) (пунктирные кривые).

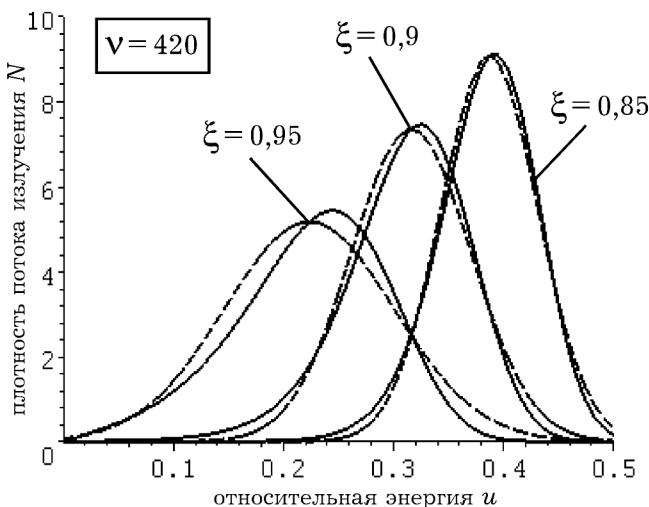


Рис. 2.6.4. Энергетические спектры мюонов с энергией 20 МэВ в алюминии на различных глубинах.

Сплошные кривые – распределение Кэлтэйна (2.6.46).
Пунктирные кривые – распределение Симона (2.6.54)

Из рисунка видно, что отличие результатов расчета по формуле (2.6.46) (распределение Кэптэйна) и по формуле Симона (2.6.54), когда $u_{\text{H.B}}(\xi)$ определяется в модели непрерывного замедления, более существенно, чем при использовании гауссова распределения со значением $u_{\text{H.B}}(\xi|v)$, рассчитанного по более точной формуле (2.6.50). Значение в максимуме распределения, рассчитанное по формуле Симона, несколько меньше, чем в распределении Кэптэйна. Наблюдается так же несовпадение максимума распределения с его истинным значением. Это отличие растет с увеличением глубины. Так, на глубине $\xi = 0,95$ значения наиболее вероятной энергии составляют $u_{\text{H.B}}(\xi = 0,95) = 0,25$ и $u(\xi = 0,95) \approx \sqrt{1 - 0,95} \approx 0,22$ соответственно. Относительная погрешность $\delta u_{\text{H.B}} \approx 12\%$. С увеличением параметра v различие результатов расчета по формуле (2.6.46) и формулой Симона становится существенно меньше. Это видно из сравнения рис. 2.6.4 и рис. 2.6.5, на котором представлены энергетические спектры частиц при значении параметра $v = 1000$.

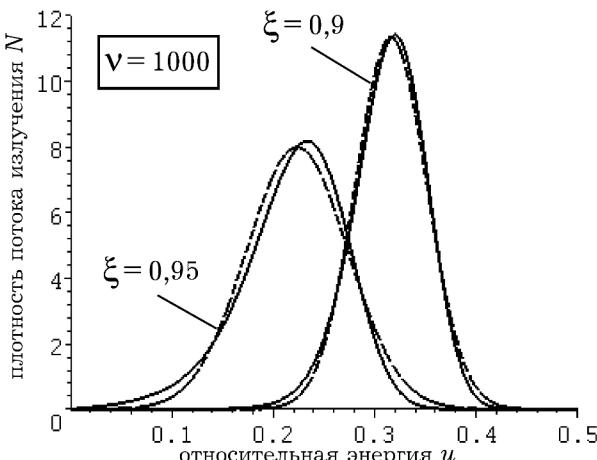


Рис. 2.6.5. Энергетические спектры частиц на различных глубинах при $v = 1000$.

Сплошные кривые – распределение Кэптэйна (2.6.46).
Пунктирные кривые – распределение Симона (2.6.54)

Рассмотренное выше относительно нерелятивистских частиц, когда $\bar{\varepsilon}(T) \sim 1/T$, $\bar{\varepsilon}^2 = \text{const}$ в полной мере применимо и в общем случае, при произвольной зависимости величин $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ от энергии частиц. Именно гауссово распределение (2.6.20) по приведенным пробегам и вытекающее из него распределение Кэптэйна (2.6.22) по энергиям можно использовать и в области глубин, недоступной в модели непрерывного замедления. Действительно, как показано выше на точно решаемом примере, в области $1 - \xi \ll 1/\sqrt{v}$, где не происходит остановки частиц, энергетический спектр имеет резкий максимум. Поэтому в этой области глубин применимость самосогласованной процедуры решения уравнения (2.6.10) не вызывает сомнений. В той области, где частицы начинают останавливаться ($1 - \xi \leq 1/\sqrt{v}$), максимум энергетического спектра выражен уже не так резко и, кроме того, его положение не совпадает с результатом приближения непрерывного замедления.

На первый взгляд может показаться, что использовать решение (2.6.20), (2.6.22) на глубинах $1 - \xi \leq 1/\sqrt{v}$ уже нельзя. Однако это не так. Дело в том, что разброс частиц по пробегам (энергиям) формируется в основном на той большей части пути, где решение (2.6.22) справедливо. Поэтому в области глубин $1 - \xi : 1/\sqrt{v}$ разброс по пробегам уже настолько велик, что изменение характера флуктуации на малом ($\delta\xi : 1/\sqrt{v}$) конечном участке пути практически не меняет вида распределения. На глубинах $1 - \xi : 1/\sqrt{v}$ важно правильно учсть главный фактор – систематические потери энергии. Этому требованию решение (2.6.21), записанное в переменной *пробега*, удовлетворяет автоматически. Именно поэтому самосогласованное решение (2.6.22) остается справедливым и в области глубин $|1 - \xi| < 1/\sqrt{v}$. В частности, это подтверждается отмеченным выше хорошим количественным согласием результатов расчетов по формулам (2.6.22) и точного решения (2.6.61) для нерелятивистских частиц (см. рис. 2.6.1 и 2.6.2).

Используя общую формулу (1.3.14) для тормозной способности среды $\bar{\varepsilon}(T)$ и формулу (1.3.21) для $\bar{\varepsilon}^2(T)$, которые справедливы и для частиц релятивистских энергий, дисперсию энергетического распределения частиц (2.6.27) по пробегам можно представить в виде [2, с. 55]

$$\sigma_R^2(\xi) = \frac{m/m_e}{32(\pi n_0 Z z^2 r_e^2)^2} \int_{E(\xi)}^{E_0} \frac{[(1+E)^2 - 1]^2 [(1+E)^4 - 1] K(E)}{(1+E)^6 L_{\text{ион}}(E)} dE,$$

$$E = \frac{T}{mc^2}. \quad (2.6.55)$$

Значение $E(\xi)$ определяется уравнением (2.1.71).

Из этого выражения в предположении $L_{\text{ион}} = \text{const}$ в предельных случаях нерелятивистских ($E \ll 1$) и ультрарелятивистских ($E \gg 1$) частиц соответственно, получаем

$$N(\xi; u) = N_0 \frac{2u}{\sqrt{2\pi\sigma_r^2(\xi)}} \exp \left\{ -\frac{[1 - \xi - u^2]^2}{2\sigma_r^2(\xi)} \right\}, \quad (T_0 = mc^2) \quad (2.6.56)$$

u

$$N(\xi; u) \approx \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_r^2(\xi)}} \exp \left\{ -\frac{[1 - \xi - u]^2}{2\sigma_r^2(\xi)} \right\}, \quad (T_0 ? mc^2). \quad (2.6.57)$$

В формулах (2.6.56), (2.6.57) по-прежнему $\xi = z/R_0$, а значение $\sigma_r^2(\xi)$ связано с $\sigma_R^2(\xi)$ соотношением $\sigma_r^2(\xi) = \sigma_R^2(\xi)/R_0^2$ и равно

$$\sigma_r^2(\xi) = \begin{cases} \frac{1 - (1 - \xi)^2}{2\nu} = \frac{\xi(2 - \xi)}{2\nu}, & (T_0 = mc^2); \\ \frac{1 - (1 - \xi)^3}{3\nu}, & (T_0 ? mc^2). \end{cases} \quad (2.6.58)$$

Входящий в (2.6.58) флюктуационный параметр ν определяется соотношением

$$v = \frac{R_0(\bar{\varepsilon}_0)^2}{\varepsilon_0^2} = 2 \frac{m}{m_e} \frac{(1+E_0)^3 L_{\text{ион}}(E_0)}{(2+E_0)^2 [(1+E_0)^2 + 1] K(E_0)},$$

$$E_0 = \frac{T_0}{mc^2}. \quad (2.6.59)$$

Для $E_0 = 1$ и $E_0 \gg 1$ из (2.6.59) получаем

$$v \approx \begin{cases} \frac{1}{4} \frac{m}{m_e} \frac{L_{\text{ион}}(T_0)}{K(T_0)} & (T_0 = mc^2); \\ 2 \frac{m}{m_e} \frac{L_{\text{ион}}}{(T_0 / mc^2)} & (T_0 \neq mc^2). \end{cases} \quad (2.6.60)$$

Естественно, что выражение (2.6.60) для нерелятивистских частиц полностью совпадает с (2.2.32), если считать, что $K(T_0) = 1$. Из (2.6.60) следует, что для ультрарелятивистских энергий $v \sim 1/T_0$ и с увеличением энергии параметр v уменьшается. Последнее указывает на относительное увеличение флуктуаций и важность их учета в ультрарелятивистской области.

В работах^{1,2} уравнение переноса с интегралом неупругих столкновений в диффузионном приближении решалось методом прямого численного интегрирования. Как показывает сравнение³, данные численных расчетов практически не отличаются от результатов вычислений по формуле (2.6.26) и тем самым доказывают справедливость самосогласованного гауссова приближения. Таким образом, решение уравнения переноса в самосогласованном гауссовом приближении является наиболее универсальным результатом, пригодным для проведения практических расчетов распределения частиц по энергиям в толстых слоях вещества.

В табл. 2.6.1 приведены данные эксперимента и расчета по формуле Симона (2.6.34) ширины энергетического спектра α -частиц.

¹ Tshalar C. // Nucl. Instrum. and Meth. 1968. Vol. 61. P.141-156.

² Tshalar C. // Ibib.. 1968. Vol. 64. P.237-243.

³ Payne M.G.// Phys. Rev. 1969. Vol. 185. P.611-623.

Небольшие различия экспериментальных и теоретических результатов находятся в пределах погрешности соотношения (2.6.34).

Таблица 2.6.1

Значения ширины энергетического спектра α -частиц δT (К эВ) ($T_0 = 5,3$ МэВ) в воздухе на различной глубине

z , см	$\delta T_{\text{эксп}}$	$\delta T_{\text{теор}} = \sqrt{2\sigma_C^2}$	z , см	$\delta T_{\text{эксп}}$	$\delta T_{\text{теор}} = \sqrt{2\sigma_C^2}$
0,83	32	31,0	3,0	92	89,0
1,34	43	41,4	3,28	109	113,0
1,94	54	51,9	3,53	122	127,0
2,55	70	68,6			

Распределения (2.6.26), (2.6.39) применимы как для нерелятивистских, так и для ультрарелятивистских частиц и позволяют проводить вычисления без каких-либо упрощающих предположений об энергетической зависимости $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$. В частности, в расчетах на основе этих формул может быть учтена зависимость от энергии ионизационного логарифма (с поправками на эффект связи электронов в атоме и эффект плотности) и оболочечных поправок в $\bar{\varepsilon}^2$ (множителя $K(E)$ в формулах (1.3.20)). Для определения значений $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ можно также использовать имеющиеся таблицы и приближенные интерполяционные формулы. В легких средах для достаточно тяжелых частиц ($Z = 2\sqrt{m/m_e}$) влияние многократного кулоновского рассеяния на разброс частиц по энергиям пре-небрежимо мало [2, гл. 5, 6] и полученные выше результаты готовы для непосредственного сравнения с экспериментом.

3. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ ЧАСТИЦ ПО ГЛУБИНЕ. КРИВАЯ БРЭГГА

3.1. КРИВАЯ БРЭГГА

Во многих экспериментах по прохождению заряженных частиц через вещество измеряется не сам энергетический спектр, а его интегральные характеристики. Так, во многих практических приложениях – радиационной физике, радиобиологии, дефектоскопии и т.д. – эффект взаимодействия потока частиц с веществом определяется распределением в веществе *поглощенной энергии*. Измерение распределения поглощенной энергии – кривая Брэгга – является одним из наиболее распространенных методов экспериментального определения основных параметров взаимодействия быстрых заряженных частиц с веществом – пробега, тормозной способности, среднего потенциала ионизации*.

Обычно под кривой Брэгга понимают зависимость тока ионизационной камеры, которая регистрирует частицы после прохождения ими слоя вещества, от толщины этого слоя. Однако учитывая, что передаваемая веществу энергия пропорциональна плотности ионизации, можно не делать различия между кривой Брэгга и пространственным распределением поглощенной в веществе энергией.

Поскольку пробеги быстрых заряженных тяжелых частиц намного больше пробегов вторичных электронов, которые образуются при ионизации атомов, распределение *поглощенной энергии* с хорошей точностью совпадает с распределением *энергии потерянной* потоком частиц. Другими словами, энергию, выделяющуюся в слое вещества толщина которого много меньше полного пробега падающих частиц R_0 , но много больше характерного пробега вторичных электронов ионизации, можно отождествить с энергией, потерянной потоком частиц в этом слое.

Пусть на плоский полубесконечный слой вещества падает *мононаправленный* пучок частиц по нормали к его поверхности (вдоль

* Andersen H.H.// Bibliography and index of experimental ranges and stopping power data. N.Y.: Pergamon Press. 1977.

оси Z). Распределение частиц по энергии в падающем пучке $N_{\text{пад}}(T)$ может быть произвольным. Средняя энергия $\bar{B}(z)$, теряемая потоком частиц на единице пути на глубине z (*кривая Брэгга*), есть энергия, передаваемая проходящим пучком слою вещества (единичной площади поперечного сечения) единичной толщины на глубине z . Другими словами, величина $\bar{B}(z)dz$ есть энергия, поглощенная слоем вещества dz на глубине z в единицу времени.

Получим соотношение, связывающее $\bar{B}(z)$ с дифференциальной плотностью потока частиц $N(z; T)$ на глубине z . Для этого учтем, что если пренебречь многократным кулоновским рассеянием, т.е. считать движение частиц прямолинейным (приближение прямо-вперед), то величина $\int_0^{\infty} TN(z; T)dT$ есть средняя энергия, переносимая частицами в единицу времени через единичную площадку на глубине z . Величина $\int_0^{\infty} TN(z + dz; T)dT$ есть средняя энергия, переносимая частицами в единицу времени через единичную площадку на глубине $z + dz$. Разность этих величин есть средняя энергия, поглощенная слоем вещества dz на глубине z в единицу времени. Следовательно,

$$\bar{B}(z)dz = \int_0^{\infty} T \{N(z; T) - N(z + dz; T)\} dT. \quad (3.1.1)$$

Из (3.1.1) получаем, что

$$\bar{B}(z) = - \frac{d}{dz} \int_0^{\infty} TN(z, T)dT. \quad (3.1.2)$$

Величина $\bar{B}(z)$ измеряется в $\text{Дж} / (\text{м}^3 \cdot \text{с})$ или $\text{МэВ} / (\text{м}^3 \cdot \text{с})$. Ниже проанализировано влияние различных факторов на вид кривой Брэгга, когда не учитывается искривление траектории частиц из-за многократного рассеяния – влияние систематических потерь энергии, влияние разброса частиц по энергиям в падающем пучке и влияние флюктуаций потерь энергии при неупругих столкновениях.

3.2. КРИВАЯ БРЭГГА В ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНОГО ЗАМЕДЛЕНИЯ

Если пренебречь флюктуациями потерь энергии в неупругих столкновениях, т.е. рассматривать потери энергии в *приближении непрерывного замедления*, то в соответствие с уравнением (2.1.2)

$$\frac{\partial N(z; T)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial T} \{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \}.$$

Подставляя это выражение в основную формулу (3.1.2) для $\bar{B}(z)$ запишем

$$\bar{B}(z) = - \int_0^{\infty} T \frac{\partial \{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \}}{\partial T} dT. \quad (3.2.1)$$

Осуществляя интегрирование по частям, будем иметь

$$\bar{B}(z) = -T \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) dT. \quad (3.2.2)$$

Поскольку первое слагаемое в правой части (3.2.2) равно нулю, то получаем следующее выражение для плотности потерянной энергии $\bar{B}(z)$

$$\bar{B}(z) = \int_0^{\infty} \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) dT. \quad (3.2.3)$$

Переходя в соотношении (3.2.3) от переменной энергии T к остаточному пробегу $R(T)$, с учетом того, что в соответствие с (2.1.6) $N(z; T) dT = N(z; R) dR$, выражение для $\bar{B}(z)$ можно представить в виде

$$\bar{B}(z) = \int_0^{\infty} \bar{\varepsilon}(R) N(z; R) dR. \quad (3.2.4)$$

Формулы (3.2.3) и (3.2.4) позволяют определить вид кривой Брэгга, если известна тормозная способность среды и дифференциальная плотность потока излучения в рамках модели *непрерывного замедления*. Таким образом, для расчета кривой Брэгга в приближении непрерывного замедления можно либо использовать общую формулу (3.1.2), либо любую из формул (3.2.3) или (3.2.4).

Кривая Брэгга при облучении поверхности моноэнергетическим потоком частиц

Рассмотрим сначала случай, когда на поверхность вещества по нормали к поверхности падает *моноэнергетический* поток частиц с энергией T_0 . В соответствии с (2.1.25) энергетический спектр частиц на глубине Z определяется выражением

$$N(z; T|T_0) = N_0 \delta[T - T(z; T_0)]$$

Подставляя формулу в (3.2.3), получим формулу для расчета кривой Брэгга в приближении непрерывного замедления

$$\bar{B}(z|T_0) = N_0 \int_0^{\infty} \bar{\varepsilon}(T') \delta[T' - T(z)] dT' = N_0 \bar{\varepsilon}[T(z)]. \quad (3.2.5)$$

Здесь $T(z|T_0)$ – энергия частицы на глубине Z (в модели непрерывного замедления), которая определяется из уравнения (2.1.23)

$$\frac{dT(z|T_0)}{dz} = -\bar{\varepsilon}[T(z|T_0)]; \quad T(z=0) = T_0. \quad (3.2.6)$$

Подставляя (3.2.6) в (3.2.5) получаем следующее выражение:

$$\bar{B}(z|T_0) = -N_0 \frac{T(z|T_0)}{dz} = -\frac{N_0}{R_0} \frac{dT(\xi|T_0)}{d\xi}, \quad (\xi = z/R_0). \quad (3.2.7)$$

Таким образом, при сделанных выше допущениях, распределение потерянной энергии $\bar{B}(z|T_0)$ определяется значением величины тормозной способности среды $\bar{\varepsilon}[T(z)]$ при энергии $T(z)$, вычисленной в приближении непрерывного замедления, или производной (с обратным знаком) от величины этой энергии. Следовательно, в приближении непрерывного замедления величина $\bar{B}(z|T_0)$ определяется быстротой убывания энергии частиц с увеличением глубины.

Для нерелятивистских частиц, в соответствии с (2.1.41) $T(z) = T_0 \sqrt{1 - z/R_0}$. Поэтому из (3.2.7) сразу получаем, что

$$\bar{B}(z) = N_0 \frac{T_0}{2R_0\sqrt{1-\xi}} = N_0 \frac{\bar{\epsilon}_0}{\sqrt{1-\xi}}. \quad (3.2.8)$$

В (3.2.8) учтено, что для нерелятивистских частиц $\bar{\epsilon}_0 = T_0 / 2R_0$.

Вид кривой Брэгга можно получить иначе, используя формулу (3.2.4). Учитывая, что в соответствии с (2.1.19) $N(z; R|R_0) = N_0 \delta(R_0 - R - z)$, из (3.2.4) получаем

$$\bar{B}(z) = N_0 \int_0^{\infty} \delta\{R_0 - R - z\} dR = N_0 \bar{\epsilon}(R_0 - z), \quad (0 \leq z < R_0). \quad (3.2.9)$$

Таким образом, для определения распределения поглощенной энергии по глубине по формуле (3.2.9), необходимо знать зависимость тормозной способности вещества от остаточного пробега частиц. Для нерелятивистских частиц в соответствие с (2.1.39) $\bar{\epsilon}(R) = T_0 / 2\sqrt{R_0 R}$. Подставляя выражение в (3.2.9), естественно получим результат (3.2.8).

Для частиц произвольных энергий значение $T(\xi)$ определяется формулой (2.1.71), которую можно записать в виде

$$T(\xi) = T_0 \frac{1}{2(1+E_0)} \left\{ E_0 + \sqrt{(1-\xi)[(2+E_0)^2 - \xi E_0^2]} \right\}, \\ (E_0 = T_0 / mc^2). \quad (3.2.10)$$

Подставляя (3.2.10) в (3.1.9), получим

$$\bar{B}(\xi|T_0) = N_0 \frac{T_0}{2R_0(2+E_0)} \frac{2(1+E_0) + (1-\xi)E_0^2}{\sqrt{(1-\xi)[4(1+E_0) + (1-\xi)E_0^2]}}, \\ (0 \leq \xi < 1). \quad (3.2.11)$$

Для нерелятивистских частиц ($E_0 \ll 1$) из (3.2.11) получаем прежний результат (3.2.8). Для ультрарелятивистских частиц ($T_0, T \gg mc^2$), в той области глубин, где они ещё остаются ультрарелятивистскими, т.е. когда $(1-\xi) \cdot E_0 \gg 1$, из формулы (3.2.10) получаем, что

$$\bar{B}(\xi | T_0 \gg m c^2) \approx N_0 T_0 / R_0, \quad (1 - \xi \gg m c^2 / T_0). \quad (3.2.12)$$

Этот же результат конечно получается из формулы (3.2.7), если учесть, что для ультрарелятивистских частиц $\bar{\varepsilon}(T) \approx \bar{\varepsilon}_0 = T_0 / R_0 = \text{const}$ и $T(\xi | T_0) = T_0 \cdot (1 - \xi)$.

Как видно из формулы (3.2.8), больше всего энергии выделяется на конечном участке, когда Z приближается к полному пробегу R_0 . При $z = R_0$ величина $\bar{B}(z)$ имеет особенность: $\bar{B}(z \rightarrow R_0) \rightarrow \infty$. Однако эта особенность не физическая – энергия, поглощенная в слое сколь угодно малой толщины вблизи глубины $z = R_0$ конечна. Расходимость величины $\bar{B}(z)$ при $z \rightarrow R_0$ является прямым следствием модели непрерывного замедления и исчезает при учете вероятностного характера процесса неупругих столкновений или при учете всегда реально имеющегося разброса частиц по энергиям в падающем пучке [2, гл. 7, с. 196–197].

Кривая Брэгга при облучении поверхности немоноэнергетическим потоком частиц

Разброс по пробегам не обязательно возникает из-за флуктуаций потерь энергии при неупругих столкновениях частиц с атомными электронами. Он может быть также вызван энергетическим разбросом частиц в падающем пучке. Наиболее просто и наглядно влияние немоноэнергетичности падающего пучка на вид кривой Брэгга можно учесть в рамках модели непрерывного замедления. Вычислим вид кривой Брэгга при произвольном энергетическом распределении в падающем пучке – $N(z = 0; T) = N_{\text{пад}}(T)$. Тогда, в соответствие с (2.1.12) энергетический спектр частиц на глубине Z определяется выражением

$$N(z; T) = \frac{\bar{\varepsilon}[T^*(z; T)]}{\bar{\varepsilon}(T)} N_{\text{пад}}[T^*(z; T)]. \quad (3.2.13)$$

Величина $T^*(z; T)$ – такая энергия частиц в падающем пучке, при которой энергия этих частиц на глубине z равна T . Значение $T^*(z; T)$ определяется из уравнения

$$\int_T^{T^*} \frac{dT''}{\bar{\varepsilon}(T'')} = z. \quad (3.2.14)$$

Зная выражение для энергетического спектра частиц (3.2.13) на глубине z , можно определить вид кривой Брэгга по формуле (3.2.3). Подставляя (3.2.13) в (3.2.3), получаем

$$\bar{B}(z) = \int_0^{\infty} \bar{\varepsilon}[T^*(z; T)] N_{\text{пад}}[T^*(z; T)] dT. \quad (3.2.15)$$

Формула (3.2.15) определяет вид кривой Брэгга в приближении непрерывного замедления при облучении поверхности вещества потоком частиц с произвольным энергетическим распределением $N_{\text{пад}}(T)$ при произвольной зависимости тормозной способности среды от энергии.

Если на поверхность вещества падает моноэнергетический пучок частиц $N_{\text{пад}}(T) = N_0 \delta(T_0 - T)$, то из формулы (3.2.15) получаем, что

$$\bar{B}(z|T_0) = N_0 \bar{\varepsilon}(T_0) \int_0^{\infty} \delta[T_0 - T^*(z; T)] dT.$$

Но, в соответствии с (2.1.31)

$$\bar{\varepsilon}(T_0) \delta\{T_0 - T^*(z; T)\} = \delta \left\{ \int_T^{T_0} \frac{dT''}{\bar{\varepsilon}(T'')} - z \right\} = \bar{\varepsilon}(T) \delta[T - T(z|T_0)].$$

Поэтому

$$\bar{B}(z|T_0) = N_0 \int_0^{\infty} \bar{\varepsilon}(T') \delta[T' - T(z)] dT' = N_0 \bar{\varepsilon}[T(z)],$$

т.е. для величины $\bar{B}(z|T_0)$ получаем прежнее выражение (3.2.5).

Рассмотрим случай, когда на поверхность вещества падает широкий поток *нерелятивистских* частиц. Для нерелятивистских частиц $\bar{\varepsilon}(T) = \gamma^2 / 2R^0 T = \frac{0}{\varepsilon} \gamma^2 T$, где γ^2 – некоторая (любая) энергия, R^0 – соответствующий этой энергии полный пробег; $\frac{0}{\varepsilon}$ – тормозная способность среды для частиц с энергией γ^2 . Подставляя это выражение в (3.2.14), определим значение энергии T^* :

$$\int_T^{T^*} T'' dT'' = \frac{\gamma^2}{2R^0} z, \quad \text{т.е.} \quad T^* = \sqrt{T^2 + \frac{\gamma^2 z}{R^0}}. \quad (3.2.16)$$

Теперь из общей формулы (3.2.15) находим, что

$$\bar{B}(z) = \frac{\gamma^2}{2R^0} \int_0^\infty N_{\text{пад}} \left[\sqrt{T^2 + \frac{\gamma^2 z}{R^0}} \right] \frac{dT}{\sqrt{T^2 + \frac{\gamma^2 z}{R^0}}}. \quad (3.2.17)$$

Вводя в интеграле (3.2.17) новую переменную интегрирования

$$T' = \sqrt{T^2 + \frac{\gamma^2 z}{R^0}}, \quad \frac{dT}{\sqrt{T^2 + \frac{\gamma^2 z}{R^0}}} = \frac{dT'}{\sqrt{T'^2 - \frac{\gamma^2 z}{R^0}}},$$

запишем формулу (3.2.17) в виде

$$\bar{B}(z) = \frac{\gamma^2}{2R^0} \int_{\gamma^2 \sqrt{z/R^0}}^\infty \frac{N_{\text{пад}}(T')}{\sqrt{T'^2 - \frac{\gamma^2 z}{R^0}}} dT'. \quad (3.2.18)$$

Формула (3.2.18) определяет вид кривой Брэгга в приближении непрерывного замедления при облучении поверхности вещества потоком *нерелятивистских* частиц с *произвольным* энергетическим распределением $N_{\text{пад}}(T)$, когда $\bar{\varepsilon}(\gamma) \sim 1/\gamma^2$ (γ – произвольная энергия, R^0 – соответствующий ей полный пробег).

При облучении поверхности вещества моноэнергетическим потоком частиц $N_{\text{пад}}(T) = N_0 \delta(T' - T_0)$. Подставляя это равенство в (3.2.18) и полагая $\gamma^2 = T_0$, получим

$$\bar{B}(z|T_0) = \frac{N_0 T_0^2}{2R_0 \sqrt{T_0^2 - T_0^2 z / R_0}} = N_0 \frac{T_0}{2R_0 \sqrt{1 - z / R_0}} = N_0 \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\sqrt{1 - \xi}},$$

что полностью совпадает с (3.2.8).

Теперь, в качестве примера, рассмотрим случай, когда на поверхность вещества падает пучок частиц, имеющих *разброс по энергиям* в виде *гауссова* распределения с наиболее вероятной энергией $(T_{\text{пад}})_{\text{н.в.}} = T_0$ и дисперсией $\sigma_{\text{пад}}^2$:

$$N_{\text{пад}}(T) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{пад}}^2}} \exp\left[-\frac{(T - T_0)^2}{2\sigma_{\text{пад}}^2}\right]. \quad (3.2.19)$$

Относительный разброс по энергиям (ширина энергетического спектра падающего излучения) $\delta T_{\text{пад}} / T_{\text{пад}} = \sqrt{T_{\text{пад}}^2 - (\bar{T}_{\text{пад}})^2} / \bar{T}_{\text{пад}} = \sigma_{\text{пад}} / T_0$. Подставим (3.2.19) в общую формулу (3.2.18) для нерелятивистских частиц. Полагая затем $\gamma = T_0$ и вводя новую переменную интегрирования $u = T / T_0$, ($0 \leq u < \infty$), получим

$$\begin{aligned} \bar{B}(z) &= N_0 \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \int_{\sqrt{\xi}}^{\infty} \exp\left[-\frac{(u - 1)^2}{2\sigma_0^2}\right] \frac{du}{\sqrt{u^2 - \xi}}, \\ &\quad \left(\sigma_0^2 = \sigma_{\text{пад}}^2 / T_0^2\right). \end{aligned} \quad (3.2.20)$$

Поскольку при $\sigma_0 \rightarrow 0$

$$\lim_{\sigma_0 \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left[-\frac{(u - 1)^2}{2\sigma_0^2}\right] = \delta(u - 1),$$

то, как и должно быть, $\bar{B}(z|T_0; \sigma_0 \rightarrow 0) = N_0 \bar{\varepsilon}_0 / \sqrt{1 - \xi}$.

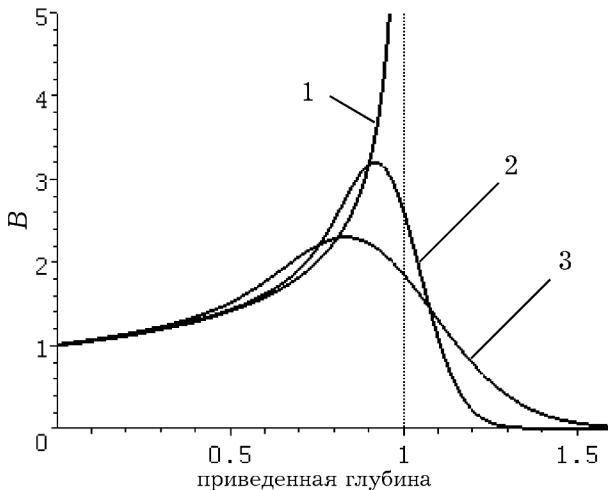


Рис. 3.2.1. Кривые Брэгга в модели непрерывного замедления:
кривая 1 – облучение поверхности моноэнергетическим пучком ($\sigma_0 = 0$) ;
кривые 2, 3 – облучение поверхности гауссовым пучком
(2 – $\sigma_0 = 0,05$, 3 – $\sigma_0 = 0,1$)

На рис. 3.2.1 представлены кривые Брэгга $\bar{B}(\xi) / N_0 \bar{\epsilon}_0$. Кривая 1 – расчет по формуле (3.2.8) при моноэнергетическом облучении поверхности вещества. Кривые 2, 3 – расчет по формуле (3.2.20) при облучении поверхности пучком частиц, имеющим гауссов разброс по энергиям при различных значениях дисперсии σ_0 (относительного разброса по энергиям $\sigma_{\text{пад}} / T_0$). Кривая 2 – $\sigma_0 = 0,05$, кривая 3 – $\sigma_0 = 0,1$. Из рисунка видно, что основное отличие между кривыми 1 и 2, 3 имеет место в области глубин $\xi = z / R_0 \sim 1$. В то время как кривая Брэгга $\bar{B}(\xi)$ при $\sigma_0 = 0$ (кривая 1) неограниченно вырастает при $\xi \rightarrow 1$ и определена только в области глубин $0 \leq \xi < 1$, кривые Брэгга 2, 3 при немоноэнергетическом падающем потоке, не имеют особенностей и определены во всей области глубин, в том числе и при $\xi > 1$, т.е. $z > R_0$. (Напомним, что R_0 – полный пробег частиц с начальной энергией T_0 , т.е. с величиной

наиболее вероятной энергии в падающем пучке.) Эта две кривые сначала возрастают по тому же закону, что и кривая 1. При некоторых значениях $\xi_{2,3}^* < 1$ кривые 2, 3 имеют максимум и затем начинают монотонно убывать. Таким образом, кривая Брэгга, вычисленная по формуле (3.2.20), уже не имеет особенности при $z = R_0$. В рассмотренном случае облучения поверхности потоком частиц, имеющим гауссово распределение по энергии, разброс по начальным энергиям приводит к разбросу полных пробегов частиц и особенность (3.2.8) “размывается”. В отличие от моноэнергетического пучка с энергией частиц T_0 теперь глубина проникновения частиц в вещество не ограничена значением $R_0 = R(T_0)$. Поскольку в падающем пучке есть частицы с энергией $T > T_0$, то глубина проникновения этих частиц превышает R_0 .

3.3. КРИВАЯ БРЭГГА В ДИФФУЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В предыдущем разделе было получено выражение для кривой Брэгга в приближении непрерывного замедления. В этом приближении совершенно не учитывается влияние вероятностного характера при неупругих столкновениях частиц с атомами среды. Поэтому при облучении поверхности вещества моноэнергетическим потоком частиц кривая Брэгга имела особенность на глубине $\xi = 1$, т.е. $z = R_0$. Ниже вычисляется кривая Брэгга с учетом флуктуаций потерь энергии при неупругих столкновениях. Показано, что даже при облучении поверхности вещества моноэнергетическим потоком частиц с энергией T_0 кривая Брэгга не имеет особенностей и представляет собой плавную функцию глубины, имеющую максимум при $\xi < 1$, т.е. при $z < R_0$.

Для учета влияния вероятностного характера неупругих столкновений тяжелых частиц, достаточно использовать диффузионное приближение. В диффузионном приближении по энергии, уравнение переноса в приближении «прямо-вперед» имеет вид

$$\frac{\partial N(z; T)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial T} \{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \} + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \bar{\varepsilon}^2(T) \frac{\partial}{\partial T} N(z; T) \right\}. \quad (3.3.1)$$

Подставляя (3.3.1) в основную формулу (3.1.2), после интегрирования по частям будем иметь

$$\begin{aligned} \bar{B}(z) &= \left[T \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) + \frac{T}{2} \bar{\varepsilon}^2(T) \frac{\partial N}{\partial T} + \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}^2(T) N \right]_0^\infty + \\ &+ \int_0^\infty \left\{ \bar{\varepsilon}(T') - \frac{1}{2} \frac{\partial \bar{\varepsilon}^2(T')}{\partial T'} \right\} N(z; T') dT'. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в (3.3.1) равно нулю. Для нерелятивистских частиц $\bar{\varepsilon}^2(T) = \text{const}$, так что $\partial \bar{\varepsilon}^2(T) / \partial T = 0$. Для частиц ультрарелятивистских энергий $\bar{\varepsilon} = \text{const}$ $\bar{\varepsilon}^2(T) \sim T$. При этом $\partial \bar{\varepsilon}^2 / \partial T \ll \bar{\varepsilon}$. Поэтому получаем

$$\bar{B}(z) \approx \int_0^\infty \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) dT. \quad (3.3.2)$$

Таким образом, и в диффузионном приближении удельная поглощенная энергия $\bar{B}(z)$ по-прежнему определяется формулой (3.2.3), как в модели непрерывного замедления. Различие состоит в том, что величина $N(z; T)$, входящая в (3.3.2), есть дифференциальная плотность потока излучения, являющаяся решением уравнения (3.3.1), т.е. вычисленная с учетом *флуктуаций* потеря энергии при неупругих столкновениях. Можно показать, что формула (3.3.2) сохраняет свой вид и в общем случае, когда интеграл неупругих столкновений записывается в виде интегрального оператора [2, гл. 7, с. 176], а не только в приближении Фоккера – Планка.

Кривая Брэгга в самосогласованном гауссовском приближении

Пусть падающий на поверхность вещества пучок частиц является моноэнергетическим: $N_{\text{пад}}(T) = N_0 \delta(T - T_0)$. Вычислим вид кривой Брэгга в самосогласованном гауссовом приближении, когда энергетический спектр частиц на глубине Z определяется выражением (2.6.26)

$$N(z, T | T_0) = \frac{N_0}{\bar{\varepsilon}(T) \sqrt{2\pi\sigma_R^2(z)}} \exp \left\{ -\frac{[R_0 - R(T) - z]^2}{2\sigma_R^2(z)} \right\}, \quad (3.3.3)$$

где

$$R(T) = \int_0^T \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}(T')}, \quad \sigma_R^2(z) = \int_0^{T_0} \frac{\bar{\varepsilon}^2(T')}{[\bar{\varepsilon}(T')]^3} dT'. \quad (3.3.4)$$

Распределение (3.3.3) с необходимой на практике точностью описывает энергетический спектр в толстых слоях и является основой большинства численных и аналитических расчетов взаимодействия потоков быстрых тяжелых заряженных частиц с веществом.

Подставляя $N(z, T)$ в формулу (3.3.2), получим

$$\begin{aligned} \bar{B}(z | T_0) &= \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_R^2(z)}} \int_0^{T_0} \exp \left\{ -\frac{[R_0 - R(T) - z]^2}{2\sigma_R^2(z)} \right\} dT, \\ R_0 &= \int_0^{T_0} \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}(T')}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Выражение (3.3.5) позволяет определить вид кривой Брэгга с учетом *флуктуаций потерь энергии* при неупругих столкновениях и облучения поверхности моноэнергетическим потоком частиц с начальной энергией T_0 , в случае *произвольной* зависимости тормозной способности среды $\bar{\varepsilon}(T)$ от энергии.

Вычислим распределение поглощенной энергии по глубине для нерелятивистских частиц, когда $R(T) = R_0 \cdot (T/T_0)^2$. В этом случае выражение (3.3.5) будет выглядеть так:

$$\bar{B}(z|T_0) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_R^2(z)}} \int_0^{T_0} \exp\left\{-\frac{[R_0 - R_0 \cdot (T/T_0)^2 - z]^2}{2\sigma_R^2(z)}\right\} dT, \quad (3.3.6)$$

$$\sigma_R^2(z|\nu) = \frac{z(2R_0 - z)}{2\nu} = \frac{\xi(2 - \xi)}{2\nu} R_0^2. \quad (3.3.7)$$

Вводя новую переменную интегрирования $u = T/T_0$, ($0 \leq u \leq 1$), запишем выражение (3.3.6) для распределения поглощенной энергии $\bar{B}(z)$ в виде ($\bar{\varepsilon}_0 = T_0/2R_0$):

$$\begin{aligned} \bar{B}(z) &= \frac{2N_0\bar{\varepsilon}_0}{\sqrt{2\pi\sigma_r^2(\xi)}} \int_0^1 \exp\left\{-\frac{[1 - u^2 - \xi]^2}{2\sigma_r^2(\xi)}\right\} du, \\ \sigma_r^2(\xi) &= \frac{\sigma_R^2}{R_0^2} = \frac{\xi(2 - \xi)}{2\nu}. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Интеграл в (3.3.8) вычисляется аналитически. В результате получаем, что

$$\bar{B}(z) = \frac{N_0\bar{\varepsilon}_0}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\sigma_r(\xi)}} G\left(\frac{1 - \xi}{\sigma_r(\xi)}\right), \quad \sigma_r(\xi) = \sqrt{\frac{\xi(2 - \xi)}{2\nu}}. \quad (3.3.9)$$

Функция $G(x)$ определяется выражениями [2, гл. 7, с. 199]

$$G(x > 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \sqrt{\frac{x}{2}} \left\{ I_{-1/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) + I_{1/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) \right\}; \quad (3.3.10)$$

$$G(x < 0) = \exp\left(-\frac{x^2}{4}\right) \sqrt{\frac{|x|}{2}} \left\{ I_{-1/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) - I_{1/4}\left(\frac{x^2}{4}\right) \right\}. \quad (3.3.11)$$

Здесь $I_\mu(x)$ – модифицированные функции Бесселя. Таким образом, в приближении $L_{\text{ион}} = \text{const}$ распределение потерь энергии нерелятивистских частиц выражается через универсальную функцию $G(x)$. График универсальной функции $G(x)$ представлен на рис. 3.3.1.

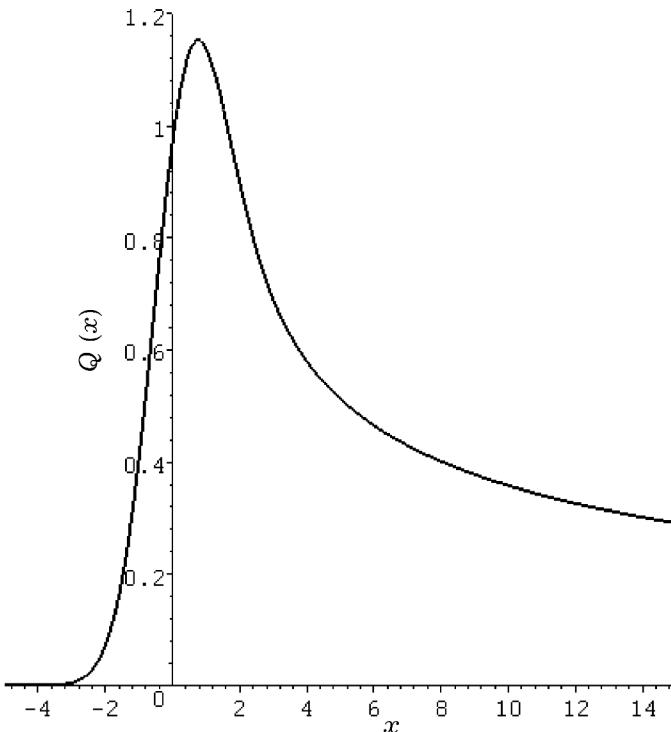


Рис. 3.3.1. График универсальной функции $G(x)$

Проанализируем вид кривой Брэгга вдали от её максимума.

Рассмотрим сначала область глубин $\xi < 1$, когда $1 - \xi \gg 1/\sqrt{2v}$. На таких глубинах

$$x = \frac{1 - \xi}{\sigma_r(\xi)} \gg 1. \quad (3.3.12)$$

Используя асимптотическое выражение для модифицированных функций Бесселя

$$I_\mu(x \gg 1) \approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}},$$

из (3.3.10) находим, что

$$G(x \gg 1) \approx \frac{2}{\sqrt{\pi x}}. \quad (3.3.13)$$

Следовательно, в соответствии с (3.3.9), получим

$$\bar{B}(z) \approx N_0 \frac{\bar{\varepsilon}_0}{\sqrt{1-\xi}}, \quad (R_0 - z \gg R_0 / \sqrt{2\nu}). \quad (3.3.14)$$

Полученное выражение для кривой Брэгга $\bar{B}(z)$ в точности совпадает с формулой (3.2.8) в приближении непрерывного замедления, так как в рассматриваемой области глубин полный интегральный поток равен N_0 , т.е. флюктуации потерь энергии несущественны.

Напротив, в область глубин $\xi - 1 \gg 1/\sqrt{2\nu}$ (т.е. $z > R_0$) частицы проникают именно из-за наличия флюктуаций потерь энергии при неупругих столкновениях. В этой области глубин $x < 0$, причем

$$|x| = \frac{\xi - 1}{\sigma_r(\xi)} \approx \frac{\xi - 1}{\sigma_r(\xi = 1)} = (\xi - 1)\sqrt{2\nu} \gg 1. \quad (3.3.15)$$

В этом случае для вычисления формы кривой Брэгга нужно воспользоваться формулой (3.3.11) при $|x| \gg 1$. В пределе $\xi - 1 \gg \gg 1/\sqrt{2\nu}$ можно получить [2, гл. 7, с. 200] следующее асимптотическое выражение для $\bar{B}(z)$:

$$\bar{B}(z) \approx N_0 \bar{\varepsilon}_0 \frac{\pi}{2\sqrt{\xi - 1}} \exp\left\{-\nu(\xi - 1)^2\right\}, \quad (\xi - 1 \gg 1/\sqrt{2\nu}). \quad (3.3.16)$$

На рис. 3.3.2 представлен вид кривой Брэгга $\bar{B}(z)/N_0 \bar{\varepsilon}_0$ от приведенной глубины $\xi = z/R_0$ для значения параметра $\nu = 100$ (кривая 1), рассчитанная по формуле (3.3.9) с учетом влияния флюктуа-

ций потерь энергии при неупругих столкновениях. Кривая 2 – расчет по формуле (3.2.8) в приближении непрерывного замедления.

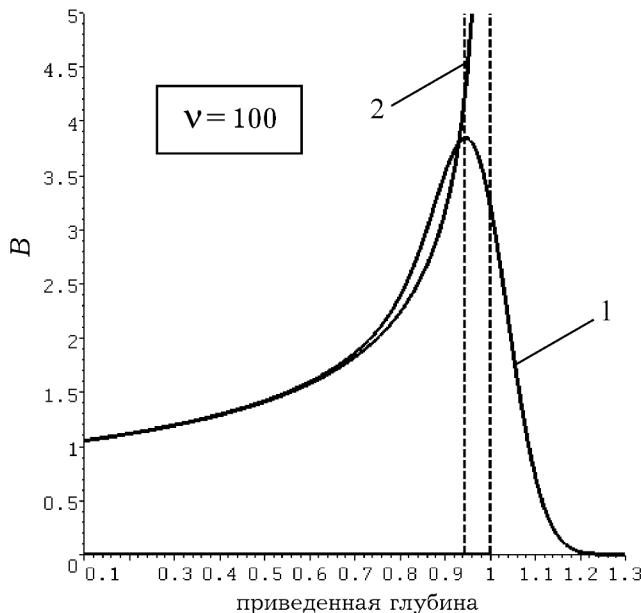


Рис.3.3.2. Кривая Брэгга для нерелятивистских частиц: кривая 1 – расчет по формуле (3.3.9); кривая 2 – расчет по формуле (3.2.8) в приближении непрерывного замедления. Левая штриховая вертикальная линия определяет положение максимума кривой Брэгга, рассчитанное по формуле (3.3.17).

Видим, что учет вероятностного характера неупругих столкновений с атомами среды приводит к тому, что расходимость величины $\bar{B}(z)$ при $z = R_0$ исчезает. В области $\xi \leq \approx 0,7$ обе кривые практически совпадают.

Из общей формулы (3.3.9) можно показать, что пик кривой Брэгга находится на глубине

$$\xi_{\max} \approx 1 - 0,8\sigma_r (\xi = 1) = 1 - \frac{0,8}{\sqrt{2v}} \approx 1 - \frac{0,57}{\sqrt{v}}. \quad (3.3.17)$$

В рассматриваемом случае $\xi_{\max} \approx 1 - 0,06 = 0,94$, что соответствует положению максимума на рисунке.

Плотность поглощенной энергии в максимуме распределения

$$\bar{B}_{\max} \approx \frac{N_0 T_0}{2R_0} \frac{1}{\sqrt{\sigma_r(\xi=1)}} = N_0 \bar{\varepsilon}_0 \sqrt[4]{2\nu}. \quad (3.3.18)$$

При $\nu = 100$ значение $\bar{B}_{\max} / N_0 \bar{\varepsilon}_0 \approx \sqrt[4]{2\nu} \approx 3,8$, что соответствует значению \bar{B}_{\max} на рисунке.

Поскольку $\bar{B}(z=0) = N_0 \bar{\varepsilon}_0$, то отношение

$$\frac{\bar{B}_{\max}}{\bar{B}(z=0)} \sim \nu^{1/4} \sim \left(\frac{m}{m_e} L_{\text{ион}}(Z) \right)^{1,4}, \quad (3.3.19)$$

слабо (логарифмически) зависит от атомного номера Z атомов среды.

IV. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАНОВИВШИХСЯ ЧАСТИЦ ПО ГЛУБИНЕ

4.1. ВЕРОЯТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВНEDРЕННЫХ ЧАСТИЦ ПО ГЛУБИНЕ ПРОНИКНОВЕНИЯ

Информация о распределении остановившихся (внедренных) частиц по глубине проникновения в вещество представляет интерес для многих прикладных задач ядерной физики, радиационной физики твердого тела и т.д. Это связано с различными приложениями (спектрометрия заряженных частиц, расчет детекторов излучения, проблемы ионной имплантации при создании веществ с заданными физическими свойствами методом радиационного облучения и др.). Помимо этого многие исследуемые физические процессы, протекающие в веществе под действием потоков заряженных частиц, происходят на последнем участке пути, т.е. после практически полного замедления и их остановки.

Термин “остановившиеся частицы” достаточно условен. Обычно под остановившимися понимают частицы, замедлившиеся при движении в среде до некоторой определенной энергии T_* , такой, что дальнейшее торможение и диффузия за характерное время практически не изменяют наблюдаемого в данном эксперименте распределения по глубине проникновения их в вещество. Так, для быстрых протонов с начальной энергией $T_0 = 100 \text{ МэВ}$ «остановившимися» можно считать уже частицы, замедлившиеся до энергии $\sim 1 \text{ МэВ}$. Остаточный пробег таких частиц примерно в 10^4 раз меньше полного пробега R_0 и, что важно, в $\sim 10^2$ раз меньше соответствующего *разброса по глубине* их проникновения в среду.

Если поверхность вещества облучается *моноэнергетическим* потоком частиц с начальной энергией T_0 , то разброс по глубине их проникновения в вещество определяется *двумя статистическими* факторами – многократным кулоновским рассеянием, которое приводит к «искривлению траектории» частиц, и вероятностным характером потерь энергии при неупругих столкновениях с атомами вещества. Те частицы, которые за счет многократного рассеяния

относительно сильно изменили направление движения, останавливаются на меньших глубинах. В настоящем пособии рассматривается вопрос о вычислении распределения частиц по глубине проникновения в вещество в рамках приближения “прямо-вперед”. Тогда в силу прямолинейности распространения частиц первый из указанных выше факторов полностью отсутствует. Поэтому распределение остановившихся частиц при облучении поверхности моноэнергетическим потоком определяется только вероятностным характером неупругих столкновений. Влияние многократного рассеяния и совместное действие обоих факторов на распределение остановившихся частиц подробно изложено в монографии [2, гл. 4, 6]. Ещё одним дополнительным фактором, приводящим к разбросу внедренных частиц по глубине, является облучение поверхности вещества потоком частиц, имеющим *начальный разброс* по энергиям.

Пусть на поверхность полубесконечного слоя вещества падает *по нормали* к поверхности (вдоль оси Z) поток частиц с произвольным энергетическим распределением $N_{\text{пад}}(T)$. Число частиц, влетающих в вещество (через единичную площадку) в единицу времени, т.е. полный поток падающего излучения, есть

$$N_{\text{пад}} = \int_0^{\infty} N_{\text{пад}}(T) dT = \int_0^{\infty} N_{\text{пад}}(R) dR. \quad (4.1.1)$$

Здесь $N_{\text{пад}}(R)$ – распределение падающего излучения по пробегам, которое связано с распределением по энергиям обычным соотношением $N_{\text{пад}}(T) dT = N_{\text{пад}}(R) dR$.

В приближении «прямо-вперед» *отражение отсутствует*. Поэтому единственным безальтернативным процессом уменьшения потока частиц с глубиной, является постепенное выбывание всех частиц из пучка за счет процесса их *торможения*, который приводит в конечном итоге к остановке частиц. Следовательно, величина $N_{\text{пад}}$ определяет *полное число частиц, остановившихся в веществе* в единицу времени. Из-за вероятностного характера ионизационного торможения частицы останавливаются на различных глубинах, даже если начальная энергия частиц была одинакова, т.е.

при облучении поверхности вещества моноэнергетическим потоком частиц.

Разброс остановившихся частиц по глубине Z проникновения в вещество определяется функцией распределения $W(z)$. Величина $W(z) dz$ есть вероятность того, что частица остановится на глубине Z в слое вещества толщиной dz . Следовательно, по определению

$$W(z) \Delta z = \frac{\Delta n_{\text{ост}}}{N_{\text{пад}}} . \quad (4.1.2)$$

Здесь $\Delta n_{\text{ост}}$ – число остановившихся частиц в слое ΔZ на глубине Z в единицу времени.

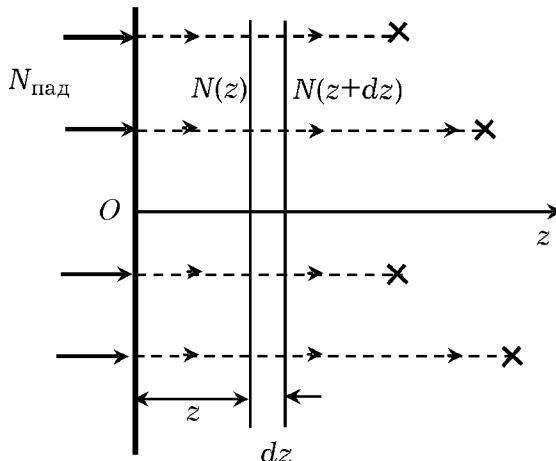


Рис. 4.1.1. Условное изображение распространения пучка частиц, падающего на поверхность вещества. Крестиками отмечены места остановки частиц, разбросанные из-за вероятностного характера процесса неупругих столкновений

Величина $\Delta n_{\text{ост}}$ равна разности входящих в слой и выходящих из него числа частиц (через единичную площадку) в единицу времени, т.е. разности входящего и выходящего потоков (рис. 4.1.1):

$$\Delta n_{\text{ост}} = N(z) - N(z + \Delta z) = -\frac{dN(z)}{dz} \Delta z. \quad (4.1.3)$$

Подставляя (4.1.3) в (4.1.2), получаем

$$W(z) = -\frac{1}{N_{\text{пад}}} \frac{dN(z)}{dz}, \quad (4.1.4)$$

где

$$N(z) = \int_0^{\infty} N(z; T) dT = \int_0^{\infty} N(z; R) dR - \quad (4.1.5)$$

полный поток частиц на глубине Z .

Из формулы (4.1.4) следует, что распределение по глубине остановившихся частиц определяется быстротой убывания полного потока.

Интегрируя (4.4.4) по глубине, получим

$$\int_0^{\infty} W(z) dz = -\frac{1}{N_{\text{пад}}} \{N(z \rightarrow \infty) - N(z = 0)\}.$$

Величина $N(z \rightarrow \infty) = 0$. Поскольку в рассматриваемом приближении отражение частиц отсутствует, то $N(z = 0) = N_{\text{пад}}$. В результате получаем, что $W(z)$ удовлетворяет естественному условию нормировки

$$\int_0^{\infty} W(z) dz = 1. \quad (4.1.6)$$

4.2. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАНОВИВШИХСЯ ЧАСТИЦ В ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНОГО ЗАМЕДЛЕНИЯ

Вычислим сначала распределение остановившихся частиц по глубине проникновения в вещество в приближении непрерывного замедления. Для этого удобно воспользоваться уравнением переноса, которое в приближении непрерывного замедления имеет вид

$$\frac{\partial N(z; T)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial T} \{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \}. \quad (4.2.1)$$

Интегрируя (4.2.1) по энергиям с учетом формулы (4.1.5), получим

$$\frac{dN(z)}{dz} = [\bar{\varepsilon}(T) N(z; T)]_{T=0}^{\infty}.$$

Поскольку при $T \rightarrow \infty$ величина $\bar{\varepsilon}(T) N(z; T) = 0$, то

$$\frac{dN(z)}{dz} = -[\bar{\varepsilon}(T) N(z; T)]_{T \rightarrow 0}. \quad (4.2.2)$$

Подставляя (4.2.2) в основную формулу (4.1.4), будем иметь

$$W(z) = \frac{1}{N_{\text{пад}}} \{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \}_{T \rightarrow 0}. \quad (4.2.3)$$

Выражение (4.2.3) позволяет рассчитать распределение тяжелых частиц по глубине внедрения в вещество, если известно их распределение по энергиям $N(z; T)$. Учитывая, что распределение $N(z; T)$ связано с распределением частиц по пробегам соотношением $\bar{\varepsilon}(T) N(z; T) = N(z; R)$, формулу (4.2.3) можно записать в другом, полностью эквивалентном виде

$$W(z) = \frac{N(z; R = 0)}{N_{\text{пад}}}. \quad (4.2.4)$$

Выражение (4.2.4) позволяет определить распределение остановившихся частиц по глубине, если известно их распределение $N(z; R)$ по остаточным пробегам.

Распределение остановившихся частиц при облучении поверхности моноэнергетическим потоком

Получим сначала выражение для $W(z)$ при облучении поверхности вещества моноэнергетическим потоком частиц с энергией T_0 . В этом случае, в соответствии с (2.1.27), полный поток частиц

$N(z) = N_0 \eta(R_0 - z)$, здесь $\eta(R_0 - z)$ – единичная функция. Учитывая, что $d[\eta(R_0 - z)]/dz = -\delta(R_0 - z)$, из общей формулы (4.1.4), находим, что

$$W(z) = -\frac{1}{N_0} \frac{dN(z)}{dz} = \delta(R_0 - z), \quad R_0 = \int_0^{T_0} dT' / \varepsilon(T'). \quad (4.2.5)$$

Распределение (4.2.5) удовлетворяет условию нормировки (4.1.6).

Полученный результат означает, что поскольку в модели *непрерывного замедления* все падающие на поверхность частицы с одинаковой энергией T_0 проходят до полной остановки один и тот же путь, равный полному пробегу R_0 , то вероятность их остановки отлична от нуля только на глубине $z = R_0$. Таким образом, наличие дельта-функции в выражении (4.2.5) вызвано тем, что в рассматриваемой задаче (приближение «прямо-вперед», приближение непрерывного замедления, облучение поверхности *моноэнергетическим* потоком частиц) нет *ни одного* фактора, который приводил бы к разбросу частиц по глубине их проникновения в вещество.

Естественно, что если для вычисления распределения $W(z)$ использовать формулу (4.2.4), то учитывая, что в соответствие с (2.1.19) $N(z; R) = N_0 \delta(R_0 - R - z)$, приходим к прежнему результату (4.2.5).

Распределение остановившихся частиц при облучении поверхности не моноэнергетическим потоком

Получим выражение для $W(z)$ в более общем случае, когда на поверхность вещества падает пучок частиц, имеющий *произвольный разброс* по энергиям $N_{\text{пад}}(T)$. В этом случае удобно воспользоваться формулой (4.2.4). При облучении вещества потоком частиц, падающих по нормали к поверхности, в соответствии с (2.1.11) $N(z; R) = N_{\text{пад}}(z + R)$. Полагая здесь $R = 0$, получим

$$W(z) = \frac{N_{\text{пад}}(z)}{N_{\text{пад}}}, \quad N_{\text{пад}} = \int_0^{\infty} N_{\text{пад}}(R) dR. \quad (4.2.6)$$

Распределение (4.2.6) удовлетворяет условию нормировки (4.1.6), поскольку

$$N_{\text{пад}} = \int_0^{\infty} N_{\text{пад}}(R) dR = \int_0^{\infty} N_{\text{пад}}(T) dT. \quad (4.2.7)$$

Таким образом, для вычисления величины $W(z)$, достаточно в распределении падающих частиц *по пробегам* $N_{\text{пад}}(R)$ положить $R = z$. Полученный результат допускает простое физическое объяснение. Действительно, в соответствии с формулой (4.2.5), частицы падающего пучка с остаточным пробегом R останавливаются на глубине $Z = R$. В модели непрерывного замедления распределение *остановившихся частиц* $W(z)$ воспроизводит распределение *падающего излучению* $N_{\text{пад}}(R)$ по пробегам.

Поскольку $N_{\text{пад}}(R) = \bar{\varepsilon}(T)N_{\text{пад}}(T)$, то формулу (4.2.6) можно записать в виде

$$W(z) = \frac{\bar{\varepsilon}[T(z)]N_{\text{пад}}[T(z)]}{N_{\text{пад}}}, \quad (4.2.8)$$

где значение $T(z)$ определяется из уравнения

$$\int_0^{T(z)} \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}(T')} = z. \quad (4.2.9)$$

Следовательно, величина $T(z)$ определяет такую энергию частиц в *падающем пучке*, при которой они достигают глубины Z . Значение энергии $T(z)$ соответствует остаточному пробегу $R = z$.

Заметим, что распределение в виде (4.2.8) можно получить из общей формулы (2.1.12) для распределения частиц по энергиям:

$$N(z; T) = \frac{\bar{\varepsilon}[T^*(z; T)]}{\bar{\varepsilon}(T)} N_{\text{пад}}[T^*(z; T)]. \quad (4.2.10a)$$

Значение $T^*(z; T)$ определяется из уравнения

$$\int_T^{T^*(z; T)} \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}(T')} = z. \quad (4.2.10b)$$

Подставляя (4.2.10a) в (4.2.3) и учитывая, что $T^*(z; T=0) = T(z)$, приходим к формуле (4.2.8).

В качестве примера рассмотрим случай, когда на поверхность вещества падает пучок нерелятивистских частиц, имеющих разброс по энергиям в виде гауссова распределения (2.1.49) с наиболее вероятной энергией $(T_{\text{пад}})_{\text{н.в.}} = T_0$ и дисперсией $\sigma_{\text{пад}}^2$:

$$N_{\text{пад}}(u) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{пад}}^2}} \exp\left[-\frac{(u-1)^2}{2\sigma_{\text{пад}}^2}\right]. \quad (4.2.11)$$

Здесь

$$u = \frac{T}{T_0}, \quad \theta_{\text{пад}} = \frac{\sigma_{\text{пад}}}{T_0}. \quad (4.2.12)$$

Таким образом, u есть относительная энергия частиц, т.е. энергия в единицах T_0 . В общем случае, при произвольном значении дисперсии $\sigma_{\text{пад}}$, в соответствии с (2.1.51) полный поток в падающем пучке

$$N_{\text{пад}} = \frac{N_0}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\theta_{\text{пад}} \sqrt{2}} \right) \right\}. \quad (4.2.13)$$

Для вычисления величины $W(z)$ удобно воспользоваться формулой (4.2.3). Учитывая, что для нерелятивистских частиц в соответствии с (2.1.37) $\bar{\varepsilon}(T) = T_0^2 / 2R_0 T$ и используя формулу (2.1.60):

$$N(\xi; T) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{пад}}^2}} \frac{T}{\sqrt{T^2 + T_0^2 \cdot \xi}} \exp \left\{ -\frac{\left[\sqrt{T^2 + T_0^2 \cdot \xi} - T_0 \right]^2}{2\sigma_{\text{пад}}^2} \right\},$$

запишем

$$\bar{\varepsilon}(u) N(z; u) = \frac{N_0}{2R_0 \sqrt{2\pi\delta_{\text{пад}}^2}} \frac{1}{\sqrt{u^2 + \xi}} \exp \left\{ -\frac{\left[\sqrt{u^2 + \xi} - 1 \right]^2}{2\delta_{\text{пад}}^2} \right\},$$

$$(u = T / T_0). \quad (4.2.14)$$

Поскольку энергия в падающем пучке может быть любой, то $0 \leq u < \infty$. Полагая здесь $T = 0$, (т.е. $u = 0$) находим, что

$$\{\bar{\varepsilon}(T) N(z; T)\}_{T=0} = \frac{N_0}{2R_0 \sqrt{2\pi\xi\delta_{\text{пад}}^2}} \exp \left\{ -\frac{\left[\sqrt{\xi} - 1 \right]^2}{2\delta_{\text{пад}}^2} \right\}.$$

Подставляя это выражение в формулу (4.2.3), с учетом выражения (4.2.13) для полного падающего потока, приходим к следующему выражению для величины $W(\xi) = R_0 W(z)$:

$$W(\xi) = \frac{1}{1 + \operatorname{erf} \left(\frac{1}{\delta_{\text{пад}} \sqrt{2}} \right)} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi\delta_{\text{пад}}^2}} \exp \left[-\frac{(1 - \sqrt{\xi})^2}{2\delta_{\text{пад}}^2} \right] \right\},$$

$$\left(\xi = \frac{z}{R_0} \right). \quad (4.2.15)$$

В предельном случае, $\delta_{\text{пад}} \rightarrow 0$, находим, что

$$W(\xi) = \frac{\delta(1 - \sqrt{\xi})}{2} = \delta(\xi - 1), \text{ т.е. } W(z) = \delta(z - R_0),$$

$$(\delta_{\text{пад}} \rightarrow 0).$$

Здесь учтено, что и $\delta(\sqrt{\xi} - 1) = \delta(1 - \xi)/(\partial\sqrt{\xi}/\partial\xi) = 2\sqrt{\xi}\delta(1 - \xi)$. Проверим выполнение условия нормировки (4.1.6):

$$\int_0^\infty W(\xi) d\xi = \frac{1}{1 + \operatorname{erf}\left(\frac{1}{\delta_{\text{пад}}\sqrt{2}}\right)} \int_0^\infty \exp\left\{-\frac{(1-x)^2}{2\delta_{\text{пад}}^2}\right\} \frac{dx}{\sqrt{2\pi\delta_{\text{пад}}^2}} = 1.$$

Если относительный разброс по энергиям в падающем пучке не велик, т.е. $\delta_{\text{пад}} \ll 1$, то, как было показано ранее, с высокой степенью точности можно считать, что $N_{\text{пад}} \approx N_0$. Поскольку

$$\operatorname{erf}\left(\frac{1}{\delta_{\text{пад}}\sqrt{2}}\right) \approx 1, \quad (\delta_{\text{пад}} \ll 1),$$

то в этом случае из (4.2.15) получаем, что

$$W(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\xi}\sqrt{2\pi\delta_{\text{пад}}^2}} \exp\left\{-\frac{[1-\sqrt{\xi}]^2}{2\delta_{\text{пад}}^2}\right\}, \quad \left(\xi = \frac{z}{R_0}\right). \quad (4.2.16)$$

Результат (4.2.16) можно было получить иначе, используя формулу (4.2.4). Для этого нужно записать распределение падающих частиц по пробегам:

$$N_{\text{пад}}(R) = \bar{\varepsilon}(R)N_{\text{пад}}(T(R)). \quad (4.2.17)$$

Для нерелятивистских частиц в соответствии с (2.1.39) $\bar{\varepsilon}(R) = T_0 / 2\sqrt{R_0 R}$, $T = T_0\sqrt{R/R_0}$. Следовательно,

$$N_{\text{пад}}(R) = \frac{N_0}{2\sqrt{R_0 R}\sqrt{2\pi\delta_{\text{пад}}^2}} \exp\left[-\frac{(1-\sqrt{R/R_0})^2}{2\delta_{\text{пад}}^2}\right]. \quad (4.2.18)$$

Учитывая, что $N_{\text{пад}} \approx N_0$ и полагая $R = z$, из формулы (4.2.4) находим, что

$$W(z) = \frac{1}{2\sqrt{R_0}z\sqrt{2\pi\delta_{\text{пад}}^2}} \exp\left[-\frac{(1 - \sqrt{z/R_0})^2}{2\delta_{\text{пад}}^2}\right]. \quad (4.2.19)$$

Учитывая, что $z = \xi R_0$, выражение (4.2.19) сводится к (4.2.16).

Распределения (4.2.15), (4.2.16) имеют интегрируемую особенность при $\xi \rightarrow 0$, так как $W(\xi) \sim 1/\sqrt{\xi}$. Если $\delta_{\text{пад}} < 1/2$, то распределения (4.2.15), (4.2.16) имеют два локальных экстремума – минимум и максимум:

$$\xi_{\min} = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - 4\delta_{\text{пад}}^2}\right)^2}{4}; \quad \xi_{\max} = \frac{\left(1 + \sqrt{1 - 4\delta_{\text{пад}}^2}\right)^2}{4}. \quad (4.2.20)$$

Отношение значения $W(\xi)$ в максимуме распределения к $W(\xi)$ в его минимуме

$$\frac{W_{\max}}{W_{\min}} = \frac{1 - \sqrt{1 - 4\delta_{\text{пад}}^2}}{1 + \sqrt{1 - 4\delta_{\text{пад}}^2}} \left\{ \exp\left[\frac{\sqrt{1 - 4\delta_{\text{пад}}^2}}{2\delta_{\text{пад}}}\right] \right\}. \quad (4.2.21)$$

Из формул (4.2.20) следует, что распределение $W(\xi)$ имеет локальный минимум и максимум только если $\delta_{\text{пад}} > 1/2$. При $\delta_{\text{пад}} = 1/2$, $\xi_{\min} = \xi_{\max} = 1/4$. При таком значении дисперсии на глубине $\xi = 0,25$ распределение $W(\xi)$ имеет точку перегиба. При этом $W_{\min} = W_{\max} \approx 0,5$. Это отчетливо видно на рис. 4.2.1. В случае, если энергетический спектр падающего излучения достаточно широкий ($\delta_{\text{пад}} > 1/2$), распределение остановившихся частиц (4.2.15) представляет монотонно убывающую функцию глубины.

На рис. 4.2.1 представлены зависимость $W(\xi)$ (сплошная кривая), рассчитанная по формуле (4.2.15), и энергетический спектр падающего потока $n(u) = N_{\text{пад}}(u)/N_0$ (пунктирная кривая) для значения дисперсии в падающем потоке $\delta_{\text{пад}} = 0,5$.

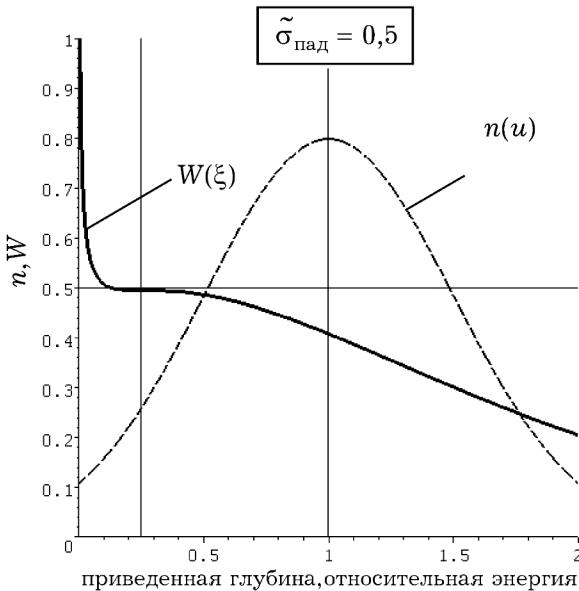


Рис. 4.2.1. Графики зависимости $W(\xi)$ и $n(u) = N_{\text{пад}}(u)/N_0$
при $\tilde{\sigma}_{\text{пад}} = \sigma_{\text{пад}} / T_0 = 0,5$

Из рисунка видно, что при $\tilde{\sigma}_{\text{пад}} = 1/2$ распределение $W(\xi)$ представляет собой монотонно убывающую функцию глубины. На глубине $\xi = 0,25$ кривая $W(\xi)$ имеет точку перегиба, в которой $W(\xi = 0,25) = 0,5$.

На рис. 4.2.2 представлены зависимость $W(\xi)$ (сплошная кривая), рассчитанная по формуле (4.2.15), и энергетический спектр падающего потока $n(u) = N_{\text{пад}}(u)/N_0$ (пунктирная кривая) для значения дисперсии в падающем потоке $\tilde{\sigma}_{\text{пад}} = 0,45$.

Из рисунка видно, что при $\tilde{\sigma}_{\text{пад}} = 0,45$ (в отличие от предыдущего случая $\tilde{\sigma}_{\text{пад}} = 0,5$) распределение $W(\xi)$ имеет явно выраженный минимум на глубине $\xi_{\min} = 0,08$ и максимум на

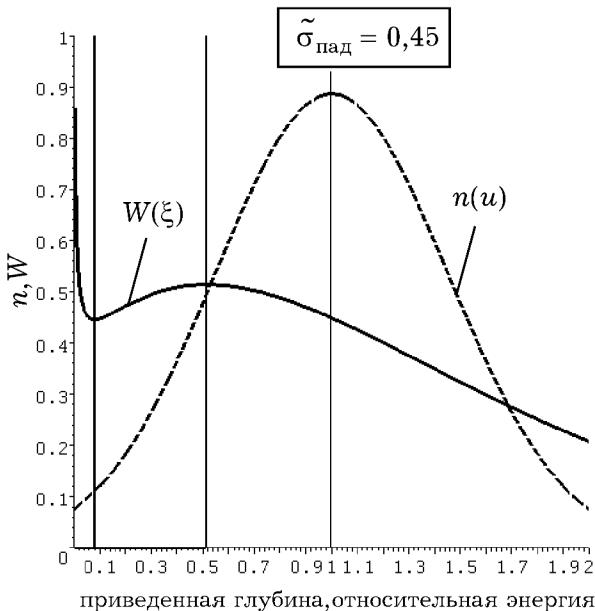


Рис. 4.2.2. Графики зависимости $W(\xi)$ и $n(u) = N_{\text{пад}}(u)/N_0$ при $\delta_{\text{пад}} = \sigma_{\text{пад}} / T_0 = 0,45$. Вертикальные линии соответствуют значениям минимума и максимума распределений

глубине $\xi_{\max} = 0,52$. Поскольку значение дисперсии близко к половине, то в соответствии с (4.2.21) $W_{\max} \approx 1,15W_{\min}$, т.е. значение распределения $W(\xi)$ в максимуме незначительно отличается от значения в минимуме. Однако это отличие резко возрастает с уменьшением дисперсии энергетического спектра падающего потока частиц, что видно из рис. 4.2.3.

Предлагаем читателю объяснить расходимость распределения $W(\xi)$ на малых глубинах при $\xi \rightarrow 0$.

На рис. 4.2.3 представлены зависимость $W(\xi)$ (сплошная кривая), рассчитанная по формуле (4.2.15), и энергетический спектр падающего потока $n(u) = N_{\text{пад}}(u)/N_0$ (пунктирная кривая) для значения дисперсии в падающем потоке $\delta_{\text{пад}} = 0,2$.

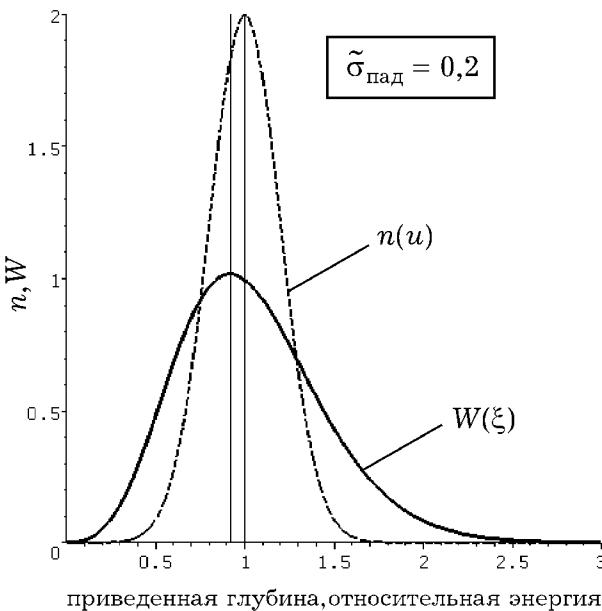


Рис. 4.2.3. Графики зависимости $W(\xi)$ и $n(u) = N_{\text{пад}}(u)/N_0$ при $\tilde{\sigma}_{\text{пад}} = \sigma_{\text{пад}} / T_0 = 0,2$. Вертикальные линии соответствуют значениям минимума и максимума распределений

Из рисунка видно, что при $\tilde{\sigma}_{\text{пад}} = 0,2$, (в отличие от предыдущего случая $\tilde{\sigma}_{\text{пад}} = 0,45$) распределение $W(\xi)$ имеет явно выраженный максимум на глубине $\xi_{\max} = 0,92$, величина которого определяется второй формулой (4.2.20). Что касается положения минимума распределения, то он находится на глубине $\xi_{\min} = 0,0017$ и поэтому не отображается на рисунке. Кроме того, значение распределения $W(\xi)$ в максимуме чрезвычайно велико по отношению к значению минимума распределения $W_{\max} \approx 4120 \cdot W_{\min}$! Поэтому в выбранном масштабе на рис. 4.2.3 невозможно заметить ни наличия минимума распределения $W(\xi)$, ни его особенность при $\xi \rightarrow 0$. Как видно из рис. 4.2.3,

распределение $W(\xi)$ явно асимметрично и вытянуто в область больших глубин – $\xi > \xi_{\max}$.

По мере уменьшения дисперсии в падающем потоке, значение ξ_{\max} все меньше отличается от единицы, т.е. от положения максимума падающего излучения. Так, например, при $\tilde{\sigma}_{\text{пад}} = 0,1$ величина $\xi_{\max} = 0,98$, $W_{\max} \approx 2 \cdot 10^{19} W_{\min}$, а само распределение становится практически симметричным относительно положения своего максимума (рис. 4.2.4).

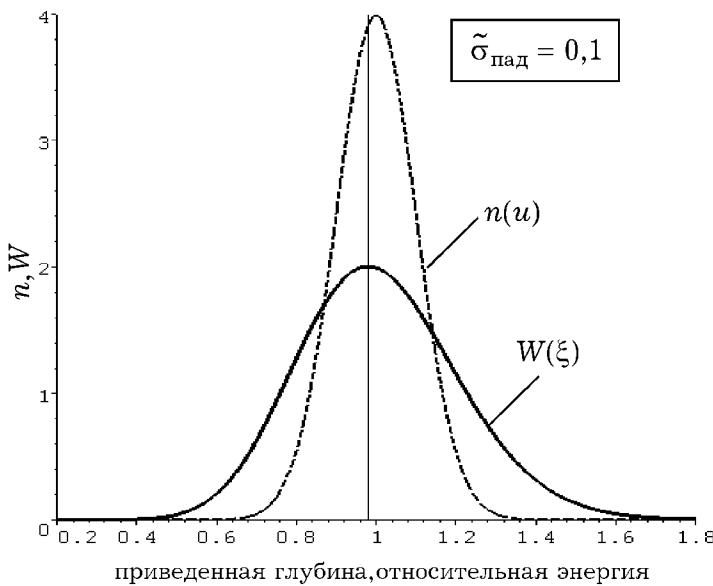


Рис. 4.2.4. Графики зависимости $W(\xi)$ и $n(u)$ при $\tilde{\sigma}_{\text{пад}} = \sigma_{\text{пад}} / T_0 = 0,1$

4.3 РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ОСТАНОВИВШИХСЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ С УЧЕТОМ ФЛУКТУАЦИЙ ПОТЕРЬ ЭНЕРГИИ ПРИ НЕУПРУГИХ СТОЛКНОВЕНИЯХ

Вычислим распределение $W(z)$ остановившихся нерелятивистских частиц, тормозная способность которых $\bar{\varepsilon}(T) \sim 1/T$, а $\overline{\varepsilon^2} = \overline{\varepsilon_0^2} = \text{const}$, т.е. пренебрегаем зависимостью ионизационного логарифма от энергии $L_{\text{ион}} = \text{const}$ и не учитываем связь электронов на оболочках атомов – $K(T) \approx 1$.

Для вычисления величины $W(z)$ по основной формуле (4.1.4) воспользуемся полученным ранее выражением для интегрального потока частиц:

$$N(\xi) = N_0 \left\{ 1 - \frac{\Gamma(2\nu + 1/2; 2\nu/\xi)}{\Gamma(2\nu + 1/2)} \right\}, \quad (\xi = z/R_0). \quad (4.3.1)$$

Здесь $\Gamma(2\nu + 1/2; 2\nu/\xi)$ – неполная гамма-функция Эйлера (2.5.29). Производная от полного потока по глубине

$$\frac{dN(z)}{dz} = \frac{1}{R_0} \frac{dN(\xi)}{d\xi} = -\frac{N_0}{R_0 \Gamma(2\nu + 1/2)} \frac{d\Gamma(2\nu + 1/2; 2\nu/\xi)}{d\xi}.$$

Поскольку

$$\frac{d\Gamma(2\nu + 1/2; 2\nu/\xi)}{d\xi} = \frac{1}{\xi} \left(\frac{2\nu}{\xi} \right)^{2\nu+1/2} \exp\left(-\frac{2\nu}{\xi}\right),$$

и, $N_{\text{пад}} = N_0$, для распределения остановившихся частиц $W(\xi)$ по приведенной глубине ξ , связанного с распределением $W(z)$ обычным соотношением

$$W(\xi) d\xi = W(z) dz, \quad \text{т.е.} \quad W(\xi) = R_0 W(z) = -\frac{R_0}{N_0} \frac{dN(\xi)}{d\xi},$$

получаем следующее выражение:

$$W(\xi) = \frac{1}{2v\Gamma(2v+1/2)} \left(\frac{2v}{\xi}\right)^{2v+3/2} \exp\left(-\frac{2v}{\xi}\right). \quad (4.3.2)$$

Теперь, зная вероятность распределения $W(\xi)$, можем вычислить моменты распределения по глубине внедрения остановившихся частиц

$$\langle \xi^n \rangle = \int_0^\infty \xi^n W(\xi) d\xi. \quad (4.3.3)$$

Так как

$$\int_0^\infty \xi^n \left(\frac{2v}{\xi}\right)^{2v+3/2} \exp\left(-\frac{2v}{\xi}\right) d\xi = (2v)^{n+1} \Gamma(2v+1/2-n), \quad (4.3.4)$$

находим, что

$$\langle \xi^n \rangle = (2v)^n \frac{\Gamma(2v+1/2-n)}{\Gamma(2v+1/2)}. \quad (4.3.5)$$

При $n=0$ из (4.3.5) получаем условие нормировки (4.1.6)

$$\int_0^\infty W(z) dz = \int_0^\infty W(\xi) d\xi = 1. \quad (4.3.6)$$

Полагая затем $n=1$, $n=2$, получим значения средней глубины $\langle \xi \rangle$ и величины среднего квадрата глубины $\langle \xi^2 \rangle$ внедрения остановившихся частиц:

$$\langle \xi \rangle = 2v \frac{\Gamma(2v-1/2)}{\Gamma(2v+1/2)} = \frac{2v}{2v-1/2}, \quad (4.3.7)$$

$$\langle \xi^2 \rangle = (2v)^2 \frac{\Gamma(2v-3/2)}{\Gamma(2v+1/2)} = \frac{(2v)^2}{(2v-1/2)(2v-3/2)}. \quad (4.3.8)$$

При получении формул (4.3.7), (4.3.8)) учтено, что $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$, где $x = 2v - 1/2$. Определив величины $\langle \xi \rangle$ и

$\langle \xi^2 \rangle$, можно вычислить дисперсию распределения величины $W(\xi)$ и относительный разброс по глубине внедрения остановившихся частиц:

$$\begin{aligned}\sigma_{\text{ост}}^2 &= \langle (\xi - \langle \xi \rangle)^2 \rangle = \langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2 = \\ &= \frac{(2v)^2}{(2v - 1/2)^2 (2v - 3/2)} = \frac{\langle \xi \rangle^2}{2v - 3/2},\end{aligned}\quad (4.3.9)$$

$$\frac{\langle \delta_\xi \rangle}{\langle \xi \rangle} = \frac{\sqrt{\langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2}}{\langle \xi \rangle} = \frac{1}{\sqrt{2v - 3/2}} \sim \frac{1}{\sqrt{v}} \ll 1. \quad (4.3.10)$$

Полученные выше формулы существенно упрощаются, если учесть, что для быстрых тяжелых частиц флуктуационный параметр $v \gg 1$. Воспользуемся формулой Стирлинга для гамма-функции

$$\Gamma(x) \approx \sqrt{2\pi} x^{x-1/2} e^{-x}, \quad (x \gg 1). \quad (4.3.11)$$

В нашем случае $x = 2v + 1/2$ и из формулы (3.2.41) будем иметь (см. П.2.)

$$\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) \approx \sqrt{2\pi} (2v)^{2v} e^{-2v}, \quad (v \gg 1). \quad (4.3.12)$$

Подставляя (4.3.12) в (4.3.2), получаем следующее выражение для $W(\xi)$:

$$W(\xi) \approx \sqrt{\frac{v}{\pi}} \xi^{-(2v+3/2)} \exp\left\{-2v\left(\frac{1}{\xi} - 1\right)\right\}. \quad (4.3.13)$$

Из (4.3.2) или (4.3.13) находим значение наиболее вероятной глубины проникновения остановившихся частиц

$$\xi_{\text{н.в.}} \approx 1 - 3/4v, \quad \text{т.е.} \quad z_{\text{н.в.}} \approx R_0 (1 - 3/4v). \quad (4.3.14)$$

Полученные формулы (4.3.7) – (4.3.10) теперь можно записать так:

$$\langle \xi \rangle \approx 1 + \frac{1}{4v}; \quad \langle \xi^2 \rangle \approx 1 + \frac{1}{v}; \quad \sigma_{\text{ост}}^2 \approx \frac{1}{2v}; \quad \frac{\langle \delta_\xi \rangle}{\langle \xi \rangle} \approx \frac{1}{\sqrt{2v}}. \quad (4.3.15)$$

На рис. 4.3.1 представлена зависимость вероятности $W(\xi)$ от приведенной глубины проникновения остановившихся частиц, рассчитанная по формуле (4.3.13), для двух различных значений флуктуационного параметра v .

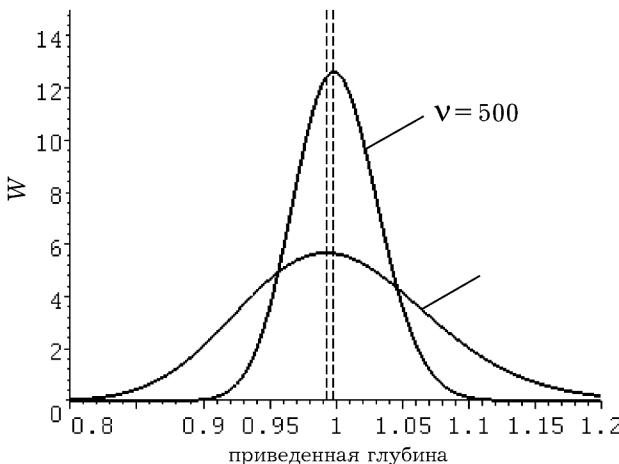


Рис. 4.3.1. Распределение остановившихся частиц по глубине.
Пунктирные линии – положение максимума распределения,
рассчитанное по формуле (4.3.14)

Поскольку $\langle \xi \rangle > 1$, а $\xi_{\text{H.B}} < 1$, то распределение асимметрично и сдвинуто в область глубин $\xi > \xi_{\text{H.B}}$. Однако эта асимметрия очень незначительна. Действительно, используя формулы (4.3.14) и (4.3.15), находим разность между значениями $\langle \xi \rangle$ и $\xi_{\text{H.B}}$:

$$\langle \xi \rangle - \xi_{\text{H.B}} = 1/v.$$

В то же время, ширина распределения $\sigma_{\text{ост}} \approx 1/\sqrt{2v}$ намного превышает разницу между значениями средней и наиболее вероятной глубинами проникновения в веществе

$$\frac{\langle \xi \rangle - \xi_{\text{H.B}}}{\sigma_{\text{ост}}} \approx \frac{\sqrt{2v}}{v} \sim \frac{1}{\sqrt{v}} \ll 1. \quad (4.3.16)$$

Вследствие этого, отличие величин $\langle \xi \rangle$ и $\xi_{\text{н.в}}$ от единицы практически не сказывается на форме распределения $W(\xi)$. Поэтому распределение (4.3.13) с высокой точностью может быть представлено в *гауссовой* форме. Для этого перепишем выражение (4.3.13) в виде

$$W(\xi) = \sqrt{\frac{v}{\pi}} \left(\frac{1}{\xi} \right)^{3/2} \exp \left\{ -2v \left(\frac{1}{\xi} - \ln \left(\frac{1}{\xi} \right) - 1 \right) \right\}.$$

Поскольку $v \gg 1$, то максимум распределения $W(\xi)$ будет главным образом определяться минимумом выражения в показателе экспоненты при $\xi = 1$. Поэтому, разлагая выражение в показателе экспоненты в ряд вблизи значения $\xi = 1$ и полагая $(1/\xi)^{3/2} \approx 1$, распределение остановившихся частиц (4.3.13) по глубине запишем в *гауссовом* виде

$$W(\xi) \approx \sqrt{\frac{v}{\pi}} \exp \left\{ -v(1-\xi)^2 \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{\text{oct}}^2}} \exp \left\{ -\frac{(1-\xi)^2}{2\sigma_{\text{oct}}^2} \right\}. \quad (4.3.17)$$

Значение дисперсии определяется третьей формулой (4.3.15): $\sigma_{\text{oct}}^2 \approx 1/2v$.

На рис. 4.3.2 представлены кривые зависимости $W(\xi)$, рассчитанные по формуле (4.3.13) и по формуле (4.4.17) гауссова вида для значения параметра $v = 100$. Видим, что даже при сравнительно небольшом значении параметра v различие между кривыми незначительно. С увеличением v это различие становится ещё меньше.

Гауссово распределение остановившихся частиц по глубине проникновения в вещество (4.3.17) можно получить иначе, используя приближенное выражение для интегрального потока частиц (2.5.30):

$$N(\xi) \approx \frac{N_0}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\sqrt{v} \frac{1-\xi}{\xi} \right) \right\}.$$

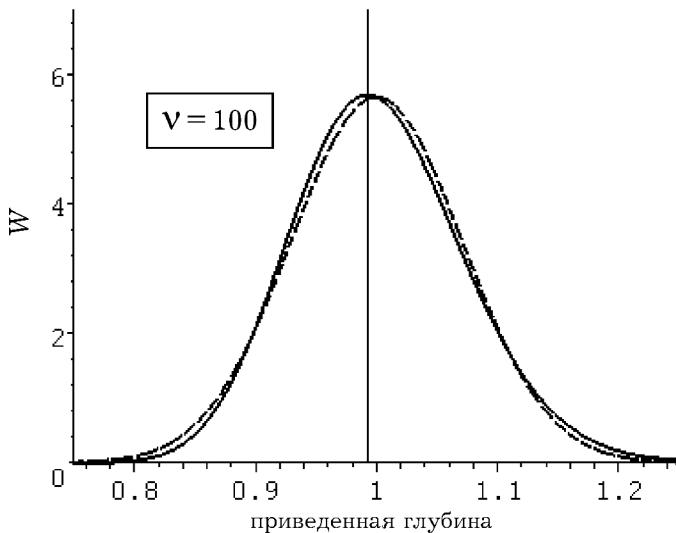


Рис. 4.3.2. Распределение остановившихся частиц по глубине.

Сплошная кривая – расчет по формуле (4.3.13).

Пунктирная кривая – расчет по формуле гауссова вида (4.3.17)

Поскольку $d \operatorname{erf}(x)/dx = (2/\sqrt{\pi}) \exp(-x^2)$, то

$$\frac{dN(\xi)}{d\xi} = -N_0 \sqrt{\frac{v}{\pi}} \frac{1}{\xi^2} \exp\left\{-v \frac{(1-\xi)^2}{\xi^2}\right\} \approx -N_0 \sqrt{\frac{v}{\pi}} \exp\left\{-v(1-\xi)^2\right\}.$$

Теперь получаем

$$W(\xi) = -\frac{1}{N_0} \frac{dN}{d\xi} \approx \sqrt{\frac{v}{\pi}} \exp\left\{-v(1-\xi)^2\right\},$$

что в точности совпадает с (4.3.17).

4.4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАНОВИВШИХСЯ ЧАСТИЦ В ДИФФУЗИОННОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

В предыдущем разделе было вычислено распределение остановившихся нерелятивистских частиц $W(z)$ для частного случая, когда $\bar{\varepsilon}(T) \sim 1/T$, а $\bar{\varepsilon^2} = \text{const}$. Теперь рассмотрим вопрос о вычислении распределения остановившихся частиц $W(z)$ с учетом вероятностного характера процесса неупругих столкновений в общем случае, не конкретизируя явную зависимость величин $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon^2}(T)$ от энергии частиц. Одним из способов вычисления величины $W(z)$ по-прежнему является использование основной формулы (4.1.4), в которой интегральный поток $N(z)$ определяется выражением (4.1.5). При этом энергетический спектр частиц $N(z; T)$ есть решение уравнения переноса, полученное с учетом вероятностного характера неупругих столкновений частиц с атомами вещества. Для быстрых тяжелых заряженных частиц одним из приближенных способов вычисления энергетического спектра частиц $N(z; T)$, который учитывает вероятностный характер процесса неупругих столкновений частиц с атомами вещества, является приближение Фоккера – Планка. Основная задача этой части состоит в исследовании только роли *флуктуаций потерь энергии* при неупругих столкновениях. Поэтому будем везде ниже считать, что на поверхность вещества падает *моноэнергетический* поток частиц с начальной энергией T_0 . В этом случае в приближении «прямо-вперед» вероятностный характер потерь энергии – *единственный* фактор, приводящий к разбросу частиц по глубине их проникновения в вещество.

Во многих случаях бывает проще определять распределение $W(z)$, минуя процедуру вычисления интегрального потока $N(z)$, а используя только выражение для энергетического спектра $N(z; T)$. Для этого нужно получить выражение, непосредственно

связывающие величины $W(z)$ и $N(z; T)$. С этой целью воспользуемся уравнением переноса в приближении Фоккера – Планка

$$\frac{\partial N(z; T)}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \right\} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial T^2} \left\{ \bar{\varepsilon}^2(T) N(z; T) \right\}. \quad (4.4.1)$$

Здесь, как и ранее, $\bar{\varepsilon}^2(T)$ – средний квадрат энергии, теряемой частицей с энергией T на единице пути:

$$\bar{\varepsilon}^2(T) = \int_0^{\varepsilon_{\max}(T)} \varepsilon^2 W_{\text{нейтр}}(T | \varepsilon) d\varepsilon. \quad (4.4.2)$$

Интегрируя уравнение (4.4.1) по энергиям, получим выражение для производной от потока частиц по глубине

$$\frac{dN(z)}{dz} = \left[\bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \right]_{T=0}^{\infty} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial T} \left[\bar{\varepsilon}^2(T) N(z; T) \right] \right\}_{T=0}^{\infty}. \quad (4.4.3)$$

Поскольку при $T \rightarrow \infty$ оба слагаемых в правой части уравнения (4.4.3) равны нулю, то находим, что

$$\frac{dN(z)}{dz} = - \left[\bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \right]_{T \rightarrow 0} - \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial T} \left[\bar{\varepsilon}^2(T) N(z; T) \right] \right\}_{T \rightarrow 0}. \quad (4.4.4)$$

Оценим величину второго слагаемого в правой части выражения (4.4.3). Как следует из (4.4.2), $\bar{\varepsilon}^2 < \varepsilon_{\max}(T) \bar{\varepsilon}(T)$. Для нерелятивистских частиц $\varepsilon_{\max}(T) \approx 4(m_e/m)T$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left[\bar{\varepsilon}^2 \frac{\partial N(z; T)}{\partial T} \right]_{T \rightarrow 0} &< 4 \frac{m_e}{m} \left\{ \frac{\partial}{\partial T} \left[T \cdot \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \right] \right\}_{T \rightarrow 0} = \\ &= 4 \frac{m_e}{m} \left[\bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \right]_{T \rightarrow 0}. \end{aligned}$$

Для тяжелых частиц $m_e/m \ll 1$. Поэтому вторым слагаемым в (4.4.3) можно пренебречь и с высокой точностью можно считать, что

$$\frac{dN(z)}{dz} \approx \left\{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \right\}_{T \rightarrow 0}. \quad (4.4.5)$$

Подставляя (4.4.5) в общую формулу (4.1.4), получаем

$$W(z) \approx \frac{1}{N_{\text{пад}}} \left\{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \right\}_{T \rightarrow 0}. \quad (4.4.6)$$

Формула (4.4.6) позволяет сразу рассчитать распределение тяжелых частиц по глубине их внедрения в вещество, если известно выражение $N(z; T)$, минуя дополнительную процедуру вычисления интеграла в (4.1.5).

Учитывая, что распределение частиц по энергиям $N(z; T)$ связано с распределением по пробегам соотношением $\bar{\varepsilon}(T) N(z; T) = N(z; R)$, из (4.4.6) получаем

$$W(z) \approx \frac{N(z; R = 0)}{N_{\text{пад}}}. \quad (4.4.7)$$

Выражение (4.4.7) позволяет определить распределение остановившихся частиц по глубине при произвольном распределении по энергии в падающем пучке, если известно их распределение $N(z; R)$ по *остаточным пробегам*, рассчитанное в *диффузионном приближении*.

Сравнивая выражение (4.4.6), (4.4.7) для $W(z)$, полученные в диффузионном приближении, с аналогичными выражениями (4.2.3), (4.2.4) в приближении непрерывного замедления, видим, что они совершенно одинаковы. И это не случайно. Можно строго показать, что формулы (4.4.6), (4.4.7) для быстрых тяжелых частиц справедливы не только в рамках диффузионного приближения, но и в общем случае, когда интеграл неупругих столкновений Больцмана в уравнении переноса записывается в виде интегрального оператора (1.1.30) или, что то же самое, в виде бесконечного ряда (1.3.28) [2, гл. 6, с. 176] (см. Приложение V).

Следует иметь в виду, что полученные выше формулы (4.4.6), (4.4.7) в отличие от точной формулы (4.1.4), которая следует из определения кривой Брэгга, являются *приближенными*. Чтобы иметь

представление о точности полученных выше формул, вычислим найденное в предыдущем разделе распределение остановившихся нерелятивистских частиц $W(z)$, тормозная способность которых $\bar{\varepsilon}(T) \sim 1/T$, а $\bar{\varepsilon}^2 = \bar{\varepsilon}_0^2 = \text{const}$, используя приближенную формулу (4.4.6). Сравнивая затем полученные результаты можно оценить точность расчета по формулам (4.4.6) и (4.3.2).

При облучении поверхности веществаmonoэнергетическим потоком частиц с энергией $N_{\text{пад}} = N_0$ для распределения остановившихся частиц $W(\xi)$ по приведенной глубине ξ , связанного с распределением $W(z)$ соотношением $W(\xi) = R_0 W(z)$, из (4.4.6) получаем

$$W(\xi) \approx \frac{R_0}{N_0} \left\{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \right\}_{T \rightarrow 0}. \quad (4.4.8)$$

Энергетический спектр частиц определяется выражением (2.5.22), а тормозная способность среды формулой (2.1.37): $\bar{\varepsilon}(T) = T_0^2 / 2R_0 T$. Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) &= N_0 \frac{2v}{\xi R_0} \left(\frac{T_0}{T} \right)^{2v+1/2} \times \\ &\times \exp \left\{ -\frac{2v}{\xi} \left(1 + \frac{T^2}{T_0^2} \right) \right\} I_{2v+1/2} \left(\frac{4v}{\xi} \frac{T}{T_0} \right). \end{aligned} \quad (4.4.9)$$

Для нахождения предела этого выражения при $T \rightarrow 0$ воспользуемся разложением модифицированной функции Бесселя в ряд Тейлора

$$I_\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\mu + 1 + k)} \left(\frac{x}{2} \right)^{\mu+2k}. \quad (4.4.10)$$

В нашем случае $\mu = 2v + 1/2$, $x = 4vT/\xi T_0$. При $T \rightarrow 0$ достаточно сохранить только одно слагаемое ряда (4.4.10) с $k = 0$:

$$I_{2v+1/2} \left(\frac{4v}{\xi} \frac{T}{T_0} \right) \approx \frac{1}{\Gamma(2v + 3/2)} \left(\frac{2v}{\xi} \right)^{2v+1/2} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{2v+1/2}. \quad (4.4.11)$$

Подставляя (4.4.11) в (4.4.9), получаем

$$\begin{aligned} \{\bar{\varepsilon}(T) N(z, T)\}_{T \rightarrow 0} &\approx \\ &\approx N_0 \frac{2v}{R_0 \xi \Gamma(2v + 3/2)} \left(\frac{2v}{\xi} \right)^{2v+1/2} \exp \left\{ -\frac{2v}{\xi} \right\}. \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Подставляя (4.4.12) в (4.4.8), окончательно будем иметь

$$W(\xi) \approx \frac{1}{(2v + 1/2) \Gamma(2v + 1/2)} \left(\frac{2v}{\xi} \right)^{2v+3/2} \exp \left\{ -\frac{2v}{\xi} \right\}. \quad (4.4.13)$$

Здесь учтено, что $\Gamma(2v + 3/2) = (2v + 1/2) \Gamma(2v + 1/2)$. Теперь сравним распределение (4.4.13), найденное из приближенной формулы (4.4.6) с распределением (4.3.2), полученным из основной формулы (4.1.4). Видим, что эти выражения отличаются только численным множителем: $1/(2v + 1/2)$ в приближенной формуле (4.4.13) и $1/2v$ в точной формуле (4.3.2). Поскольку при $v \gg 1$

$$\frac{1}{2v + 1/2} \approx \frac{1}{2v} \left(1 - \frac{1}{4v} \right),$$

то формулы (4.4.13) и (4.3.2) практически совпадают с точностью до членов порядка $1/v$.

Тем самым показано, что в зависимости от удобства вычислений для быстрых тяжелых частиц в равной мере можно использовать выражения (4.4.6), (4.4.7) или (4.1.4).

4.5. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ОСТАНОВИВШИХСЯ ЧАСТИЦ В САМОСОГЛАСОВАННОМ ГАУССОВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Результаты вычисления $W(\xi)$ (4.3.2) и (4.4.13) получены на основе использования точного решения уравнения переноса (2.5.1) в предположении, что $\bar{\varepsilon}(T) \sim 1/T$, а $\bar{\varepsilon}^2 = \bar{\varepsilon}_0^2 = \text{const}$. Однако в

большинстве случаев при проведении практических расчетов такое предположение является весьма грубым. Возникает необходимость получения более универсального выражения для вероятности распределения остановившихся частиц по глубине $W(\xi)$ с использованием более точных значений для величин $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$. Получить аналитическое решение для уравнения переноса (2.5.1) при произвольной зависимости величин $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$ от энергии частиц даже в диффузионном приближении не представляется возможным. Однако в широкой области глубин уравнение переноса (2.5.1) допускает приближенное решение (2.6.20), (2.6.26) в рамках *самосогласованного гауссова приближения*. При этом ввиду относительной малости *флуктуаций* по остаточному пробегу ($\sigma_R^2 \sim R_0 / v \ll R_0$) область глубин, где нарушается предположение о наличии резко выраженного максимума в выражении $N(z; T)$, мала — $\delta z \sim R_0 / \sqrt{v}$. Поэтому, как уже отмечалось ранее, весь разброс частиц по энергиям, а следовательно, и по остаточным пробегам формируется на той основной части пути, где выполняется условие применимости самосогласованного гауссова приближения. Это означает, что вклад области глубин $R_0 - z \sim R_0 / \sqrt{v}$ в результирующий разброс по пробегам пренебрежимо мал — $\sim 1/v \ll 1$. Поэтому на всех глубинах, где применимо диффузионное уравнение переноса, для вычисления распределения частиц по остаточному пробегу $N(z; R) = \bar{\varepsilon} N(z; T)$ можно использовать самосогласованное гауссово выражение (2.6.26)

$$N(z; R) = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_R^2(z)}} \exp \left\{ -\frac{[R_0 - R - z]^2}{2\sigma_R^2(z)} \right\},$$

$$\sigma_R^2(z) = \int_{T(z)}^{T_0} \frac{\bar{\varepsilon}^2(T')}{[\bar{\varepsilon}(T')]^3} dT'. \quad (4.5.1)$$

Величина $T(z)$ определяется из уравнения

$$\int_0^{T(z)} dT' / \bar{\varepsilon}(T') = R_0 - z. \quad (4.5.2)$$

Подставляя (4.5.1) в (4.4.7) и учитывая, что при облучении поверхности моноэнергетическим потоком частиц $N_{\text{пад}} = N_0$, для распределения остановившихся частиц по глубине их проникновения в вещество, получаем

$$W(\xi) \approx \frac{N_0}{\sqrt{2\pi\sigma_R^2(z)}} \exp\left\{-\frac{[R_0 - z]^2}{2\sigma_R^2(z)}\right\}. \quad (4.5.3)$$

Поскольку при облучении поверхности моноэнергетическим пучком тяжелые частицы останавливаются в малой области глубин в окрестности $z = R_0 - |R_0 - z| \leq R_0 / \sqrt{\nu}$, то при вычислении дисперсии $\sigma_R^2(z)$ можно положить $z = R_0$. Как следует из уравнения (4.5.2), это означает, что $T(z) \approx T(z = R_0) = 0$. Окончательно находим следующее выражение для распределения $W(\xi) = R_0 \cdot W(z)$ по приведённой глубине проникновения в вещество:

$$W(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_0^2}} \exp\left\{-\frac{(1-\xi)^2}{2\sigma_0^2}\right\}. \quad (4.5.4)$$

Безразмерная дисперсия распределения $\sigma_0^2(T_0)$ определяется выражением

$$\sigma_0^2 \approx \frac{1}{R_0^2} \int_0^1 \frac{\bar{\varepsilon}^2(T')}{[\bar{\varepsilon}(T')]^3} dT', \quad R_0 = \int_0^{T_0} \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}(T')} . \quad (4.5.5)$$

Распределение (4.5.4) с дисперсией (4.5.5) впервые получил Н. Бор [10]. Сравнивая (4.5.5) с (2.6.27) видим, что

$$\sigma_0^2 = \sigma_r^2 (\xi = 1). \quad (4.5.6)$$

Для нерелятивистских частиц значение $\sigma_r^2(\xi)$ определяется формулой (2.6.45):

$$\sigma_r^2(\xi) = \frac{\xi(2-\xi)}{2v}. \quad (4.5.7)$$

Полагая здесь $\xi = 1$, получим

$$\sigma_0^2(T_0) = \frac{1}{2v}; \quad v \approx \frac{1}{4} \frac{m}{m_e} \frac{L_{\text{ион}}(T_0)}{K(T_0)}. \quad (4.5.8)$$

Выражение (4.5.4) для $W(\xi)$ в точности совпадает с полученным ранее распределением (4.3.17), если учесть, что $\sigma_0^2(T_0) = \sigma_{\text{ост}}^2$.

Для частиц в ультрарелятивистском диапазоне энергий $(1 \ll T_0 / mc^2 \ll m / m_e)$ из (2.6.58) следует, что

$$\sigma_0^2 = \sigma_r^2(\xi = 1) = 1/3v; \quad v = 2 \frac{m}{m_e} \frac{L_{\text{ион}}}{(T_0 / mc^2)}. \quad (4.5.9)$$

В этом случае разброс остановившихся частиц по глубине растет с увеличением энергии частиц в падающем потоке $(\sqrt{\sigma_0^2} \sim \sqrt{T_0 / mc^2})$, оставаясь в то же время достаточно малым, поскольку $T_0 / mc^2 \ll m / m_e$.

Выражение (4.5.4) определяет распределение остановившихся частиц по приведенной глубине проникновения в вещество при произвольной зависимости величин $\bar{\varepsilon}(T)$ и $\bar{\varepsilon}^2(T)$, входящих в формулы (4.5.5), от энергии частиц.

ПОЛУЧЕНИЕ ТРАНСПОРТНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРЕНОСА БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ ИЗ КИНЕТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ БОЛЬЦМАНА ДЛЯ АТОМОВ ГАЗА

В науке и технике приходится сталкиваться с задачами переноса излучения в различных средах: будь то пучки заряженных или нейтральных частиц, потоки светового излучения или γ -квантов. Каждый вид излучения по-своему взаимодействует с веществом. Например, свет рассеивается и поглощается в среде, при этом энергия фотонов во многих случаях не изменяется. Такие задачи относятся к классу наиболее простых *односкоростных* задач теории переноса. Напротив, заряженные частицы испытывают не только упругое рассеяние на атомах среды, но одновременно теряют свою энергию из-за их возбуждения или ионизации. За счет ионизационного торможения происходит уменьшение энергии частиц. В этом случае сталкиваемся со значительно более сложным классом *неодноскоростных* задач теории переноса.

Несмотря на всё многообразие видов взаимодействия излучения с веществом, теоретические методы исследования распространения излучения в неупорядоченных (случайных) средах, когда отсутствуют какие-либо когерентные эффекты, обладают определенной схожестью. Это связано с тем, что описание систем, состоящих из большого числа частиц, осуществляется едиными методами кинетической теории, которая дает способ перехода от детального изучения движения отдельных частиц к *средним* движениям *множества* частиц. Здесь и далее будем считать частицы точечными объектами, так что вращательные и колебательные степени свободы отсутствуют. Такие частицы могут совершать только поступательное движение. Классическое поступательное движение частицы полностью описывается её координатами $\vec{r}(x, y, z)$ и импульсом \vec{p} (или скоростью $\vec{v} = \vec{p}/m$). Упомянутое выше осреднение осуществляется с помощью функции распределения (фазовой плотности) $f(\vec{r}; \vec{v}; t)$. Величина $f(\vec{r}; \vec{v}; t)d^3v d^3r$ есть среднее

число частиц в элементе фазового объема d^3rd^3v в окрестности точки $(\vec{r}; \vec{v})$ шестимерного фазового пространства в момент времени t ; $\dot{v} = \dot{p}/m$ – скорость частицы. Размерность величины f : $[f] = \text{с}^3/\text{м}^6$. В соответствии с этим

$$n(\vec{r}; t) = \int f(\vec{r}; \vec{v}; t) d^3v, \quad (\text{П.1.1})$$

есть плотность *пространственного* распределения частиц. Величина $n(\vec{r}; t) d^3r = n(\vec{r}; t) dV$ есть среднее число частиц в элементе объема dV «координатной части» фазового пространства. Поэтому

$$n_V(t) = \iiint_V n(\vec{r}; t) d^3r = \iiint_V d^3r \int f(\vec{r}; \vec{v}; t) d^3v, \quad (\text{П.1.2})$$

есть среднее число частиц в произвольном объеме V в момент времени t , движущихся внутри этого объема во всех направлениях с любыми величинами скоростей (импульсов).

Функция распределения определяется из кинетического уравнения Больцмана. В узком смысле, кинетическим уравнением Больцмана называется кинетическое уравнение для газов малой плотности для *неравновесной одночастичной* функции распределения $f(\vec{r}; \vec{v}; t)$ системы из большого числа частиц. Кинетическое уравнение Больцмана представляет собой по существу *уравнение баланса* числа частиц (точнее, точек в фазовом пространстве, изображающих состояние частиц) в элементе фазового объема d^3rd^3v . Оно выражает тот факт, что изменение функции распределения частиц со временем происходит вследствие трех факторов: *свободного перемещения* частиц со скоростью \vec{v} ; *изменения их скорости* под действием внешних сил $\vec{F}(\vec{r}; t)$ и *столкновений* между ними, т.е. взаимодействием частиц друг с другом.

Получим сначала уравнение для функции распределения $f(\vec{r}; \vec{v}; t)$ механической системы, состоящего из частиц *одного сорта*, когда *отсутствуют столкновения* между частицами. Рассмотрим объем d^3rd^3v в окрестности произвольной фиксирован-

ной точки (\vec{r}, \vec{v}) в шестимерном пространстве. Изменение числа частиц в указанном объеме за время dt , т.е.

$$\Delta f = \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left[f(\vec{r}; \vec{v}; t) d^3 r d^3 v \right] \right\} dt = \frac{\partial f(\vec{r}; \vec{v}; t)}{\partial t} d^3 r d^3 v dt,$$

будет определяться разностью между числом частиц, пришедших за время dt в элемент объема $d^3 r d^3 v$ из других элементов $d^3 r' d^3 v'$ фазового пространства и частиц ушедших из рассматриваемого элемента объема, т.е.

$$\frac{\partial f(\vec{r}; \vec{v}; t)}{\partial t} d^3 r d^3 v dt = (\text{приход-уход})_{\text{за время } dt}. \quad (\text{П.1.3})$$

Если взаимодействие между частицами отсутствует, то единственными причинами ухода и прихода частиц могут быть только упомянутые выше их *свободное перемещение* со скоростью \vec{V} и *изменение их скорости* под действием внешних сил $\vec{F}(\vec{r}; t)$. Поскольку частицы, вернее их изобразительные точки, перемещаются в фазовом пространстве, то за время dt объем $d^3 r d^3 v$ покинут все частицы, которые находились в нем в момент времени t . Поэтому

$$\text{уход} = f(\vec{r}; \vec{v}; t) d^3 r d^3 v.$$

С другой стороны в объем $d^3 r d^3 v$ к моменту времени t попадут те частицы, которые в момент времени t находились в другом объеме $d^3 r' d^3 v'$ в окрестности “близкой” точки $(\vec{r}' = \vec{r} - \vec{v} dt; \vec{v}' = \vec{v} - (\vec{F}/m) dt)$, т.е.

$$\text{приход} = f(\vec{r}'; \vec{v}'; t) d^3 r' d^3 v' = f\left(\vec{r} - \vec{v} dt; \vec{v} - \frac{\vec{F}}{m} dt; t\right) d^3 r' d^3 v'.$$

Здесь учтено, что в соответствии с классическим законом движения $d\vec{p}/dt = \vec{F}$. Поэтому под действием силы \vec{F} за время dt скорость частицы изменяется на величину $d\vec{v} = d\vec{p}/m = (\vec{F}/m) dt$.

В силу теоремы Лиувилля* $d^3r'd^3p' = d^3rd^3p$, т.е. $d^3r'd^3v' = d^3rd^3v$. Следовательно,

$$(приход - уход)_{dt} = \left\{ f \left(\dot{r} - \dot{v}dt; \dot{v} - \frac{\dot{F}}{m}dt; t \right) - f (\dot{r}; \dot{v}; t) \right\} d^3rd^3v.$$

Разложим первый член в фигурных скобках в ряд Тейлора с точностью до членов $\sim dt$

$$f \left(\dot{r} - \dot{v}dt; \dot{v} - \frac{\dot{F}}{m}dt; t \right) \approx f (\dot{r}; \dot{v}; t) - \dot{v}dt \frac{\partial f}{\partial \dot{r}} - \frac{\dot{F}}{m}dt \frac{\partial f}{\partial \dot{v}}.$$

Теперь запишем, что

$$(приход - уход)_{dt} = \left\{ -\dot{v} \frac{\partial f}{\partial \dot{r}} - \frac{\dot{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \dot{v}} \right\} d^3rd^3vdt. \quad (\text{П.1.4})$$

Подставляя (П.1.4) в (П.1.3) сокращая на общий множитель d^3rd^3vdt , окончательно получаем

$$\frac{\partial f (\dot{r}; \dot{v}; t)}{\partial t} = - \left(\dot{v} \frac{\partial f}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{1}{m} \left(\dot{F} \frac{\partial f}{\partial \dot{v}} \right). \quad (\text{П.1.5})$$

Уравнение (П.1.5) представляет собой уравнение для функции распределения без учета столкновений между частицами.

Для того чтобы учесть столкновения между частицами, нужно в правую часть уравнения (П.1.5) добавить так называемый *интеграл столкновений*

$$\mathfrak{St} = (\partial f / \partial t)_{\text{ст}}. \quad (\text{П.1.6})$$

Интеграл столкновений определяет *быструту изменения* функции распределения (т.е. её изменение в единицу времени) за счет столкновений частиц. Теперь уравнение для функции распределения будет выглядеть так:

$$\frac{\partial f (\dot{r}; \dot{v}; t)}{\partial t} + \dot{v} \frac{\partial f}{\partial \dot{r}} + \frac{\dot{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \dot{v}} = \mathfrak{St}. \quad (\text{П.1.7})$$

* Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Механика, М.: Наука, 1988.

Разумеется, что кинетическое уравнение (П.I.7) приобретает реальный смысл лишь после того, как определен *конкретный вид* интеграла столкновений (П.I.6), что само по себе является далеко не простой и весьма деликатной задачей [6].

Для молекул (атомов) газа вид интеграла столкновений (как, впрочем, и само кинетическое уравнение) был установлен основателем кинетической теории Людвигом Больцманом в 1872 г.

Поскольку атомы газа сталкиваются друг с другом, то интеграл столкновений Больцмана является *нелинейным интегральным оператором* $\mathcal{B}_{ct} = \mathcal{B}_{ct}(f, f')$, который определяет *быстроту изменения* функции распределения частиц за счет их ухода из элемента фазового объема $d^3 r d^3 V$ при «прямых» столкновениях и *прихода* частиц в рассматриваемый элемент фазового объема $d^3 r d^3 V$ из всех других состояний за счет «обратных» столкновений. Нелинейным оказывается и само кинетическое уравнение Больцмана.

Если рассчитывать процесс столкновения частиц по *законам классической механики* и считать, что нет корреляции между динамическими состояниями сталкивающихся атомов или молекул (гипотеза молекулярного хаоса), то интеграл столкновений имеет вид

$$\mathcal{B}_{ct} \{f; f'\} = - \int (f \cdot f_1 - f' \cdot f'_1) u \frac{d\sigma(u; \vartheta)}{d\Omega} d\Omega dV_1. \quad (\text{П.I.8})$$

Размерность интеграла столкновений $[\mathcal{B}_{ct}] = [f]/c = c^2/m^6$.

Величины $f(\vec{r}; \vec{v}; t)$ и $f_1(\vec{r}; \vec{v}_1; t)$ есть функции распределения до столкновения, а $f'(\vec{r}; \vec{v}'; t)$ и $f'_1(\vec{r}; \vec{v}'_1; t)$ – после столкновения; \vec{v} и \vec{v}_1 – скорости частиц *до* столкновения, а \vec{v}' и \vec{v}'_1 – скорости тех же частиц *после* столкновения. Величина $u = |\vec{v} - \vec{v}_1| = |\vec{v}' - \vec{v}'_1|$ есть *относительная скорость* сталкивающихся частиц; ϑ есть угол между вектором относительной скорости \vec{u} сталкивающихся частиц и линией, соединяющей их центры; $d\sigma(u; \vartheta)$ – дифференциальное сечение рассеяния частиц в телесный угол $d\Omega$ в лабораторной системе отсчета. Величины \vec{v} , \vec{v}_1 , \vec{v}' и \vec{v}'_1 связаны законами сохранения энергии и импульса при упругом рассея-

нии. Кинетическое уравнение Больцмана учитывает только парные столкновения между частицами. Оно справедливо при условии, что длина свободного пробега молекул значительно больше характерных размеров молекул.

В дальнейшем будем считать, что внешние поля отсутствуют, т.е. $\vec{F} = 0$. Тогда, в соответствии с изложенным выше, уравнение (П.И.7) для частиц одного сорта будет выглядеть так:

$$\frac{\partial f(\vec{r}; \vec{v}; t)}{\partial t} + \vec{v} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = B_{ct} \{f; f'\}. \quad (\text{П.И.9})$$

Односкоростное уравнение переноса в однородной среде

Случайную среду и потоки частиц, распространяющиеся в ней, можно рассматривать как некоторую физическую систему, состоящую из "частиц" двух сортов. Распространяющиеся частицы – частицы сорта "a", рассеивающие центры (атомы вещества) частицы сорта "b". Их функции распределения есть $f_a(\vec{r}; \vec{v}_a; t)$ и $f_b(\vec{r}; \vec{v}_b; t)$, соответственно. Уравнение для функции распределения $f_a(\vec{r}; \vec{v}_a; t)$ частиц сорта "a" будет иметь вид, аналогичный (П.И.9):

$$\frac{\partial f_a(\vec{r}; \vec{v}_a; t)}{\partial t} + \vec{v}_a \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}} = B_{ct}^{(a-a)} \{f_a; f'_a\} + B_{ct}^{(a-b)} \{f_a; f_b\}. \quad (\text{П.И.10})$$

Величина $B_{ct}^{(a-a)} \{f_a; f'_a\}$ есть интеграл столкновений частиц сорта "a" с частицами того же сорта, т.е. частиц пучка друг с другом. Поскольку в большинстве случаев плотность рассеиваемых частиц несизмеримо мала по сравнению с плотностью атомов вещества, то взаимодействием между ними можно пренебречь, полагая, что

$$B_{ct}^{(a-a)} \{f_a; f'_a\} = 0. \quad (\text{П.И.11})$$

Тогда кинетическое уравнение (П.И.10) для частиц сорта "a" будет выглядеть так:

$$\frac{\partial f_a(\vec{r}; \vec{v}_a; t)}{\partial t} + \vec{v}_a \frac{\partial f_a}{\partial \vec{r}} = B_{ct}^{(a-b)} \{f_a; f_b\}. \quad (\text{П.И.12})$$

Величина $\int_{\text{ст}}^{(a-b)} \{f_a; f_b\}$ есть интеграл столкновений частиц сорта "а" с частицами сорта "б", т.е. с атомами вещества:

$$\int_{\text{ст}}^{(a-b)} \{f_a; f_b\} = - \int (f_a \cdot f_b - f'_a \cdot f_b) u_{ab} \frac{d\sigma^{(ab)}(u_{ab}; \vartheta)}{d\Omega_a} d\Omega_a dv_b^r. \quad (\text{П.И.13})$$

Если среда однородная, а атомы вещества неподвижны, то функция распределения $f_b(r; v_b; t)$ рассеивающих центров будет выглядеть так:

$$f_b(r; v_b; t) = n_0 \delta(v_b). \quad (\text{П.И.14})$$

Здесь n_0 – концентрация атомов среды. Таким образом, функция распределения f_b известна и не зависит от динамических переменных частиц сорта "а". Поэтому в отличие от интеграла столкновений в кинетическом уравнении (П.И.9), интеграл столкновений в уравнении (П.И.12) является линейным интегральным оператором, т.к. отсутствует процесс взаимодействия частиц пучка друг с другом, т.е. частиц сорта "а" с частицами того же сорта. Таким образом, величина $\int_{\text{ст}}^{(a-b)} \{f_a; f_b\} = \int_{\text{ст}} \{f_a\}$ в уравнении (П.И.12) есть линеаризованный интеграл столкновений Больцмана, а само уравнение (П.И.12) оказывается линейным интегро-дифференциальным уравнением. Опуская везде индекс "а", запишем

$$\frac{\partial f(r; v; t)}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial r} = \int_{\text{ст}} \{f\}. \quad (\text{П.И.15})$$

Уравнение (П.И.15) описывает процесс распространения излучения в случайной среде и называется *уравнением переноса* излучения, или *транспортным* уравнением. Это уравнение совместно с соответствующим начальным и граничными условиями позволяет определить функцию распределения частиц $f(r; v; t)$. Естественно, что уравнение переноса (П.И.15) реально определено только после того, когда указан явный вид интеграла столкновений $\int_{\text{ст}} \{f\}$.

Конкретный вид интеграла столкновений определяется возможными процессами взаимодействия частиц с атомами вещества.

Рассмотрим простейший случай, когда взаимодействие частиц с атомами среды сводится к *упругому* рассеянию. В этом случае энергия, а следовательно, и величина скорости частиц не изменяется: $V = \text{const}$. Может изменяться только *направление* движения частиц. Поэтому функция распределения частиц, величина скорости которых $V = V_0$, будет выглядеть так:

$$f(\vec{r}; \vec{v}; t) = f(\vec{r}; \vec{\Omega}; t) \frac{\delta(V - V_0)}{V_0^2}. \quad (\text{П.И.16})$$

Здесь $\vec{\Omega}$ – единичный вектор скорости

$$\vec{\Omega} = \vec{v} / v, \quad (\text{П.И.17})$$

который указывает направление движения частицы.

Определим явный вид интеграла столкновений в *односкоростных* задачах теории переноса. Для этого обратимся к общей формуле (П.И.13). Подставляя в (П.И.13) значение f_b , определяемое выражением (П.И.14), после интегрирования по \vec{V}_b находим, что

$$\begin{aligned} B_{\text{ст}} \{f\} &= -n_0 \frac{\delta(V - V_0)}{V_0} \times \\ &\times \left\{ \sigma_{\text{упр}} f(\vec{r}; \vec{\Omega}; t) - \iint_{4\pi} f(\vec{r}; \vec{\Omega}'; t) \frac{d\sigma_{\text{упр}}(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})}{d\Omega'} d\Omega' \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.И.18})$$

При получении (П.И.18) было учтено, что относительная скорость при упругом рассеянии $u_{ab} = V_0$ и $d\sigma^{(a-b)}(u; \vartheta) / d\Omega_a = d\sigma_{\text{упр}}(V_0; \vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega}) / d\Omega'$ – дифференциальное сечение упругого рассеяния, при котором частица изменяет направление движения $\vec{\Omega}'$ на $\vec{\Omega}$. При рассеянии на сферических центрах $\cos \vartheta = (\vec{\Omega}', \vec{\Omega})$.

Величина

$$\sigma_{\text{упр}}(v_0) = \iint \frac{d\sigma_{\text{упр}}(v_0; \Omega' \rightarrow \Omega)}{d\Omega'} d\Omega' - \quad (\text{П.I.19})$$

полное сечение упругого рассеяния

Естественно, что дифференциальное, полное сечение упругого рассеяния и функция распределения, зависят от скорости частицы v_0 как от параметра. Теперь подставим (П.I.16) и (П.I.18) в (П.I.15). Учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\vec{r}; \vec{v}; t)}{\partial t} &= \frac{\delta(v - v_0)}{v_0^2} \left\{ \frac{\partial f(\vec{r}; \vec{\Omega}; t)}{\partial t} \right\}, \\ \vec{v} \frac{\partial f(\vec{r}; \vec{v}; t)}{\partial \vec{r}} &= \frac{\delta(v - v_0)}{v_0^2} \left\{ \vec{\Omega} v_0 \frac{\partial f(\vec{r}; \vec{\Omega}; t)}{\partial \vec{r}} \right\}, \end{aligned}$$

после сокращения на общий множитель $\delta(v - v_0)/v_0^2$, получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\vec{r}; \vec{\Omega}; t)}{\partial t} + \vec{\Omega} v_0 \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} &= \\ = -n_0 v_0 \sigma_{el} f(\vec{r}; \vec{\Omega}; t) + n_0 v_0 \iint_{4\pi} f(\vec{r}; \vec{\Omega}'; t) &\frac{d\sigma_{el}(\vec{\Omega}' \rightarrow \vec{\Omega})}{d\Omega'} d\Omega'. \quad (\text{П.I.20}) \end{aligned}$$

Это и есть уравнение переноса для частиц в упругорассеивающей среде без дополнительных источников, т.е. основное *односкоростное уравнение линейной теории переноса излучения*.

Обычно в теории переноса частиц оперируют не с функцией распределения, а с дифференциальной плотностью потока излучения

$$N(\vec{r}; \vec{\Omega}; t) = v_0 f(\vec{r}; \vec{\Omega}; t | v_0). \quad (\text{П.I.21})$$

В рассматриваемом случае чисто упругого рассеяния величина $N(\vec{r}; \vec{\Omega}; t) d\Omega dt$ представляет собой *число частиц*, пересекающих за время $t \div t + dt$ единичную площадку в точке \vec{r} , ориентиро-

ванную *перпендикулярно* к направлению их движения $\overset{\wedge}{\Omega}$, в интервале углов $\Omega \div \Omega + d\Omega$. С учетом определения (П.1.21), уравнение переноса для дифференциальной плотности потока излучения в консервативной среде (т.е. в среде в которой отсутствуют какие либо неупругие процессы – поглощение, ионизационное торможение и т.д.) будет следующим:

$$\frac{\partial N(\hat{r}; \overset{\wedge}{\Omega}; t)}{v_0 \partial t} + \overset{\wedge}{\Omega} \frac{\partial N}{\partial \hat{r}} = -n_0 \sigma_{el} N(\hat{r}; \overset{\wedge}{\Omega}; t) + n_0 \iint_{4\pi} N(\hat{r}; \overset{\wedge}{\Omega}'; t) \frac{d\sigma_{el}(\overset{\wedge}{\Omega}' \rightarrow \overset{\wedge}{\Omega})}{d\Omega'} d\Omega'. \quad (\text{П.1.22})$$

В стационарном, т.е. не зависящем от времени случае, уравнение (П.1.22) выглядит так:

$$\overset{\wedge}{\Omega} \frac{\partial N(\hat{r}; \overset{\wedge}{\Omega})}{\partial \hat{r}} = -n_0 \sigma_{el} N(\hat{r}; \overset{\wedge}{\Omega}) + n_0 \iint_{4\pi} N(\hat{r}; \overset{\wedge}{\Omega}') \frac{d\sigma_{el}(\overset{\wedge}{\Omega}' \rightarrow \overset{\wedge}{\Omega})}{d\Omega'} d\Omega'. \quad (\text{П.1.23})$$

Уравнение переноса в однородной среде с учетом потерь энергии при неупругих столкновениях

Заряженные частицы испытывают не только упругое рассеяние на атомах среды, но одновременно теряют свою энергию из-за их возбуждения или ионизации при взаимодействии с атомными электронами. За счет ионизационного торможения происходит уменьшение энергии частиц. Поэтому как функция распределения, так и дифференциальная плотность потока излучения зависят от энергии частиц T и соотношение (П.1.21) теперь будет выглядеть следующим образом:

$$N(\hat{r}; \overset{\wedge}{\Omega}; T; t) = v(T) f(\hat{r}; \overset{\wedge}{\Omega}; T; t). \quad (\text{П.1.24})$$

Физический смысл величины $N(\overset{\text{r}}{r}; \overset{\text{l}}{\Omega}; T; t)$ остается прежним. Величина $N(\overset{\text{r}}{r}; \overset{\text{l}}{\Omega}; T) d\Omega dT$ представляет собой *число частиц*, пересекающих в единицу времени единичную площадку в точке $\overset{\text{r}}{r}$, ориентированную *перпендикулярно* к направлению их движения $\overset{\text{l}}{\Omega}$, в интервале углов $\Omega \div \Omega + d\Omega$ и в интервале энергий $T \div T + dT$.

Приведем “вывод” неодноскоростного уравнения переноса для величины $N(\overset{\text{r}}{r}; \overset{\text{l}}{\Omega}; T; t)$, который, не претендую на строгость, очень прост и физически нагляден. Для этого заметим, что величина в правой части уравнения переноса (П.I.23)

$$\overset{\text{r}}{\Omega} \frac{\partial N(\overset{\text{r}}{r}; \overset{\text{l}}{\Omega})}{\partial \overset{\text{r}}{r}} = (\overset{\text{r}}{\Omega}, \text{grad}_{\overset{\text{r}}{r}} N) = \frac{\partial N(\overset{\text{r}}{r}; \overset{\text{l}}{\Omega})}{\partial l_{\overset{\text{l}}{\Omega}}}$$

есть производная в точке $\overset{\text{r}}{r}$ от плотности потока излучения $N(\overset{\text{r}}{r}; \overset{\text{l}}{\Omega})$ в направлении $\overset{\text{l}}{\Omega}$, т.е. в направлении распространения частиц. Поэтому правая часть уравнения переноса (П.I.23) определяет быстроту изменения дифференциальной плотности излучения в направлении $\overset{\text{l}}{\Omega}$.

Представляется очевидным, что учет дополнительного процесса взаимодействия частиц с атомами вещества, приводящий к деградации их энергии, не может повлиять на физический смысл величин в уравнении (П.I.23). Изменение односкоростного уравнения переноса (П.I.23) должно состоять только в том, что теперь быстрота изменения величины $N(\overset{\text{r}}{r}; \overset{\text{l}}{\Omega}; T; t)$ в точке $\overset{\text{r}}{r}$ в направлении $\overset{\text{l}}{\Omega}$ будет определяться как упругим, так и неупругим взаимодействием частиц с атомами вещества. Уравнение переноса теперь будет таким:

$$\begin{aligned} \overset{\text{r}}{\Omega} \frac{\partial N(\overset{\text{r}}{r}; \overset{\text{l}}{\Omega}; T)}{\partial \overset{\text{r}}{r}} &= -n_0 \sigma(T) N + \\ &+ n_0 \iint_{4\pi} d\Omega' \int_0^\infty d\varepsilon \frac{d^2 \sigma(\overset{\text{r}}{\Omega'}; T + \varepsilon | \overset{\text{r}}{\Omega}, \varepsilon)}{d\varepsilon d\Omega'} N(\overset{\text{r}}{r}; \overset{\text{l}}{\Omega'}; T + \varepsilon). \end{aligned} \quad (\text{П.I.25})$$

Здесь $\sigma(T) = \sigma_{\text{упр}} + \sigma_{\text{неупр}}$ – полное сечение столкновений частицы с энергией T ; $d^2\sigma(\overset{\Gamma}{\Omega}'; T + \varepsilon | \overset{\Gamma}{\Omega}; \varepsilon) / d\Omega d\varepsilon$ – дифференциальное сечение рассеяния из состояния $(\overset{\Gamma}{\Omega}'; T + \varepsilon)$ в состояние $(\overset{\Gamma}{\Omega}; T)$, когда частица изменяет направление движения $\overset{\Gamma}{\Omega}'$ на $\overset{\Gamma}{\Omega}$ и теряет энергию ε .

Попутно отметим, что полученное выше уравнение (П.I.20) определяет процесс распространения фотонов в однородной консервативной среде, когда частота света остается неизменной и скорость распространения излучения $v_0 = c$. В теории переноса оптического излучения основной энергетической характеристикой светового поля в случайной среде является интенсивность излучения $I(\vec{r}; \vec{\Omega}; t)$, которая связана с функцией распределения соотношением

$$I(\overset{\Gamma}{r}; \overset{\Gamma}{\Omega}; t) = h\omega c f(\overset{\Gamma}{r}; \overset{\Gamma}{\Omega}; t). \quad (\text{П.I.26})$$

Поскольку $h\omega$ есть энергия кванта, которая предполагается неизменной, то величина $I(\overset{\Gamma}{r}; \overset{\Gamma}{\Omega}; t)d\Omega dt$ представляет собой средний поток световой энергии через единичную площадку в точке $\overset{\Gamma}{r}$, ориентированную перпендикулярно к направлению движения фотона $\overset{\Gamma}{\Omega}$ за время $t \div t + dt$. Чтобы учесть поглощение фотонов, т.е. дополнительный канал ухода фотонов из состояния $\overset{\Gamma}{\Omega}$, нужно в правую часть уравнения (П.I.20) добавить величину $-kI(\overset{\Gamma}{r}; \overset{\Gamma}{\Omega}; t)$, где k – истинный коэффициент поглощения. Величина $-kI(\overset{\Gamma}{r}; \overset{\Gamma}{\Omega}; t)$ фактически является неупругой частью полного интеграла столкновений для фотонов. Таким образом, в самом общем виде уравнение переноса для интенсивности света $I(\overset{\Gamma}{r}; \overset{\Gamma}{\Omega}; t)$ в однородной среде выглядит так:

$$\frac{\partial I\left(\overset{\text{r}}{r}; \overset{\text{l}}{\Omega}; t\right)}{c\partial t} + \overset{\text{r}}{\Omega} \frac{\partial I}{\partial \overset{\text{r}}{r}} = \\ = -(\sigma + k)I + \sigma \iint_{4\pi} d\overset{\text{r}}{\Omega}' \chi\left(\overset{\text{r}}{\Omega}' \rightarrow \overset{\text{r}}{\Omega}\right) I\left(\overset{\text{r}}{r}; \overset{\text{r}}{\Omega}'; t\right). \quad (\text{П.1.27})$$

Здесь $\sigma = n_0 \sigma_{\text{упр}}$ – коэффициент рассеяния; $\chi\left(\overset{\text{r}}{\Omega}' \rightarrow \overset{\text{r}}{\Omega}\right) = d\sigma_{\text{упр}}\left(\overset{\text{r}}{\Omega}' \rightarrow \overset{\text{r}}{\Omega}\right)/\sigma_{\text{упр}}$ – индикаториса (вероятность) однократного рассеяния из направления $\overset{\text{l}}{\Omega}'$ в направление $\overset{\text{r}}{\Omega}'$; n_0 – средняя плотность рассеивающих центров среды.

ПРИЛОЖЕНИЕ II

РАСЧЕТ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО СПЕКТРА ЧАСТИЦ В ПРИБЛИЖЕНИИ НЕПРЕРЫВНОГО ЗАМЕДЛЕНИЯ ОТ ПЛОСКОГО ИСТОЧНИКА, РАСПОЛОЖЕННОГО В ГЛУБИНЕ ВЕЩЕСТВА

Пусть на поверхность вещества $z = 0$ падает широкий моноэнергетический пучок частиц с энергией T_0 под углом θ_0 к оси Oz в азимутальной плоскости ($\varphi_0 = 0$). Будем считать, как и ранее, что величина N_0 есть плотность потока падающего излучения, т.е. число частиц, пересекающих в единицу времени единичную площадку, ориентированную *перпендикулярно* к направлению движения падающих частиц. Тогда за единицу времени через *единицу поверхности* в среду влетает $N = N_0 \cos\theta_0$ частиц. Такой падающий поток можно заменить эквивалентным поверхностным источником

$$q_\Sigma(\mu, \varphi; T) = N_0 \mu_0 \cdot \delta(z) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi) \delta(T - T_0). \quad (\text{П.П.1})$$

Здесь $\mu_0 = \cos\theta_0$, $\mu = \cos\theta$. Для источника, находящегося на *поверхности* вещества величина μ_0 всегда положительна ($\mu_0 > 0$), т.к. *падающие* частицы всегда движутся в глубь вещества $-0 \leq \theta_0 < \pi/2$. Если плоский моноэнергетический источник расположен в *глубине вещества* на расстоянии Z_0 от его поверхности и испускает частицы с энергией T_0 под углом θ_0 к оси Oz ($0 \leq \theta_0 \leq \pi$) в азимутальной плоскости ($\varphi_0 = 0$), то плотность такого источника

$$q_\Sigma(\mu, \varphi; T) = N_0 |\mu_0| \cdot \delta(z - z_0) \delta(\mu - \mu_0) \delta(\varphi) \delta(T - T_0). \quad (\text{П.П.2})$$

В отличие от поверхностного источника (П.П.1), глубинный источник может испускать частицы как в глубь среды ($0 \leq \theta_0 < \pi/2$, $\mu_0 > 0$) (рис. П.П.1), так и в сторону границы

$z = 0$ (рис. П.П.2). В этом случае $\pi/2 < \theta_0 \leq \pi$, т.е. $\mu_0 < 0$. Если $z_0 = 0$, $\mu_0 > 0$, то формула (П.П.2) переходит в (П.П.1).

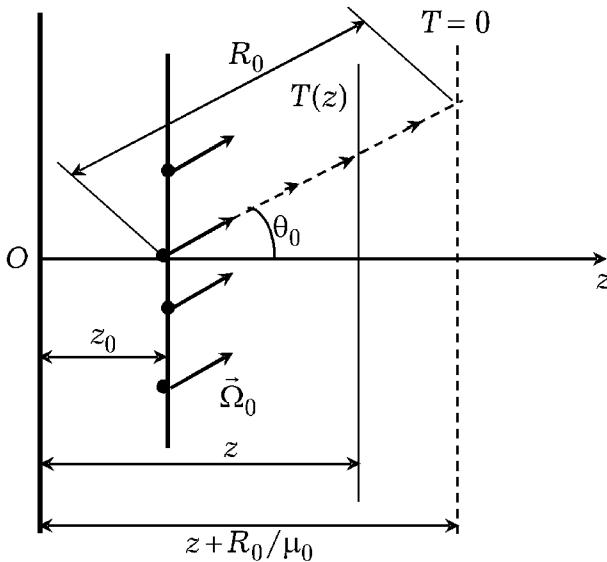


Рис. П.П.1. Условное изображение распространения частиц от плоского мононаправленного источника, расположенного в веществе на глубине z_0 и испускающего частицы в глубь среды

Именно по этой причине величина μ_0 в формуле (П.П.2) входит под знаком модуля, так как число частиц, испускаемых источником, не может быть величиной отрицательной в какую бы сторону эти частицы не испускались.

Если источник испускает частицы в сторону границы ($\mu_0 < 0$), то при определенных условиях частицы могут вылетать из вещества, т.е. образуется радиационное поле выходящего из среды излучения:

$$N_{\text{вых}}(T|z_0; \mu_0; T_0) = N(z = 0; T|z_0; \mu_0 < 0; T_0). \quad (\text{П.П.3})$$

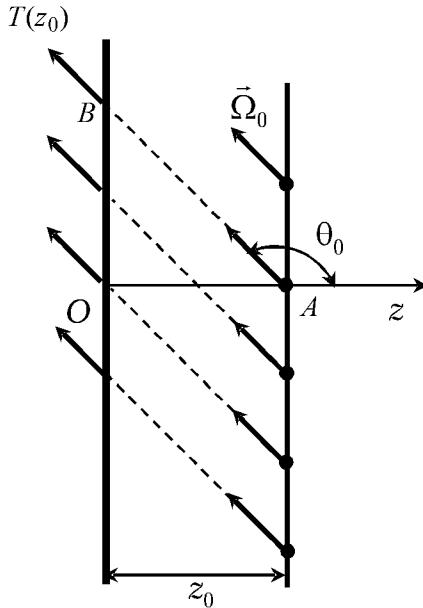


Рис.П.П.2. Условное изображение распространения частиц от плоского мононаправленного источника, расположенного в веществе на глубине z_0 и испускающего частицы в сторону границы

В приближении «прямо-вперед» направление движение частиц не изменяется. Поэтому дифференциальная плотность потока излучения может быть записана в виде

$$N(\vec{r}; \Omega; T) = \delta(\Omega - \vec{\Omega}_0) N(\vec{r}; T). \quad (\text{П.П.4})$$

Здесь $\vec{\Omega}_0$ – единичный вектор скорости в падающем пучке. Так как источник плоский, то величина $N(\vec{r}; T)$ не зависит от поперечных координат x , y , а зависит только от глубины z – $N(\vec{r}; T) = N(z; T)$. В этом случае при движении частиц в направлении $\vec{\Omega}_0$

$$\vec{\Omega} \frac{\partial}{\partial \vec{r}} = \Omega_z \frac{\partial}{\partial z} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial z}.$$

Поэтому уравнение переноса в приближении непрерывного замедления при наличии источника (П.П.1) следующее:

$$\begin{aligned} \mu_0 \frac{\partial N(z; T)}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial T} \{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) \} + N_0 |\mu_0| \delta(z - z_0) \delta(T - T_0). \end{aligned} \quad (\text{П.П.5})$$

Делая в уравнении (П.П.5) замену переменной $z' = (z - z_0)/\mu_0$, получим

$$\frac{\partial N}{\partial z'} = \frac{\partial}{\partial T} \{ \bar{\varepsilon}(T) N \} + N_0 \delta(z') \delta(T - T_0). \quad (\text{П.П.6})$$

Здесь учтено, что $\delta(z - z_0) = \delta(z' \cdot \mu_0) = (1/|\mu_0|) \delta(z')$. Уравнение (П.П.6) эквивалентно уравнению (2.1.2), в котором $N_{\text{пад}} = N_0 \delta(T - T_0)$. Поэтому решение уравнения (П.П.5) будет определяться выражениями вида (2.1.15), (2.1.16), в которых нужно осуществить замену:

$$z \rightarrow (z - z_0)/\mu_0. \quad (\text{П.П.7})$$

После этого получим для распределений по остаточным пробегам и энергиям следующие выражения:

$$N(z; R|\mu_0; R_0) = N_0 \delta \left\{ R_0 - R - \frac{z - z_0}{\mu_0} \right\}. \quad (\text{П.П.8})$$

$$N(z; T|\mu_0; T_0) = N_0 \delta \left[T - \gamma_0 \left(\frac{z - z_0}{\mu_0}; T_0 \right) \right]. \quad (\text{П.П.9})$$

Величина $\gamma_0 = T[(z - z_0)/\mu_0; T_0]$ определяется из уравнения, аналогичного уравнению (2.1.22)

$$\int_{\gamma_0}^{T_0} \frac{dT'}{\bar{\varepsilon}(T')} = \frac{z - z_0}{\mu_0}. \quad (\text{П.П.10})$$

Если $\mu_0 > 0$, то частицы испускаются источником в глубь среды. В этом случае величина $N(z - z_0; T | \mu_0 > 0; T_0)$ отлична от нуля справа от источника, т.е. при $z \geq z_0$ в слое вещества

$$z_0 \leq z < z_0 + R_0 \mu_0. \quad (\text{П.П.11})$$

Если $z_0 = 0$ и $\mu_0 = 1$, то из формул (П.П.8) – (П.П.10) получаем прежний результат при нормальном падении излучения на поверхность вещества.

Если $\mu_0 = -|\mu_0| < 0$, то частицы испускаются в сторону границы $z = 0$. В этом случае величина $N(z - z_0; T | \mu_0 > 0; T_0)$ отлична от нуля слева от источника в области глубин

$$z_0 - |\mu_0| R_0 < z \leq z_0, \quad (z \geq 0). \quad (\text{П.П.12})$$

Если источник расположен достаточно глубоко ($z_0 > |\mu_0| R_0$, т.е. $AB > R_0$), то испущенные им частицы останавливаются, не достигнув поверхности $z = 0$, и не вылетают из вещества. Если же расстояние $AB < R_0$, т.е. $z_0 < |\mu_0| R_0$ (см. рис. П.П.2), то, пройдя в веществе путь $AB = z_0 / |\mu_0|$, частицы достигнут поверхности вещества, не успев потерять всю начальную энергию. В этом случае образуется радиационное поле выходящего из среды излучения (П.П.3):

$$N_{\text{вых}}(T | z_0; \mu_0; T_0) = N_0 \delta \left[T - T \left(\frac{z_0}{|\mu_0|}; T_0 \right) \right], \\ (z_0 < |\mu_0| R_0). \quad (\text{П.П.13})$$

Энергия вылетающих частиц $T(z = 0; \mu_0; T; T_0)$ определяется из уравнения (П.П.10), в котором нужно положить $z = 0$, $\mu_0 = -|\mu_0|$:

$$\int_{T_{\text{вых}}(z=0)}^{T_0} \frac{dT'}{\varepsilon(T')} = \frac{z_0}{|\mu_0|}, \quad (z_0 < |\mu_0| R_0). \quad (\text{П.П.14})$$

Так как частицы вылетают из вещества в направлении $\mu = -|\mu_0|$, то их количество, выходящее из среды через единицу поверхности в единицу времени, будет определяться выражением

$$\begin{aligned} S_{\text{вых}}(z_0; \mu_0; T; T_0) &= |\mu_0| N_{\text{вых}} = \\ &= N_0 |\mu_0| \delta \left[T - T \left(\frac{z_0}{|\mu_0|}; T_0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{П.П.15})$$

Именно величина $S_{\text{вых}}$ регистрируется детекторами излучения.

Для нерелятивистских частиц, когда $\bar{\varepsilon}(T) \approx \bar{\varepsilon}_0 (T_0 / T) = T_0^2 / 2R_0 T$, из уравнения (П.П.14) находим

$$T_{\text{вых}}(z_0; \mu_0; T_0) = T_0 \sqrt{1 - \frac{z_0}{|\mu_0| R_0}}, \quad (z_0 < |\mu_0| R_0). \quad (\text{П.П.16})$$

Подставляя (П.П.16) в (П.П.15), получим

$$S_{\text{вых}} = N_0 |\mu_0| \delta \left[T - T_0 \sqrt{1 - \frac{z_0}{|\mu_0| R_0}} \right]. \quad (\text{П.П.17})$$

Если источник находится на поверхности вещества ($z_0 = 0$), то, как и должно быть, $S_{\text{вых}}(z_0 = 0) = N_0 |\mu_0| \delta(T - T_0)$, т.е. вылетают все частицы испущенные таким источником с энергией $T = T_0$.

**ВЫЧИСЛЕНИЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО ПОТОКА
НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ**

Полученное выражение для энергетического спектра частиц (2.5.21) позволяет вычислить зависимость полного интегрального потока частиц $N(\xi)$ от глубины

$$N(\xi) = \int_0^\infty N(\xi; u) du. \quad (\text{П.III.1})$$

При вычислении интеграла в (П.III.1) удобно воспользоваться выражением (2.5.19) для дифференциальной плотности потока излучения

$$N(\xi; u) = N_0 u^{-\mu+1} \int_0^\infty J_\mu(u\omega) J_\mu(\omega) e^{-\xi\omega^2/8v} \omega d\omega, \\ (\mu = 2v + 1/2). \quad (\text{П.III.2})$$

Подставляя (П.III.2) в (П.III.1), запишем

$$N(\xi) = N_0 \int_0^\infty \exp\left(-\xi \frac{\omega^2}{8v}\right) J_\mu(\omega) \left\{ \int_0^\infty u^{-\mu+1} J_\mu(u\omega) du \right\} \omega d\omega. \quad (\text{П.III.3})$$

Внутренний интеграл по u в выражении (П.III.3) является табличным [8]:

$$\int_0^\infty u^\alpha J_\mu(u\omega) du = \frac{2^\alpha}{\omega^{\alpha+1}} \frac{\Gamma\left(\frac{1+\mu+\alpha}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1+\mu-\alpha}{2}\right)}, \\ (1/2 > \alpha > -\mu - 1). \quad (\text{П.III.4})$$

Здесь $\Gamma(x)$ – гамма-функция Эйлера. В нашем случае $\alpha = -\mu + 1$. Поэтому

$$\int_0^\infty u^{-\mu+1} J_\mu(u\omega) du = \frac{\omega^{\mu-2}}{2^{\mu-1}\Gamma(\mu)}. \quad (\text{П.III.5})$$

Теперь формула (П.III.3) принимает вид:

$$N(\xi) = \frac{N_0}{2^{\mu-1}\Gamma(\mu)} \int_0^\infty \omega^{\mu-1} e^{-\xi \frac{\omega^2}{8v}} J_\mu(\omega) d\omega. \quad (\text{П.III.6})$$

Интеграл по ω в формуле (П.III.6) тоже является табличным [8]:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \omega^{\mu-1} \exp\left(-\xi \frac{\omega^2}{8v}\right) J_\mu(\omega) d\omega &= \\ &= 2^{\mu-1} \{ \Gamma(\mu) - \Gamma(\mu; 2v/\xi) \}. \end{aligned} \quad (\text{П.III.7})$$

Здесь $\Gamma(\mu; 2v/\xi)$ – неполная гамма-функция Эйлера. Для неё справедливо следующее интегральное представление

$$\Gamma(\mu; 2v/\xi) = \int_{2v/\xi}^\infty t^{\mu-1} \exp(-t) dt. \quad (\text{П.III.8})$$

Иногда неполной гамма-функцией называют также функцию $\gamma(\mu; \alpha) = \Gamma(\mu) - \Gamma(\mu; \alpha)$.

В результате получаем следующее выражение для полного потока частиц на произвольной глубине $0 \leq \xi < \infty$:

$$N(\xi) = N_0 \left\{ 1 - \frac{\Gamma(\mu; 2v/\xi)}{\Gamma(\mu)} \right\}, \quad (\mu = 2v + 1/2). \quad (\text{П.III.9})$$

Условие $v \gg 1$ позволяет преобразовать точное выражение для интегрального потока частиц (П.III.9) к более простому виду.

Сначала получим асимптотическое выражение для полной гамма-функции $\Gamma(2v + 1/2)$ при $v \gg 1$. Воспользуемся формулой Стирлинга: $\Gamma(\mu \gg 1) \approx \sqrt{2\pi} (\mu)^{\mu-1/2} e^{-\mu}$. Поскольку $\mu = 2v + 1/2$, то

$$\Gamma\left(2v + \frac{1}{2}\right) \approx \sqrt{2\pi} \left(2v + \frac{1}{2}\right)^{2v} e^{-2v - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2\pi}{e}} (2v)^{2v} \left(1 + \frac{1}{4v}\right)^{2v} e^{-2v}.$$

Учитывая, что при $v \gg 1$

$$\left(1 + \frac{1}{4v}\right)^{2v} = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{4v}\right)^{4v}} \approx \sqrt{e},$$

окончательно имеем

$$\Gamma\left(v + \frac{1}{2}\right) \approx \sqrt{2\pi} (2v)^{2v} e^{-2v}, \quad (v \gg 1). \quad (\text{П.III.10})$$

Теперь получим приближенное выражение для неполной гамма-функции $\Gamma(\mu; 2v / \xi)$ при $v \gg 1$, используя её интегральное представление (П.III.8):

$$\Gamma(2v + 1/2; 2v/\xi) = \int_{2v/\xi}^{\infty} t^{2v-1/2} \exp(-t) dt. \quad (\text{П.III.11})$$

Для этого удобно сделать замену переменной интегрирования

$$y = \frac{\xi}{2v} t, \quad \rightarrow \quad t^{2v-1/2} dt = \left(\frac{2v}{\xi}\right)^{2v+1/2} y^{2v-1/2} dy.$$

Теперь формула (П.III.11) будет выглядеть так:

$$\Gamma(2v + 1/2; 2v/\xi) = \left(\frac{2v}{\xi}\right)^{2v+1/2} \int_1^{\infty} y^{2v} \exp\left(-2v \frac{y}{\xi}\right) \frac{dy}{\sqrt{y}}. \quad (\text{П.III.12})$$

Поскольку $y^{2v} = \exp(2v \ln y)$, то выражение (П.III.12) запишется в виде

$$\begin{aligned} \Gamma(2v + 1/2; 2v/\xi) &= \\ &= \left(\frac{2v}{\xi}\right)^{2v+1/2} \int_1^{\infty} \exp\left\{-2v\left(\frac{y}{\xi} - \ln y\right)\right\} \frac{dy}{\sqrt{y}}. \end{aligned} \quad (\text{П.III.13})$$

До сих пор не было сделано каких-либо приближений. Поэтому формула (П.III.13) является абсолютно точной. Поскольку $v >> 1$, то основной вклад в интеграл в (П.III.13) будет давать окрестность точки минимума функции $y/\xi - \ln y$, т.е. окрестность точки $y = \xi$.

Разложим функцию $y/\xi - \ln y$ в ряд в окрестности $y = \xi$ с точностью до членов второго порядка включительно:

$$y/\xi - \ln y \approx 1 - \ln \xi + \frac{1}{2\xi^2} (y - \xi)^2.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \Gamma(2v + 1/2; 2v/\xi) &\approx \\ &\approx \frac{(2v)^{2v+1/2}}{\sqrt{\xi}} e^{-2v} \int_1^\infty \exp \left\{ - \left[\frac{\sqrt{v}}{\xi} (y - \xi) \right]^2 \right\} \frac{dy}{\sqrt{y}}. \end{aligned} \quad (\text{П.III.14})$$

Так как при $v >> 1$ подынтегральная функция в (П.III.14) имеет чрезвычайно резкий максимум при $y = \xi$, то можно положить $\sqrt{y} \approx \sqrt{\xi}$. Кроме того, удобно сделать замену переменной интегрирования:

$$t = \frac{\sqrt{v}}{\xi} (y - \xi), \rightarrow y = \xi \left(1 + \frac{t}{\sqrt{v}} \right), \rightarrow dy = \xi \frac{dt}{\sqrt{v}}.$$

Теперь выражение (П.III.14) можно записать в виде

$$\Gamma(2v + 1/2; 2v/\xi) \approx \sqrt{2} (2v)^{2v} e^{-2v} \int_{\frac{\sqrt{v}}{\xi}(1-\xi)}^\infty \exp \{-t^2\} dt. \quad (\text{П.III.15})$$

Входящий сюда интеграл выражается через интеграл ошибок:

$$\int_{\frac{\sqrt{v}}{\xi}(1-\xi)}^\infty \exp \{-t^2\} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf} \left(\sqrt{v} \frac{1 - \xi}{\xi} \right) \right\}. \quad (\text{П.III.16})$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt.$$

(График функции $\operatorname{erf}(x)$ представлен на рис. 2.1.3.)

Следовательно,

$$\Gamma(2v + 1/2; 2v/\xi) \approx \frac{\sqrt{2\pi}(2v)^{2v} e^{-2v}}{2} \left\{ 1 - \operatorname{erf}\left(\sqrt{v} \frac{1-\xi}{\xi}\right) \right\},$$

(v >> 1). (П.III.17)

Это и есть искомое приближенное выражение для неполной гамма-функции при больших значениях v.

Теперь, подставляя (П.III.10) и (П.III.17) в точную формулу (П.III.9), окончательно получаем следующее приближенное выражение для полного интегрального потока частиц во всей области глубин $0 \leq \xi < \infty$ при больших значениях флюктуационного параметра v

$$N(\xi) \approx \frac{N_0}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf}\left(\sqrt{v} \frac{1-\xi}{\xi}\right) \right\}. (П.III.18)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ IV

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ВЫРАЖЕНИЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ПОТОКА ИЗЛУЧЕНИЯ НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ ЧАСТИЦ

Получим приближенное асимптотическое выражение (по флюктуационному параметру $v >> 1$) для дифференциальной плотности потока излучения $N(\xi; u)$, исходя из точной формулы (2.5.21):

$$N(\xi; u) = N_0 \frac{4v}{\xi} u^{-\mu+1} \exp\left(-2v \frac{1+u^2}{\xi}\right) I_\mu\left(4v \frac{u}{\xi}\right), \quad (\text{П.IV.1})$$

Так как $\mu >> 1$, то воспользуемся известной формулой Мейселя для модифицированных функций Бесселя с большим индексом*

$$I_\mu(\mu x) \approx \frac{x^\mu \exp\left(\mu \sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{2\pi\mu} (1+x^2)^{1/4} \left(1+\sqrt{1+x^2}\right)^\mu}, \quad (\mu >> 1). \quad (\text{П.IV.2})$$

В нашем случае $x = 2u/\xi$, $\mu = 2v + 1/2$, т.е. $2v = \mu - 1/2$. Поэтому

$$I_\mu\left(4v \frac{u}{\xi}\right) = I_\mu(2vx) = I_\mu\left\{\mu \left[\left(1 - \frac{1}{2\mu}\right)x \right]\right\}. \quad (\text{П.IV.3})$$

Используя формулу Мейселя (П.IV.2), записываем (П.IV.3) в виде

$$\begin{aligned} I_\mu(2vx) &\approx \\ &\approx \frac{x^\mu (1-1/2\mu)^\mu \exp\left\{\mu \sqrt{1+x^2 (1-1/2\mu)^2}\right\}}{\sqrt{2\pi\mu} [1+x^2 (1-1/2\mu)^2]^{1/4} \left[1+\sqrt{1+x^2 (1-1/2\mu)^2}\right]^\mu}. \end{aligned} \quad (\text{П.IV.4})$$

* Справочник по специальным функциям / Под ред. Абрамовица М., Стиган И.: Пер. с англ. М.: Наука. 1979, с.199.

Так как $\mu \gg 1$, то

$$(1 - 1/2\mu)^\mu = \sqrt{(1 - 1/2\mu)^{2\mu}} \approx 1/\sqrt{e},$$

$$\left[1 + x^2(1 - 1/2\mu)^2\right]^{1/4} \approx (1 + x^2)^{1/4}.$$

Поскольку

$$\left[1 + \sqrt{1 + x^2(1 - 1/2\mu)^2}\right]^{-\mu} = \exp\left\{-\mu \ln\left[1 + \sqrt{1 + x^2(1 - 1/2\mu)^2}\right]\right\},$$

то формула (П.IV.4) принимает вид

$$I_\mu(2vx) \approx \frac{x^\mu}{\sqrt{2\pi\mu e}(1+x^2)^{1/4}} \times \\ \times \exp\left\{\mu\left[\sqrt{1+x^2(1-1/2\mu)^2} - \ln\left(1 + \sqrt{1+x^2(1-1/2\mu)^2}\right)\right]\right\}. \quad (\text{П.IV.5})$$

Разложим выражение в квадратных скобках в показателе экспоненты (П.IV.5) в ряд по величине $1/\mu$ с точностью до членов $\sim 1/\mu$ включительно:

$$\sqrt{1 + x^2(1 - 1/2\mu)^2} \approx \\ \approx \sqrt{(1 + x^2) - x^2/(\mu)} \approx \sqrt{1 + x^2} - \frac{x^2}{2\mu\sqrt{1 + x^2}}. \quad (\text{П.IV.6a})$$

$$\ln\left(1 + \sqrt{1 + x^2(1 + 1/2\mu)^2}\right) \approx \\ \approx \ln\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right) - \frac{\sqrt{1 + x^2} - 1}{2\mu\sqrt{1 + x^2}}. \quad (\text{П.IV.6b})$$

Теперь показатель экспоненты в формуле (П.IV.5) будет выглядеть так:

$$\mu\left[\sqrt{1 + x^2(1 - 1/2\mu)^2} - \ln\left(1 + \sqrt{1 + x^2(1 + 1/2\mu)^2}\right)\right] \approx \\ \approx \mu\left[\sqrt{1 + x^2} - \ln\left(1 + \sqrt{1 + x^2}\right)\right] + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{1 + x^2}}{2}.$$

Учитывая, что $\mu = 2v + 1/2$, получаем

$$\begin{aligned} \mu & \left[\sqrt{1+x^2(1-1/2\mu)^2} - \ln \left(1 + \sqrt{1+x^2(1+1/2\mu)^2} \right) \right] \approx \\ & \approx 2v \left[\sqrt{1+x^2} - \ln \left(1 + \sqrt{1+x^2} \right) \right] + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln \left(1 + \sqrt{1+x^2} \right). \end{aligned} \quad (\text{П.IV.7})$$

Подставляя (П.IV.7) в формулу (П.IV.5), будем иметь

$$\begin{aligned} I_{2v+1/2}(2vx) & \approx \frac{x^{2v+1/2}}{\sqrt{2\pi\mu}(1+x^2)^{1/4}(1+\sqrt{1+x^2})^{1/2}} \times \\ & \times \exp \left\{ -2v \left[\ln \left(1 + \sqrt{1+x^2} \right) - \sqrt{1+x^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.IV.8})$$

Поскольку

$$\begin{aligned} x^{2v+1/2} & = \left(\frac{2u}{\xi} \right)^{2v+1/2} = u^{2v+1/2} \left(\frac{2}{\xi} \right)^{2v} \\ & = u^{2v+1/2} \sqrt{\frac{2}{\xi}} \exp(-2v \ln \xi / 2), \end{aligned}$$

то формула (П.IV.8) принимает вид

$$\begin{aligned} I_{2v+1/2}(2vx) & \approx \frac{u^{2v+1/2} \sqrt{2/\xi}}{\sqrt{2\pi\mu}(1+x^2)^{1/4}(1+\sqrt{1+x^2})^{1/2}} \times \\ & \times \exp \left\{ -2v \left[\ln \xi \left(1 + \sqrt{1+x^2} \right) - \ln 2 - \sqrt{1+x^2} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П.IV.9})$$

Теперь подставляя выражение (П.IV.9) в формулу (П.IV.1), получим следующее приближенное выражение для дифференциальной плотности потока частиц на произвольных глубинах:

$$N(\xi; u) = N_0 \frac{2u}{\xi} \sqrt{\frac{2v}{\pi\xi}} \frac{\exp \left\{ -2vB(\xi; u) \right\}}{\left(1 + 4 \frac{u^2}{\xi^2} \right)^{1/4} \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{u^2}{\xi^2}} \right)^{1/2}}. \quad (\text{П.IV.10})$$

Здесь

$$B(\xi; u) = \frac{1+u^2}{\xi} + \ln \frac{\xi \left(1 + \sqrt{1 + 4 \frac{u^2}{\xi^2}} \right)}{2} - \sqrt{1 + 4 \frac{u^2}{\xi^2}}. \quad (\text{П.IV.11})$$

Формулы (П.IV.10) и (П.IV.11) можно записать в более удобном виде

$$N(\xi; u) \approx N_0 \sqrt{\frac{2v}{\pi\xi}} \sqrt{\frac{y-1}{y}} \exp \left\{ -2vB(\xi; y) \right\}, \quad (\text{П.IV.12})$$

$$B(\xi; y) = \left\{ \frac{1}{\xi} - \frac{\xi}{4} + \ln \left(\frac{\xi}{2} \right) \right\} + \left\{ \frac{\xi}{4} y^2 - y + \ln(1+y) \right\}, \quad (\text{П.IV.13})$$

где

$$y = \sqrt{1 + 4 \frac{u^2}{\xi^2}}. \quad (\text{П.IV.14})$$

СВЯЗЬ МЕЖДУ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ОСТАНОВИВШИХСЯ ЧАСТИЦ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПО ПРОБЕГАМ (ОБЩИЙ СЛУЧАЙ)

Как было показано ранее, распределение остановившихся частиц $W(z)$ по глубине их проникновения в вещества определяется быстротой убывания интегрального потока $N(z)$

$$W(z) = -\frac{1}{N_{\text{пад}}} \frac{dN(z)}{dz}, \quad N_{\text{пад}} = \int_0^{\infty} N_{\text{пад}}(T) dT. \quad (\text{П.V.1})$$

$$N(z) = \int_0^{\infty} N(z; T) dT. \quad (\text{П.V.2})$$

Таким образом, для расчета $W(z)$ нужно сначала из уравнения переноса

$$\begin{cases} \frac{\partial N(z; T)}{\partial z} = B_{\text{нейупр}} \{N(z; T)\}; \\ N(z = 0; T) = N_{\text{пад}}(T) \end{cases} \quad (\text{П.V.3})$$

найти энергетическое распределение частиц $N(z; T)$, затем, осуществляя интегрирование по T , вычислить полный поток $N(z)$ и только потом, по формуле (П.V.1) определить зависимость производной от потока частиц от глубины z . Однако в случае тяжелых частиц можно обойти эту громоздкую процедуру вычислений. Оказывается возможным, исходя непосредственно из уравнения переноса (П.V.3), получить простое соотношение, связывающее распределение остановившихся частиц $W(z)$ непосредственно с распределением частиц $N(z; R)$ по остаточным пробегам в общем виде, т.е. не упрощая интеграл неупругих столкновений [2, гл. 6, с. 127]. Для этого удобно воспользоваться формой записи интеграла неупругих столкновений (1.3.24). Тогда уравнение для энергетического распределения частиц $N(z; T)$ будет выглядеть так:

$$\frac{\partial N(z; T)}{\partial z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^k}{\partial T^k} \left\{ \bar{\varepsilon}^k(T) N(z; T) \right\}. \quad (\text{П.V.4})$$

Здесь

$$\bar{\varepsilon}^k(T) = \int_0^{\infty} \varepsilon^k W_{\text{нейупр}}(T | \varepsilon) d\varepsilon. \quad (\text{П.V.5})$$

Интегрируя уравнение (П.V.4) по энергии, с учетом формулы (П.V.2) для интегрального потока частиц, получим

$$\frac{dN(z)}{dz} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \int_0^{\infty} \frac{\partial^k}{\partial T^k} \left\{ \bar{\varepsilon}^k(T) N(z; T) \right\} dT. \quad (\text{П.V.6})$$

Подставляя (П.V.6) в (П.V.1), получим

$$W(z) = - \frac{1}{N_{\text{пад}}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \left\{ \frac{\partial^{k-1}}{\partial T^{k-1}} \left[\bar{\varepsilon}^k(T) N(z; T) \right] \right\}_{T=0}^{\infty}. \quad (\text{П.V.7})$$

Поскольку на верхнем пределе все слагаемые суммы равны нулю, то

$$W(z) = \\ = \frac{1}{N_{\text{пад}}} \lim_{T \rightarrow 0} \left\{ \bar{\varepsilon}(T) N(z; T) + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial T^{k-1}} \left[\bar{\varepsilon}^k(T) N(z; T) \right] \right\}. \quad (\text{П.V.8})$$

Таким образом, определение величины $W(z)$ свелось к вычислению предела суммы (П.V.8) при $T \rightarrow 0$. В модели непрерывного замедления в сумме остается только одно первое слагаемое и (П.V.8) сводится к полученной ранее формуле (4.2.3). Если в сумме (П.V.8) сохранить два первых слагаемых, то получим результат (4.4.4) в приближении Фоккера – Планка. Оказывается, однако, что предел суммы (П.V.8) можно найти в общем виде, используя только два необременительных допущения – пренебрегая зависимостью от энергии ионизационного логарифма в формуле Бете – Блоха для $\bar{\varepsilon}(T)$ и используя модель свободных электронов при вычислении

величин $\overline{\varepsilon^k}(T)$ при $k = 2, 3, \dots$. В этом приближении выражения для величин $\overline{\varepsilon}(T)$ и $\overline{\varepsilon^k}(T)$ для нерелятивистских частиц определяются формулами (1.3.11) и (1.3.27):

$$\overline{\varepsilon}(T) \approx b \cdot L_{\text{ион}} \cdot \frac{mc^2}{T} m_e c^2, \\ \overline{\varepsilon^k}(T) = 2b \frac{4^{k-2}}{k-1} \left(\frac{T}{mc^2} \right)^{k-2} (m_e c^2)^k, \quad b = 0,3\rho z^2 \frac{Z}{A}. \quad (\text{П.V.9})$$

Учитывая, что распределение по энергии $N(z; T)$ связано с распределением по остаточным пробегам $N(z; R)$ соотношением $N(z; T) = N(z; R) / \overline{\varepsilon}(T)$, перепишем выражение (П.V.8) в виде

$$W(z) = \frac{1}{N_{\text{пад}}} \lim_{T \rightarrow 0} \times \\ \times \left\{ N[z; R(T)] + \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial T^{k-1}} \left[\frac{\overline{\varepsilon^k}(T)}{\overline{\varepsilon}(T)} N[z; R(T)] \right] \right\}. \quad (\text{П.V.10})$$

Из (П.V.9) следует, что

$$\frac{\overline{\varepsilon^k}(T)}{\overline{\varepsilon}(T)} = \frac{1}{2L_{\text{ион}}} \left(4 \frac{m_e}{m} \right)^{k-1} \frac{T^{k-1}}{k-1}. \quad (\text{П.V.11})$$

Подставляя в (П.V.10) значение (П.V.11), обозначая $k-1 = n$, получаем

$$W(z) = \frac{1}{N_{\text{пад}}} \lim_{T \rightarrow 0} \times \left\{ N(z; R) + \frac{1}{2L_{\text{ион}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(4 \frac{m_e}{m} \right)^n \frac{1}{n(n+1)!} \frac{\partial^n}{\partial T^n} [T^n N(z; R)] \right\}. \quad (\text{П.V.12})$$

Здесь $R = R(T)$. Воспользуемся известным правилом Лейбница для вычисления производной любого порядка от произведения двух функций

$$\frac{d^{(n)}}{dT^n} [\varphi(T) \cdot N(T)] = \sum_{k=0}^n C_n^k \frac{d^{(k)}\varphi}{dT^k} \frac{d^{(n-k)}N}{dT^{n-k}}.$$

Поскольку $\varphi(T) = T^n$, то $d^k(T^n)/dT^k = n(n-1)(n-2)\dots\dots(n-k+1)T^{n-k}$. Вводя новый индекс суммирования $m = n - k$, получим

$$\frac{d^{(n)}}{dT^n} [T^n N(T)] = \sum_{m=0}^n \left(\frac{n!}{m!}\right)^2 \frac{T^m}{(n-m)!} \frac{d^m N}{dT^m},$$

т.е.

$$\begin{aligned} & \frac{d^{(n)}}{dT^n} [T^n N(T)] = \\ & = n! N(z; R) + \sum_{m=1}^n \left(\frac{n!}{m!}\right)^2 \frac{T^m}{(n-m)!} \frac{d^m N}{dT^m}. \end{aligned} \quad (\text{П.V.13})$$

Так как распределение по остаточным пробегам $N[z; R(T)]$ является плавной функцией энергии, то

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left\{ T^m \frac{d^m N}{dT^m} \right\} = 0, \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Поэтому в выражении (П.V.13) остается только первое слагаемое. Формула (П.V.12) принимает вид:

$$W(z) = \frac{N(z; R = 0)}{N_{\text{пад}}} \left\{ 1 + \frac{1}{2L_{\text{ион}}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(4 \frac{m_e}{m} \right)^n \frac{1}{n(n+1)!} \right\}. \quad (\text{П.V.14})$$

Входящий в выражение (П.V.14) ряд суммируется [8, с. 59]:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n(n+1)!} = 1 + \left(\frac{1}{a} - 1 \right) \ln(1-a), \quad |a| < 1.$$

В рассматриваемом случае $a = 4m_e/m$. В результате получаем

$$W(z) = \frac{N(z; R = 0)}{N_{\text{пад}}} \times \times \left\{ 1 + \frac{1}{2L_{\text{ион}}} \left[1 + \left(\frac{m}{4m_e} - 1 \right) \ln \left(1 - \frac{4m_e}{m} \right) \right] \right\}. \quad (\text{П.V.15})$$

Для тяжелых частиц $m/m_e \gg 1$ и логарифм в формуле (П.V.15) можно разложить в ряд, полагая

$$\ln \left(1 - \frac{4m_e}{m} \right) \approx -\frac{4m_e}{m} + O \left(\frac{m_e}{m} \right)^2. \quad (\text{П.V.16})$$

Подставляя (П.V.16) в (П.V.15) находим, что

$$W(z) = \frac{N(z; R = 0)}{N_{\text{пад}}} \left\{ 1 + \frac{m_e}{m} \frac{2}{L_{\text{ион}}} + O \left(\frac{m_e}{m} \right)^2 + \dots \right\}. \quad (\text{П.V.17})$$

Если в (П.V.17) отбросить слагаемые, пропорциональные первой и более высоким степеням отношения m_e/m , получим следующее выражение для вероятности $W(z)$:

$$W(z) \approx \frac{N(z; R = 0)}{N_{\text{пад}}}. \quad (\text{П.V.18})$$

Соотношение (П.V.18) устанавливает простую связь между распределением остановившихся частиц и распределением потока частиц по остаточным пробегам $N(z; R)$. Общее выражение (П.V.18) находится в полном согласии с полученными ранее формулами (4.2.4) и (4.4.7) для частных случаев расчета величины $W(z)$ в модели непрерывного замедления и в приближении Фоккера – Планка.

Следует отметить, что при получении формулы (П.V.17) не делалось никаких предположений о характере самого распределения

по пробегам $N(z; R)$, кроме естественного предположения о плавной зависимости величины $N[z; R(T)]$ от энергии частиц.

Естественно, что выражение (П.V.18) можно записать в эквивалентном виде

$$W(z) \approx \frac{1}{N_{\text{пад}}} [\bar{\varepsilon}(T) N(z; T)]_{T \rightarrow 0}. \quad (\text{П.V.19})$$

Именно с помощью формулы (П.V.19), используя выражение (2.5.22) для $N(z; T)$ без использования диффузионного приближения, ранее было рассчитано распределение остановившихся нерелятивистских частиц (4.4.13).

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

Раздел I

1. В чем состоит основная задача линейной теории переноса излучения в случайных средах?
2. Что такое дифференциальная плотность потока излучения $N(r; \Omega; T)$ и как она связана с функцией распределения частиц $f(r; \Omega; T)$? Каков физический смысл этих величин? Какова их размерность?
3. Что такое уравнение переноса излучения (транспортное уравнение)? Каков его физический смысл?
4. Чем транспортное уравнение радикально отличается от кинетического уравнения Больцмана для молекул (атомов) газа?
5. Какие условия необходимо выполнить для реализации плоской геометрии задач в теории переноса? В чем относительная простота такого рода задач?
6. Какие частицы условно считаются тяжелыми?
7. Какие частицы считаются быстрыми? Определите минимальную энергию быстрого протона для меди и золота.
8. Почему интеграл столкновений в уравнении переноса для быстрых частиц можно представить в виде суммы упругой и неупругой частей?
9. В чем суть приближения «прямо-вперед»?
10. Как выглядит уравнение переноса для энергетического спектра частиц $N(z; T)$ в общем случае и в условиях плоской геометрии в приближении «прямо-вперед»? Как выглядят граничные условия в приближении «прямо-вперед» при облучении плоской поверхности среды?
11. В каких случаях величина $N(z; T)$, вычисленная в приближении «прямо-вперед», определяет реальное энергетическое распределение частиц?
12. В чем состоят основные особенности упругого рассеяния быстрых тяжелых частиц на атомах среды? Определите энергию

протона, при которой его де-бройлевская длина волны в десять раз меньше средних размеров атома алюминия и свинца.

13. Что такое эффективный угол однократного рассеяния $\vartheta_{\text{эфф}}$?
14. Что такое параметр экранирования η и зачем он вводится при рассмотрении процесса упругого рассеяния быстрых частиц на атомах? Чему равно значение параметра η для протонов с энергией 10 МэВ в алюминии и свинце?
15. Как учитывается вклад от рассеяния на атомных электронах в дифференциальное и полное сечения упругого рассеяния?
16. Определите энергию протона, при которой его де-бройлевская длина волны в десять раз меньше средних размеров ядра атома алюминия и свинца.
17. Какая физическая причина позволяет считать ограниченным угол однократного рассеяния величиной ϑ_{max} ?
18. Определите отношение углов $\vartheta_{\text{max}} / \vartheta_{\text{эфф}}$ для протонов с энергией 10 МэВ и 100 МэВ в алюминии и свинце.
19. Что такое индикаториса упругого рассеяния $\chi(\vartheta|T)$, каков её физический смысл? Как выглядят условия нормировки индикаторисы рассеяния в общем случае ($0 \leq \vartheta \leq \pi$) и при малоугловом рассеянии ($\vartheta \ll 1$)?
20. Что такое средняя длина упругого рассеяния $l_{\text{упр}}$, каков её физический смысл? Вычислите величину $l_{\text{упр}}$ для протонов с энергией 10 МэВ и 100 МэВ в алюминии и свинце.
21. Что такое средний квадрат угла рассеяния $\langle \vartheta_s^2 \rangle$ на единице длины, каков физический смысл этой величины?
22. Как $\langle \vartheta_s^2 \rangle$ зависит от энергии нерелятивистских и релятивистских частиц? Вычислите значение $\langle \vartheta_s^2 \rangle$ для протонов с энергией 10 МэВ и 100 МэВ в алюминии и свинце.
23. Что такое транспортное сечение упругого рассеяния $\sigma_{\text{тр}}$ и транспортная длина упругого рассеяния $l_{\text{тр}}$? В чем физический смысл величины $l_{\text{тр}}$?

24. Вычислите величину $I_{\text{тр}}$ для протонов с энергией 10 МэВ и 100 МэВ в алюминии и свинце. Найдите отношение $I_{\text{тр}} / I_{\text{упр}}$ для этих двух случаев.
25. В чем состоят основные особенности неупругого рассеяния быстрых тяжелых частиц на атомах среды?
26. Что такое тормозная способность среды $\bar{\varepsilon}(T)$, каков её физический смысл? Какова размерность этой величины?
27. Прокомментируйте формулу Бете – Блоха для $\bar{\varepsilon}(T)$. Что такое ионизационный логарифм $L_{\text{ион}}$? В каких случаях необходимо учитывать поправки C_i , отображающая связь электронов на атомных оболочках в выражении для $L_{\text{ион}}$?
28. Как зависит величина $\bar{\varepsilon}(T)$ от энергии нерелятивистских частиц?
29. Что такое средний квадрат энергии $\overline{\varepsilon^2}(T)$, теряемой частицей на единице пути? Какова размерность этой величины?
30. Почему при вычислении величины $\overline{\varepsilon^2}(T)$ можно использовать модель свободных электронов?
31. В каких случаях требуется уточнить модель свободных электронов, вводя в формулу для $\overline{\varepsilon^2}(T)$ величину $K(T)$?
32. Как зависит значение $\overline{\varepsilon^2}(T)$ от энергии нерелятивистских и релятивистских частиц в модели свободных электронов?

Раздел II

1. В чем суть приближения непрерывного замедления? Какая физическая величина определяет взаимодействие частиц с атомами вещества в этом приближении?
2. Что такое остаточный $R(T)$ и полный R_0 пробеги частиц? Каков физический смысл этих величин в приближении непрерывного замедления?

3. Как выглядит уравнение переноса для величин $N(z; T)$ и $N(z; R)$ в приближении непрерывного замедления? Какова связь между величинами $N(z; T)$ и $N(z; R)$?
4. Как выглядят распределение частиц по энергии $N(z; T)$ и остаточному пробегу $N(z; R)$ при облучении поверхности моноэнергетическим пучком частиц с начальной энергией T_0 ? Каковы основные особенности этих распределений?
5. Запишите динамическое уравнение движения, позволяющее определить значение энергии $T(z)$ на глубине z без использования уравнения переноса, при облучении поверхности моноэнергетическим пучком, если не учитывается вероятностный характер процесса неупругих столкновений частиц с атомами вещества. Поясните физический смысл этого уравнения.
6. Изобразите график зависимости полного потока излучения $N(z)$ в приближении непрерывного замедления при облучении поверхности моноэнергетическим потоком частиц. В чем основная особенность зависимости величины $N(z)$ от глубины?
7. Как зависит от энергии пробег $R(T)$ нерелятивистских частиц ($L_{\text{ион}} \approx \text{const}$)?
8. Как зависит от пробега R энергия $T(R)$ нерелятивистских частиц ($L_{\text{ион}} \approx \text{const}$)?
9. Как связаны энергия и пробег нерелятивистских частиц с глубиной при облучении поверхности моноэнергетическим потоком частиц с энергией T_0 ?
10. Поверхность вещества облучается одновременно двумя моноэнергетическими потоками нерелятивистских частиц с одинаковой плотностью излучения N_0 , с начальными энергиями T_0 и $2T_0$. Изобразите график зависимости полного потока излучения $N(z)$ в приближении непрерывного замедления для этого случая. (Зависимостью ионизационного логарифма от энергии пренебречь.)

11. В чем заключается принципиальное изменение зависимости дифференциальной плотности потока излучения $N(z; T)$ и полного потока $N(z)$ от глубины при облучении поверхности вещества немоноэнергетическим потоком частиц?
12. Сформулируйте условие *малоуглового приближения* для быстрых тяжелых частиц, позволяющее использовать это приближение на всех глубинах? В каких средах, легких или тяжелых, это условие легче выполняется и почему?
13. Какую величину нужно включить в уравнение переноса, чтобы в первом приближении описать влияние вероятностного характера неупругих столкновений на энергетическое распределение частиц?
14. Что позволяет использовать приближение Фоккера – Планка по энергетической переменной T для расчета энергетического спектра быстрых тяжелых частиц $N(z; T)$?
15. Почему приближение Фоккера – Планка можно рассматривать как диффузионное приближение в пространстве энергий? Чему равен «коэффициент диффузии» в пространстве энергий?
16. Чем радикально отличается энергетический спектр частиц $N(z; T)$ в диффузионном приближении от спектра с приближением непрерывного замедления?
17. Что такое приведенный пробег и приведенная глубина? В каких пределах могут изменяться эти величины в приближении Фоккера – Планка?
18. Каков физический смысл флуктуационного параметра v ? Какому значению v соответствует предельный переход от диффузионного приближения к приближению непрерывного замедления?
19. Как зависит величина v от массы и энергии тяжелой нерелятивистской частицы? Почему во многих случаях зависимостью величины v от энергии можно пренебречь?
20. Вычислите значение v для нерелятивистских протонов и μ -мезонов с энергией 20 МэВ в алюминии и свинце.
21. Какие основные приближения используются при вычислении величины $N(z; T)$ в диффузионном приближении, при прохождении быстрых частиц через тонкие слои вещества? По каким

причинам возникает *два* ограничения на толщину рассеивателя – ограничение «сверху» и ограничение «снизу»?

22. Каким законом определяется величина $N(z; T)$ в тонких слоях вещества в приближении Фоккера – Планка? Чему равна наиболее вероятная и средняя энергия частиц на глубине Z ?

23. Каков метод решения уравнения переноса при вычислении величины $N(z; T)$ в тонких слоях без использования диффузионного приближения?

24. В чем состоят качественные отличия функции распределения Вавилова от гауссова распределения? При каких условиях распределение Вавилова переходит в гауссово распределение?

25. При выполнении каких условий возможно получить *точное* аналитическое решение уравнения диффузии в пространстве энергий для быстрых нерелятивистских частиц?

26. Каковы характерные особенности энергетического спектра $N(z; T)$ и полного потока частиц $N(z)$ в упомянутом выше точном решении?

27. Каким выражением определяется наиболее вероятная относительная энергия $u_{\text{H.B.}}(\xi)$ в точном решении? Как величина $u_{\text{H.B.}}(\xi)$ зависит от флуктуационного параметра v ? Чему равно значение $u_{\text{H.B.}}(\xi)$ при $v \rightarrow \infty$?

28. Какова область глубин, в которой происходит остановка частиц?

29. В чем суть самосогласованного гауссова приближения? В какой области глубин допустимо это приближение?

30. Какому закону подчиняется распределение по остаточным пробегам R распределение $N(z; R)$ в самосогласованном гауссовом приближении?

31. Какому закону подчиняется распределение $N(z; T)$ по энергии T в самосогласованном гауссовом приближении?

32. Как выглядят распределение Бора $N_B(z; T)$ и распределение Симона $N_C(z; T)$? В чем их общность и в чем их принципиальное отличие?

33. При каких условиях энергетический спектр частиц $N(z; T)$ в самосогласованном гауссовом приближении переходит в распределение Бора и распределение Симона?

Раздел III

1. При выполнении каких условий распределение *поглощенной* веществом энергии на глубине Z мало отличается от энергии, потерянной потоком частиц на этой глубине?
2. Что называется кривой Брэгга $\bar{B}(z)$?
3. Как величина $\bar{B}(z)$ связана с дифференциальной плотностью потока излучения $N(z; T)$?
4. Какова альтернативная формула для расчета величины $\bar{B}(z)$ через тормозную способность среды в модели непрерывного замедления?
5. Укажите связь между величиной $\bar{B}(z)$ и величиной энергии частиц $T(z|T_0)$ на глубине Z в модели непрерывного замедления. Поясните физический смысл этого соотношения.
6. Как выглядит выражение для кривой Брэгга в приближении непрерывного замедления при облучении поверхности вещества моноэнергетическим потоком частиц с энергией T_0 ?
7. В чем причина “расходимости” величины $\bar{B}(z)$ на глубине $z = R_0$? В каких случаях эта расходимость исчезает?
8. В чем принципиальное отличие кривой Брэгга при облучении поверхности немоноэнергетическим потоком частиц от облучения моноэнергетическим потоком?
9. Что нового привносит учет вероятностного характера неупругих столкновений в распределение поглощенной веществом энергии?
10. Как выглядит приближенное выражение для величины $\bar{B}(z)$ в диффузационном приближении? Что общего и в чём состоит

его отличие от аналогичного выражения для $\bar{B}(z)$ в приближении непрерывного замедления?

11. Что позволяет рассчитывать кривую Брэгга в самосогласованном гауссовом распределении на любых глубинах?

12. Изобразите на одном рисунке характерную зависимость величины $\bar{B}(z)$ от глубины для двух случаев: в приближении непрерывного замедления и в диффузационном приближении.

Раздел IV

1. Какие частицы пучка можно условно считать «остановившимися» в веществе?

2. Почему важно знать распределение $W(z)$ остановившихся частиц по глубине их проникновения в вещество?

3. Как вероятность $W(z)$ распределения остановившихся частиц на глубине Z связана с полным потоком частиц $N(z)$?

4. Как связана вероятность $W(z)$ с распределением частиц по энергиям $N(z; T)$ и по остаточным пробегам $N(z; R)$ в приближении непрерывного замедления?

5. Как выглядит распределение остановившихся частиц при облучении поверхности вещества моноэнергетическим потоком частиц с энергией T_0 в приближении непрерывного замедления?

6. Какие факторы приводят к разбросу остановившихся частиц по глубине их проникновения в вещество?

7. Как выглядит распределение остановившихся частиц $W(z)$ в приближении непрерывного замедления в общем случае при облучении поверхности вещества немоноэнергетическим потоком $N(z = 0; T) = N_{\text{пад}}(T)$?

8. На поверхность вещества падает немоноэнергетический по-

$$\text{ток нерелятивистских частиц } N_{\text{пад}}(T) = \begin{cases} 0, \dots, T < T_* / 2, \\ N_*, \dots, T_* / 2 \leq T < 3T_* / 2, \\ 0, \dots, T > 3T_* / 2. \end{cases}$$

В приближении непрерывного замедления определите область глубин $z_{\min} \leq z \leq z_{\max}$, где будут находиться остановившиеся частицы. При решении задачи учтеть, что для нерелятивистских частиц $\bar{\varepsilon}(T) = a/T$.

9. Вычислите распределение остановившихся частиц $W(z)$ в условиях предыдущей задачи.

10. Что нового привносит учет вероятностного характера неупругих столкновений в распределения $W(z)$ остановившихся частиц?

11. Как выглядит приближенная формула для определения $W(z)$ в диффузионном приближении? Что общего и в чём отличие этой формулы от аналогичного выражения для $W(z)$ в приближении непрерывного замедления?

12. Каким законом определяется распределение остановившихся частиц $W(z)$ в самосогласованном гауссовом приближении?

ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Калашников Н.П., Ремизович В.С., Рязанов М.И. Столкновения быстрых заряженных частиц в твердых телах. М.: Атомиздат, 1980.
2. Ремизович В.С., Рогозкин Д.Б., Рязанов М.И. Флуктуации пробегов заряженных частиц. М.: Энергоатомиздат, 1988.
3. Кейз К., Цвайфель П. Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972.
4. Хаякава С. Физика космических лучей. Ядерно-физический аспект: Пер. с англ. М.: Мир, 1973.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Квантовая механика. М.: Наука, 1989.
6. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Физическая кинетика. М.: Наука, 1979.
7. Ремизович В.С., Кузовлев А.И. Сравнительный анализ аналитических методов теории переноса заряженных частиц и света в неупорядоченных средах с крупномасштабными рассеивающими центрами: Учебное пособие. М.: МИФИ, 1999.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Наука, 1971.
9. Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физматгиз, 1961.

Дополнительная

10. Бор. Н. Прохождение атомных частиц через вещество: Пер. с англ. М.: Изд-во иностр. лит., 1950.
11. Силин В.П. Введение в кинетическую теорию газов. М.: Наука, 1971.

12. Девисон Б. Теория переноса нейтронов. М.: Атомиздат, 1960.
13. Росси Б. Частицы больших энергий: Пер. с англ. М.: Гостехиздат, 1955.
14. Готт Ю.В. Взаимодействие частиц с веществом в плазменных исследованиях. М.: Атомиздат, 1978.
15. Кольчужкин А.М., Учайкин В.В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1971.
16. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, т. 1, 1973; т. 2, 1974.

Валерий Стефанович Ремизович

**ТЕОРИЯ ПРОХОЖДЕНИЯ
БЫСТРЫХ ЗАРЯЖЕННЫХ ЧАСТИЦ
ЧЕРЕЗ ВЕЩЕСТВО**

**ПРОСТРАНСТВЕННО-ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ
РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИЦ**

Редактор *Н.Н. Антонова*
Оригинал-макет изготовлен *С.В. Тялиной*

Подписано в печать 17.10.08 Формат 60×84 1/16
Печ. л. 15,5 Уч.-изд. л. 18,0 Тираж 150 экз.
Изд. № 4/132 Заказ № 1-2066

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет) 115409, Москва, Каширское ш., 31
Типография «Тровант», г. Троицк, Московской обл.