

Федеральное агентство по образованию
Московский инженерно-физический институт
(государственный университет)

В.С. Ремизович, В.В. Маринюк

ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ЭЛЕКТРОДИНАМИКИ

(для групп вечернего факультета)

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2008

УДК 530.1 (075)

ББК 22.31я7

Р38

Ремизович В.С., Маринюк В.В. Общие принципы классической электродинамики (для группы вечернего факультета): Учебное пособие. – М.: МИФИ, 2008. – 248 с.

В учебном пособии кратко изложена теория электромагнитного поля в вакууме. В основу изложения положена система уравнений Maxwella. В сжатой форме представлены все основные разделы классической электродинамики. Значительная часть пособия посвящена теории излучения электромагнитных волн. Помимо теоретического анализа основных вопросов классической электродинамики, дано описание различных методов решения задач. Большое внимание удалено подробному разбору характерных электродинамических задач, примеры решения которых выделены в отдельную главу. Для облегчения восприятия пособие снабжено обширным иллюстрационным материалом.

Предназначено для студентов вечернего факультета МИФИ по специальностям “Физика конденсированного состояния вещества”, “Ядерные реакторы и энергетические установки”, “Электроника и автоматика физических установок”. Может быть использовано как дополнительное учебное пособие для студентов дневного отделения МИФИ.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

ISBN 978-5-7262-0799-5

© Московский инженерно-физический институт
(государственный университет), 2008

Редактор М.В. Макарова

Оригинал-макет изготовлен С.В. Тялиной

Подписано в печать 30.06.2008 Формат 60x84 1/16

Печ. л. 15,5 Уч.-изд. Л. 15,5. Тираж 200 экз. Изд. № 4/123 Заказ №

Московский инженерно-физический институт (государственный университет)

115409, Москва, Каширское шоссе, 31

Типография издательства «Троянт»

г. Троицк Московской области

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	4
Тема 1. Постановка задачи. Уравнения Максвелла.....	5
Тема 2. Энергия электромагнитного поля.	
Вектор Умова – Пойtingа.....	17
Потенциалы поля	22
Тема 4. Электростатика. Уравнение Пуассона.....	27
Тема 5. Электростатическое поле на больших расстояниях от системы зарядов. Дипольный момент	37
Тема 6. Магнитостатика. Основные уравнения	43
Тема 7. Магнитное поле на больших расстояниях от системы токов. Магнитный момент	54
Тема 8. Электромагнитные волны. Плоские волны	63
Тема 9. Плоские монохроматические волны.	
Поляризация волн.....	74
Тема 10. Запаздывающие потенциалы	85
Тема 11. Теория излучения.....	94
Тема 12. Дипольное излучение	103
Тема 13. Спектральное распределение дипольного излучения.....	115
Тема 14. Время жизни классической модели атома водорода...	121
Тема 15. Сила радиационного трения.....	126
Тема 16. Частотный спектр излучения гармонического осциллятора с учетом силы радиационного трения	131
Тема 17. Рассеяние электромагнитных волн свободным зарядом	138
Тема 18. Релятивистская форма записи уравнений Максвелла. Преобразование полей	145
Тема 19. Поле равномерно движущегося заряда	156
Примеры решения задач.....	164
Приложение I. Основные формулы векторного анализа	233
Приложение II. Решение волнового уравнения для потенциалов поля	235
Приложение III. Вывод формулы для напряженности магнитного поля излучения	242
Вопросы для самоконтроля.....	245
Рекомендуемая литература.....	248

Предисловие

Учебное пособие посвящено рассмотрению основных вопросов теории электромагнитного поля в вакууме. Цель пособия – обеспечение учебной литературой студентов вечернего факультета, рассчитанной на первое знакомство с предметом теоретической физики. В основу пособия положена программа курса “Электродинамика”, читавшегося одним из авторов на протяжении многих лет на вечернем факультете МИФИ.

Пособие охватывает почти все основные разделы классической электродинамики (за исключением излучения релятивистских частиц): электростатику, магнитостатику, электромагнитные волны, излучение и рассеяние электромагнитных волн. В основу изложения положена система уравнений Максвелла, с единой позиции которых обсуждаются все рассмотренные в пособии вопросы. При этом предполагается, что читатель знаком с основными фактами электромagnetизма из курса общей физики.

В пособии не преследуется цель строгого доказательства всех положений теории. Вопросы, требующие трудоемких математических выкладок, как, например, вывод формул для запаздывающих потенциалов, изложены иллюстративно, на “физическом уровне строгости”. Основной упор при этом сделан на понятное и очень подробное объяснение наиболее важных идей теории. Как и любую другую теорию, электродинамику невозможно усвоить, познакомившись только с ее основными принципами, без решения конкретных физических задач. Поэтому пособие снабжено подробно разобраными примерами, которые могут помочь не только в усвоении теоретического материала, но и в приобретении некоторых практических навыков решения задач.

Предлагаемое пособие ни в коей мере не претендует заменить имеющиеся прекрасные книги по классической электродинамике Ландау и Лифшица, Джексона, Батыгина и Топтыгина и др., но может служить хорошим вспомогательным материалом при чтении этой более серьезной литературы.

Постановка задачи. Уравнения Максвелла

Электромагнитное поле в вакууме в каждой точке пространства \vec{r} в произвольный момент времени t полностью определяется заданием двух векторных характеристик: напряженности электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и напряженности магнитного поля $\vec{H}(\vec{r}, t)$. Экспериментально электромагнитное поле может быть обнаружено по его воздействию на пробные заряды. Опыт показывает, что если точечный заряд e в момент времени t находится в точке \vec{r} и имеет скорость $\vec{v}(t)$, то на него со стороны поля действует сила (сила Лоренца)

$$\vec{F}(\vec{r}; t) = e \vec{E}(\vec{r}, t) + \frac{e}{c} \vec{v}(t) \cdot \vec{H}(\vec{r}, t). \quad (1.1)$$

Здесь $c \approx 3 \cdot 10^{10}$ см/с – скорость света в вакууме.

В теоретической физике принято использовать гауссову систему единиц. В этой системе напряженности полей \vec{E} и \vec{H} имеют одну и ту же размерность:

$$[\vec{E}] = [\vec{H}]. \quad (1.2)$$

Из формулы (1.1) следует, что на покоящиеся заряды действует только электрическое поле: если $\vec{v} = 0$, то $\vec{F}(\vec{r}; t) = \vec{F}_{\text{эл}}(\vec{r}; t) = e \vec{E}(\vec{r}, t)$. Магнитное поле может воздействовать только на движущиеся заряды.

Основную задачу теории электромагнитного поля в вакууме можно сформулировать так: зная распределение зарядов и токов в каждой точке пространства \vec{r} в любой момент времени t , определить создаваемые этими зарядами поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{H}(\vec{r}, t)$:

Дано: $\rho(\vec{r}, t)$ и $\vec{j}(\vec{r}, t)$;

Найти: $\vec{E}(\vec{r}, t)$ и $\vec{H}(\vec{r}, t)$.

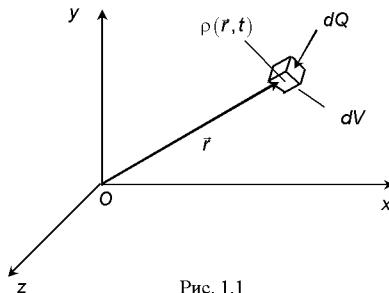


Рис. 1.1

Распределение зарядов характеризуется *плотностью заряда* $\rho(\vec{r}, t)$, а распределение токов характеризуется *плотностью тока* $j(\vec{r}, t)$.

Плотность заряда – заряд единицы объема:

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}, \text{ т.е. } dQ = \rho(\vec{r}, t) dV, \quad (1.3)$$

где dQ – заряд в элементарном объеме dV , расположеннем в окрестности точки \vec{r} в момент времени t (рис. 1.1).

Если плотность заряда известна, то можно вычислить полный заряд $Q_V(t)$ в произвольном объеме V в момент времени t :

$$Q_V(t) = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV. \quad (1.4)$$

Если *точечный заряд* e_a находится в момент времени t в точке $\vec{r}_a(t)$, то плотность такого точечного заряда будет определяться по формуле:

$$\rho(\vec{r}, t) = e_a \delta\{\vec{r} - \vec{r}_a(t)\}; \quad [\delta] = 1/\text{см}^3. \quad (1.5)$$

Здесь δ – трехмерная дельта-функция Дирака. Действительно, из определения δ -функции следует, что плотность заряда равна бес-

конечности только в той точке $\vec{r}_a(t)$, в которой точечный заряд находится в момент времени t . В остальном пространстве $\rho = 0$. В соответствие с формулой (1.4), полный заряд во всем пространстве

$$Q(t) = \iiint \rho(\vec{r}, t) dV = \mathbf{e}_a.$$

Для системы N точечных зарядов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$ плотность заряда имеет вид:

$$\rho(\vec{r}, t) = \sum_{a=1}^N \mathbf{e}_a \delta\{\vec{r} - \vec{r}_a(t)\}; \quad Q(t) = \iiint \rho(\vec{r}, t) dV = \sum_{a=1}^N \mathbf{e}_a. \quad (1.6)$$

Напомним, что в декартовых координатах

$$\delta\{\vec{r} - \vec{r}_a(t)\} = \delta\{x - x_a(t)\} \cdot \delta\{y - y_a(t)\} \cdot \delta\{z - z_a(t)\}. \quad (1.7)$$

Вектор плотности тока $\vec{j}(\vec{r}, t)$ определяется формулой:

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \rho(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t). \quad (1.8)$$

Здесь $\vec{v}(\vec{r}, t)$ – скорость движения зарядов в точке \vec{r} в момент времени t .

Плотность тока движущегося точечного заряда равна

$$\vec{j}_a(\vec{r}, t) = \mathbf{e}_a \vec{v}_a(t) \delta\{\vec{r} - \vec{r}_a(t)\} = \mathbf{e}_a \frac{d\vec{r}_a(t)}{dt} \delta\{\vec{r} - \vec{r}_a(t)\}. \quad (1.9)$$

Рассмотрим величину $(\vec{j} \cdot d\vec{\Sigma}) \cdot dt$,

где $d\vec{\Sigma}$ – элемент площадки $d\Sigma$, имеющий направление *внешней нормали* к поверхности:

$$\begin{aligned} & (\vec{j} \cdot d\vec{\Sigma}) \cdot dt = \\ & = \vec{j} \cdot |d\vec{\Sigma}| dt \cos \alpha = \\ & = \rho \cdot \{(v dt) \cdot d\Sigma \cdot \cos \alpha\}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Величина в фигурных скобках (1.9) есть объем косоугольного параллелепипеда с площадью основания $d\Sigma$ и длиной ребра $(v \cdot dt)$ (рис. 1.2).

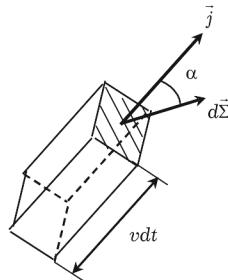


Рис. 1.2

Следовательно, $\left(\vec{j} \cdot d\vec{\Sigma}\right) = dJ$ есть количество заряда, протекающего через площадку $d\Sigma$ в единицу времени, т.е. *ток* через эту площадку.

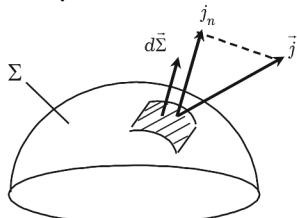


Рис.1.3

Если имеется произвольная поверхность Σ (рис. 1.3), то величина

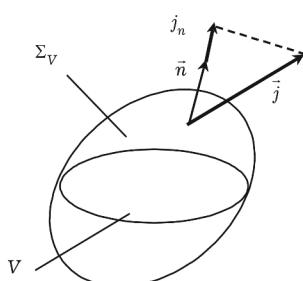
$$\begin{aligned} J_{\Sigma}(t) &= \iint_{\Sigma} \vec{j}(\vec{r}_{\Sigma}; t) d\Sigma = (1.11) \\ &= \iint_{\Sigma} j_n d\Sigma, \end{aligned}$$


Рис. 1.4

представляет собой количество заряда, протекающего через поверхность Σ в единицу времени, т.е. *электрический ток* через произвольную поверхность Σ в момент времени t ; j_n – нормальная составляющая плотности тока. Таким образом, величина тока через произвольную поверхность Σ есть поток вектора плотности тока через эту поверхность.

Если поверхность Σ_V ограничивает некоторый объем V , т.е. является замкнутой поверхностью (рис. 1.4), то величина

$$J_{\Sigma_V}(t) = \iint_{\Sigma_V} \vec{j}(\vec{r}_{\Sigma}; t) d\Sigma = \iint_{\Sigma_V} j_n d\Sigma \quad (1.12)$$

есть количество заряда, протекающего через замкнутую поверхность Σ_V , т.е. полный ток через эту поверхность. На тех участках поверхности, где $\vec{j} d\vec{\Sigma} > 0$, т.е. $j_n > 0$, заряд *вытекает* из объема V , так как вектор $d\vec{\Sigma}$ имеет направление *внешней* нормали \vec{n} (см. рис. 1.4). На тех участках поверхности, где $\vec{j} d\vec{\Sigma} < 0$, т.е. $j_n < 0$, заряд *втекает* в объем V извне. Поэтому величина $J_{\Sigma_V}(t)$ есть величина алгебраическая – она может быть положительной, отрицательной или равной нулю. Знак величины полного тока $J_{\Sigma_V}(t)$ через поверхность Σ_V зависит от того, что больше – вытекающий или втекающий заряд. Если $J_{\Sigma_V}(t) > 0$, то это означает, что за единицу времени из объема V вытекло больше зарядов, чем втекло, и поэтому заряд внутри объема V уменьшился. Следовательно, при положительном значении J_{Σ_V} заряд внутри объема должен уменьшаться, т.е. $\Delta Q_V < 0$. Из сказанного понятно, что изменение заряда ΔQ_V в объеме V за время Δt будет определяться выражением:

$$\begin{aligned}\Delta Q_V = -J_{\Sigma_V}(t) \Delta t &= - \left\{ \iint_{\Sigma_V} \vec{j}(\vec{r}_\Sigma; t) d\vec{\Sigma} \right\} \Delta t \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\Delta Q_V(t)}{\Delta t} = - \iint_{\Sigma_V} j_n d\Sigma.\end{aligned}\quad (1.13)$$

Формула (1.13) выражает важнейший закон природы – *закон сохранения заряда*, записанный в интегральном виде.

Тот же закон можно записать в дифференциальном виде, т.е. в виде некоторого дифференциального уравнения. Для этого нужно воспользоваться выражением (1.4) для величины $Q_V(t)$

$$\frac{\Delta Q_V(t)}{\Delta t} = \iiint_V \frac{\partial p(\vec{r}; t)}{\partial t} dV$$

и теоремой Остроградского – Гаусса для поверхностного интеграла в формуле (1.13):

$$\iint_{\Sigma_V} j(\vec{r}_\Sigma; t) d\Sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}; t) dV.$$

В результате получаем, что

$$\iiint_V \frac{\partial \rho(\vec{r}; t)}{\partial t} dV = - \iiint_V \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}; t) dV.$$

Поскольку последнее равенство справедливо для *произвольного* объема V , то должно иметь место уравнение:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}; t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}; t), \text{ т.е. } \frac{\partial \rho(\vec{r}; t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}; t) = 0. \quad (1.14)$$

Уравнение (1.14) называется *уравнением непрерывности*, и представляет собой закон сохранения заряда в *дифференциальном* виде. Напомним, что $\vec{j}(\vec{r}; t) = \rho(\vec{r}; t) \vec{v}(\vec{r}; t)$. Таким образом, величины $\rho(\vec{r}; t)$ и $\vec{j}(\vec{r}; t)$ не являются полностью независимыми – они должны удовлетворять уравнению непрерывности (1.14).

В прямоугольной декартовой системе координат, когда

$$\rho = \rho(x, y, z; t),$$

$$\vec{j} = \vec{j}(x, y, z; t) = \hat{\mathbf{e}}_x j_x(x, y, z; t) + \hat{\mathbf{e}}_y j_y(x, y, z; t) + \hat{\mathbf{e}}_z j_z(x, y, z; t),$$

уравнение непрерывности (1.14) будет выглядеть так:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r}; t)}{\partial t} + \frac{\partial j_x(\vec{r}; t)}{\partial x} + \frac{\partial j_y(\vec{r}; t)}{\partial y} + \frac{\partial j_z(\vec{r}; t)}{\partial z} = 0. \quad (1.15)$$

Уравнение (1.15) можно записать, используя дифференциальный оператор “набла” ∇ , который в *декартовых* прямоугольных координатах имеет вид

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_x \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{e}}_y \frac{\partial}{\partial y} + \hat{\mathbf{e}}_z \frac{\partial}{\partial z}. \quad (1.16)$$

Здесь $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$ и $\hat{\mathbf{e}}_z$ – единичные орты осей Ox , Oy и Oz :

$$|\hat{\mathbf{e}}_x| = |\hat{\mathbf{e}}_y| = |\hat{\mathbf{e}}_z| = 1; (\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_y) = (\hat{\mathbf{e}}_x, \hat{\mathbf{e}}_z) = (\hat{\mathbf{e}}_y, \hat{\mathbf{e}}_z) = 0.$$

В правой системе координат векторы $\hat{\mathbf{e}}_x$, $\hat{\mathbf{e}}_y$ и $\hat{\mathbf{e}}_z$ образуют правовинтовую тройку векторов. С учетом (1.16) уравнение непрерывности можно записать в виде:

$$\frac{\partial \rho(\vec{r};t)}{\partial t} + \nabla \cdot \vec{j}(\vec{r};t) = 0. \quad (1.17)$$

Теперь, зная определения величин ρ и \vec{j} и их физический смысл, выпишем основные уравнения теории электромагнитного поля в вакууме – уравнения Максвелла, которые являются математическим выражением основных экспериментальных законов электродинамики. Опыт показал, что если поле зависит от времени, то величины $\vec{E}(\vec{r};t)$ и $\vec{H}(\vec{r};t)$ не являются независимыми: изменение напряженности электрического поля влияет на напряженность магнитного поля и наоборот. Эта взаимосвязь переменных полей учтена в уравнениях Максвелла.

В *дифференциальной форме* уравнения Максвелла выглядят так¹.

$$\text{I. } \begin{cases} \text{rot } \vec{E}(\vec{r};t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}(\vec{r};t)}{\partial t}, \\ \text{div } \vec{H}(\vec{r};t) = 0. \end{cases} \quad (1.18a)$$

$$\text{II. } \begin{cases} \text{div } \vec{E}(\vec{r};t) = 4\pi\rho(\vec{r};t); \\ \text{rot } \vec{H}(\vec{r};t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r};t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r};t)}{\partial t}. \end{cases} \quad (1.18b)$$

Первая пара уравнений Максвелла (1.18a) не содержит величин ρ и \vec{j} , т.е. определяет общие свойства электромагнитного поля, не зависящие от конкретного распределения зарядов и токов. Всю информацию о зарядах и токах, создающих электромагнитное поле, несет в себе *вторая пара* уравнений Максвелла (1.18b). Обратим внимание, что уравнения, содержащие роторы напряженностей, являются векторными. Поэтому система уравнений Максвелла (1.18a) и (1.18b) состоит из восьми уравнений. Таким образом, для определения шести неизвестных функций $E_x(\vec{r};t)$, $E_y(\vec{r};t)$,

¹ Уравнения Максвелла в дифференциальной форме были впервые записаны Г. Герцем в 1895 г.

$E_z(\vec{r}; t)$, $H_x(\vec{r}; t)$, $H_y(\vec{r}; t)$ и $H_z(\vec{r}; t)$ имеется восемь уравнений.

Однако можно показать, что из восьми уравнений линейно независимых комбинаций ровно шесть. (Это обстоятельство будет наглядно продемонстрировано позже, когда получим уравнения Максвелла для потенциалов поля: скалярного $\phi(\vec{r}; t)$ и векторного $\vec{A}(\vec{r}; t)$.)

Уравнения Максвелла в дифференциальной форме удобны при решении большинства задач электродинамики. Однако физически более наглядными являются уравнения Максвелла, записанные в интегральной форме. Чтобы от дифференциальной формы уравнений Максвелла перейти к интегральной, нужно поступить так: те

уравнения, которые содержат операцию rot , нужно проинтегрировать по поверхности Σ_L , “натянутой” на про-

извольный замкнутый контур L (рис. 1.5) и воспользоваться теоремой Стокса. Те уравнения, которые содержат операцию div , нужно проинтегрировать по произвольному объему V и воспользоваться теоремой Остроградского – Гаусса.

Проинтегрируем первое уравнение (1.18а) по поверхности Σ_L , натянутой на произвольный замкнутый контур L :

$$\iint_{\Sigma_L} \text{rot} \frac{\vec{E}(\vec{r}_\Sigma; t)}{c} \cdot d\vec{\Sigma} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left[\iiint_V \vec{H}(\vec{r}; t) dV \right].$$

По теореме Стокса

$$\iint_{\Sigma_L} \text{rot} \frac{\vec{E}(\vec{r}_\Sigma; t)}{c} \cdot d\vec{\Sigma} = \oint_L \frac{\vec{E}(\vec{r}_L; t)}{c} \cdot d\vec{l}.$$

Поэтому первое уравнение Максвелла запишется так:

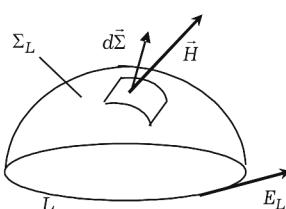


Рис. 1.5

$$\oint_L \vec{E}(\vec{r}_L; t) \cdot d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \iint_{\Sigma_L} \vec{H}(\vec{r}; t) \cdot d\vec{\Sigma} \right\}. \quad (1.19)$$

Величина $\oint_L \vec{E}(\vec{r}_L; t) \cdot d\vec{l}$ есть работа, которую совершает поле,

при перемещении единичного положительного заряда $e=+1$ по замкнутому контуру L (Сила, действующая на такой заряд, равна $\vec{F} = e\vec{E} = \vec{E}$. Поэтому $\vec{E}\vec{dl} = \delta A$ – работа этой силы на элементарном перемещении $d\vec{l}$.)

Эта работа называется электродвижущей силой (ЭДС) в данном замкнутом контуре:

$$E_L(t) = \oint_L \vec{E}(\vec{r}_L; t) \cdot d\vec{l}. \quad (1.20)$$

Величина, стоящая в скобках в правой части уравнения (1.19), есть магнитный поток через поверхность Σ_L , натянутую на этот контур:

$$\Phi_H(\Sigma_L; t) = \iint_{\Sigma_L} \vec{H}(\vec{r}; t) d\vec{\Sigma}. \quad (1.21)$$

С учетом всего сказанного первое уравнение Максвелла (1.18а) записывается так:

$$E_L(t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi_H(\Sigma_L; t)}{\partial t}. \quad (1.22)$$

Это не что иное, как закон электромагнитной индукции Фарадея (1831 г.) с учетом правила Ленца¹:

ЭДС в данном замкнутом контуре пропорциональна быстроте изменения магнитного потока через любую поверхность, натянутую на этот контур.

Таким образом, первое уравнение Максвелла выражает закон электромагнитной индукции.

¹ Закон электромагнитной индукции был независимо сформулирован американским физиком Дж. Генри в 1832 г.

Проинтегрируем второе уравнение первой пары (1.18а) по произвольному объему V и воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{H}(\vec{r}; t) dV = 0 \Rightarrow \iint_{\Sigma_V} \vec{H}(\vec{r}_\Sigma; t) \cdot \hat{n} d\Sigma = 0. \quad (1.23)$$

Таким образом, второе уравнение Максвелла выражает тот факт, что поток вектора \vec{H} через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Это означает отсутствие “магнитных зарядов”.

Силовые линии магнитного поля всегда замкнуты или уходят на бесконечность.¹

Проинтегрируем первое уравнение второй пары (1.18б) по произвольному объему V и воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса:

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}; t) dV &= 4\pi \iiint_V \rho(\vec{r}; t) dV \Rightarrow \\ &\Rightarrow \iint_{\Sigma_V} \vec{E}(\vec{r}_\Sigma; t) \cdot \hat{n} d\Sigma = 4\pi Q_V(t). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Таким образом, третье уравнение Максвелла можно рассматривать как обобщение электростатической теоремы Гаусса на случай переменного электрического поля.

Поток вектора \vec{E} через произвольную замкнутую поверхность Σ_V в момент времени t

равен $4\pi \times$ полный заряд Q_V внутри этой поверхности.

Напомним, что сама электростатическая теорема Гаусса является следствием закона Ш. Кулонна (1785 г.) для двух покоящихся точечных зарядов².

¹ Строго говоря, существуют такие распределения токов, для которых магнитные силовые линии незамкнуты, но плотно заполняют некоторые поверхности.

² Ранее, в 70-х гг. XVIII в. этот закон был открыт английским физиком Г. Кавендишем, но его труды были опубликованы лишь в 1789 г.

Проинтегрируем второе уравнение второй пары (1.18b) по поверхности Σ_L , натянутой на произвольный замкнутый контур L и воспользуемся теоремой Стокса:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma_L} \text{rot } \vec{H}(\vec{r}; t) d\Sigma &= \frac{4\pi}{c} \iint_{\Sigma_L} \vec{j}(\vec{r}; t) d\Sigma + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\Sigma_L} \vec{E}(\vec{r}; t) d\Sigma \right), \\ \oint_L \vec{H}(\vec{r}_L; t) \cdot d\vec{l} &= \frac{4\pi}{c} J_{\Sigma_L}(t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\Sigma_L} \vec{E}(\vec{r}_L; t) \cdot d\Sigma \right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Здесь $J_{\Sigma_L}(t)$ – ток через поверхность Σ_L , определяемый формулой (1.12):

$$J_{\Sigma_L}(t) = \iint_{\Sigma_L} \frac{1}{c} \vec{j}(\vec{r}; t) d\Sigma = \iint_{\Sigma_L} j_n d\Sigma.$$

В случае статических полей, когда напряженности полей не зависят от времени $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$, $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r})$ и $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$, полученное уравнение принимает вид:

$$\oint_L \vec{H}(\vec{r}_L) \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J_{\Sigma_L}. \quad (1.26)$$

Уравнение (1.26) выражает теорему о циркуляции магнитного поля¹.

Циркуляция вектора \vec{H} по любому замкнутому контуру L равна полному току J_{Σ_L} , протекающему через поверхность

Σ_L , границей которой является этот контур.

Напомним, что закон полного тока является следствием закона Био – Савара – Лайласа в магнитостатике.

Таким образом, последнее уравнение Максвелла можно рассматривать как обобщение теоремы о циркуляции магнитного поля. При этом в уравнение (1.26) добавлено второе слагаемое (гени-

¹ В литературе соотношение (1.26) иногда называют законом полного тока.

альная догадка Максвелла 60-х гг. XIX в.), которое пропорционально быстроте изменения потока вектора \vec{E} через поверхность Σ_L . Иногда четвертое уравнение Максвелла записывают так:

$$\oint_L \vec{H}(\vec{r}_L; t) \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J_{\Sigma_L}(t) + \frac{4\pi}{c} J_{\text{смеш}}(t). \quad (1.27)$$

Здесь $J_{\text{смеш}}(t)$ – так называемый “ток смешения”, вызванный не перемещением реальных зарядов в пространстве, а изменением во времени напряженности электрического поля $\vec{E}(\vec{r}; t)$:

$$J_{\text{смеш}}(t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\Sigma_L} \vec{E}(\vec{r}_{\Sigma}; t) d\vec{\Sigma} \right). \quad (1.28)$$

Таким образом, в интегральной форме уравнения Максвелла выглядят так.

1. $\oint_L \vec{E} d\vec{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\Sigma_L} \vec{H} \cdot d\vec{\Sigma} \right)$ (закон электромагнитной индукции Фарадея).
2. $\iint_{\Sigma_V} \vec{H}(\vec{r}_{\Sigma}; t) d\vec{\Sigma} = 0$ (отсутствие “магнитных зарядов”).
3. $\iint_{\Sigma_V} \vec{E} d\vec{\Sigma} = 4\pi Q_V(t)$ (обобщение электростатической теоремы Гаусса).
4. $\oint_L \vec{H} d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J_{\Sigma_L}(t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left(\iint_{\Sigma_L} \vec{E} d\vec{\Sigma} \right)$ (обобщение теоремы о циркуляции магнитного поля с учетом “тока смешения”).

Энергия электромагнитного поля. Вектор Умова – Пойтинга

Здесь подробно исследуем уравнения Максвелла (1.18):

$$1. \operatorname{rot}^r \vec{E}(r; t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}(r; t)}{\partial t}. \quad (2.1)$$

$$2. \operatorname{div}^r \vec{H}(r; t) = 0. \quad (2.2)$$

$$3. \operatorname{div}^r \vec{E}(r; t) = 4\pi\rho(r; t). \quad (2.3)$$

$$4. \operatorname{rot}^r \vec{H}(r; t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(r; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(r; t)}{\partial t}. \quad (2.4)$$

Прежде всего покажем, что из уравнений Максвелла (2.1) – (2.4) следует уравнение непрерывности для зарядов. Для этого вычислим дивергенцию из обеих частей уравнения (2.4):

$$\operatorname{div}^r \operatorname{rot}^r \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div}^r \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \{\operatorname{div}^r \vec{E}\}.$$

Но $\operatorname{div}^r (\operatorname{rot}^r \vec{H}) = 0$, а из уравнения (2.3) следует, что $\operatorname{div}^r \vec{E} = 4\pi\rho(r; t)$. Поэтому

$$0 = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div}^r \vec{j}(r; t) + \frac{4\pi}{c} \frac{\partial \rho(r; t)}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \rho(r; t)}{\partial t} + \operatorname{div}^r \vec{j}(r; t) = 0.$$

Таким образом, уравнение непрерывности (1.14) по существу содержится в уравнениях Максвелла (2.1) – (2.4).

Важнейшим следствием уравнений Максвелла является существование **энергии электромагнитного поля**. Для доказательства этого умножим уравнение (2.1) скалярно на \vec{H} , а уравнение (2.4) – скалярно на \vec{E} :

$$\vec{H} \cdot \operatorname{rot}^r \vec{E} = -\vec{H} \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{2c} \frac{\partial \vec{H}^2}{\partial t} = -\vec{H} \cdot \operatorname{rot}^r \vec{E};$$

$$\vec{E} \cdot \operatorname{rot}^r \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} \cdot \vec{E} + \frac{1}{c} \vec{E} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \frac{1}{2c} \frac{\partial \vec{E}^2}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c} (\vec{j}, \vec{E}) + \vec{E} \cdot \operatorname{rot}^r \vec{H}.$$

Сложим полученные уравнения:

$$\frac{1}{2c} \frac{\partial}{\partial t} (\overset{\text{r}}{E}^2 + \overset{\text{r}}{H}^2) = -\frac{4\pi}{c} (\overset{\text{r}}{j}, \overset{\text{r}}{E}) - \left\{ \overset{\text{r}}{H} \cdot \operatorname{rot} \overset{\text{r}}{E} - \overset{\text{r}}{E} \cdot \operatorname{rot} \overset{\text{r}}{H} \right\}. \quad (2.5)$$

Умножая обе части уравнения (2.5) на $c/4\pi$ и используя известную из векторного анализа формулу $\operatorname{div} [\overset{\text{r}}{A}, \overset{\text{r}}{B}] = \overset{\text{r}}{B} \operatorname{rot} \overset{\text{r}}{A} - \overset{\text{r}}{A} \operatorname{rot} \overset{\text{r}}{B}$, перепишем уравнение (2.5) в виде:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\overset{\text{r}}{E}^2 + \overset{\text{r}}{H}^2}{8\pi} + (\overset{\text{r}}{j}, \overset{\text{r}}{E}) = -\frac{c}{4\pi} \operatorname{div} [\overset{\text{r}}{E}, \overset{\text{r}}{H}]. \quad (2.6)$$

Введем два обозначения:

$$w(\overset{\text{r}}{r}; t) = \frac{\overset{\text{r}}{E}^2(\overset{\text{r}}{r}; t) + \overset{\text{r}}{H}^2(\overset{\text{r}}{r}; t)}{8\pi} = \frac{\overset{\text{r}}{E}^2 + \overset{\text{r}}{H}^2}{8\pi}; \quad (2.7)$$

$$\overset{\text{r}}{S}(\overset{\text{r}}{r}; t) = \frac{c}{4\pi} [\overset{\text{r}}{E}(\overset{\text{r}}{r}; t), \overset{\text{r}}{H}(\overset{\text{r}}{r}; t)] = \frac{c}{4\pi} [\overset{\text{r}}{E}, \overset{\text{r}}{H}]. \quad (2.8)$$

Как будет показано далее, величина $w(\overset{\text{r}}{r}; t)$ есть *плотность энергии* электромагнитного поля, а величина $\overset{\text{r}}{S}(\overset{\text{r}}{r}; t)$ – *плотность потока энергии* поля в точке $\overset{\text{r}}{r}$ в момент времени t . Вектор $\overset{\text{r}}{S}(\overset{\text{r}}{r}; t)$ называется вектором Умова – Пойтинга. В новых обозначениях уравнение (2.6) будет выглядеть так:

$$\frac{\partial}{\partial t} w(\overset{\text{r}}{r}; t) + (\overset{\text{r}}{j}, \overset{\text{r}}{E}) = -\operatorname{div} \overset{\text{r}}{S}(\overset{\text{r}}{r}; t). \quad (2.9)$$

По своему виду уравнение (2.9) напоминает уравнение непрерывности для зарядов: $\partial \rho(\overset{\text{r}}{r}; t)/\partial t = -\operatorname{div} \overset{\text{r}}{j}(\overset{\text{r}}{r}; t)$, если не считать слагаемого $(\overset{\text{r}}{j}, \overset{\text{r}}{E})$. Но именно это слагаемое и позволяет раскрыть физический смысл величин $w(\overset{\text{r}}{r}; t)$ и $\overset{\text{r}}{S}(\overset{\text{r}}{r}; t)$.

Для этого умножим обе части уравнения (2.9) на dV , проинтегрируем по произвольному объему V и воспользуемся теоремой Остроградского – Гаусса в правой части полученного уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w(\overset{\text{r}}{r}; t) dV + \iiint_V (\overset{\text{r}}{j}, \overset{\text{r}}{E}) dV = -\iiint_V \operatorname{div} \overset{\text{r}}{S}(\overset{\text{r}}{r}; t) dV,$$

$$\text{т.е. } \frac{\partial}{\partial t} \iiint_V w(\vec{r}; t) dV + \iiint_V (\vec{j}, \vec{E}) dV = - \iint_{\Sigma_V} \vec{S}(\vec{r}_\Sigma; t) d\vec{\Sigma}. \quad (2.10)$$

Здесь Σ_V – поверхность, ограничивающая объем V . Теперь выясним физический смысл величины $(\vec{j}, \vec{E}) dV$, стоящей под знаком интеграла в уравнении (2.10). Прежде всего установим размерность величины $(\vec{j}, \vec{E}) dV$. В системе СИ

$$[(\vec{j}, \vec{E}) dV] = \frac{\text{Кл}}{\text{с} \cdot \text{м}^2} \frac{\text{В}}{\text{м}} \text{м}^3 = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт},$$

т.е. величина $(\vec{j}, \vec{E}) dV$ имеет размерность мощности (производной энергии по времени). Далее, поскольку $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v}$, то

$$(\vec{j}, \vec{E}) dV = \rho(\vec{r}; t) dV \cdot (\vec{v}, \vec{E}) = dQ \cdot (\vec{v}, \vec{E}).$$

Здесь $dQ = \rho(\vec{r}; t) dV$ – заряд объема dV , расположенного в окрестности точки \vec{r} . На этот заряд действует со стороны поля сила Лоренца (1.1):

$$\vec{F} = dQ \cdot \vec{E} + \frac{dQ}{c} [\vec{v}, \vec{H}].$$

Мощность силы Лоренца

$$\begin{aligned} N_\Pi &= (\vec{V}, \vec{F}) = dQ \cdot (\vec{V}, \vec{E}) + \frac{dQ}{c} \left[\vec{V}, [\vec{V}, \vec{H}] \right]_0 = dQ \cdot (\vec{V}, \vec{E}) \Rightarrow \\ &\Rightarrow (\vec{j}, \vec{E}) dV = N_\Pi. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Следовательно, величина $\vec{j} \cdot \vec{E}$ есть *мощность силы*, отнесенная к единице объема. По теореме о кинетической энергии, известной из курса общей физики, мощность силы равна производной от кинетической энергии. Поэтому

$$(\vec{j}, \vec{E}) dV = \frac{\partial \epsilon_{\text{кин}}}{\partial t} dV, \quad (2.12)$$

$\epsilon_{\text{кин}}$ – кинетическая энергия частиц в единице объема, т.е. *плотность кинетической энергии*. Таким образом, величина $(\vec{j}, \vec{E}) dV$

определяет быстроту изменения кинетической энергии частиц в малом объеме dV . Теперь уравнение (2.10) можно записать так:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \{W(\vec{r}; t) + \varepsilon_{\text{кин}}\} dV = - \iint_{\Sigma_V} \vec{S}(\vec{r}_\Sigma; t) \cdot d\vec{\Sigma}. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.13) уже ничем не отличается от уравнения непрерывности. Величина $W(\vec{r}; t)$ имеет ту же размерность, что и $\varepsilon_{\text{кин}}$, т.е. $[W(\vec{r}; t)] = \text{Дж} / \text{м}^3$. Отсюда можно заключить, что величина

$$w(\vec{r}; t) = \frac{\vec{E}^2(\vec{r}; t) + \vec{H}^2(\vec{r}; t)}{8\pi} \quad (2.14)$$

есть *плотность энергии поля* в точке \vec{r} в момент времени t .

Энергия поля в произвольном объеме V в момент времени t будет определяться выражением:

$$W_V(t) = \iiint_V w(\vec{r}; t) dV = \frac{1}{8\pi} \iiint_V \{\vec{E}^2(\vec{r}; t) + \vec{H}^2(\vec{r}; t)\} dV. \quad (2.15)$$

Величина

$$\bar{S}(\vec{r}; t) = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}(\vec{r}; t), \vec{H}(\vec{r}; t)] \quad (2.16)$$

есть *плотность потока энергии* поля в точке \vec{r} в момент времени t .

Количество энергии поля, протекающее через произвольный элемент поверхности $d\vec{\Sigma}$ в единицу времени, определяется выражением, которое аналогично выражению (1.10) для тока через элемент поверхности $d\vec{\Sigma}$:

$$S d\vec{\Sigma} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] d\vec{\Sigma}. \quad (2.17)$$

Количество энергии поля, протекающее через *произвольную поверхность конечного размера* Σ в единицу времени (поток энергии через поверхность Σ), будет определяться суммой количеств энергии, протекающих через малые участки этой поверхности (рис. 2.1), т.е. поверхностным интегралом:

$$\iint_{\Sigma} \overset{\text{r}}{S}(\overset{\text{r}}{k}_{\Sigma}; t) d\Sigma = \frac{c}{4\pi} \iint_{\Sigma} [\overset{\text{r}}{E}(\overset{\text{r}}{k}_{\Sigma}; t), \overset{\text{r}}{H}(\overset{\text{r}}{k}_{\Sigma}; t)] d\Sigma. \quad (2.18)$$

Величина $W_V(t)$ не зависит от вида полей, размера и формы объема всегда положительна – энергия поля, так же как кинетическая энергия частицы, отрицательной быть не может: $W_V(t) \geq 0$. Напро-

тив, поток энергии $\iint_{\Sigma} \overset{\text{i}}{S}(\overset{\text{r}}{k}; t) d\Sigma$ есть вели-

чина алгебраическая. Знак потока зависит от выбора внешней нормали к поверхности. Поток энергии через поверхность будет положительным, если в направлении внешней нормали протекает большее количество энергии, чем в обратном.

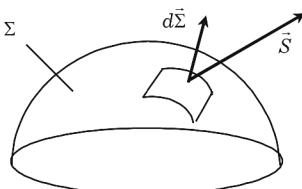


Рис. 2.1

Потенциалы поля

Вернемся снова к уравнениям Максвелла для напряженностей электромагнитного поля.

$$\begin{aligned} \text{I. } & \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \overset{\text{r}}{E}(\overset{\text{r}}{r}; t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \overset{\text{r}}{H}(\overset{\text{r}}{r}; t)}{\partial t}; \\ \operatorname{div} \overset{\text{r}}{H}(\overset{\text{r}}{r}; t) = 0. \end{array} \right. \\ \text{II. } & \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div} \overset{\text{r}}{E}(\overset{\text{r}}{r}; t) = 4\pi\rho(\overset{\text{r}}{r}; t); \\ \operatorname{rot} \overset{\text{r}}{H}(\overset{\text{r}}{r}; t) = \frac{4\pi}{c} \overset{\text{r}}{j}(\overset{\text{r}}{r}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \overset{\text{r}}{E}(\overset{\text{r}}{r}; t)}{\partial t}. \end{array} \right. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Рассмотрим *первую пару* уравнений Максвелла. Из второго уравнения следует, что магнитное поле является *соленоидальным*. Поскольку дивергенция от ротора любого вектора тождественно равна нулю ($\operatorname{div} \operatorname{rot} \overset{\text{l}}{a} \equiv 0$), то всегда существует такое векторное поле $\overset{\text{l}}{A}(\overset{\text{r}}{r}; t)$, что напряженность магнитного поля является ротором от величины $\overset{\text{l}}{A}(\overset{\text{r}}{r}; t)$:

$$\overset{\text{l}}{H}(\overset{\text{r}}{r}; t) = \operatorname{rot} \overset{\text{l}}{A}(\overset{\text{r}}{r}; t). \quad (3.2)$$

Величина $\overset{\text{l}}{A}(\overset{\text{r}}{r}; t)$ называется *векторным потенциалом* поля. Подставляя (3.2) в первое уравнение (3.1), получим:

$$\operatorname{rot} \overset{\text{r}}{E}(\overset{\text{r}}{r}; t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \overset{\text{l}}{A}(\overset{\text{r}}{r}; t) \Rightarrow \operatorname{rot} \left\{ \overset{\text{r}}{E}(\overset{\text{r}}{r}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \overset{\text{l}}{A}(\overset{\text{r}}{r}; t) \right\} = 0. \quad (3.3)$$

Поскольку ротор от градиента любой скалярной функции тождественно равен нулю ($\operatorname{rot} \operatorname{grad} f \equiv 0$), то выражение, стоящее в фигурных скобках, можно представить как градиент от некоторой скалярной функции $\varphi(\overset{\text{r}}{r}; t)$:

$$\overset{\text{r}}{E}(\overset{\text{r}}{r}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \overset{\text{l}}{A}(\overset{\text{r}}{r}; t) = -\operatorname{grad} \varphi(\overset{\text{r}}{r}; t).$$

Отсюда следует, что

$$\vec{E}(\vec{r}; t) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}; t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}; t). \quad (3.4)$$

Величина $\varphi(\vec{r}; t)$ называется скалярным потенциалом поля. Из формулы (3.4) видно, что зависящее от времени электрическое поле не является потенциальным.

Таким образом, из первой пары уравнений Максвелла следует, что поля \vec{E} и \vec{H} можно выразить через векторный и скалярный потенциалы поля \vec{A} и φ . Следовательно, шесть неизвестных величин E_x , E_y , E_z , H_x , H_y и H_z выражаются через четыре функции A_x , A_y , A_z и φ .

Из формул (3.2) и (3.4) следует, что потенциалы поля определены неоднозначно и, следовательно, являются величинами физически не наблюдаемыми. Действительно, если вместо потенциалов \tilde{A} и ϕ ввести новые потенциалы $\tilde{\tilde{A}}$ и $\tilde{\phi}$:

$$\overset{\circ}{A} = A + \text{grad } f(\overset{\circ}{r}; t), \quad (3.5a)$$

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f(\vec{r}; t)}{\partial t}, \quad (3.5b)$$

где $f(\vec{r}; t)$ – произвольная функция координат и времени, то напряженности полей не изменятся. Действительно,

$$\begin{aligned}
 \text{rot } \overset{\mathbf{r}}{A}^0 &= \text{rot } \overset{\mathbf{r}}{A} + \text{rot grad } f(\overset{\mathbf{r}}{r}; t) = \text{rot } \overset{\mathbf{r}}{A} + \overset{\mathbf{r}}{H} \Rightarrow \\
 &\quad \underset{0}{\text{rot grad } f(\overset{\mathbf{r}}{r}; t)} \\
 \Rightarrow \overset{\mathbf{r}}{H}^0 &= \overset{\mathbf{r}}{H}; \\
 \overset{\mathbf{r}}{E}^0 &= -\text{grad } \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \overset{\mathbf{r}}{A}^0 = \\
 &= -\text{grad } \left\{ \phi - \frac{1}{c} \frac{\partial f(\overset{\mathbf{r}}{r}; t)}{\partial t} \right\} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \overset{\mathbf{r}}{A} + \text{grad } f(\overset{\mathbf{r}}{r}; t) \right\}; \tag{3.5c}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{E}_0 &= -\text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \\ &+ \left\{ \text{grad} \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{f}(\vec{r}; t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{grad} \vec{f}(\vec{r}; t) \right\} \Rightarrow \vec{E}_0 = \vec{E}. \end{aligned} \quad (3.5d)$$

Следовательно, существует бесчисленное множество различных потенциалов \vec{A} и φ , соответствующих одним и тем же значениям напряженностей полей \vec{E} и \vec{H} . Это свойство полей называется *градиентной инвариантностью*.

Уравнения для потенциалов поля $\vec{A}(\vec{r}; t)$ и $\varphi(\vec{r}; t)$ могут быть получены подстановкой соотношений (3.2) и (3.4) во вторую пару уравнений Максвелла (3.1). Так из первого уравнения находим:

$$\begin{aligned} \text{div} \left\{ \text{grad } \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right\} &= 4\pi\rho, \\ \text{т.е.} \quad \Delta\varphi + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \text{div} \vec{A} &= -4\pi\rho(\vec{r}; t). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Из второго уравнения находим, что:

$$\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \left\{ -\text{grad} \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} \right\}.$$

Поскольку $\text{rot} \text{rot} \vec{A} = \text{grad} \text{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}$, то полученное уравнение можно записать так:

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} - \text{grad} \left\{ \text{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right\} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}; t). \quad (3.7)$$

Здесь $\Delta = \nabla^2$ – оператор Лапласа. В декартовых координатах

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (3.8)$$

Уравнения (3.6) и (3.7) есть искомые уравнения для потенциалов поля. Уравнения (3.6) и (3.7) получены без каких-либо дополнительных приближений или допущений, а потому полностью равнозначны уравнениям Максвелла (3.1). При этом сама форма полученных уравнений не является оптимально простой, поскольку в

каждое из них входят оба потенциала \vec{A} и ϕ . Однако если воспользоваться неоднозначностью потенциалов поля, эти уравнения можно записать в существенно более простом виде. Для этого наложим на потенциалы поля *одно* дополнительное условие, что всегда можно сделать, воспользовавшись произвольным видом функции $f(\vec{r}; t)$ в формулах (3.5a) и (3.5b). Именно, функцию $f(\vec{r}; t)$ выберем так, чтобы потенциалы поля удовлетворяли условию:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0. \quad (3.9)$$

Равенство (3.9) называется условием калибровки Лоренца для потенциалов поля. Теперь векторный и скалярный потенциалы поля не являются полностью независимыми друг от друга величинами, что, конечно, никак не отражается на значениях самих полей \vec{E} и \vec{H} .

При выполнении условия (3.9) уравнение (3.7) принимает вид

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{A} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}; t). \quad (3.10)$$

Далее, поскольку из условия калибровки следует, что $\operatorname{div} \vec{A} = -\partial \phi / c \partial t$, то уравнение (3.6) также упростится и будет содержать только скалярный потенциал поля ϕ :

$$\Delta \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = -4\pi \rho(\vec{r}; t). \quad (3.11)$$

Таким образом, при использовании условия калибровки Лоренца (3.9) уравнения для потенциалов \vec{A} и ϕ получаются однотипными. Каждое из них представляет собой неоднородное волновое уравнение. Однако следует помнить, что при получении уравнений (3.10) и (3.11) использовалось условие калибровки (3.9). Это означает, что потенциалами электромагнитного поля будут не любые решения волновых уравнений (3.10) и (3.11), а только те из них, которые удовлетворяют условию (3.9).

Следовательно, полная система уравнений для потенциалов поля будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \Delta\varphi(\vec{r}; t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r}; t)}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\vec{r}; t); \\ \Delta\vec{A}(\vec{r}; t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}; t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}; t); \\ \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Система уравнений (3.12) называется уравнениями Максвелла для потенциалов поля.

Система уравнений (3.12) полностью эквивалентна системе уравнений (3.1) для напряженностей полей \vec{E} и \vec{H} . Если потенциалы поля будут определены из уравнений (3.12), то напряженности полей можно найти по формулам (3.2) и (3.4). Вычисление напряженностей полей \vec{E} и \vec{H} через потенциалы во многих случаях бывает значительно удобнее, чем нахождение величин \vec{E} и \vec{H} непосредственно из уравнений Максвелла. Действительно, поскольку уравнения для величин $\vec{A}(\vec{r}; t)$ и $\varphi(\vec{r}; t)$ однотипны, то с математической точки зрения для расчета полей достаточно решить всего одно неоднородное волновое уравнение вида

$$\Delta F - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = -4\pi G(\vec{r}; t). \quad (3.13)$$

Методы решения волновых уравнений детально изучаются в курсе “Математическая физика”.

Электростатика. Уравнение Пуассона

Электростатика – раздел электродинамики, в котором изучаются электрические поля, создаваемые *неподвижными* зарядами: $\vec{j} = \rho \cdot \vec{v} = 0$; $\vec{H} = 0$; $\rho = \rho(\vec{r})$; $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$. Основная задача электростатики может быть сформулирована так: зная распределение покоящихся зарядов $\rho(\vec{r})$, определить напряженность поля $\vec{E}(\vec{r})$ и потенциал поля $\varphi(\vec{r})$ в каждой точке пространства \vec{r} .

Дано: $\rho(\vec{r})$.

Найти: $\vec{E}(\vec{r})$ и $\varphi(\vec{r})$.

Уравнения Максвелла для напряженности электрического поля, создаваемого покоящимися зарядами, имеют вид:

$$1) \operatorname{rot} \vec{E}(\vec{r}) = 0; \quad (4.1)$$

$$2) \operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r}). \quad (4.2)$$

Из уравнения (4.1) следует, что

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}). \quad (4.3)$$

Таким образом, *электростатическое поле является потенциальным*. Потенциал поля определен с точностью до произвольной константы.

Подставляя (4.3) в (4.2), получим:

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}). \quad (4.4)$$

Формула (4.4) называется *уравнением Пуассона*. Таким образом, потенциал электростатического поля определяется из уравнения Пуассона, которое должно быть дополнено соответствующими условиями. Если заряды занимают *конечную область* пространства, то обычно принимают потенциал поля равным нулю на бесконечно большом расстоянии от системы зарядов:

$$\varphi(|\vec{r}| \rightarrow \infty) = 0. \quad (4.5)$$

Условие (4.5) является только одним из условий, которому должно удовлетворять решение уравнения (4.4). Кроме того, если отсутствуют точечные заряды, то потенциал поля должен быть ограниченной функцией во всех точках пространства (требование ограниченности потенциала).

Таким образом, с математической точки зрения, задача о вычислении напряженности электростатического поля $\vec{E}(\vec{r})$ сводится к решению уравнения Пуассона для потенциала $\varphi(\vec{r})$. Методы решения уравнения Пуассона для различных физических задач, а не только задачи электростатики, подробно изучаются в курсе “Математическая физика”.

Решение уравнения Пуассона для точечного заряда

Рассмотрим сначала *точечный* заряд e , расположенный в точке \vec{r}_0 (рис. 4.1):

$$\rho(\vec{r}) = e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (4.6)$$

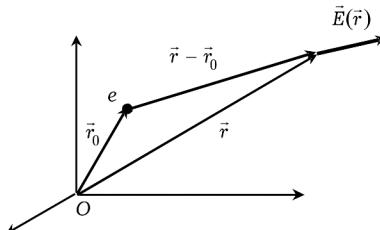


Рис. 4.1

Уравнение Пуассона (4.4) для точечного заряда будет выглядеть так:

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -4\pi e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0). \quad (4.7)$$

Используя известную формулу¹

$$\Delta \frac{1}{r} = -4\pi\delta(\vec{r}),$$

можем записать, что

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = \Delta\left(\frac{\mathbf{e}}{r}\right).$$

Отсюда сразу следует, что

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{\mathbf{e}}{|\vec{r} - \vec{r}_0|}. \quad (4.8)$$

Константа, с точностью до которой определен потенциал поля, в формуле (4.8) положена равной нулю, чтобы при $|\vec{r}| \rightarrow \infty$ выполнялось условие (4.5). Формула (4.8) представляет собой закон Кулона для потенциала поля покоящегося точечного заряда.

Напряженность поля точечного заряда

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathbf{e} \cdot \text{grad} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_0|} \Rightarrow \vec{E}(\vec{r}) = e \frac{\vec{r} - \vec{r}_0}{|\vec{r} - \vec{r}_0|^3}. \quad (4.9)$$

Это есть закон Кулона для напряженности поля покоящегося точечного заряда.

При получении формулы (4.9) учтено, что градиент от любой сферически симметричной функции определяется выражением $\text{grad } f(r) = (df / dr) \cdot \hat{r} / r$.

Из формул (4.8) и (4.9) видно, что на больших расстояниях от заряда потенциал убывает обратно пропорционально расстоянию ($\varphi(r \rightarrow \infty) \sim 1/r$), а напряженность поля точечного заряда убывает обратно пропорционально квадрату расстояния: $|\vec{E}(r \rightarrow \infty)| \sim 1/r^2$. (При переходе в систему СИ, в которой заряд измеряется в кулонах, правые части формул (4.8) и (4.9) нужно умножить на величину $1 / 4\pi\epsilon_0 = k \approx 9 \cdot 10^9 \text{ м/Ф}$.)

¹ Подробный вывод этой формулы приведен, например, в книге: Ремизович В.С. Математический практикум по физике (для групп вечернего факультета): Учебное пособие. – М.: МИФИ, 2007.

Решение уравнения Пуассона для произвольной системы зарядов

Пусть теперь имеется система нескольких точечных зарядов. Тогда плотность $\rho(\vec{r})$ будет определяться суммой плотностей, создаваемых каждым зарядом в отдельности (1.6):

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{a=1}^N e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a). \quad (4.10)$$

Поскольку уравнение Пуассона является линейным дифференциальным уравнением, то справедлив *принцип суперпозиции*:

Потенциал (напряженность) поля, *создаваемого системой* зарядов в точке \vec{r} , равен *сумме потенциалов* (векторной сумме напряженностей) полей, создаваемых в этой точке каждым зарядом в отдельности:

$$\phi(\vec{r}) = \sum_{a=1}^N \frac{e_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|}; \quad \vec{E}(\vec{r}) = \sum_{a=1}^N e_a \frac{\vec{r} - \vec{r}_a}{|\vec{r} - \vec{r}_a|^3}. \quad (4.11)$$

Зная закон Кулона для потенциала поля точечного заряда и используя принцип суперпозиции, можно записать решение уравнения Пуассона для произвольного распределения зарядов $\rho(\vec{r})$.

Для этого рассмотрим малый элемент объема dV' в окрестности точки \vec{r}' (рис. 4.2). Заряд внутри этого объема можно считать точечным: $dQ = \rho(\vec{r}')dV'$. Создаваемые этим “точечным” зарядом потенциал и напряженность поля в произвольной точке \vec{r} будут определяться формулами (4.8) и (4.9):

$$d\phi(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r}')dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad d\vec{E}(\vec{r}) = \rho(\vec{r}')dV' \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}.$$

Используя принцип суперпозиции, получаем:

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'; \quad (4.12)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (4.13)$$

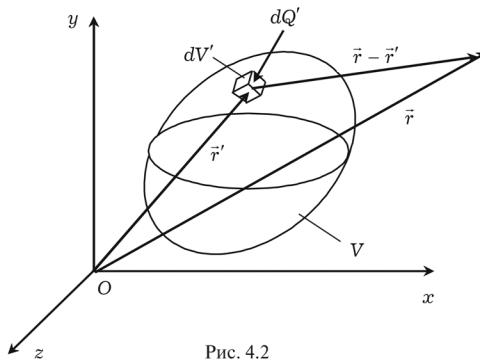


Рис. 4.2

Интегрирование в формулах (4.12) и (4.13) ведется по объему, где распределен заряд $\rho(\vec{r})$.

Если имеется система точечных зарядов, то, подставляя в формулы (4.12) и (4.13) значение для их плотности (4.10), естественно возвращаемся к формулам (4.11).

Убедимся, что потенциал поля, определяемый формулой (4.12), действительно удовлетворяет уравнению Пуассона (4.4):

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = \iiint_V \Delta_r \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = -4\pi \iiint_V \rho(\vec{r}') \delta(\vec{r} - \vec{r}') dV' \Rightarrow \\ \Rightarrow \Delta\varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}).$$

Таким образом, потенциал (4.12) удовлетворяет уравнению Пуассона (4.7) и является его искомым решением во всем пространстве, если соответствующий объемный интеграл сходится.

Геометрическое место точек равного потенциала $\varphi(\vec{r}) = \text{const}$ называется *эквипотенциальной поверхностью*. Поскольку $\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi(\vec{r})$, то в силу одного из свойств операции градиента вектор напряженности поля \vec{E} в точке \vec{r} всегда *перпендикулярен*

эквипотенциальной поверхности в этой точке и направлен в сторону быстрейшего убывания функции $\varphi(\vec{r})$ (за счет знака минус).

Энергия электростатического поля

Энергия электростатического поля во всем пространстве может быть рассчитана, исходя из общей формулы:

$$W = \frac{1}{8\pi} \iiint_{\infty} \vec{E}^2(\vec{r}) dV. \quad (4.14)$$

Формулу (4.14) можно записать в несколько ином виде так, чтобы вместо напряженности поля $\vec{E}(\vec{r})$ в нее входил потенциал поля $\varphi(\vec{r})$. Это делает вычисление энергии более удобным, так как именно потенциал поля находим из уравнения Пуассона. Для этого нужно произвести простые преобразования подынтегрального выражения в (4.14) и воспользоваться теоремой Остроградского – Гаусса.

Так как $\vec{E} = -\nabla\varphi$, то $\vec{E}^2 = -(\nabla\varphi) \cdot \vec{E}$. Из формулы $\operatorname{div}(\vec{E}\varphi) = \vec{E} \cdot \nabla\varphi + \varphi \cdot \operatorname{div} \vec{E}$ находим, что $\vec{E} \cdot (\nabla\varphi) = \operatorname{div}(\vec{E}\varphi) - \varphi(\operatorname{div} \vec{E})$. Поскольку из уравнения Максвелла следует, что $\operatorname{div} \vec{E}(\vec{r}) = 4\pi\rho(\vec{r})$, то

$$\vec{E}^2 = 4\pi\rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) - \operatorname{div}(\vec{E}\varphi). \quad (4.15)$$

Теперь формула (4.14) запишется так:

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\infty} \rho(\vec{r})\varphi(\vec{r}) dV - \frac{1}{8\pi} \iiint_{\infty} \operatorname{div}(\vec{E}\varphi) dV.$$

По теореме Остроградского – Гаусса,

$$\iiint_{\infty} \operatorname{div}(\vec{E}\varphi) dV = \iint_{R=\infty} \varphi(R) \vec{E}(R) d\Sigma = 0.$$

Интегрирование в последней формуле ведется по сфере бесконечного радиуса. На бесконечно большом расстоянии от системы зарядов величина $\varphi(R)\vec{E}(R)$ убывает $\sim 1/R^3$ или быстрее чем $1/R^3$. Величина элемента поверхности сферы $d\Sigma = R^2 d\Omega$.

Поэтому на поверхности сферы бесконечного радиуса $|\varphi(\vec{R})\vec{E}(\vec{R})d\Sigma| \sim |d\Sigma| / R^3 \sim R^2 d\Omega / R^3 \rightarrow 0$. Таким образом, получаем, что

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{\infty} \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV. \quad (4.16)$$

Формула (4.16) позволяет вычислить энергию электростатического поля во всем пространстве, если известны потенциал и распределение зарядов $\rho(\vec{r})$ в той области V , где они находятся. Таким образом, полную энергию поля во всем пространстве можно рассчитать по двум альтернативным формулам (4.14) или (4.16).

Применим формулу (4.16) к системе точечных зарядов. В этом случае плотность распределения зарядов определяется формулой (4.10). Поэтому формула (4.16) принимает вид

$$W = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N e_a \iiint_V \delta(\vec{r} - \vec{r}_a) \varphi(\vec{r}) dV = \frac{1}{2} \sum_{a=1}^N e_a \varphi(\vec{r}_a).$$

Здесь $\varphi(\vec{r}_a)$ – потенциал, создаваемый в точке \vec{r}_a всеми зарядами, кроме заряда с номером a , который расположен в самой точке \vec{r}_a .

Поэтому

$$\varphi(\vec{r}_a) = \sum_{b=1}^N \frac{e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|}, \quad a \neq b.$$

Теперь выражение для энергии поля системы точечных зарядов записывается так:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{a,b=1}^N \frac{e_a e_b}{|\vec{r}_a - \vec{r}_b|}, \quad a \neq b. \quad (4.17)$$

Методы решения задач электростатики

1. Применение электростатической теоремы Гаусса. Самым простым методом решения задач электростатики является использование теоремы Гаусса (1.24):

$$\iint_{\Sigma_V} \vec{E}(\vec{r}_{\Sigma}) d\Sigma = 4\pi Q_V. \quad (4.18)$$

Здесь Q_V – полный заряд внутри замкнутой поверхности Σ_V

$$Q_V = \iiint_V \rho(\vec{r}) dV, \quad (4.19)$$

где $\vec{E}(\vec{r}_\Sigma)$ – напряженность поля в точках этой поверхности.

Соотношение (4.18) является интегральной формой уравнения (4.2) и выполняется всегда. Однако использование теоремы Гаусса для решения конкретных задач электростатики целесообразно только в тех случаях, когда распределение зарядов обладает *высокой степенью симметрии*. Примерами такого распределения зарядов являются сферически симметричное (плотность заряда зависит только от расстояния до некоторой точки) и аксиально симметричное (плотность заряда зависит только от расстояния до некоторой оси) распределения. Теорема Гаусса также может быть использована в случае, когда плотность заряда зависит только от расстояния до некоторой плоскости. Во всех перечисленных выше случаях, пользуясь соображениями симметрии, можно указать замкнутые поверхности Σ_V , частично или полностью совпадающие с эквипотенциальными:

$$\Sigma_V = \Sigma_C + \Sigma'$$

где Σ_C – эквипотенциальные поверхности, на которых $\varphi = \varphi_C = \text{const}$; Σ' – поверхности, поток вектора \vec{E} через которые равен нулю:

$$\iint_{\Sigma'} \vec{E}(\vec{r}_{\Sigma'}) d\Sigma' = 0.$$

В каждой точке эквипотенциальной поверхности Σ_C величина напряженности поля *постоянна* $|\vec{E}(\vec{r}_{\Sigma_C})| = |\vec{E}_{\Sigma_C}| = \text{const}$, а вектор \vec{E}_{Σ_C} перпендикулярен поверхности:

$$(\vec{E}_{\Sigma_C}, d\Sigma_C) = |\vec{E}_{\Sigma_C}| \cdot d\Sigma_C \cdot \cos(\vec{E}_{\Sigma_C}, d\Sigma_C) = \pm |\vec{E}_{\Sigma_C}| \cdot d\Sigma_C.$$

Знак “плюс” берется, если вектор \vec{E}_{Σ_C} направлен в сторону внешней нормали к Σ_C . В противоположном случае берется знак

“минус”. Значение напряженности в точках эквипотенциальной поверхности Σ_C можно вынести из под знака интегрирования. После этого поверхностный интеграл в формуле (4.18) будет равен площади самой этой поверхности, т.е.

$$\iint_{\Sigma_V} \vec{E}(\vec{r}_\Sigma) d\vec{\Sigma} = \iint_{\Sigma_C} \vec{E}(\vec{r}_{\Sigma_C}) d\vec{\Sigma}_C = \pm E_C \iint_{\Sigma_C} d\Sigma_C = \pm E_C \Sigma_C.$$

В результате из формулы (4.18) находим

$$E_{\Sigma_C} = \frac{4\pi}{\Sigma_C} \left| \iiint_V \rho(\vec{r}) dV \right|. \quad (4.20)$$

В случае сферически симметричного распределения заряда вся поверхность Σ_V является эквипотенциальной, так что $\Sigma_V = \Sigma_C$.

Если напряженность поля \vec{E} будет определена, то потенциал поля Φ можно найти из соотношения (4.3), рассматривая его как дифференциальное уравнение относительно искомой функции $\phi(\vec{r})$.

Может создаться впечатление, что, применяя теорему Гаусса, мы никак не учтиаем первое уравнение (4.1), которое отражает тот факт, что электростатическое поле всегда является потенциальным. Однако это не так. Просто в задачах с высокой степенью симметрии, когда только и целесообразно использовать электростатическую теорему Гаусса для вычисления напряженности полей, первое уравнение (4.1) всегда удовлетворяется автоматически. В этом можно убедиться, например, *непосредственным вычислением* в каждой конкретной задаче.

2. Применение общего решения уравнения Лапласа. Если заряды распределены с объемной плотностью $\rho(\vec{r})$, то потенциал и напряженность поля можно рассчитать по общим формулам

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad (4.21)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (4.22)$$

При этом дополнительные условия на бесконечности и на поверхности раздела зарядов и вакуума выполняются автоматически. В ряде случаев может оказаться, что интегралы в формулах (4.21) и (4.22) оказываются расходящимися, например при вычислении поля от бесконечного заряженного цилиндра. В этих случаях, а также когда вычисление интегралов вызывает затруднение, можно для расчета поля воспользоваться электростатической теоремой Гаусса (если распределение зарядов обладает высокой степенью симметрии) или вычислить потенциал поля из уравнения Пуассона с учетом всех дополнительных условий.

3. Решение уравнения Пуассона. Потенциал поля можно определить, решая уравнение Пуассона (4.4) с учетом всех необходимых дополнительных условий:

$$\Delta\varphi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r}). \quad (4.23)$$

При решении уравнения Пуассона необходимо выбрать наиболее удобную систему координат и записать уравнение Пуассона в этой системе. Для этого необходимо знать выражение для оператора Лапласа в соответствующей системе координат.

В *декартовых* прямоугольных координатах:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.24a)$$

В *цилиндрических* координатах:

$$\Delta_{\rho,\varphi,z} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (4.24b)$$

Здесь ρ – расстояние до полярной оси Oz ; φ – азимутальный угол, т.е. угол между проекцией радиуса-вектора на плоскость xOy и осью Ox .

В *сферических* координатах:

$$\Delta_{r,\theta,\varphi} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (4.24c)$$

Здесь r – расстояние до начала координат; θ – полярный угол, т.е. угол между радиусом-вектором и полярной осью Oz ; φ – азимутальный угол.

Электростатическое поле на больших расстояниях от системы зарядов. Дипольный момент

Несмотря на кажущуюся простоту общей формулы (4.12) для потенциала поля, *аналитическое вычисление тройного интеграла в (4.12) в большинстве случаев оказывается невозможным.*

Рассмотрим важный вопрос о вычислении поля на больших расстояниях от системы зарядов, когда точная формула (4.12) может быть заменена существенно более простым приближенным выражением.

Пусть та область пространства V , где находятся заряды, имеет *конечные* геометрические размеры. Обозначим через L характерный (максимальный) размер этой области (рис. 5.1).

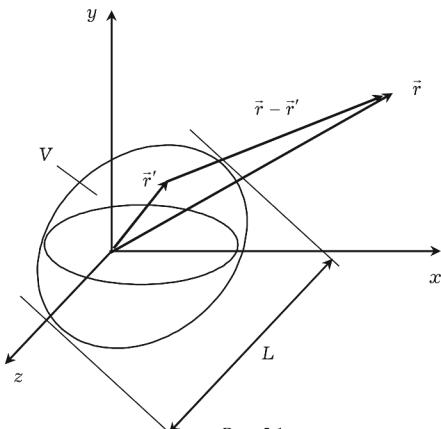


Рис. 5.1

Поместим начало координат внутри V и вычислим потенциал поля φ на больших расстояниях от системы зарядов:

$$|\vec{r}| >> L. \quad (5.1)$$

Будем исходить из точной формулы (4.12):

$$\varphi(\vec{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Поскольку $(r')_{\max} \sim L$, то при выполнении условия (5.1) будет выполняться неравенство

$$|r'| << |\vec{r}|. \quad (5.2)$$

Поэтому величину $1/|\vec{r} - \vec{r}'|$ можно разложить в ряд Тейлора по малой (по сравнению с расстоянием до точки наблюдения r) величине r' . Ограничивааясь двумя первыми членами разложения, находим:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r} + \vec{r}' \cdot \left(\text{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right)_{\vec{r}'=0} + \dots = \frac{1}{r} - \vec{r}' \cdot \text{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{r} + \dots, \quad (5.3)$$

или, учитывая, что $\text{grad}(1/r) = -\vec{r}/r^3$:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r} \cdot \vec{r}')}{r^3} + \dots. \quad (5.4)$$

Подставляя разложение (5.4) в точную формулу для потенциала $\varphi(\vec{r})$, получаем:

$$\varphi(\vec{r}) = \varphi_0(\vec{r}) + \varphi_1(\vec{r}) + \dots, \quad (5.5)$$

где

$$\varphi_0(\vec{r}) = \frac{1}{r} \iiint_V \rho(\vec{r}') dV' = \frac{Q}{r} \quad (5.6)$$

(Q – полный заряд системы);

$$\varphi_1(\vec{r}) = \varphi_d(\vec{r}) = \frac{1}{r^3} \iiint_V (\vec{r} \cdot \vec{r}') \rho(\vec{r}') dV' = \frac{1}{r^3} \vec{r} \cdot \iiint_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV'.$$

$$\text{Величина } \vec{d} = \iiint_V \vec{r}' \rho(\vec{r}') dV' \quad (5.7)$$

называется *дипольным моментом* системы зарядов. Дипольный момент является важнейшей характеристикой системы зарядов.

Для системы *точечных зарядов* $\rho(\vec{r}) = \sum_{a=1}^N e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$. Поэтому

дипольный момент такой системы будет определяться выражением:

$$\vec{d} = \sum_{a=1}^N e_a \vec{r}_a. \quad (5.8)$$

Здесь \vec{r}_a – радиус-вектор a -го заряда. Если система состоит всего из одного заряда e_1 , то $\vec{d} = e_1 \vec{r}_1$; если из двух зарядов, то $\vec{d} = e_1 \vec{r}_1 + e_2 \vec{r}_2$ и т.д.

Таким образом, потенциал поля на больших расстояниях от системы зарядов определяется следующей приближенной формулой:

$$\varphi(\vec{r}) \approx \varphi_0 + \varphi_d = \frac{Q}{r} + \frac{(\vec{d} \cdot \vec{r})}{r^3} \quad (r \gg L). \quad (5.9)$$

Напряженность поля тоже будет состоять из двух слагаемых:

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \vec{E}_0(\vec{r}) + \vec{E}_d(\vec{r}). \quad (5.10)$$

Здесь

$$\vec{E}_0(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi_0 = -Q \cdot \text{grad}(1/r) = Q \frac{\vec{r}}{r^3}; \quad (5.11)$$

$$\vec{E}_d(\vec{r}) = -\text{grad } \varphi_d = -\text{grad} \frac{(\vec{d} \cdot \vec{r})}{r^3} = \frac{3\vec{r}(\vec{d} \cdot \vec{r}) - \vec{d}r^2}{r^5}. \quad (5.12)$$

Таким образом, напряженность поля на больших расстояниях от системы имеет вид

$$\vec{E}(\vec{r}) \approx \frac{Q \cdot \vec{r}}{r^3} + \frac{3\vec{r}(\vec{d} \cdot \vec{r}) - \vec{d}r^2}{r^5} \quad (r \gg L). \quad (5.13)$$

Первые члены разложений (5.9) и (5.13) совпадают с потенциалом и напряженностью поля, создаваемого в точке \vec{r} точечным зарядом $Q = \sum e_a$, расположенным в начале координат. Следовательно, в первом приближении геометрические размеры системы

полагаются равными нулю. Второе, дипольное слагаемое в этих формулах учитывает конечность размеров системы и характер распределения зарядов в ней. На больших расстояниях первое слагаемое в выражении (5.9) для потенциала поля убывает по закону $\sim 1/r$, а дипольное слагаемое по закону $\sim 1/r^2$, т.е. значительно быстрее. Первый, кулоновский, член разложения напряженности (5.13) на больших расстояниях убывает по закону $\sim 1/r^2$, а второй член по закону $\sim 1/r^3$. Отсюда ясно, что если система зарядов не является электронейтральной, то, конечно, на больших расстояниях потенциал и напряженность поля будут практически определяться законом Кулона. Следующие члены разложения (5.5) будут давать лишь малые добавки к ϕ_0 .

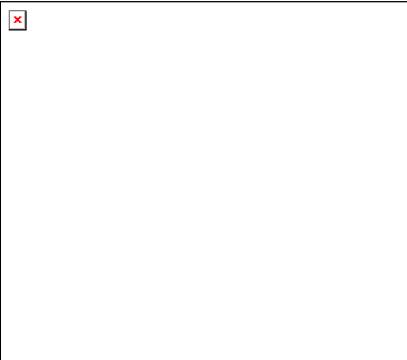
Поэтому дипольное приближение целесообразно использовать тогда, когда система зарядов **электронейтральна**: $Q = \sum e_a = 0$.

Для электронейтральной системы зарядов

$$\begin{aligned}\phi(\vec{r}) &\approx \phi_d(\vec{r}) = \frac{(\vec{d} \cdot \vec{r})}{r^3} = \frac{d \cos \theta}{r^2}; \\ E(\vec{r}) &\approx E_d(\vec{r}) = \frac{3\vec{r}(\vec{d}\vec{r}) - \vec{dr}^2}{r^5}.\end{aligned}\quad (5.14)$$

Здесь θ – угол между дипольным моментом и радиусом-вектором, направленным в точку наблюдения. Таким образом, потенциал поля электронейтральной системы убывает на больших расстояниях по закону $1/r^2$.

Из формулы (5.8) видно, что дипольный момент зависит, вообще говоря, от выбора начала координат, так как при изменении положения начала координат изменяются величины \vec{r}_a . Выясним, как изменяется дипольный момент системы точечных зарядов при переходе от одной системы координат K к системе координат K' , сдвинутой относительно K на постоянный вектор \vec{R} (рис. 5.2). В системе K



$$\vec{d} = \sum_{a=1}^N \mathbf{e}_a \vec{r}_a.$$

Из рисунка видно, что $\vec{r}_a = \vec{R} + \vec{r}'_a$. Поэтому

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \sum_{a=1}^N \mathbf{e}_a (\vec{R} + \vec{r}'_a) = \underbrace{\vec{R} \sum_{a=1}^N \mathbf{e}_a}_{Q} + \underbrace{\sum_{a=1}^N \mathbf{e}_a \vec{r}'_a}_{\vec{d}'}; \\ \vec{d} &= Q \cdot \vec{R} + \vec{d}'.\end{aligned}\quad (5.15)$$

Таким образом, дипольный момент электронейтральной системы зарядов *не зависит от выбора начала координат*:

$$d = d', \quad \text{если} \quad Q = 0. \quad (5.16)$$

Простейшую электронейтральную систему составляют два точечных заряда \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , которые равны по величине, но противоположны по знаку:

$$\mathbf{e}_1 = -q, \quad \mathbf{e}_2 = q.$$

Такая система зарядов называется диполем (рис. 5.3). Дипольный момент диполя

$$\vec{d} = \mathbf{e}_1 \vec{r}_1 + \mathbf{e}_2 \vec{r}_2 = q(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) = q\vec{r}_{21}. \quad (5.17)$$

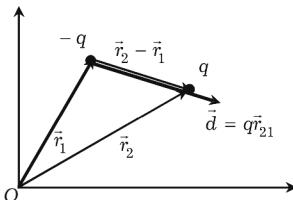


Рис. 5.3

Таким образом, вектор дипольного момента диполя \vec{d} направлен от отрицательного заряда к положительному заряду (см. рис. 5.3). Его величина определяется выражением:

$$d = |\vec{d}| = aq. \quad (5.18)$$

Здесь a – расстояние между зарядами.

Существуют такие системы зарядов, для которых дипольный момент равен нулю. Примером такой системы является квадруполь.



Рис. 5.4

Квадруполь – система из четырех точечных зарядов $\epsilon_1 = -q$; $\epsilon_2 = q$; $\epsilon_3 = -q$; $\epsilon_4 = q$, расположенных в вершинах прямоугольника так, что в соседних вершинах находятся заряды противоположного знака (рис. 5.4). Каждая пара зарядов в соседних вершинах образует диполь. Поэтому квадруполь можно рассматривать как систему двух диполей \vec{d}_1 и \vec{d}_2 . Однако эти диполи, будучи равными по величине $d_1 = d_2 = aq$, направлены в противоположные стороны: $\vec{d}_2 = -\vec{d}_1$.

Поэтому суммарный дипольный момент квадруполя равен нулю:

$$\vec{d}_{\text{квдр}} = \vec{d}_1 + \vec{d}_2 = 0.$$

Если дипольный момент электронейтральной системы зарядов равен нулю, то в разложении потенциала (5.5) следует учитывать третий член разложения φ_2 , что соответствует квадрупольному приближению. Однако рассмотрение квадрупольного приближения выходит за рамки настоящего пособия.

Магнитостатика. Основные уравнения

Магнитостатика – раздел электродинамики, в котором изучаются поля, создаваемые *постоянными токами*: $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$; $\vec{H} = \vec{H}(\vec{r})$. Основная задача магнитостатики может быть сформулирована так: зная распределение токов $\vec{j}(\vec{r})$, определить векторный потенциал поля $\vec{A}(\vec{r})$ и напряженность $\vec{H}(\vec{r})$ в каждой точке пространства \vec{r} .

Дано: $\vec{j}(\vec{r})$.

Найти: $\vec{A}(\vec{r})$ и $\vec{H}(\vec{r})$.

Постановка задачи. Уравнения магнитостатики

Рассмотрим магнитное поле, создаваемое зарядами, совершающими движение в *ограниченной* области пространства. Часто такое движение носит периодический или условно периодический характер, когда через повторяющиеся промежутки времени заряды проходят близкие участки пространства. Конечно, магнитное поле тоже будет периодически меняться со временем.

Если период движения зарядов T мал по сравнению с характерным временем разрешения приборов, то регистрируется магнитное поле, усредненное по периоду движения зарядов. Поэтому представляет интерес вычисление напряженности магнитного поля, усредненного по периоду движения зарядов, т.е. *среднего* магнитного поля:

$$\langle \vec{H}(\vec{r}) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{H}(\vec{r}; t). \quad (6.1)$$

В дальнейшем будем использовать следующее свойство среднего: *среднее значение производной по времени от любой периодической функции* равно нулю. Действительно, пусть $f(\vec{r}; t)$ периоди-

ческая по времени функция: $f(\vec{r}; t + T) = f(\vec{r}; t)$. Вычислим среднее значение производной по времени от этой функции:

$$\left\langle \frac{\partial f(\vec{r}; t)}{\partial t} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\partial f(\vec{r}; t)}{\partial t} dT = \frac{f(\vec{r}; T) - f(\vec{r}; 0)}{T} = 0. \quad (6.2)$$

Рассмотрим второе и четвертое уравнения Максвелла:

$$2) \operatorname{div} \vec{H}(\vec{r}; t) = 0; \quad (6.3)$$

$$4) \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}; t) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}; t)}{\partial t}. \quad (6.4)$$

Усредним эти уравнения по времени. В соответствии с формулой (6.2)

$$\left\langle \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}; t)}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

Поэтому получаем:

$$\operatorname{div} \left\langle \vec{H}(\vec{r}; t) \right\rangle = 0; \quad (6.5)$$

$$\operatorname{rot} \left\langle \vec{H}(\vec{r}; t) \right\rangle = \frac{4\pi}{c} \left\langle \vec{j}(\vec{r}; t) \right\rangle. \quad (6.6)$$

Будем в дальнейшем обозначать

$$\left\langle \vec{H}(\vec{r}; t) \right\rangle = \vec{H}(\vec{r}); \quad \left\langle \vec{j}(\vec{r}; t) \right\rangle = \vec{j}(\vec{r}). \quad (6.7)$$

Тогда уравнения (6.5) и (6.6) запишутся так:

$$\begin{cases} \operatorname{div} \vec{H}(\vec{r}) = 0; \\ \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}). \end{cases} \quad (6.8)$$

Система уравнений (6.8) представляет собой *основные уравнения магнитостатики* для напряженности магнитного поля $\vec{H}(\vec{r})$.

Вычислим дивергенцию от второго уравнения системы (6.8):

$$\underbrace{\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{H}(\vec{r})}_{0} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \left\langle \vec{j}(\vec{r}) \right\rangle \Rightarrow \operatorname{div} \left\langle \vec{j}(\vec{r}) \right\rangle = 0. \quad (6.9)$$

Это есть усредненное уравнение непрерывности:

$$\left\langle \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j}(\vec{r}; t) \right\rangle = \underbrace{\left\langle \frac{\partial \rho(\vec{r}, t)}{\partial t} \right\rangle}_{0} + \operatorname{div} \left\langle \vec{j}(\vec{r}; t) \right\rangle = 0.$$

Таким образом, вектор плотности токов (средних токов) в магнитостатике является соленоидальным вектором. При этом полный ток (1.12) через любую замкнутую поверхность равен нулю:

$$\int_{\Sigma_V} \left\langle \vec{j} \right\rangle d\Sigma = \iint_{\Sigma_V} j_n d\Sigma = 0.$$

Траектории зарядов, совершающих периодическое движение, можно рассматривать как некоторые замкнутые “трубки” или “нити”. Каждая из таких “трубок” замыкается сама на себя внутри области движения. Такое представление особенно наглядно в случае макроскопических постоянных токов, текущих по замкнутым проводникам¹.

Получим уравнение для среднего векторного потенциала поля:

$$\left\langle \vec{A}(\vec{r}) \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \vec{A}(\vec{r}; t). \quad (6.10)$$

Будем в дальнейшем обозначать $\left\langle \vec{A}(\vec{r}) \right\rangle = \vec{A}(\vec{r})$. Из первого уравнения системы (6.8) следует, что магнитное поле является соленоидальным. Поэтому

$$\vec{H}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}). \quad (6.11)$$

Векторный потенциал магнитостатического поля определен с точностью до градиента от произвольной функции координат $f(\vec{r})$:

$$\tilde{\vec{A}}(\vec{r}) = \vec{A}(\vec{r}) + \text{grad } f(\vec{r}). \quad (6.12)$$

Действительно,

$$\tilde{\vec{H}} = \text{rot } \tilde{\vec{A}} = \text{rot } \vec{A} + \underbrace{\text{rot grad } f(\vec{r})}_0 \Rightarrow \tilde{\vec{H}}(\vec{r}) = \vec{H}(\vec{r}).$$

Таким образом, потенциалам $\vec{A}(\vec{r})$ и $\tilde{\vec{A}}(\vec{r})$ отвечает одна и та же напряженность поля. Условие (6.12) выражает градиентную инвариантность векторного потенциала (3.5а). Поэтому на векторный потенциал можно наложить одно дополнительное условие. В част-

¹ См. Левич В.Г. Курс теоретической физики. – Т.1. – М.: Физматлит, 1962.

ности, всегда можно выбрать векторный потенциал $\tilde{A}(\vec{r})$ так, чтобы выполнялось равенство:

$$\operatorname{div} \tilde{A}(\vec{r}) = 0. \quad (6.13)$$

Условие (6.13) является частным случаем условия калибровки Лоренца (3.9) для потенциалов поля. Подставляя (6.11) во второе уравнение (6.8) запишем:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \tilde{A}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} j(\vec{r}) \Rightarrow \operatorname{grad} \operatorname{div} \tilde{A}(\vec{r}) - \Delta \tilde{A}(\vec{r}) = \frac{4\pi}{c} j(\vec{r}).$$

Таким образом, получаем следующие уравнения для векторного потенциала поля:

$$\begin{cases} \Delta \tilde{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} j(\vec{r}); \\ \operatorname{div} \tilde{A}(\vec{r}) = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

Замечание. Уравнения для векторного потенциала магнитного поля можно сразу получить, усредняя по времени полученные ранее уравнения для потенциалов поля (3.10) и условие калибровки Лоренца (3.9):

$$\Delta \langle \tilde{A}(\vec{r}; t) \rangle - \frac{1}{c^2} \left\langle \frac{\partial^2 \tilde{A}(\vec{r}; t)}{\partial t^2} \right\rangle = -\frac{4\pi}{c} \langle j(\vec{r}; t) \rangle \Rightarrow \Delta \tilde{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \langle j(\vec{r}) \rangle;$$

$$\operatorname{div} \langle \tilde{A} \rangle + \frac{1}{c} \left\langle \frac{\partial \phi}{\partial t} \right\rangle = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \tilde{A}(\vec{r}) = 0.$$

Таким образом, уравнение для векторного потенциала поля представляет собой векторное уравнение Пуассона. В декартовых координатах оно распадается на три однотипных уравнения Пуассона для компонент потенциала A_x , A_y и A_z . При этом должно быть учтено условие калибровки (6.13):

$$\begin{cases} \Delta A_x(x, y, z) = -\frac{4\pi}{c} j_x(x, y, z); \\ \Delta A_y(x, y, z) = -\frac{4\pi}{c} j_y(x, y, z); \\ \Delta A_z(x, y, z) = -\frac{4\pi}{c} j_z(x, y, z); \\ \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (6.15)$$

Вычисление векторного потенциала и напряженности магнитного поля

Уравнение для векторного потенциала поля является уравнением того же типа, что и уравнение (4.4) для скалярного потенциала в электростатике. Поэтому решение векторного уравнения Пуассона (6.14) определяется полученной ранее формулой (4.12) для скалярного потенциала электростатического поля

$$\phi(\vec{r}) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV',$$

в которой нужно сделать замену: $\phi(\vec{r}) \rightarrow \vec{A}(\vec{r})$ и $\rho(\vec{r}) \rightarrow \vec{j}(\vec{r})/c$. После такой замены получим:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'. \quad (6.16)$$

Интегрирование в формуле (6.16) ведется по объему пространства, в котором средняя плотность тока отлична от нуля. Непосредственным вычислением можно показать, что решение (6.16) удовлетворяет условию калибровки: $\operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}) = 0$. Теперь можно вычислить напряженность магнитного поля:

$$\vec{H}(\vec{r}) = \operatorname{rot}_r \vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \iiint_V \operatorname{rot}_r \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV'.$$

Вычисляя ротор подынтегрального выражения

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}_r \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} &= \left[\nabla_r \cdot \vec{j} \cdot \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = \\ &= - \left[\vec{j}, \nabla_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right] = - \left[\vec{j}, \operatorname{grad}_r \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right], \end{aligned}$$

$$\operatorname{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = - \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} \Rightarrow \operatorname{rot}_r \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), (\vec{r} - \vec{r}')]_{\perp}}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3},$$

для напряженности магнитного поля получаем следующую формулу:

$$H(\vec{r}) = \frac{1}{c} \iiint_V \frac{[j(\vec{r}'), (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (6.17)$$

Если постоянный ток течет по проводам (трубкам тока), то для каждого элемента трубы с током имеет место равенство:

$$\vec{j} dV = \vec{j} dS dl = I \cdot d\vec{l}. \quad (6.18)$$

Здесь dS – сечение проводника; $jdS = I$ – постоянный ток, протекающий по сечению проводника; $d\vec{l}$ – элемент длины проводника, направленный по касательной в сторону течения тока. Поэтому ясно, что направления векторов \vec{j} и $d\vec{l}$ совпадают. С учетом соотношения (6.18) формула (6.17) преобразуется к виду

$$H(\vec{r}) = \frac{I}{c} \int_L \frac{[dl', (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (6.19)$$

Формула (6.19) определяет напряженность магнитного поля, создаваемого постоянным током I , который течет по произвольному линейному проводнику L .

Формулы (6.17) и (6.19) выражают закон Био – Савара – Лапласа¹. Эти формулы дают принципиальное решение поставленной задачи магнитостатики. Однако вычисление интегралов в этих формулах может быть выполнено аналитически только для некоторых простейших систем.

Энергия магнитостатического поля

Энергия магнитостатического поля во всем пространстве может быть вычислена по общей формуле

$$W = \frac{1}{8\pi} \iiint_{\infty} H^2(\vec{r}) dV. \quad (6.20)$$

¹ Закон (6.19) был установлен французскими физиками Ж.Б. Био и Ф. Саваром в 1820 г. и затем сформулирован в общем виде П. Лапласом.

Так как $\vec{H} = \text{rot} \vec{A}$, то $\vec{H}^2 = \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A}$. Из формулы $\text{div}[\vec{A}, \vec{H}] = \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H}$, следует, что $\vec{H} \cdot \text{rot} \vec{A} = \vec{A} \cdot \text{rot} \vec{H} + \text{div}[\vec{A}, \vec{H}]$. Поскольку $\text{rot} \vec{H} = 4\pi \vec{j} / c$, то

$$\vec{H}^2 = \frac{4\pi}{c} (\vec{A}, \vec{j}) + \text{div}[\vec{A}, \vec{H}]. \quad (6.21)$$

Теперь формула (6.20) записывается так:

$$W = \frac{1}{2c} \iiint_{-\infty}^{\infty} (\vec{A}(r), \vec{j}(\vec{r})) dV + \frac{1}{8\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \text{div}[\vec{A}, \vec{H}] dV.$$

По теореме Остроградского – Гаусса

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \text{div}[\vec{A}, \vec{H}] dV = \iint_{R=-\infty}^{\infty} [\vec{A}(R), \vec{H}(R)] d\Sigma = 0.$$

Интегрирование в последней формуле ведется по сфере бесконечного радиуса, где $[\vec{A}, \vec{H}] d\Sigma \rightarrow 0$. Таким образом, получаем, что

$$W = \frac{1}{2c} \iiint_{-\infty}^{\infty} (\vec{A}(r), \vec{j}(\vec{r})) dV. \quad (6.22)$$

Формула (6.22) позволяет вычислить энергию магнитного поля во всем пространстве, зная распределение токов $\vec{j}(\vec{r})$ и векторный потенциал в той области V , где они протекают.

Таким образом, полную энергию поля можно рассчитать по двум альтернативным формулам (6.20) или (6.22). Если же необходимо вычислить энергию магнитного поля в любом заданном объеме V , то для этого нужно использовать основную формулу (2.15):

$$W_V = \frac{1}{8\pi} \iiint_V \vec{H}^2(\vec{r}) dV. \quad (6.23)$$

Методы решения задач магнитостатики

1. Использование теоремы о циркуляции магнитного поля. Самым простым методом решения задач магнитостатики является использование теоремы о циркуляции магнитного поля (1.26): цир-

куляция вектора \vec{H} по любому замкнутому контуру L равна полному току J_{Σ_L} , протекающему через поверхность Σ_L , границей которой является этот контур:

$$\oint_L \vec{H}(\vec{r}_L) \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J_{\Sigma_L}. \quad (6.24)$$

Здесь $\vec{H}(\vec{r}_L)$ – напряженность магнитного поля в точках контура L ; J_{Σ_L} – полный ток через поверхность Σ_L , т.е. алгебраическая сумма токов, охватываемых замкнутым контуром L :

$$J_{\Sigma_L} = \iint_{\Sigma_L} j(\vec{r}) d\Sigma = \iint_{\Sigma_L} j_n d\Sigma. \quad (6.25)$$

Соотношение (6.24) является интегральной формой второго уравнения (6.8) и выполняется всегда. Однако использование теоремы о циркуляции для решения конкретных задач магнитостатики оправдано только в тех случаях, когда распределение плотности тока обладает *высокой степенью симметрии*, обычно *аксиальной симметрией* (или симметрией относительно плоскости). Это позволяет из очевидных физических соображений указать такой контур L , в каждой точке которого величина напряженности поля *постоянна*, т.е. $\vec{H}(\vec{r}_L) = \vec{H}_L = \text{const}$, и направлена по касательной (иногда на некоторых участках контура напряженность поля может равняться нулю, например в задачах с симметрией относительно плоскости). В этом случае $\oint_L \vec{H}(\vec{r}_L) \cdot d\vec{l} = \pm H_L \cdot L$. Знак "плюс" берется, если \vec{H}_L совпадает по направлению с касательной в данной точке контура, т.е. с вектором $d\vec{l}$. В противоположном случае берется знак "минус". Тогда значение напряженности можно вынести из под знака интегрирования. После этого криволинейный интеграл в формуле (6.24) будет равен длине контура L (или длине контура за вычетом длин тех его участков, на которых напряженность поля равна нулю):

$$\oint_L \vec{H}(\vec{r}_L) \cdot d\vec{l} = \pm H_L \cdot \oint_L d\vec{l} = \pm H_L \cdot L.$$

В результате из формулы (6.24) получаем, что

$$H_L = \frac{4\pi}{c} \frac{J_{\Sigma_L}}{L}. \quad (6.26)$$

Если напряженность магнитного поля \vec{H} будет определена, то векторный потенциал поля \vec{A} можно найти из уравнения

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A},$$

рассматривая его как дифференциальное уравнение относительно искомой величины $\vec{A}(\vec{r})$.

Может создаться впечатление, что, используя теорему о циркуляции магнитного поля, мы никак не учтываем первое уравнение магнитостатики (6.8): $\text{div } \vec{H}(\vec{r}) = 0$, которое отражает тот факт, что магнитное поле всегда является соленоидальным. Однако это не так. В задачах с высокой степенью симметрии, когда только и цесообразно использовать теорему о циркуляции магнитного поля, первое уравнение (6.8) всегда удовлетворяется автоматически. В этом можно убедиться, например, *непосредственным вычислением* $\text{div } \vec{H}(\vec{r})$ в каждой конкретной задаче.

2. Решение уравнения Пуассона. Векторный потенциал магнитного поля можно определить, решая уравнение Пуассона (6.14) с учетом всех необходимых дополнительных условий:

$$\begin{cases} \vec{A}(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}); \\ \text{div } \vec{A}(\vec{r}) = 0. \end{cases} \quad (6.27)$$

Если токи распределены в ограниченной области пространства, то одним из дополнительных условий является требование, чтобы векторный потенциал поля при $r \rightarrow \infty$ убывал не медленнее, чем $1/r^2$.

При решении уравнения Пуассона необходимо выбрать наиболее удобную систему координат и записать векторное уравнение (6.27) в этой системе. Например, в декартовой системе координат векторный потенциал \vec{A} имеет ненулевые проекции на те же оси, что и вектор плотности тока \vec{j} .

Если имеются только объемные токи (т.е. отсутствуют поверхностные и линейные токи), то на поверхности раздела Σ должны выполняться условия спивки для потенциала \vec{A}_1 в первой области и потенциала \vec{A}_2 во второй области:

$$(\vec{A}_1)_{\Sigma} = (\vec{A}_2)_{\Sigma}; \quad (6.28)$$

$$\left(\frac{\partial \vec{A}_1}{\partial n} \right)_{\Sigma} = \left(\frac{\partial \vec{A}_2}{\partial n} \right)_{\Sigma}. \quad (6.29)$$

Здесь $\partial / \partial n$ – производная по внешней нормали к поверхности раздела двух сред.

Определив векторный потенциал поля, напряженность поля можно рассчитать по формуле: $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$. При этом для операции rot нужно использовать ту же систему координат, которая была выбрана ранее для решения уравнения Пуассона (6.27).

3. Применение общего решения векторного уравнения Лапласа.

Если задано распределение объемных токов $\vec{j}(\vec{r})$, то векторный потенциал и напряженность поля можно рассчитать по общим формулам

$$\overset{r}{A}(\overset{r}{r}) = \frac{1}{c} \iiint_V \frac{\overset{r}{j}(\overset{r}{r}')}{|\overset{r}{r} - \overset{r}{r}'|} dV'; \quad (6.30)$$

$$\overset{r}{H}(\overset{r}{r}) = \frac{1}{c} \iiint_V \frac{[\overset{r}{j}(\overset{r}{r}'), (\overset{r}{r} - \overset{r}{r}')]^T}{|\overset{r}{r} - \overset{r}{r}'|^3} dV'. \quad (6.31)$$

При этом дополнительные условия на бесконечности и на поверхностях раздела выполняются автоматически. В ряде случаев может оказаться, что интегралы в формулах (6.30) и (6.31) расходятся, например, при вычислении поля, создаваемого током, протекающим по бесконечно длинному проводнику. В этих случаях, а также когда вычисление интегралов вызывает затруднение, можно воспользоваться теоремой о циркуляции магнитного поля (ес-

ли распределение токов обладает, например, аксиальной симметрией), или вычислить потенциал поля с помощью уравнения Пуассона с учетом всех дополнительных условий.

В случае линейного тока значения \vec{A} и \vec{H} можно получить из (6.30) и (6.31), осуществив замену (6.18):

$$\vec{j}(\vec{r}')dV' = I \cdot d\vec{l}' . \quad (6.32)$$

Элемент $d\vec{l}'$ бесконечно малого сечения трубы тока I направлен в сторону течения тока I . После этого формулы (6.30) и (6.31) преобразуются к виду:

$$\overset{\Gamma}{A}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \int_{\Gamma} \frac{d\vec{l}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}; \quad (6.33)$$

$$\overset{\Gamma}{H}(\vec{r}) = \frac{I}{c} \int_{\Gamma} \frac{[d\vec{l}', (\vec{r} - \vec{r}')] }{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} . \quad (6.34)$$

**Магнитное поле на больших расстояниях
от системы токов. Магнитный момент****Векторный потенциал поля на больших расстояниях**

Аналитический расчет векторного потенциала и напряженности магнитного поля по общим формулам (6.16) и (6.17) в большинстве случаев оказывается невозможным из-за сложности вычисления тройного интеграла. Поэтому особую важность приобретают приближенные методы расчета характеристик поля. Рассмотрим вопрос о вычислении поля на больших расстояниях от системы токов, когда точная формула (6.16) может быть заменена более простым приближенным выражением. Принцип упрощения точной формулы для векторного потенциала \vec{A} магнитного поля

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{c} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad (7.1)$$

тот же самый, что и при вычислении скалярного потенциала ϕ электростатического поля на больших расстояниях от системы зарядов по формуле (4.12). Однако техника вычислений в случае магнитного поля оказывается более сложной, чем для электрического поля. Это связано с тем, что в выражении для векторного потенциала поля (7.1) под знак интеграла входит векторная величина $\vec{j}(\vec{r}')$, в то время, как в случае электрического поля, — скалярная величина $\rho(\vec{r}')$.

Пусть та область пространства V , где движутся заряды (т.е. отлична от нуля плотность тока), имеет *конечные* геометрические размеры. Обозначим через L характерный (максимальный) размер этой области. Удобно рассмотреть *среднее* магнитное поле, создаваемое не непрерывным распределением зарядов и токов, а системой *точечных* зарядов $\rho = \sum e_a \delta(\vec{r} - \vec{r}_a)$, совершающих периодическое движение.

Поместим начало координат внутри области V и вычислим векторный потенциал поля на больших расстояниях (рис. 7.1):

$$|\vec{r}| \gg L \Rightarrow |\vec{r}| \gg |\vec{r}_a|. \quad (7.2)$$

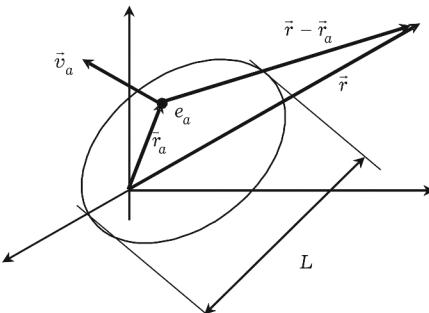


Рис. 7.1

В силу принципа суперпозиции векторный потенциал системы движущихся зарядов равен векторной сумме потенциалов, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{a=1}^N \vec{A}_a(\vec{r}). \quad (7.3)$$

Поэтому достаточно рассмотреть поле, создаваемое *одним* периодически движущимся зарядом e_a :

$$\vec{r}_a(t + T) = \vec{r}_a(t); \quad \vec{j}_a(\vec{r}, t) = e_a \vec{v}_a(t) \delta\{\vec{r} - \vec{r}_a(t)\}; \quad (7.4)$$

$$\vec{v}_a(t) = d\vec{r}_a / dt; \quad \vec{v}_a(t + T) = \vec{v}_a(t). \quad (7.5)$$

Подставляя (7.4) в общую формулу (7.1), получим следующее выражение для среднего векторного потенциала поля, создаваемого *одним* периодически движущимся зарядом e_a :

$$\begin{aligned} \vec{A}_a(\vec{r}) &= \frac{e_a}{c} \iiint_V \frac{\langle \vec{V}_a(t) \delta\{\vec{r}' - \vec{r}_a(t)\} \rangle}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \\ &= \frac{e_a}{c} \left\langle \iiint_V \frac{\vec{V}_a(t) \delta\{\vec{r}' - \vec{r}_a(t)\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\rangle. \end{aligned} \quad (7.6)$$

В формуле (7.6) учтено, что операция усреднения производится по временной переменной (по периоду движения заряда). Поэтому операцию усреднения $\langle \dots \rangle$ и интегрирование по координатам (радиусу-вектору заряда) можно поменять местами. Из-за наличия δ -функции под знаком интеграла в (7.6) интегрирование по объему производится элементарно:

$$\iiint_V \frac{\vec{V}_a(t) \delta\{\vec{r}' - \vec{r}_a(t)\}}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{\vec{V}_a(t)}{|\vec{r} - \vec{r}_a(t)|}.$$

В результате получаем:

$$\vec{A}_a(\vec{r}) = \frac{e_a}{c} \left\langle \frac{\vec{v}_a(t)}{|\vec{r} - \vec{r}_a(t)|} \right\rangle. \quad (7.7)$$

Это точная формула для среднего значения векторного потенциала поля одного заряда.

Теперь рассмотрим поле точечного заряда на расстояниях, больших по сравнению с той областью, где происходит его движение. При выполнении условия (7.2) величину $1/|\vec{r} - \vec{r}_a(t)|$ можно разложить в ряд Тейлора по малой величине $\vec{r}_a(t)$. Ограничимся первыми двумя членами разложения:

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}_a|} \approx \frac{1}{r} - \left(\vec{r}_a \cdot \text{grad} \frac{1}{r} \right) = \frac{1}{r} + \frac{(\vec{r}_a(t), \vec{r})}{r^3}. \quad (7.8)$$

Подставляя это в формулу (7.7), получим:

$$\vec{A}_a(\vec{r}) \approx \frac{e_a}{cr} \langle \vec{v}_a(t) \rangle + \frac{e_a}{cr^3} \langle \vec{v}_a(t) \cdot (\vec{r}_a(t), \vec{r}) \rangle. \quad (7.9)$$

Так как заряд совершает периодическое движение, то $\langle \vec{v}_a(t) \rangle = \langle d\vec{r}_a(t)/dt \rangle = 0$. Поэтому в отличие от электростатики

первое слагаемое в разложении (7.9) всегда равно нулю. Это связано с отсутствием "магнитных зарядов". В результате получаем:

$$\vec{A}_a(\vec{r}) \approx \frac{\epsilon_a}{cr^3} \langle \vec{v}_a(t) \cdot (\vec{r}_a(t), \vec{r}) \rangle \quad (r >> L). \quad (7.10)$$

Формула (7.10) может быть записана существенно в более простом виде. Ее можно преобразовать так, чтобы радиус-вектор точки наблюдения \vec{r} был "вынесен" из-под операции усреднения. Для такого преобразования формулы (7.10) воспользуемся очевидным равенством:

$$\frac{d}{dt} \{ \vec{r}_a \cdot (\vec{r}_a \vec{r}) \} = \frac{d\vec{r}_a}{dt} \cdot (\vec{r}_a \vec{r}) + \vec{r}_a \cdot \left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{r} \right), \quad (\vec{r}_a = \vec{r}_a(t), \vec{v}_a = \dot{\vec{r}}_a(t)),$$

т.е.

$$\frac{d}{dt} \{ \vec{r}_a \cdot (\vec{r}_a \vec{r}) \} = \vec{v}_a \cdot (\vec{r}_a \vec{r}) + \vec{r}_a \cdot (\vec{v}_a \vec{r}).$$

Усредняя это равенство по времени, получим:

$$\left\langle \frac{d}{dt} \{ \vec{r}_a(t) \cdot (\vec{r}_a(t), \vec{r}) \} \right\rangle = \langle \vec{v}_a \cdot (\vec{r}_a \vec{r}) \rangle + \langle \vec{r}_a \cdot (\vec{v}_a \vec{r}) \rangle,$$

т.е.

$$\langle \vec{v}_a \cdot (\vec{r}_a \vec{r}) \rangle = - \langle \vec{r}_a \cdot (\vec{v}_a \vec{r}) \rangle. \quad (7.11)$$

Следовательно,

$$2 \langle \vec{v}_a \cdot (\vec{r}_a \vec{r}) \rangle = \langle \vec{v}_a \cdot (\vec{r}_a \vec{r}) - \vec{r}_a \cdot (\vec{v}_a \vec{r}) \rangle.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \vec{v}_a \cdot (\vec{r}_a \vec{r}) - \vec{r}_a \cdot (\vec{v}_a \vec{r}) &= \vec{v}_a \cdot (\vec{r}, \vec{r}_a) - \vec{r}_a \cdot (\vec{r}, \vec{v}_a) = \\ &= [\vec{r} [\vec{v}_a, \vec{r}_a]] = [[\vec{r}_a, \vec{v}_a] \vec{r}], \end{aligned}$$

то

$$\langle \vec{v}_a(t) \cdot (\vec{r}_a(t), \vec{r}) \rangle = \frac{1}{2} [[\vec{r}_a(t), \vec{v}_a(t)], \vec{r}]. \quad (7.12)$$

Подставляя (7.12) в (7.10), запишем выражение для среднего векторного потенциала поля, создаваемого *одним* периодически движущимся зарядом в виде:

$$\vec{A}_a(\vec{r}) \approx \frac{\epsilon_a}{2cr^3} [[[\vec{r}_a(t), \vec{v}_a(t)], \vec{r}]] \quad (r >> L). \quad (7.13)$$

Магнитный момент

Последнюю формулу (7.13) обычно записывают так:

$$\vec{A}_a(\vec{r}) \approx \frac{[\langle \vec{m}_a \rangle, \vec{r}]}{r^3}. \quad (7.14)$$

Здесь $\langle \vec{m}_a \rangle$ – средний магнитный момент a -го движущегося заряда:

$$\langle \vec{m}_a \rangle = \frac{e_a}{2c} \langle [\vec{r}_a(t), \vec{v}_a(t)] \rangle. \quad (7.15)$$

В силу принципа суперпозиции для системы движущихся точечных зарядов средний векторный потенциал и средняя напряженность магнитного поля в произвольной точке \vec{r} на больших расстояниях от системы токов будут определяться выражениями:

$$\vec{A}_m(\vec{r}) \approx \frac{[\langle \vec{m} \rangle, \vec{r}]}{r^3}; \quad (7.16)$$

$$\vec{H}_m(\vec{r}) \approx \text{rot} \frac{[\langle \vec{m} \rangle, \vec{r}]}{r^3} = \frac{3\vec{r}(\langle \vec{m} \rangle, \vec{r}) - \langle \vec{m} \rangle r^2}{r^5}. \quad (7.17)$$

(Выход формулы (7.17) приведен в задаче 5.1 к этому разделу.) Величина $\langle \vec{m} \rangle$ есть средний магнитный момент системы зарядов:

$$\langle \vec{m} \rangle = \sum_{a=1}^N \langle \vec{m}_a \rangle = \frac{1}{2c} \left\langle \sum_{a=1}^N e_a [\vec{r}_a(t), \vec{v}_a(t)] \right\rangle. \quad (7.18)$$

Таким образом, на больших расстояниях от системы движущихся зарядов

$$|\vec{A}| \sim \frac{1}{r^2} \quad \text{и} \quad |\vec{H}| \sim \frac{1}{r^3}. \quad (7.19)$$

Для случая непрерывно распределенных *постоянных токов* формула (7.18) записывается так:

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \iiint_V [\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}')] dV'. \quad (7.20)$$

Величина и направление магнитного момента \vec{m} зависят только от свойств системы зарядов – от распределения плотности тока и

геометрии системы, и не зависят от координат точки наблюдения \vec{r} . В известной мере вектор \vec{m} является аналогом дипольного момента \vec{d} системы неподвижных зарядов в электростатике. Магнитное поле (7.17) вдали от системы токов выражается такой же формулой, как электрическое поле покоящихся зарядов (5.14):

$$\vec{E}_d(\vec{r}) \approx \frac{3\vec{r}(\vec{dr}) - \vec{dr}^2}{r^5}.$$

Различие заключается только в том, что вместо дипольного момента \vec{d} в формулу (7.17) входит магнитный момент $\langle \vec{m} \rangle$.

Рассмотрим некоторые свойства магнитного момента системы зарядов.

1. Нетрудно убедиться, что значение магнитного момента системы не зависит от выбора начала системы координат.

Сместим начало координат на постоянный вектор \vec{R} (рис. 7.2).

Тогда $\vec{r}_a = \vec{R} + \vec{r}'_a$. Подставляя это в формулу (7.18), запишем:

$$\langle \vec{m} \rangle = \frac{1}{2c} \left(\sum_{a=1}^N \mathbf{e}_a [(\vec{R} + \vec{r}'_a(t)), \vec{v}_a(t)] \right).$$

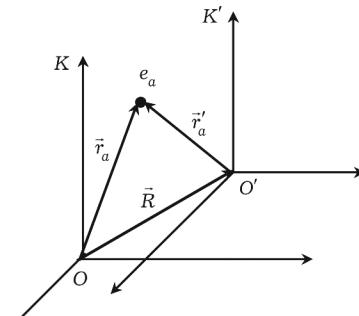


Рис. 7.2

Поскольку $\vec{v}_a(t)$ – периодическая функция, то $\langle \vec{v}_a(t) \rangle = 0$ и получаем, что

$$\left\langle \sum_{a=1}^N \mathbf{e}_a [\bar{R}, \vec{v}_a(t)] \right\rangle = \sum_{a=1}^N \mathbf{e}_a [\bar{R}, \langle \vec{v}_a(t) \rangle] = 0.$$

$$\text{Поэтому } \langle \vec{m} \rangle = \frac{1}{2c} \left\langle \sum_{a=1}^N \mathbf{e}_a [\vec{r}'_a(t), \vec{v}_a(t)] \right\rangle = \langle \vec{m}' \rangle.$$

Таким образом, магнитный момент системы, подобно дипольному моменту электронейтральной системы зарядов, представляет величину, зависящую только от физических свойств системы, но не от выбора начала отсчета.

2. Рассмотрим систему частиц с одинаковым отношением заряда к массе, т.е.

$$\frac{\mathbf{e}_a}{m_a} = \text{const} = \frac{\mathbf{e}}{m}. \quad (7.21)$$

Для такой системы

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \sum_{a=1}^N \frac{\mathbf{e}_a}{m_a} [\vec{r}_a, \vec{v}_a] m_a = \frac{\mathbf{e}}{2mc} \sum_{a=1}^N [\vec{r}_a, m_a \vec{v}_a].$$

В нерелятивистском случае ($v_a \ll c$) $m_a \vec{v}_a = \vec{p}_a$ – импульс a -й частицы. Поэтому

$$\vec{m} = \frac{\mathbf{e}}{2mc} \vec{L}. \quad (7.22)$$

Здесь $\vec{L} = \sum_{a=1}^N [\vec{r}_a, \vec{p}_a]$ – полный механический момент импульса

системы. Следовательно, для системы нерелятивистских частиц с одинаковым отношением заряда к массе отношение магнитного момента к моменту импульса есть величина постоянная:

$$\frac{|\vec{m}|}{|\vec{L}|} = \frac{|\mathbf{e}|}{2mc} = \text{const} \quad \left(\frac{\mathbf{e}_a}{m_a} = \text{const} \right). \quad (7.23)$$

Соотношение (7.23) всегда справедливо и для одной движущейся частицы.

Рассмотрим систему зарядов, находящихся в *заданном* внешнем постоянном и однородном магнитном поле ($\vec{H} = \vec{H}_0 = \text{const}$).

1. Вычислим *среднюю силу*, действующую на всю систему зарядов:

$$\langle \vec{F} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \vec{F}(t) dt, \quad \vec{F}(t) = \sum_{a=1}^N \vec{F}_a = \sum_{a=1}^N \frac{\mathbf{e}_a}{c} [\vec{v}_a(t), \vec{H}_0].$$

Поскольку $\langle \vec{v}_a \rangle = 0$, то

$$\langle \vec{F} \rangle = 0. \quad (7.24)$$

Таким образом, *средняя сила*, действующая на систему движущихся зарядов в постоянном и однородном магнитном поле, равна нулю.

2. Вычислим *средний момент* всех сил, действующих на систему:

$$\begin{aligned} \bar{K} &= \sum_{a=1}^N \bar{K}_a = \sum_{a=1}^N [\vec{r}_a, \vec{F}_a] = \sum_{a=1}^N \frac{\mathbf{e}_a}{c} [\vec{r}_a, [\vec{v}_a, \vec{H}_0]] = \\ &= \sum_{a=1}^N \frac{\mathbf{e}_a}{c} \vec{v}_a (\vec{r}_a, \vec{H}_0) - \sum_{a=1}^N \frac{\mathbf{e}_a}{c} \vec{H}_0 (\vec{r}_a, \vec{r}_a). \end{aligned}$$

Но $(\vec{r}_a, \vec{r}_a) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \vec{r}_a^2$. Поэтому

$$\bar{K} = \sum_{a=1}^N \frac{\mathbf{e}_a}{c} \vec{v}_a (\vec{r}_a, \vec{H}_0) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\sum_{a=1}^N \frac{\mathbf{e}_a}{c} \vec{H}_0 \vec{r}_a^2 \right).$$

После усреднения по времени второе слагаемое обращается в нуль, и получаем:

$$\langle \bar{K} \rangle = \sum_{a=1}^N \frac{\mathbf{e}_a}{c} \langle \vec{v}_a \cdot (\vec{r}_a, \vec{H}_0) \rangle. \quad (7.25)$$

Но из полученной ранее формулы (7.12) $\langle \vec{v}_a \cdot (\vec{r}_a, \vec{r}) \rangle = \frac{1}{2} [[\vec{r}_a, \vec{v}_a], \vec{r}]$ следует, что

$$\langle \vec{v}_a \cdot (\vec{r}_a, \vec{H}_0) \rangle = \frac{1}{2} [[\vec{r}_a, \vec{v}_a], \vec{H}_0].$$

Поэтому

$$\langle \vec{K} \rangle = \sum_{a=1}^N \frac{\epsilon_a}{2c} [\langle [\vec{r}_a, \vec{v}_a] \rangle, \vec{H}_0] = \left[\underbrace{\left(\frac{1}{2c} \sum_{a=1}^N \epsilon_a \langle [\vec{r}_a, \vec{v}_a] \rangle \right)}_{\langle \vec{m} \rangle}, \vec{H}_0 \right].$$

Следовательно,

$$\langle \vec{K} \rangle = [\langle \vec{m} \rangle, \vec{H}_0]. \quad (7.26)$$

Таким образом, средний момент сил, действующих на систему движущихся зарядов в однородном магнитном поле, равен векторному произведению магнитного момента системы на напряженность поля.

Электромагнитные волны. Плоские волны

Волновое уравнение

Электромагнитной волной называется любое, зависящее от времени решение уравнений Максвелла в пространстве, свободном от зарядов и токов: $\rho = 0, \vec{J} = 0$.

Другими словами, напряженности поля в электромагнитной волне определяются из однородной системы уравнений Максвелла:

$$1) \text{ rot } \vec{E}(\vec{r}; t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}; t)}{\partial t}; \quad (8.1)$$

$$2) \text{ div } \vec{H}(\vec{r}; t) = 0; \quad (8.2)$$

$$3) \text{ div } \vec{E}(\vec{r}; t) = 0; \quad (8.3)$$

$$4) \text{ rot } \vec{H}(\vec{r}; t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}; t)}{\partial t}. \quad (8.4)$$

Потенциалы поля волны удовлетворяют однородным волновым уравнениям:

$$\begin{cases} \Delta \varphi(\vec{r}; t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r}; t)}{\partial t^2} = 0, \\ \Delta \vec{A}(\vec{r}; t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}; t)}{\partial t^2} = 0, \\ \text{div } \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (8.5)$$

Последнее уравнение системы (8.5) есть условие калибровки Лоренца для потенциалов поля. Зная потенциалы поля, напряженности можно определить по известным формулам:

$$\vec{H}(\vec{r}; t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}; t); \quad \vec{E}(\vec{r}; t) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}; t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}; t). \quad (8.6)$$

Можно показать¹, что в отсутствие зарядов ($\rho = 0$) условие калибровки Лоренца не устраниет полностью неоднозначность потенциалов. А именно, произвольную функцию в (3.5) можно выбрать так, чтобы скалярный потенциал тождественно равнялся нулю:

$$\phi(\vec{r}, t) = 0,$$

а уравнение для векторного потенциала сохранило бы свой вид (8.5). Поэтому векторный потенциал поля электромагнитной волны удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \Delta \vec{A}(\vec{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = 0; \\ \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}, t) = 0. \end{cases} \quad (8.7)$$

Соответственно, напряженности поля будут определяться формулами:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}, t); \quad \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}, t). \quad (8.8)$$

Уравнение (8.7) имеет бесчисленное множество различных решений, т.е. существует огромное разнообразие видов электромагнитных волн. Однако наиболее простыми и в то же время исключительно важными являются два типа волн: *плоские волны* и *плоские монохроматические волны*. Именно эти два типа волн и будем изучать в этом и следующем разделах.

Плоские волны

Плоской волной называется такая волна, поле которой зависит только от одной пространственной координаты, например X (и, конечно, от времени).

Таким образом, в плоской волне $\vec{A} = \vec{A}(x, t)$, $\vec{E} = \vec{E}(x, t)$ и $\vec{H} = \vec{H}(x, t)$. Уравнения для векторного потенциала плоской волны в прямоугольных декартовых координатах выглядят так:

¹ См. Левич В.Г. Курс теоретической физики. – Т.1. – М.: Физматтиз, 1962.
64

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{A}(x; t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(x; t)}{\partial t^2} = 0; \\ \frac{\partial A_x(x; t)}{\partial x} = 0; \end{cases} \quad (8.9)$$

$$\vec{H}(x; t) = \text{rot } \vec{A}(x; t); \quad \vec{E}(x; t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(x; t). \quad (8.10)$$

Из условия калибровки следует, что $A_x(x; t) = f(t)$, где $A_x(x; t) = f(t)$ – произвольная функция времени. Но по определению потенциал плоской волны должен одновременно зависеть от величин x и t . Поэтому нужно положить $f(t) = \text{const}$, причем эту константу можно положить равной нулю. Таким образом,

$$A_x(x; t) = 0. \quad (8.11)$$

Следовательно, векторный потенциал в декартовых координатах будет иметь проекции только на оси Oy и Oz :

$$\vec{A}(x; t) = \vec{e}_y A_y(x; t) + \vec{e}_z A_z(x; t). \quad (8.12)$$

Напряженности магнитного и электрического полей определяются формулами (8.10):

$$\vec{H}(x; t) = \text{rot } \vec{A}(x; t) = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & A_y & A_z \end{vmatrix},$$

т.е.

$$\vec{H}(x; t) = -\vec{e}_y \frac{\partial A_z(x; t)}{\partial x} + \vec{e}_z \frac{\partial A_y(x; t)}{\partial x} \Rightarrow \quad (8.13)$$

$$\Rightarrow H_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x}; \quad H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x};$$

$$\vec{E}(x; t) = -\vec{e}_y \frac{\partial A_y(x; t)}{c \partial t} - \vec{e}_z \frac{\partial A_z(x; t)}{c \partial t} \Rightarrow \quad (8.14)$$

$$\Rightarrow E_y = -\frac{\partial A_y}{c \partial t}; \quad E_z = -\frac{\partial A_z}{c \partial t}.$$

Вектор плотности потока энергии (вектор Умова – Пойтинга)

$$\begin{aligned}\vec{S} &= \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ 0 & E_y & E_z \\ 0 & H_y & H_z \end{vmatrix} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \vec{S}(x; t) = \vec{e}_x \frac{c}{4\pi} (E_y H_z - E_z H_y).\end{aligned}\quad (8.15)$$

Направление вектора Умова – Пойтинга определяет направление распространения энергии поля. Из формулы (8.15) следует, что поток энергии поля будет направлен вдоль оси X (в положительном или отрицательном направлении, в зависимости от знака величины, стоящей в круглых скобках).

Из формул (8.13) и (8.14) следует, что напряженности полей лежат в плоскости, *перпендикулярной* оси Ox , так как $E_x = 0$ и $H_x = 0$. Другими словами, напряженности поля плоской волны лежат в плоскости, перпендикулярной направлению ее распространения. Поэтому говорят, что плоские волны являются *поперечными* волнами. Векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{S} всегда образуют правую тройку векторов.

Проекции векторного потенциала поля $A_y(x; t)$ и $A_z(x; t)$ удовлетворяют *однородным* волновым уравнениям:

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = 0. \quad (8.16)$$

Поэтому, с математической точки зрения, задача свелась к решению однородного волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(x; t)}{\partial t^2} = \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} f(x; t) = 0. \quad (8.17)$$

Формула (8.17) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка в частных производных. Его *общее* решение должно содержать *две произвольные* функции. Для решения уравнения (8.17) введем вместо x и t новые переменные v и u :

$$v = x - ct; \quad u = x + ct. \quad (8.18)$$

Переход от старых переменных x и t к новым переменным v и u осуществляется обычным образом:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v}; \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}; \\ \frac{\partial}{\partial ct} &= \frac{\partial u}{\partial ct} \frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial v}{\partial ct} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v}; \\ \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} &= \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial u^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}.\end{aligned}$$

Следовательно, в новых переменных волновой оператор (оператор Даламбера) будет выглядеть так:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2}{\partial v \partial u}.$$

Теперь волновое уравнение (8.17) принимает вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial v \partial u} f(v, u) = 0. \quad (8.19)$$

Уравнение (8.19) проще исходного уравнения (8.17). Действительно, нетрудно видеть, что любые функции $F_1(v)$ и $F_2(u)$ удовлетворяют этому уравнению. Поэтому в силу линейности уравнения (8.19) его общее решение является суперпозиций величин $F_1(v)$ и $F_2(u)$:

$$f(v, u) = F_1(v) + F_2(u),$$

$$\text{т.е. } f(x, t) = F_1(x - ct) + F_2(x + ct). \quad (8.20)$$

Здесь F_1 и F_2 – две произвольные функции, первая из которых зависит от величин x и t в комбинации $x - ct$, а вторая – в комбинации $x + ct$.

Рассмотрим для определенности только ту часть поля волны, которая зависит от разности $x - ct$, и выясним основные свойства такой волны:

$$A_y(x; t) = A_y(x - ct); \quad A_z(x; t) = A_z(x - ct). \quad (8.21)$$

Здесь $A_y(x - ct)$ и $A_z(x - ct)$ – независимые друг от друга произвольные функции. Для нахождения напряженностей полей по формулам (8.13) и (8.14) вычислим производные:

$$\frac{\partial A_z(x - ct)}{\partial x} = \frac{dA_z(v)}{dv}; \quad \frac{\partial A_y(x - ct)}{\partial x} = \frac{dA_y(v)}{dv};$$

$$\frac{\partial A_y(x - ct)}{\partial t} = -\frac{dA_y(v)}{dv}; \quad \frac{\partial A_z(x - ct)}{\partial t} = -\frac{dA_z(v)}{dv},$$

где $v = x - ct$. Следовательно, напряженности магнитного и электрического поля будут определяться по формулам:

$$\vec{H}(v) = -\vec{e}_y \frac{dA_z(v)}{dv} + \vec{e}_z \frac{dA_y(v)}{dv}; \quad (8.22)$$

$$\vec{E}(v) = \vec{e}_y \frac{dA_y(v)}{dv} + \vec{e}_z \frac{dA_z(v)}{dv}. \quad (8.23)$$

Вычислим квадраты напряженностей магнитного и электрического полей:

$$H^2 = \left(\frac{dA_z}{dv} \right)^2 + \left(\frac{dA_y}{dv} \right)^2, \quad E^2 = \left(\frac{dA_y}{dv} \right)^2 + \left(\frac{dA_z}{dv} \right)^2.$$

Видим, что $H^2 = E^2$. Таким образом, в плоской волне величины напряженностей полей *равны*:

$$|\vec{E}| = |\vec{H}|. \quad (8.24)$$

Вычислим скалярное произведение векторов \vec{E} и \vec{H} :

$$\begin{aligned} (\vec{E}, \vec{H}) &= \left(\vec{e}_y \frac{dA_y}{dv} + \vec{e}_z \frac{dA_z}{dv}, -\vec{e}_y \frac{dA_z}{dv} + \vec{e}_z \frac{dA_y}{dv} \right) = \\ &= -\frac{dA_y}{dv} \frac{dA_z}{dv} + \frac{dA_z}{dv} \frac{dA_y}{dv} = 0, \end{aligned}$$

т.е. в плоской волне напряженности электрического и магнитного полей *перпендикулярны* друг другу:

$$\vec{E} \perp \vec{H}. \quad (8.25)$$

Вычислим плотность энергии поля:

$$w(v) = \frac{1}{8\pi} \{E^2(v) + H^2(v)\} \quad (v = x - ct).$$

Так как $E^2 = H^2$, то

$$w = \frac{\vec{E}^2(x - ct)}{4\pi} = \frac{\vec{H}^2(x - ct)}{4\pi}. \quad (8.26)$$

Теперь вычислим вектор плотности потока энергии (вектор Пойнтинга) по формуле (8.15):

$$\vec{S}(v) = \vec{e}_x (E_y H_z - E_z H_y) = \vec{e}_x \frac{c}{4\pi} \left\{ \left(\frac{dA_y}{dv} \right)^2 + \left(\frac{dA_z}{dv} \right)^2 \right\},$$

т.е.

$$\vec{S}(x - ct) = \vec{e}_x \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 = \vec{e}_x \frac{c}{4\pi} \vec{H}^2 = \vec{e}_x c w(x - ct). \quad (8.27)$$

Из формулы (8.27) видно, что волна (8.21) распространяется в положительном направлении оси Ox . Введем понятие волнового фронта.

Фронтом волны в момент времени t называется геометрическое место точек равного значения напряженности полей:

$$\vec{E}(x - ct) = \text{const}_1; \quad \vec{H}(x - ct) = \text{const}_2. \quad (8.28)$$

Из (8.28) следует, что величины x и t для точек фронта волны связаны соотношением:

$$x - ct = \text{const}. \quad (8.29)$$

Формула (8.29) есть уравнение фронта волны. Видим, что фронтом волны является плоскость, перпендикулярная оси Ox . Именно поэтому рассматриваемые волны называются плоскими.

Вычислим скорость распространения плоской волны. В момент времени $t + \Delta t$ фронтом волны будет плоскость $(x + \Delta x) - ct(t + \Delta t) = \text{const}$. Следовательно, за время Δt фронт волны смещается на величину $\Delta x = c\Delta t$. Поэтому скорость распространения фронта волны

$$v_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = c > 0. \quad (8.30)$$

Из формулы (8.30) видно, что волна распространяется со скоростью света в положительном направлении оси Ox , т.е., как и

должно быть, в ту сторону, куда направлен вектор плотности потока энергии \vec{S} (8.27).

В случае, когда одна из компонент векторного потенциала равна нулю (например, $A_z = 0$), напряженности полей, согласно (8.22), имеют вид

$$\vec{H} = \vec{e}_z \frac{dA_y(v)}{dv}, \quad v = x - ct, \quad (8.31a)$$

$$\vec{E} = \vec{e}_y \frac{dA_y(v)}{dv}. \quad (8.31b)$$

Следовательно, если $\frac{dA_y}{dv} > 0$, то вектор \vec{E} направлен вдоль оси Oy , вектор \vec{H} – вдоль оси Oz . Вектор \vec{S} в независимости от

знака $\frac{dA_y}{dv}$ направлен вдоль оси Ox . Это выражает отмеченный

выше факт *поперечности* плоских волн: векторы \vec{E} и \vec{H} лежат в плоскости фронта волны и перпендикулярны направлению ее распространения (рис. 8.1).

Теперь рассмотрим ту часть поля волны, которая зависит от комбинации $x + ct$:

$$A_y(x; t) = A_y(x + ct), \quad A_z(x; t) = A_z(x + ct), \quad (8.32)$$

и выясним основные свойства такой волны. Здесь, как и ранее, $A_y(x + ct)$ и $A_z(x + ct)$ – две независимые друг от друга произвольные функции. Понятно, что поля, зависящие от комбинации $u = x + ct$, также будут описывать плоскую волну, но распространяющуюся в направлении, противоположном оси Ox . Действительно, вычисляя напряженности полей по формулам (8.13) – (8.15), получим:

$$\vec{H}(u) = -\vec{e}_y \frac{dA_z(u)}{du} + \vec{e}_z \frac{dA_y(u)}{du}, \quad u = x + ct, \quad (8.33a)$$

$$\vec{E}(u) = -\vec{e}_y \frac{dA_y(u)}{du} - \vec{e}_z \frac{dA_z(u)}{du}, \quad (8.33b)$$

$$\vec{S}(u) = -\vec{\epsilon}_x \frac{c}{4\pi} \vec{H}^2(u) = -\vec{\epsilon}_x \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2(u). \quad (8.33c)$$

Из формулы (8.33c) видно, что волна распространяется в *отрицательном* направлении оси Ox . В случае, когда z -компоненты векторного потенциала равны нулю ($A_z = 0$), напряженности полей, согласно (8.33a) – (8.33c), имеют вид

$$\vec{H} = \vec{\epsilon}_z \frac{dA_y(u)}{du}; \quad \vec{E} = -\vec{\epsilon}_y \frac{dA_y(u)}{du} \quad u = x + ct. \quad (8.34)$$

Следовательно, если $\frac{dA_y}{du} > 0$, то вектор \vec{E} направлен против оси Oy , вектор \vec{H} по-прежнему направлен вдоль оси Oz , а вектор \vec{S} – против оси Ox (рис. 8.2).

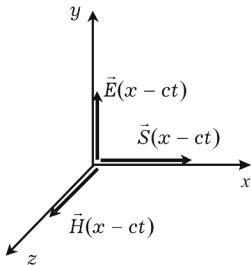


Рис. 8.1

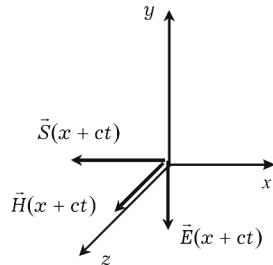


Рис. 8.2

Теперь получим *общее выражение* для поля плоской волны, распространяющейся вдоль *произвольного* направления \vec{n} ($|\vec{n}| = 1$). Это нетрудно сделать, если учесть, что $v = x - ct = \vec{\epsilon}_x \vec{r} - ct$, а условие калибровки можно записать так: $\partial A_x / \partial x = \partial (\vec{\epsilon}_x \vec{A}) / \partial v = 0$. Остается только заменить орт $\vec{\epsilon}_x$ на единич-

ный вектор $\vec{n}: \hat{\mathbf{e}}_x \rightarrow \vec{n}$. Тогда получим, что в такой волне $\vec{A} = \vec{A}(v)$, а условие калибровки

$$\frac{d}{dv}(\vec{n}, \vec{A}(v)) = \left(\vec{n}, \frac{d\vec{A}(v)}{dv} \right) = 0. \quad (8.35)$$

Напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = \text{rot}_r \vec{A}(v) = \left[\text{grad } v(r), \frac{d\vec{A}}{dv} \right], \text{ т.е. } \vec{H} = \left[\vec{n}, \frac{d\vec{A}}{dv} \right]. \quad (8.36)$$

(Здесь воспользовались формулами вычисления ротора от сложной функции и формулой $\text{grad}(\vec{n}r - ct) = \vec{n}$.)

Напряженность электрического поля:

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(v), \quad \text{т.е. } \vec{E} = \frac{d\vec{A}(v)}{dv}. \quad (8.37)$$

Из условия калибровки (8.35) следует, что $(\vec{n}, \vec{E}) = 0$, т.е.

$$\vec{E} \perp \vec{n}. \quad (8.38)$$

Из формул (8.36), (8.37) и (8.38) находим

$$\vec{H} = \left[\vec{n} \vec{E} \right]; \quad \vec{E} = \left[\vec{H} \vec{n} \right], \quad (8.39)$$

т.е.

$$\vec{H} \perp \vec{E} \quad \text{и} \quad |\vec{H}| = |\vec{E}|. \quad (8.40)$$

Плотность энергии

$$w(v) = \frac{H^2(v)}{4\pi} = \frac{E^2(v)}{4\pi}. \quad (8.41)$$

Вектор плотности потока энергии

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, [\vec{n} \vec{E}]] = \frac{c}{4\pi} \left\{ \vec{n} \cdot \vec{E}^2 - \vec{E} \underbrace{(\vec{n} \vec{E})}_{0} \right\},$$

т.е.

$$\vec{S}(v) = \frac{c}{4\pi} \vec{n} E^2(v) = \frac{c}{4\pi} \vec{n} H^2(v) = c \vec{n} w(v). \quad (8.42)$$

В формулах (8.35) – (8.42) $\nu = \vec{n}\vec{r} - ct$. Векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{S} образуют правую тройку векторов (рис. 8.3).

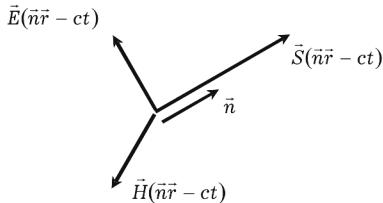


Рис. 8.3

Перечислим основные свойства плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении \vec{n} :

- 1) любая плоская волна является поперечной волной, т.е. $\overset{\perp}{E}(\vec{r}; t) \perp \overset{\parallel}{h}$ и $\overset{\perp}{H}(\vec{r}; t) \perp \overset{\parallel}{h}$;
- 2) в плоской волне величины напряженности полей равны, т.е. $|\overset{\perp}{E}(\vec{r}; t)| = |\overset{\perp}{H}(\vec{r}; t)|$;
- 3) векторы \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны друг другу, т.е. $\overset{\perp}{E}(\vec{r}; t) \perp \overset{\perp}{H}(\vec{r}; t)$;
- 4) векторы $\overset{\perp}{E}(\vec{r}; t)$, $\overset{\perp}{H}(\vec{r}; t)$ и \vec{n} образуют правую тройку векторов;
- 5) плотность энергии поля в плоской волне равна $W = \vec{H}^2 / 4\pi = \vec{E}^2 / 4\pi$;
- 6) плотность потока энергии в плоской волне равна $\vec{S} = c\vec{n}W$.

**Плоские монохроматические волны.
Поляризация волн****Плоские монохроматические волны**

Исключительную важность для различных задач электродинамики представляют *плоские монохроматические* волны. Плоские монохроматические волны являются частным случаем рассмотренных ранее плоских волн.

Плоской монохроматической волной называется такая *плоская* волна, в которой напряженности полей (и потенциалы) зависят от времени по гармоническому закону, т.е. по закону косинуса или синуса, т.е. изменяются со временем $\sim \cos \omega t$, $\sin \omega t$. Здесь ω – угловая частота колебаний; $\omega = 2\pi\nu$, где $\nu = 1/T$ – частота колебаний, а T – период колебаний. Поэтому

$$\omega = 2\pi / T. \quad (9.1)$$

Для упрощения промежуточных вычислений часто используется комплексная форма записи потенциала \vec{A} (или полей \vec{E} и \vec{H}). Например, векторный потенциал $A(\vec{r}; t)$ пишут в виде:

$$\vec{A}(\vec{r}; t) = \vec{A}_0 \exp \{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\}. \quad (9.2)$$

Здесь \vec{A}_0 – постоянный комплексный вектор:

$$\vec{A}_0 = \vec{A}_1 + i\vec{A}_2, \quad (9.3)$$

где \vec{A}_1 и \vec{A}_2 – действительная и мнимая части комплексного вектора \vec{A} .

Вектор \vec{k} в формуле для $\vec{A}(\vec{r}; t)$ называется *волновым вектором*. Как будет показано, направление волнового вектора указывает направление распространения волны, а величина k пропорциональна частоте ω .

Конечно, ни потенциал поля, ни напряженности не могут быть комплексными величинами. Поэтому подразумевается, что от величины (9.2) берется реальная часть:

$$\vec{A}(\vec{r}; t) = \operatorname{Re} \left\{ \vec{A}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \vec{A}_1 + i\vec{A}_2 \right\} e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)}. \quad (9.4)$$

Поскольку $\exp \{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\} = \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) + i \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)$, то из формулы (9.4) получаем:

$$\vec{A}(\vec{r}; t) = \vec{A}_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) - \vec{A}_2 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t). \quad (9.5)$$

Аналогично записывают и выражения для напряженностей полей. В краткой комплексной форме:

$$\vec{E}(\vec{r}; t) = \vec{E}_0 \exp \{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\}, \quad \vec{H}(\vec{r}; t) = \vec{H}_0 \exp \{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\} \quad (9.6)$$

$$(\vec{E}_0 = \vec{E}_1 + i\vec{E}_2; \quad \vec{H}_0 = \vec{H}_1 + i\vec{H}_2).$$

В развернутой действительной форме:

$$\vec{E}(\vec{r}; t) = \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\} = \vec{E}_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) - \vec{E}_2 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t); \quad (9.7)$$

$$\vec{H}(\vec{r}; t) = \operatorname{Re} \left\{ \vec{H}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\} = \vec{H}_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) - \vec{H}_2 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t). \quad (9.8)$$

Таким образом, в общем случае векторный потенциал и напряженности полей в плоской монохроматической волне *содержат одновременно как косинусоидальную, так и синусоидальную составляющие*.

Все свойства плоских монохроматических волн могут быть, конечно, получены непосредственно из общих формул для плоских (не монохроматических) волн. Напомним, что выражение для векторного потенциала поля плоской волны было получено из решения волнового уравнения (8.7):

$$\begin{cases} \nabla^2 \vec{A}(\vec{r}; t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}; t)}{\partial t^2} = 0; \\ \operatorname{div} \vec{A}(\vec{r}; t) = 0. \end{cases} \quad (9.9)$$

Решение этого уравнения, описывающее волну, распространяющуюся в направлении \vec{n} , имеет вид: $\vec{A} = \vec{A}(\vec{n}\vec{r} - ct)$, где \vec{A} – произвольная векторная функция, для которой в каждой точке пространства $(\vec{n}\vec{A}) = 0$, т.е. $\vec{A} \perp \vec{n}$. Таким образом, в плоской волне

векторный потенциал зависит от \vec{r} и t только в виде комбинации $\vec{n}\vec{r} - ct$.

Напряженности полей можно рассчитать по формулам:

$$\vec{H}(\vec{r}; t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}; t); \quad \vec{E}(\vec{r}; t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}; t). \quad (9.10)$$

Напряженности поля плоской монохроматической волны \vec{E} и \vec{H} можно найти несколько иначе, не вводя потенциалов поля \vec{A} , а непосредственно из уравнений Максвелла (8.1) – (8.4).

$$\begin{cases} 1. \text{rot } \vec{E}(\vec{r}; t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{H}(\vec{r}; t)}{\partial t}, \\ 2. \text{div } \vec{H}(\vec{r}; t) = 0. \end{cases} \quad \begin{cases} 3. \text{div } \vec{E}(\vec{r}; t) = 0, \\ 4. \text{rot } \vec{H}(\vec{r}; t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}(\vec{r}; t)}{\partial t}. \end{cases} \quad (9.11)$$

Учитывая, что в некоторых группах раздел “Плоские волны” выходит за рамки курса, а также учитывая особо важное значение той роли, которую играют плоские монохроматические волны в теории электромагнитного поля, дадим вывод их основных свойств обоими способами.

1-й способ: использование уравнений Максвелла для *потенциала поля*. Будем искать векторный потенциал поля плоской монохроматической волны в виде

$$\overset{\text{I}}{\vec{A}}(\vec{r}; t) = \overset{\text{I}}{A}_1 \cos(k\vec{r} - \omega t), \quad (9.12)$$

где $\overset{\text{I}}{A}_1$ – некоторый вещественный вектор (для синусоидальной составляющей векторного потенциала (9.5) вычисления полностью аналогичны). Подставим это выражение в уравнения (9.9) для векторного потенциала \vec{A} . Учитывая, что $\partial^2 \overset{\text{I}}{A}(\vec{r}; t)/\partial t^2 = -\omega^2 \overset{\text{I}}{A}_1 \cos(k\vec{r} - \omega t)$, $\Delta \overset{\text{I}}{A} = -k^2 \overset{\text{I}}{A}_1 \cos(k\vec{r} - \omega t)$ и $\text{div } \overset{\text{I}}{A} = -(\overset{\text{I}}{k}, \overset{\text{I}}{A}_1) \sin(k\vec{r} - \omega t)$, после сокращения на общие множители получим:

$$\begin{cases} -k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0; \\ (\overset{\text{I}}{k}, \overset{\text{I}}{A}_1) = 0. \end{cases} \quad (9.13)$$

Из первого уравнения (9.13) находим связь между величиной волнового вектора и частотой колебаний поля:

$$k = \frac{\omega}{c} \quad \text{или} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (9.14)$$

Здесь учтено, что $\omega = 2\pi/T$ и $cT = \lambda$ – длина волны. Таким образом, уравнение для потенциала поля устанавливает *однозначную связь* между частотой и величиной волнового вектора (размерность которого равна обратной длине: $[k] = 1/\text{м}$). Что касается направления волнового вектора, то оно может быть *произвольным*. Поэтому можно записать, что

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}_k. \quad (9.15)$$

Здесь $\vec{n}_k = \vec{k}/k$ – единичный вектор, указывающий направление волнового вектора \vec{k} . Подставляя (9.15) в выражение (9.12) для величины \vec{A} , получим:

$$\vec{A}(\vec{r}; t) = \vec{A}_1 \cos \left\{ \frac{\omega}{c} (\vec{n}_k \vec{r} - ct) \right\}. \quad (9.16)$$

Из формулы (9.16) видно, что $\vec{A}(\vec{r}; t)$ зависит от \vec{r} и t в виде комбинации $\vec{n}_k \vec{r} - ct$. Но это означает, что выражение (9.16) представляет собой плоскую волну, распространяющуюся в направлении \vec{n}_k , т.е. в направлении волнового вектора \vec{k} . Фронт волны, т.е. геометрическое место точек равного потенциала, определяется уравнением: $\vec{n}_k \vec{r} - ct = \text{const}$, т.е. представляет собой плоскость, перпендикулярную волновому вектору \vec{k} . За время Δt фронт смещается на вектор $\Delta \vec{r}$, такой, что

$$\vec{n}_k (\vec{r} + \Delta \vec{r}) - c(t + \Delta t) = \text{const}, \quad \text{т.е. } (\vec{n}_k \Delta \vec{r}) - c \Delta t = 0.$$

Отсюда получаем, что $(\vec{n}_k \vec{v}) = c$. Поскольку вектор \vec{n}_k совпадает по направлению с вектором скорости $\vec{v} = \Delta \vec{r} / \Delta t$, то $(\vec{n}_k \vec{v}) = v$. Поэтому волна распространяется со скоростью света: $v = c$.

Теперь, определив потенциал поля, по формулам (9.10) можно найти *напряженности* поля в волне:

$$\vec{E}(\vec{r}; t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}; t) = -\frac{\omega}{c} \vec{A}_1 \sin \left\{ \frac{\omega}{c} (\vec{h}_k \cdot \vec{r} - ct) \right\}; \quad (9.17a)$$

$$\vec{H} = \text{rot} \vec{A} = \left[\nabla, \vec{A}_1 \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right] = - \left[\vec{A}_1, \nabla \cos \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right] = \\ = \left[\vec{A}_1, \vec{k} \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right) \right] = - \left[\vec{k}, \vec{A}_1 \right] \sin \left(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t \right). \quad (9.17b)$$

Таким образом, косинусоидальная составляющая векторного потенциала (9.5) определяет синусоидальные составляющие напряженностей полей (9.7) и (9.8). Сравнивая выражения (9.17a) и (9.17b) и учитывая соотношение (9.15), находим связь между напряженностями полей в плоской монохроматической волне:

$$\vec{H} = [\vec{n}_k \vec{E}]. \quad (9.18)$$

Из формулы (9.18) следует, что напряженности полей в волне взаимно перпендикулярны:

$$\vec{E} \perp \vec{H}. \quad (9.19)$$

Соотношение (9.17a) и условие калибровки $(\vec{k}, \vec{A}_1) = 0$ показывают, что вектор \vec{E} , так же как и \vec{H} , перпендикулярен вектору \vec{k} . Поэтому напряженности поля волны \vec{E} и \vec{H} лежат в плоскости, перпендикулярной волновому вектору \vec{k} . Это означает, что плоская монохроматическая волна (как и любая плоская волна) является напечерной волной.

Теперь рассмотрим вопрос о величинах векторов \vec{E} и \vec{H} . Из формулы (9.18) следует, что $|\vec{H}| = |\vec{n}_k| |\vec{E}| \sin \left(\vec{n}_k \cdot \vec{r} \right)$. Поэтому в

плоской монохроматической волне величины напряженностей полей равны:

$$|\vec{E}| = |\vec{H}|. \quad (9.20)$$

Из всего сказанного следует, что

$$\vec{H} = [\vec{n}_k \vec{E}] \quad \text{или} \quad \vec{E} = [\vec{H} \vec{n}_k]. \quad (9.21)$$

Вычислим плотность энергии и вектор Пойтинга в плоской монохроматической волне:

$$w = \frac{1}{8\pi} (E^2 + H^2) = \frac{E^2}{4\pi} = \frac{H^2}{4\pi}; \quad (9.22)$$

$$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, \vec{H}] = \frac{c}{4\pi} [\vec{E}, [\vec{n}_k \vec{E}]] = \frac{c}{4\pi} \left\{ \vec{n}_k (\vec{E}, \vec{E}) - \underbrace{\vec{E}(\vec{E}, \vec{n}_k)}_0 \right\},$$

$$\text{т.е. } \vec{S} = \frac{c}{4\pi} E^2 \vec{n}_k = cw \vec{n}_k. \quad (9.23)$$

Как и следовало ожидать, поток энергии волны направлен вдоль волнового вектора \vec{k} .

Подстановка в уравнения (9.9) векторного потенциала $\vec{A}(\vec{r}; t) = A_2 \sin(k\vec{r} - \omega t)$ приводит к тем же соотношениям (9.18) – (9.23) для косинусоидальных составляющих напряженности полей (9.7) и (9.8).

Перечислим еще раз основные свойства плоских монохроматических волн:

1) любая плоская монохроматическая волна является поперечной волной, т.е. $\vec{E} \perp \vec{n}_k$ и $\vec{H} \perp \vec{n}_k$;

2) в плоской монохроматической волне величины напряженности полей равны, т.е. $|\vec{E}| = |\vec{H}|$;

3) векторы \vec{E} и \vec{H} перпендикулярны друг другу, т.е. $\vec{E} \perp \vec{H}$;

4) векторы \vec{n}_k , \vec{E} и \vec{H} образуют правую тройку векторов;

5) плотность энергии поля в плоской волне равна $w = H^2/4\pi = E^2/4\pi$;

6) плотность потока энергии в плоской волне равна $\vec{S} = cw \vec{n}_k$.

В заключении этого раздела выпишем общие формулы для напряженностей полей (9.7) и (9.8) в плоской монохроматической волне с учетом всех ее особенностей. Поскольку $\vec{E} \perp \vec{k}$, то $\vec{E}_1 \perp \vec{k}$ и $\vec{E}_2 \perp \vec{k}$. Поэтому векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 можно представить, как $\vec{E}_1 = [\vec{n}_k \vec{B}_1]$ и $\vec{E}_2 = [\vec{n}_k \vec{B}_2]$, где \vec{B}_1 и \vec{B}_2 – произвольные векторы. Тогда формула (9.7) записывается так:

$$\vec{E}(\vec{r}; t) = [\vec{n}_k \vec{B}_1] \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) - [\vec{n}_k \vec{B}_2] \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t). \quad (9.24)$$

Напряженность магнитного поля волны связана с напряженностью электрического поля соотношением: $\vec{H} = [\bar{n}_k \vec{E}]$. Поэтому

$$\vec{H}(\vec{r}; t) = [\bar{n}_k [\bar{n}_k \vec{B}_1] \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) - [\bar{n}_k [\bar{n}_k \vec{B}_2] \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t)]. \quad (9.25)$$

2-й способ: использование уравнений Максвелла для напряженности полей. Будем искать напряженности поля плоской монохроматической волны в виде

$$\overset{\text{r}}{E}(r; t) = E_1 \cos(kr - \omega t); \quad \overset{\text{r}}{H}(r; t) = H_1 \cos(kr - \omega t),$$

где $\overset{\text{r}}{E}_1$ и $\overset{\text{r}}{H}_1$ – некоторые вещественные векторы (для синусоидальных составляющих напряженностей полей вычисления аналогичны). Подставим эти выражения в уравнения Максвелла (9.11).

Учитывая, что

$$\partial \overset{\text{r}}{E} / \partial t = \omega \overset{\text{r}}{E}_1 \sin(kr - \omega t), \quad \text{rot } \overset{\text{r}}{E} = -[\overset{\text{r}}{k} \overset{\text{r}}{E}_1] \sin(kr - \omega t),$$

$$\text{div } \overset{\text{r}}{E} = -(\overset{\text{r}}{k} \overset{\text{r}}{E}_1) \sin(kr - \omega t)$$

(аналогичные формулы имеют место и для напряженности магнитного поля $\overset{\text{r}}{H}$), после сокращения на общий множитель $\sin(kr - \omega t)$ получим:

$$\begin{cases} 1) [\overset{\text{r}}{k} \overset{\text{r}}{E}_1] = \frac{\omega}{c} \overset{\text{r}}{H}_1; \\ 2) (\overset{\text{r}}{k} \overset{\text{r}}{H}_1) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 3) (\overset{\text{r}}{k} \overset{\text{r}}{E}_1) = 0; \\ 4) [\overset{\text{r}}{k} \overset{\text{r}}{H}_1] = -\frac{\omega}{c} \overset{\text{r}}{E}_1. \end{cases} \quad (9.26)$$

Из первого уравнения следует, что $\overset{\text{r}}{H}_1 \perp \overset{\text{r}}{k}$, а из четвертого – $\overset{\text{r}}{E}_1 \perp \overset{\text{r}}{k}$. Поэтому второе и третье уравнения выполняются автоматически. В результате остается два векторных уравнения – первое и четвертое:

$$\begin{cases} 1) [\overset{\text{r}}{k} \overset{\text{r}}{E}_1] = \frac{\omega}{c} \overset{\text{r}}{H}_1; \\ 4) [\overset{\text{r}}{k} \overset{\text{r}}{H}_1] = -\frac{\omega}{c} \overset{\text{r}}{E}_1. \end{cases} \quad (9.27)$$

Из этих уравнений сразу следует, что $\vec{E}_1 \perp \vec{H}_1$, т.е. векторы \vec{E} и \vec{H} взаимно перпендикулярны. Кроме того, $\vec{E}_1 \perp \vec{k}$ и $\vec{H}_1 \perp \vec{k}$. Следовательно, векторы \vec{E} и \vec{H} лежат в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{k} . При этом векторы \vec{k} , \vec{E} и \vec{H} образуют правую тройку векторов. Остается определить величину волнового вектора \vec{k} и соотношение между модулями векторов \vec{E}_1 и \vec{H}_1 . Из первого уравнения находим, что $\vec{H}_1 = c[\vec{k}\vec{E}_1]/\omega$. Подставляя это во второе уравнение, получим:

$$[\vec{k}[\vec{k}\vec{E}_1]] = -\omega^2 \vec{E}_1 / c^2, \text{ т.е. } \vec{k}(\vec{k}, \vec{E}_1) - \vec{E}_1 \vec{k}^2 = -\omega^2 \vec{E}_1 / c^2.$$

Поскольку $(\vec{k}, \vec{E}_1) = 0$, находим, что

$$\vec{k} = \omega/c \quad \text{или} \quad k = 2\pi/\lambda. \quad (9.28)$$

Здесь учтено, что $\omega = 2\pi/T$ и $cT = \lambda$ – длина волны. Таким образом, уравнения Максвелла устанавливают однозначную связь между частотой и величиной волнового вектора. Что касается направления волнового вектора, то оно может быть любым. Поэтому можно записать, что

$$\vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n}_k. \quad (9.29)$$

Здесь $\vec{n}_k = \vec{k}/k$ – единичный вектор, указывающий направление волнового вектора \vec{k} . Векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} образуют правую тройку векторов (рис. 9.1).

Теперь уравнения (9.27) можно записать так:

$$\vec{H} = [\vec{n}_k, \vec{E}], \quad \vec{E} = [\vec{H}, \vec{n}_k]. \quad (9.30)$$

Формулы (9.30) полностью совпадают с формулами (9.21). Взяв модуль от обеих частей любого из уравнений (9.30), например первого, получим: $|\vec{H}| = |\vec{n}_k| |\vec{E}| \sin(\vec{n}_k, \vec{E})$. Поскольку $\sin(\vec{n}_k, \vec{E}) = 1$, то

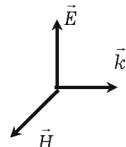


Рис. 9.1

$$|\vec{E}| = |\vec{H}|. \quad (9.31)$$

Векторы \vec{E} , \vec{H} и \vec{k} образуют правую тройку векторов (см. рис. 9.1).

Поляризация плоской монохроматической волны

Рассмотрим более подробно вопрос о направлении поля монохроматической волны. Будем для определенности говорить об электрическом поле (9.7):

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}_0 e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} \right\} = \vec{E}_1 \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t) - \vec{E}_2 \sin(\vec{k}\vec{r} - \omega t).$$

(Все сказанное ниже в полной мере относится и к магнитному полю волны.) Выберем ось Oz вдоль волнового вектора \vec{k} . Тогда

$$\vec{E}(z, t) = \vec{E}_1 \cos(kz - \omega t) - \vec{E}_2 \sin(kz - \omega t). \quad (9.32)$$

Поскольку $k = 2\pi/\lambda$, то поле периодично по оси Z с периодом λ : $\vec{E}(z + \lambda, t) = \vec{E}(z, t)$. Поэтому для определения зависимости поля от времени достаточно исследовать его напряженность в какой-нибудь одной точке, например в начале координат. Полагая в (9.32) $z = 0$, получим:

$$\begin{aligned} \vec{E}(z = 0, t) &= \vec{E}_1 \cos \omega t + \vec{E}_2 \sin \omega t = \\ &= \vec{E}_1 \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right) + \vec{E}_2 \sin\left(2\pi \frac{t}{T}\right). \end{aligned} \quad (9.33)$$

Так как плоская волна поперечна, то постоянные векторы \vec{E}_1 и \vec{E}_2 будут лежать в плоскости xOy , при этом они произвольно ориентированы друг относительно друга, т.е. угол между ними может быть любым. Выберем ось Ox в направлении вектора \vec{E}_1 . Для упрощения выкладок предположим, что вектор \vec{E}_2 перпендикулярен вектору \vec{E}_1 , т.е. направлен вдоль оси Oy . При этом его проекция на ось Oy может быть произвольной (положительной или отрицательной). При выбранных нами направлениях осей и сделанного допущения о том, что $\vec{E}_2 \perp \vec{E}_1$, имеем:

$$\vec{k} = (0, 0, k); \quad \vec{E}_1 = (E_1, 0, 0); \quad \vec{E}_2 = (0, \pm E_2, 0). \quad (9.34)$$

Для наглядности в таблице представлены значения напряженности поля $\vec{E}(t)$ в моменты времени $t = 0$, $t = T/4$, $t = T/2$, $t = 3T/4$ и $t = T$. Для определенности направление вектора \vec{E}_2 выбрано по оси Oy , т.е. $\vec{E}_2 = (0, E_2, 0)$.

Таблица

t	$t = 0$	$t = T/4$	$t = T/2$	$t = 3T/4$	$t = T$
$\vec{E}(t)$	\vec{E}_1	\vec{E}_2	$-\vec{E}_1$	$-\vec{E}_2$	\vec{E}_1

Данные таблицы изображены на рис. 9.2. Жирным показан вектор напряженности (9.33) в некоторый промежуточный момент времени $0 < t < T/4$, т.е. $0 < \omega t < \pi/2$. Видно, что вектор \vec{E} вращается в плоскости xOy по часовой стрелке, если смотреть вдоль направления распространения волны \vec{n}_k (т.е. вдоль оси Oz).

Понятно, что если бы вектор \vec{E}_2 имел противоположное направление, т.е. $\dot{\vec{E}}_2 = (0, -E_2, 0)$, то направление вращения изменилось бы на обратное.

Теперь получим уравнение кривой, которую описывает конец вектора $\vec{E}(t)$.

Для этого спроектируем векторное равенство (9.33) на оси Ox и Oy . С учетом формул (9.34) находим:

$$\begin{cases} E_x(z=0, t) = E_1 \cos \omega t; \\ E_y(z=0, t) = \pm E_2 \sin \omega t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_x / E_1 = \cos \omega t; \\ E_y / E_2 = \pm \sin \omega t. \end{cases} \quad (9.35)$$

Возводя каждое из уравнений в квадрат, и складывая их, получим:

$$\frac{E_x^2}{E_1^2} + \frac{E_y^2}{E_2^2} = 1. \quad (9.36)$$

Видим, что в каждой точке пространства вектор \vec{E} вращается в плоскости, перпендикулярной направлению распространения

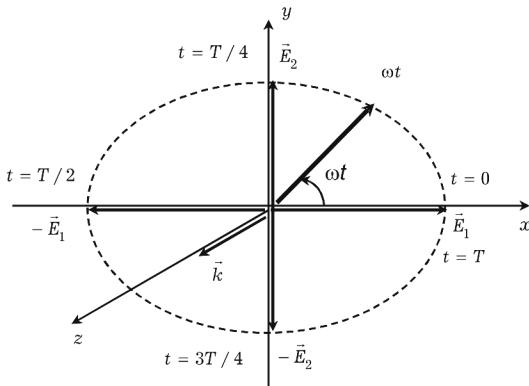


Рис. 9.2

волны, причем конец вектора \vec{E} описывает *эллипс*. Такая волна называется *эллиптически поляризованной*. Вращение может происходить по часовой стрелке или против часовой стрелки (правая и левая поляризация). В рассматриваемом нами случае полуоси эллипса поляризации равны E_1 и E_2 .

Если $E_1 = E_2 = E_0$, то эллипс превращается в круг: вектор \vec{E} вращается, оставаясь постоянным по величине: $|\vec{E}(t)|^2 = E_0^2 = \text{const}$. Такая поляризация называется *круговой*. Если один из векторов \vec{E}_1 или \vec{E}_2 равен нулю, то в формуле (9.33) остается только одно слагаемое. В этом случае поле волны в каждой точке пространства в любой момент времени направлено параллельно одному и тому же направлению \vec{E}_1 или \vec{E}_2 . Такую волну называют *линейно поляризованной*.

Таким образом, из формулы (9.33) видно, что эллиптически поляризованную волну можно всегда рассматривать как суперпозицию двух линейно поляризованных волн.

Запаздывающие потенциалы

В электростатике и магнитостатике изучались поля $\vec{E}(\vec{r})$ и $H(\vec{r})$, создаваемые покоящимися зарядами ($\rho = \rho(\vec{r})$) и постоянными токами ($\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$). В разделе “Электромагнитные волны” рассматривались зависящие от времени поля $\vec{E}(\vec{r}; t)$ и $\vec{H}(\vec{r}; t)$ в пространстве, *свободном от зарядов и токов* (когда $\rho = 0$ и $\vec{j} = 0$). В этом разделе рассмотрим *общую задачу* теории электромагнитного поля в вакууме – вычисление потенциалов и напряженностей полей произвольно движущихся зарядов, когда плотность зарядов и токов *зависит от времени*.

Дано: $\rho(\vec{r}; t)$, $\vec{j}(\vec{r}; t)$; $\partial\rho / \partial t + \operatorname{div} \vec{j} = 0$.

Найти: $\varphi(\vec{r}; t)$, $\vec{A}(\vec{r}; t)$, $\vec{E}(\vec{r}; t)$ и $\vec{H}(\vec{r}; t)$.

Для решения этой задачи проще всего использовать уравнения Максвелла (3.12) для скалярного и векторного потенциалов поля в лоренцевой калибровке:

$$\begin{cases} \Delta\varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho; \\ \Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}; \\ \operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \end{cases} \quad (10.1)$$

Определив потенциалы поля, напряженности поля можно вычислить по обычным формулам (3.2), (3.4):

$$\vec{H}(\vec{r}; t) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}; t); \quad (10.2)$$

$$\vec{E}(\vec{r}; t) = -\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}; t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}; t). \quad (10.3)$$

Поскольку уравнения для векторного и скалярного потенциалов однотипны, то достаточно определить, например, скалярный потенциал поля $\phi(\vec{r}; t)$ из первого уравнения системы (10.1):

$$\Delta\phi(\vec{r}; t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi(\vec{r}; t)}{\partial t^2} = -4\pi\rho(\vec{r}; t). \quad (10.4)$$

Формула (10.4) является неоднородным волновым уравнением и, как увидим далее, описывает распространение электромагнитных волн. Уравнение (10.4) называют также уравнением Даламбера.

Получить решение неоднородного волнового уравнения (10.4) можно строгими математическими методами, которые описаны в многочисленной литературе (см., например, Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. – М.: Гостехиздат, 1951. Гл. II). Здесь же попытаемся *сконструировать* решение уравнения (10.4), исходя исключительно из наглядных, интуитивных физических соображений. Такой подход к решению уравнения (10.4) на “физическом уровне строгости”, с одной стороны, способствует развитию физического мышления, а с другой – позволяет получить требуемый результат с минимальной затратой сил и времени, не используя громоздких математических выкладок. (Более последовательный метод решения уравнения (10.4) приведен в прил. II.)

Будем рассуждать так. Пусть скорость распространения взаимодействия c является бесконечно большой, т.е. $c \rightarrow \infty$. Тогда второе слагаемое в левой части уравнения Даламбера (10.4) будет отсутствовать:

$$\Delta\phi(\vec{r}; t) = -4\pi\rho(\vec{r}; t). \quad (10.5)$$

Уравнение (10.5) есть обычное уравнение Пуассона, в котором время t играет роль *параметра*, а не переменной, так как в уравнении (10.5) отсутствует производная по времени. Поэтому можно сразу записать решение уравнения (10.5), используя общую формулу электростатики (4.12):

$$\phi(\vec{r}; t) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}'; t) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (10.6)$$

Выражение (10.6) есть решение некоторой реально не существующей (модельной) задачи о вычислении поля для заряда, произвольно распределенного в пространстве при бесконечной скорости распространения взаимодействия. Но именно *конечность* скорости распространения взаимодействия является *ключевым моментом*, который отличает гипотетическое уравнение (10.5) от реального уравнения (10.4), где время t есть независимая переменная и не является параметром. Нам предстоит сообразить, как, без каких-либо строгих математических выкладок, преобразовать выражение (10.6) таким образом, чтобы *учесть* конечность скорости распространения света, после чего модернизированная формула (10.6) должна стать *точным решением* уравнения (10.4).

Для этого будем рассуждать следующим образом. Ввиду малости объема dV' заряд $dQ' = \rho(\vec{r}', t)dV'$ можно считать точечным.

Поэтому, согласно закону Кулона, величина $\frac{\rho(\vec{r}', t)dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$ есть эле-

мент потенциала поля $d\phi'$, создаваемого в точке наблюдения \vec{r} в момент времени t точечным зарядом dQ' , находящимся в точке \vec{r}' . В предположении $C \rightarrow \infty$ всякое изменение заряда dQ' мгновенно отражается на величине $d\phi'$ независимо от расстояния $|\vec{r} - \vec{r}'|$ между точкой наблюдения \vec{r} и местом расположения \vec{r}' заряда dQ' . Поэтому элемент потенциала $d\phi'$ в момент времени наблюдения t определяется зарядом dQ' в *тот же* момент времени $t' = t$, так как электромагнитное возмущение проходит расстояние $|\vec{r} - \vec{r}'|$ за время $\Delta t = 0$. В действительности, распространяясь с *конечной скоростью* C , электромагнитному сигналу понадобится конечное время, чтобы пройти расстояние от заряда dQ' до точки наблюдения \vec{r} :

$$\Delta t_{\text{зап}} = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{C}. \quad (10.7)$$

Величина $\Delta t_{\text{зап}}$ называется *временем запаздывания*. Поэтому логично предположить, что при *конечной* скорости распространения сигнала потенциал $d\phi'$ в момент времени t будет пропорцио-

нален величине заряда $dQ' = \rho(\vec{r}', \tau) dV'$ в более ранний момент времени $\tau = t - \Delta t_{\text{зап}}$.

С учетом такого рода соображений формула (10.6) записывается так:

$$\phi(\vec{r}; t) = \iiint_V \rho \left(\vec{r}'; t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (10.8)$$

или $\phi(\vec{r}; t) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}', \tau) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$.

Согласно формуле (10.8), для нахождения потенциала поля в точке наблюдения \vec{r} , как и в электростатике, нужно взять интеграл от величины $\rho / |\vec{r} - \vec{r}'|$ по всему объему системы V . При этом, однако, значение плотности заряда берется в более ранний момент времени

$$\tau = t - \Delta t_{\text{зап}} = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} < t. \quad (10.9)$$

Для каждой точки системы \vec{r}' время запаздывания оказывается *различным* и зависит от расстояния до точки наблюдения: $\tau = \tau(|\vec{r} - \vec{r}'|)$. Все сказанное выше схематично представлено на рис. 10.1.

Выражение для векторного потенциала получается из формулы (10.8) для скалярного потенциала заменой $\rho \rightarrow \vec{j} / c$ и имеет вид

$$\vec{A}(\vec{r}; t) = \frac{1}{c} \iiint_V \vec{j} \left(\vec{r}'; t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (10.10)$$

Выражения для потенциалов (10.8) и (10.10) называются *запаздывающими потенциалами*. На больших расстояниях от системы зарядов они описывают *расходящуюся от системы* электромагнитную волну. Непосредственной подстановкой выражений (10.8) и (10.10) в уравнения (10.1) можно убедиться, что они удовлетворяют не только первым двум волновым уравнениям, но и третьему

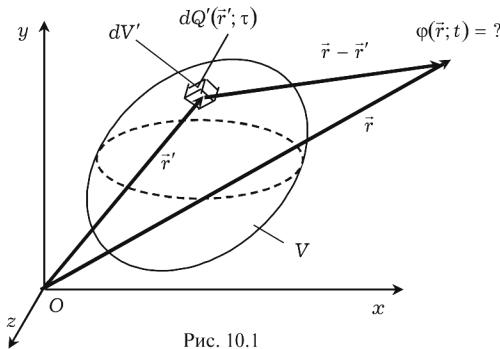


Рис. 10.1

уравнению системы (10.1) – условию калибровки Лоренца. Таким образом, нашли решения уравнений Даламбера в виде запаздывающих потенциалов (10.8) и (10.10).

Для независящих от времени распределений зарядов $\rho = \rho(\vec{r})$ и токов $\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})$ запаздывающие потенциалы принимают вид

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}) &= \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\rho = \rho(\vec{r})); \\ \vec{A}(\vec{r}) &= \frac{1}{c} \iiint_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad (\vec{j} = \vec{j}(\vec{r})).\end{aligned}\quad (10.11)$$

Первая из формул (10.11) совпадает с выражением (4.12) для скалярного потенциала поля неподвижных зарядов, а вторая формула – с формулой (6.16) для векторного потенциала поля стационарных токов. Таким образом, полученные ранее выражения для потенциалов поля в электростатике и магнитостатике являются частными случаями запаздывающих потенциалов.

Выражения (10.8) и (10.10) – частные решения неоднородных волновых уравнений. Как известно, общее решение неоднородного

дифференциального уравнения складывается из частного решения неоднородного и общего решения однородного уравнений. Обозначим общие решения однородных волновых уравнений $\varphi_0(\vec{r}; t)$ и $A_0(\vec{r}; t)$. Тогда *общее решение* уравнений Даламбера для потенциалов поля можно записать в виде

$$\varphi_{\text{общ}}(\vec{r}; t) = \iiint_V \rho \left(\vec{r}'; t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + \varphi_0(\vec{r}; t); \quad (10.12)$$

$$A_{\text{общ}}(\vec{r}; t) = \frac{1}{c} \iiint_V j \left(\vec{r}'; t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \right) \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} + A_0(\vec{r}; t). \quad (10.13)$$

Величины $\varphi_0(\vec{r}; t)$ и $A_0(\vec{r}; t)$ определяются заданием дополнительных условий. Во многих случаях задается падающее на систему зарядов внешнее излучение и условия на потенциалы на больших расстояниях от системы зарядов. При такой постановке *дополнительное поле*, возникающее в результате взаимодействия падающего излучения с системой, отличается от внешнего поля только излучением, *исходящим от системы*. Но этому условию удовлетворяют именно запаздывающие потенциалы. Поэтому величины $\varphi_0(\vec{r}; t)$ и $A_0(\vec{r}; t)$ нужно отождествить с *внешним заданным полем*, действующим на систему. Таким образом, главная задача состоит в вычислении запаздывающих потенциалов (10.8) и (10.10). Именно это обстоятельство будет наглядно продемонстрировано в следующих разделах, где будет изложена важнейшая часть электродинамики в вакууме – *теория излучения электромагнитных волн*.

Решение уравнений электромагнитного поля в виде запаздывающих потенциалов имеет *принципиальное значение*, так как радикальным образом изменяет наши классические представления о характере *причинной связи*. В классической, ньютоновской механике предполагается, что сила, действующая на тело в момент времени t со стороны других тел, определяется их положением *в тот же момент времени t* , вне зависимости от расстояния между телами. Если положение какого-либо тела изменяется, то *мгновенно* изменяется и сила взаимодействия его с другими телами, т.е. ско-

рость распространения взаимодействия считается бесконечно большой – *принцип дальности*. В теории электромагнитного поля это положение не имеет места. Заряженные тела взаимодействуют друг с другом *посредством поля*, которое распространяется от точки к точке с конечной скоростью. Поэтому изменение положения одного заряда приводит к изменению силы воздействия на другие заряды не мгновенно, а спустя некоторое время, которое зависит от расстояния между ними. Чем дальше друг от друга находятся заряды, тем это время больше и наоборот – *принцип близкодействия*. Пространство, в котором происходит распространение электромагнитного взаимодействия, теперь не является некоторым “пустым пространством”, как пустое “ничто” в классической механике. Все пространство заполнено реальным электромагнитным полем, наделенным определенными физическими свойствами.

Следует иметь в виду, что поскольку скорость с очень велика, то часто ее можно считать бесконечно большой. Все зависит от конкретной задачи. Поэтому представления классической механики не отвергаются как совершенно неверные. В отдельных случаях они сохраняются с очень высокой степенью точности. Другими словами, принцип дальности не отвергается как абсолютно неприемлемый, просто он имеет *определенную область применимости*¹.

Общие формулы (10.8) и (10.10) для запаздывающих потенциалов весьма сложны, поскольку входящие в них выражения для плотности зарядов и плотности токов зависят от времени запаздывания. Теперь при вычислении потенциалов поля в момент времени t значения величин ρ и \vec{j} в интегралах (10.8) и (10.10) необходимо брать не в фиксированный момент времени t , а в разные (для каждой точки системы \vec{r}') моменты времени. Это делает беззаданным аналитическое вычисление величин $\phi(\vec{r}; t)$ и $\mathcal{A}(\vec{r}; t)$ даже для простых распределений зарядов и токов.

Важное исключение составляет случай одного произвольно движущегося точечного заряда e , когда $\rho(\vec{r}, t) = e\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$, $\vec{j}(\vec{r}, t) = e\vec{v}_0(t)\delta(\vec{r} - \vec{r}_0(t))$. Потенциалы поля такого заряда назы-

¹ Левич В.Г. Курс теоретической физики. – Т.1. – М.: Физматгиз, 1962.

ваются потенциалами Лисенара – Вихерта. Приведем здесь без вывода выражения для потенциалов Лисенара – Вихерта:

$$\phi(\vec{r}; t) = \frac{e}{\left\{ R(t') - \frac{\vec{v}_0(t') \cdot \vec{R}(t')}{c} \right\}} ; \quad \vec{A}(\vec{r}; t) = \frac{\vec{v}_0(t')}{c} \phi(\vec{r}; t). \quad (10.14)$$

Векторный потенциал поля отличается от скалярного потенциала только множителем $\vec{v}_0(t')/c$, и направлен вдоль вектора скорости заряда $\vec{v}_0(t')$ в момент времени t' . В формулах (10.14) $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}_0$ – радиус-вектор, проведенный из точки нахождения заряда \vec{r}_0 в точку наблюдения \vec{r} , $\vec{v}_0 = \dot{\vec{r}}_0$ – скорость движения заряда (рис. 10.2). Важно отметить, что величины \vec{R} и \vec{v}_0 в правых частях равенств (10.14) берутся не в момент времени t , а в более ранний момент времени t' , который зависит от величин t , \vec{r} и определяется из уравнения:

$$t' = t - \frac{R(t')}{c}, \quad \text{т.е.} \quad t' = t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}_0(t')|}{c}. \quad (10.15)$$

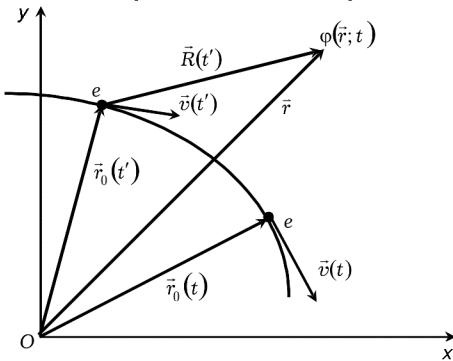


Рис. 10.2

Время t' из уравнения (10.15) определяет момент образования той части поля, которая достигнет точек наблюдения \vec{r} (равноудаленных от $\vec{r}_0(t')$) к более позднему моменту времени t . Если скорость распространения взаимодействия $C \rightarrow \infty$, то из уравнения (10.15) получаем, что $t' = t$, т.е. в этом случае исчезают все эффекты, связанные с запаздыванием электромагнитного сигнала.

Таким образом, вид потенциалов Линнера – Вихерта достаточно несложен. Вся трудность состоит теперь не в вычислении какого-либо интеграла, а в решении алгебраического уравнения (10.15), которое при произвольном законе движения заряда $\vec{r}_0(t)$ не может быть решено аналитически. Исключение составляет случай прямо-линейно и равномерно движущегося заряда, когда $\vec{r}_0(t) = \vec{V}_0 t$, где $\vec{V}_0 = \text{const}$.

Теория излучения

Процесс образования электромагнитных волн ускорению движущимися зарядами или переменными токами называют *излучением*. Термин “излучение” употребляется также для обозначения самого свободного (т.е. излученного) электромагнитного поля. Физические причины существования свободного электромагнитного поля (т.е. самоподдерживающегося независимо от возбудивших его источников) связаны с тем, что изменяющееся во времени электрическое поле \vec{E} порождает магнитное поле \vec{H} (четвертое уравнение Максвелла), а изменяющееся магнитное поле \vec{H} – вихревое электрическое поле (первое уравнение Максвелла). Обе компоненты \vec{E} и \vec{H} , непрерывно изменяясь во времени, возбуждают и взаимно поддерживают друг друга.

Благодаря конечности скорости распространения электромагнитного поля оно может существовать автономно от породившего его источника и не исчезает с устранием этого источника, продолжая свободно распространяться в пространстве со скоростью света. Например, радиоволны не исчезают и при отсутствии тока в антenne, а волны излученные ускоренно движущимися зарядом, не исчезают при его остановке.

В процессе излучения электромагнитные волны уносят от источника излучения энергию. Плотность потока энергии определяется вектором Умова – Пойнтинга $\vec{S} = (c/4\pi)[\vec{E}, \vec{H}]$. Поток энергии через элемент $d\Sigma$ равен $\vec{S}d\Sigma$ (2.17). Важнейшей особенностью поля излучения является тот факт, что количество энергии, излучаемой в элемент телесного угла $d\Omega$ (т.е. проходящей через площадку $d\Sigma = r^2 d\Omega$), не обращается в нуль, даже если площадка $d\Sigma$ находится на сколь угодно большом расстоянии r от системы. (В качестве величины $d\Sigma$ рассматривается элемент сферической поверхности радиусом r с центром в начале координат.) Поскольку $d\Sigma \sim r^2$, то для этого необходимо, чтобы величины $|\vec{E}|$ и $|\vec{H}|$

убывали с увеличением расстояния r по закону $1/r$, так как только в этом случае $|\vec{S}| \sim |\vec{E}||\vec{H}| \sim 1/r^2$. Как увидим далее, именно такая ситуация возникает при ускоренном движении зарядов. Заряды, движущиеся равномерно (без ускорения), не могут излучать электромагнитные волны.

Все сказанное означает, что в теории излучения необходимо рассмотреть переменное электромагнитное поле на *больших расстояниях* от системы движущихся зарядов. Основное внимание должно быть уделено той части поля, напряженности которого убывают с расстоянием r до точки наблюдения *обратно пропорционально расстоянию*, т.е. $E \sim 1/r$ и $H \sim 1/r$ при $r \rightarrow \infty$.

Потенциалы поля на больших расстояниях от системы зарядов

Пусть внутри некоторого объема V имеется система движущихся зарядов. Поместим начало координат O внутри объема V . Радиус-вектор элемента заряда $dQ' = \rho dV'$ есть \vec{r}' . Радиус-вектор точки наблюдения P есть \vec{r} . Характерные размеры системы $L \sim V^{1/3}$. Радиус-вектор, проведенный от элемента заряда dQ' в точку P , есть \vec{R} : $\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$. Единичный вектор в точку наблюдения есть $\hat{r} = \vec{r}/r$ (рис. 11.1).

Рассмотрим поле, создаваемое этими зарядами в точке наблюдения P , на расстоянии, большем по сравнению с размерами самой системы $|\vec{r}| \gg L$, т.е.

$$|\vec{r}| \gg |\vec{r}'|. \quad (11.1)$$

Полем излучения называется та часть переменного электромагнитного поля, которая на больших расстояниях от системы зарядов убывает обратно пропорционально расстоянию r до точки наблюдения:

$$|\vec{E}| \sim \frac{1}{r}; \quad |\vec{H}| \sim \frac{1}{r}. \quad (11.2)$$

Задача состоит в том, чтобы из точных формул (10.8), (10.10) для запаздывающих потенциалов получить формулы, удовлетворяющие требованию:

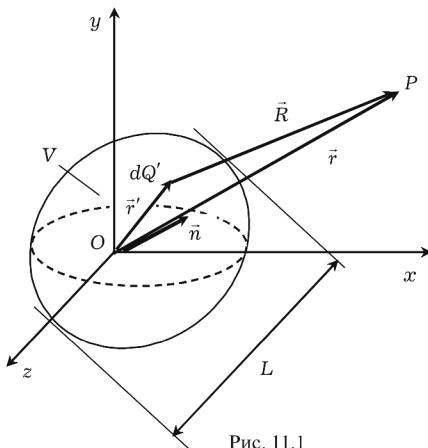


Рис. 11.1

$$\phi \sim 1/r, \quad |\vec{A}| \sim 1/r.$$

Затем, используя эти формулы, вычислить напряженности \vec{E} и \vec{H} поля излучения, сохраняя только члены $\sim 1/r$.

Рассмотрим сначала выражение для скалярного потенциала поля:

$$\phi(\vec{r}, t) = \iiint_V \frac{\rho(\vec{r}', t - \Delta t_{\text{зап}}) dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (11.3)$$

Величина $\Delta t_{\text{зап}}$ есть *полное время запаздывания*:

$$\Delta t_{\text{зап}} = \frac{R}{c} = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}. \quad (11.4)$$

В силу условия (11.1) вектор \vec{r}' можно считать малой добавкой к вектору \vec{r} . При этом нужно иметь ввиду, что величина $|\vec{r} - \vec{r}'|$

входит не только в знаменатель подынтегрального выражения в (11.3), но и во временной аргумент плотности заряда (из-за времени запаздывания (11.4)). Так как потенциал поля излучения на больших расстояниях от системы зарядов должен убывать обратно пропорционально расстоянию до точки наблюдения, то в знаменателе подынтегрального выражения в формуле (11.3) величиной \vec{r}' вообще можно пренебречь, полагая

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \approx \frac{1}{r}. \quad (11.5)$$

С учетом (11.5) точную формулу (11.3) можно *приближенно* записать в виде

$$\varphi(\vec{r}; t) \approx \frac{1}{r} \iiint_V \rho\left(\vec{r}'; t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) dV'. \quad (11.6)$$

Замечание. Напомним, что *полный заряд в объеме V в момент времени t определяется формулой (1.4).*

$$Q_V(t) = \iiint_V \rho(\vec{r}, t) dV.$$

Сравнивая последнюю формулу с (11.6), видим, что входящий в (11.6) интеграл *вовсе не является полным зарядом системы в какой-то момент времени:*

$$\iiint_V \rho\left(\vec{r}'; t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}\right) dV' \neq Q_V, \text{ m.e. } \varphi(\vec{r}; t) \neq \frac{Q_V(t)}{r}.$$

Хотя формула (11.6) существенно проще точной формулы (11.3), она не может рассматриваться как окончательная. Для нахождения потенциала поля излучения нужно упростить выражение (11.4) для времени полного запаздывания, т.е. разложить величину $\Delta t_{\text{зап}} = |\vec{r} - \vec{r}'|/c$ в ряд по малой добавке \vec{r}' . При этом, оказывается, достаточно сохранить только первые два члена разложения. Используя известную формулу разложения в ряд Тейлора для функции трех переменных

$$f(\vec{r} - \vec{r}') \approx f(\vec{r}) - (\vec{r}', \mathbf{grad} f) + \dots,$$

запишем:

$$|\vec{r} - \vec{r}'| \approx r - (\vec{r}', \mathbf{grad} r) = r - (\vec{r}', \vec{n}). \quad (11.7)$$

Здесь учтено, что $\text{grad } r = \vec{r} / r = \vec{n}$. Используя разложение (11.7), для полного времени запаздывания (11.4) получаем следующее приближенное выражение:

$$\Delta t_{\text{зап}} = \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c} \approx \frac{r}{c} - \frac{(\vec{r}', \vec{n})}{c} \quad (\vec{n} = \vec{r} / r). \quad (11.8)$$

Напомним, что \vec{n} есть единичный вектор, направленный из начала координат в точку наблюдения P (см. рис. 11.1). Таким образом, полное время запаздывания состоит из двух слагаемых, каждое из которых допускает простую физическую интерпретацию.

Первое слагаемое r/c в формуле (11.8) представляет собой внешнее время запаздывания. Оно определяет то время, которое требуется электромагнитномупулью, чтобы дойти до точки наблюдения P из начала координат O . При больших расстояниях r эта часть времени тоже является большой величиной, и при $r \rightarrow \infty$ внешнее время запаздывания тоже стремится к бесконечности. Эта часть времени запаздывания не зависит от переменной интегрирования \vec{r}' и поэтому не содержит какой-либо информации о характере движения зарядов внутри системы.

Второе слагаемое $(\vec{r}', \vec{n})/c$ в формуле (11.8) называется собственным временем запаздывания, или внутренним временем запаздывания. Внутреннее время запаздывания есть то время, которое требуется электромагнитному сигналу для распространения внутри системы, т.е. внутри объема V . Существенно, что эта часть времени запаздывания зависит только от направления $\vec{n} = \vec{r}/r$ распространения сигнала в точку наблюдения и, следовательно, не зависит от самого расстояния r до точки наблюдения. По порядку величины значение внутреннего времени запаздывания:

$$\frac{|(\vec{r}', \vec{n})|}{c} \sim \frac{L}{c} |\vec{n}| = \frac{L}{c}. \quad (11.9)$$

Внутреннее время запаздывания не стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ и поэтому должно быть сохранено в разложении (11.8). Следующие члены разложения в (11.8) имеют порядок $1/r$, $1/r^2, \dots$ и становятся исчезающими при $r \rightarrow \infty$.

Используя приближение (11.8) для полного времени запаздывания, формулу (11.6) для скалярного потенциала поля на больших расстояниях от системы зарядов запишем в виде

$$\varphi(\vec{r}; t) \approx \frac{1}{r} \iiint_V \rho \left(\vec{r}'; t - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{r}', \vec{n})}{c} \right) dV' \quad (|\vec{r}| > L). \quad (11.10)$$

Аналогично записывается выражение для векторного потенциала поля на больших расстояниях:

$$\vec{A}(\vec{r}; t) \approx \frac{1}{cr} \iiint_V j \left(\vec{r}'; t - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{r}', \vec{n})}{c} \right) dV' \quad (|\vec{r}| > L). \quad (11.11)$$

Отметим, что на больших расстояниях потенциалы поля зависят от времени t и расстояния до точки наблюдения r всегда только в виде комбинации: $\tau = t - r/c$. Формулы (11.10) и (11.11) для потенциалов поля являются основными формулами теории излучения. Зная выражения для потенциалов, можно по формулам (3.2) и (3.4) определить напряженности \vec{E} и \vec{H} поля излучения.

Напряженности \vec{E} и \vec{H} поля излучения

Для вычисления напряженностей поля излучения воспользуемся известными формулами:

$$\vec{H}(\vec{r}; t) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}; t); \quad \vec{E}(\vec{r}; t) = -\text{grad } \varphi(\vec{r}; t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A}(\vec{r}; t). \quad (11.12)$$

Подставляя (11.10) и (11.11) в (11.12), после простых, но достаточно громоздких вычислений, сохранив только члены $\sim 1/r$, можно получить выражения для напряженностей полей. Проще всего получить выражение для напряженности магнитного поля излучения (см. прил. III):

$$\vec{H}(\vec{r}; t) = \frac{1}{c} \left[\dot{\vec{A}}(\vec{r}; t), \vec{n} \right] \quad (\vec{n} = \vec{r}/r). \quad (11.13)$$

Точка над буквой означает дифференцирование по времени:
 $\overset{\circ}{A} = \partial A / \partial t$.

Непосредственное вычисление напряженности электрического поля \vec{E} требует более громоздких выкладок. Однако в проведении этих утомительных вычислений нет необходимости, если рассматривать поля на больших расстояниях от излучающей системы. На таких расстояниях поле излучения в малых участках пространства можно рассматривать как *плоскую* волну, распространяющуюся в направлении \vec{n} . Но в плоской волне вектор \vec{E} связан с вектором \vec{H} соотношением (8.39): $\vec{E} = [\vec{H}, \vec{n}]$. Подставляя сюда значение \vec{H} (11.13), получим:

$$\vec{E}(\vec{r}; t) = [\vec{H}(\vec{r}; t), \vec{n}] = \frac{1}{c} [[\vec{A}, \vec{n}], \vec{n}]. \quad (11.14)$$

Конечно, точные вычисления поля \vec{E} по формуле (11.12) также приводят к (11.14).

Область пространства, в которой справедливы соотношения (11.13) и (11.14), называют *волновой зоной*. В волновой зоне расстояние r много больше не только размеров системы L , но и характеристической длины волны излучения λ :

$$r \gg L; \quad r \gg \lambda. \quad (11.15)$$

Таким образом, для определения величин \vec{E} , \vec{H} необходимо вычислить только векторный потенциал \vec{A} по формуле (11.11). Так как в выражение для векторного потенциала поля время t входит только в виде комбинации $\tau = t - r/c$, то и все величины \vec{H} , \vec{E} тоже зависят от комбинации $\tau = t - r/c$. Формулы (11.11), (11.13) и (11.14) определяют основные характеристики поля излучения *произвольно движущихся зарядов* (при этом скорость движения зарядов может быть любой: $0 < v < c$).

Интенсивность излучения

Излучаемые системой электромагнитные волны уносят с собой определенную энергию. Поэтому важными *энергетическими* характеристиками поля излучения являются интенсивность излучения dI в элемент телесного угла $d\Omega$ и полная интенсивность I (мощность) излучения во всех направлениях.

Интенсивностью излучения dI в элемент телесного угла $d\Omega$ называется количество энергии, протекающей в единицу времени через элемент $d\Sigma = r^2 d\Omega$ сферической поверхности с центром в начале координат и радиусом r .

Иногда дается несколько другое эквивалентное определение величины dI .

Интенсивностью излучения dI в элемент телесного угла $d\Omega$ называется поток энергии через векторную площадку $d\vec{\Sigma} = \vec{n} d\Sigma$, стягивающую телесный угол $d\Omega$.

Оба определения полностью эквивалентны и приводят к одной и той же формуле:

$$dI = \vec{S} d\vec{\Sigma} = (\vec{S} \vec{n}) d\Sigma = (\vec{S} \vec{n}) r^2 d\Omega. \quad (11.16)$$

Здесь $\vec{S}(\vec{r}; t) = c[\vec{E}, \vec{H}] / 4\pi$ – вектор Умова – Пойнтинга (рис. 11.2).

Полной интенсивностью излучения (мощностью излучения) называется энергия, излучаемая системой в момент времени t в единицу времени во всех направлениях:

$$I = r^2 \iint_{4\pi} (\vec{S} \vec{n}) d\Omega; \quad [I] = \text{Вт}. \quad (11.17)$$

Следовательно, для вычисления этих величин необходимо определить плотность потока энергии \vec{S} .

Так как поля в плоской волне взаимно перпендикулярны и равны по величине – $\vec{E} \perp \vec{H}$, $|\vec{E}| = |\vec{H}|$, то:

$$\vec{S}(\vec{r}; t) = \frac{c}{4\pi} H^2(\vec{r}; t) \vec{n}. \quad (11.18)$$

Как и следовало ожидать, энергия электромагнитного поля излучения распространяется в направлении вектора \vec{n} , т.е. от системы зарядов к точке наблюдения P . Так как векторы \vec{S} и $d\vec{\Sigma}$ параллельны (см. рис. 11.2), то, подставляя в (11.16) значение вектора Пойнтинга (11.18), получим:

$$dI = S d\Sigma = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2 d\Omega. \quad (11.19)$$

Поскольку поле излучения убывает по закону $H \sim 1/r$, то из формулы (11.19) видно, что количество излученной энергии, про-

текающей в единицу времени через элемент сферической поверхности $d\Sigma = r^2 d\Omega$, одинаково для всех расстояний r (при одинаковых для них значениях $\tau = t - r/c$). Это отражает тот очевидный факт, что поле излучения существует автономно от породившего его источника. Энергия этого поля распространяется в пространстве со скоростью c , нигде не накапливаясь и не исчезая. Таким образом, для вычисления интенсивности излучения достаточно определить только напряженность магнитного поля \vec{H} по формуле (11.13).

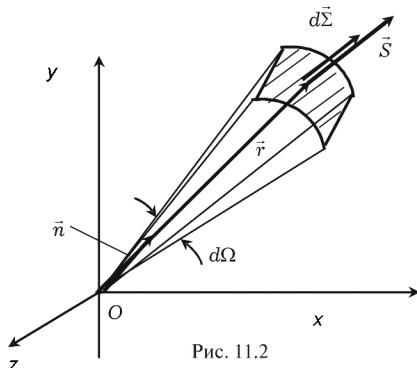


Рис. 11.2

Дипольное излучение

Выражения для напряженностей поля излучения значительно упрощаются в случае, когда в формулах (11.10) и (11.11) можно пренебречь внутренним временем запаздывания. Такое приближение называется *дипольным*. Как увидим ниже, в дипольном приближении потенциалы и напряженности поля излучения определяются значениями производных по времени от дипольного момента системы.

Потенциалы и напряженности поля излучения в дипольном приближении

В предыдущем разделе были получены общие формулы (11.13) и (11.14) для напряженностей поля излучения \bar{E} и \bar{H} в *волновой зоне* (11.15), когда $|\vec{r}| \gg L$ и $|\vec{r}| \gg \lambda$, где L – характерный размер области движения зарядов, а λ – характерная длина волны поля излучения:

$$\bar{H} = \frac{1}{c} \left[\dot{\bar{A}}, \vec{n} \right], \quad \bar{E} = \left[\bar{H}, \vec{n} \right] \quad (\vec{n} = \vec{r} / r), \quad (12.1)$$

где $\overset{\text{def}}{\bar{A}} = \partial A / \partial t$ – производная векторного потенциала поля по времени. Векторный потенциал поля на больших расстояниях от системы зарядов определяется формулой (11.11):

$$\bar{A}(\vec{r}; t) \approx \frac{1}{cr} \iiint_V \vec{j}\left(\vec{r}'; t - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{r}', \vec{V})}{c}\right) dV' \quad (|\vec{r}| \gg L). \quad (12.2)$$

На больших расстояниях потенциалы поля зависят от времени t и расстояния до точки наблюдения r только в виде комбинации: $\tau = t - r/c$.

В отличие от формул для напряженностей полей (12.1), которые справедливы только в волновой зоне, формула для векторного

потенциала (12.2) справедлива в более широкой области, в том числе и в области вне волновой зоны, т.е. когда $\lambda \geq |\vec{r}| >> L$.

Для вычисления напряженностей поля излучения в волновой зоне необходимо вычислить векторный потенциал по формуле (12.2), сохранив только члены $\sim 1/r$. Хотя приближенная формула (12.2) существенно проще точной формулы (10.10), аналитическое вычисление интеграла в (12.2) практически невозможно из-за наличия в аргументе подынтегральной функции \vec{j} внутреннего времени запаздывания $(\vec{r}', \vec{n})/c$, зависящего от переменной интегрирования \vec{r}' .

Простейшим является случай, когда внутренним временем запаздывания в формуле (12.2) можно пренебречь. Это возможно, если за время $(\vec{r}', \vec{n})/c$ распределение зарядов в системе изменяется незначительно. Характерное время, за которое происходит существенное изменение распределения зарядов внутри области V , есть

$$T_{\text{хар}} \sim L / v_{\text{хар}}, \quad (12.3)$$

где $v_{\text{хар}}$ – характерная скорость движения зарядов. Характерное время внутреннего запаздывания определяется формулой (11.9):

$$(\vec{r}', \vec{n})/c \sim L/c. \quad (12.4)$$

Следовательно, должно выполняться условие $L/c \ll L/v_{\text{хар}}$. Это неравенство можно записать в двух эквивалентных формах:

$$v_{\text{хар}} \ll c \quad \text{или} \quad L \ll \lambda_{\text{хар}}. \quad (12.5)$$

Здесь $\lambda_{\text{хар}} \sim c T_{\text{хар}}$ – характерная длина волны излучения. Таким образом, для возможности пренебрежения внутренним временем запаздывания необходимо, чтобы скорости движущихся частиц были малы по сравнению со скоростью света. При этом в волновой зоне (11.15) автоматически выполняется двойное неравенство:

$$|\vec{r}| \gg \lambda_{\text{хар}} \gg L. \quad (12.6)$$

В пренебрежении временем внутреннего запаздывания выражение (12.2) для векторного потенциала поля принимает вид

$$\vec{A}(\vec{r}; t) \approx \frac{1}{cr} \iiint_V \vec{j}(\vec{r}'; t - r/c) dV'. \quad (12.7)$$

Формула (12.7) записана для непрерывного распределения зарядов.

Получим формулу для векторного потенциала поля системы точечных зарядов. Пусть имеется система нескольких точечных зарядов \mathbf{e}_a . Плотность тока такой системы выглядит так:

$$\vec{j}(\vec{r}; t) = \sum_{a=1}^N \mathbf{e}_a \vec{v}_a(t) \delta\{\vec{r} - \vec{r}_a(t)\}. \quad (12.8)$$

Здесь $\vec{r}_a(t)$ – радиус-вектор a -го заряда в момент времени t ; $\vec{v}_a(t) = d\vec{r}_a/dt$ – скорость a -го заряда в момент времени t ; $\delta(\vec{r})$ – дельта-функция Дирака. Подставляя (12.8) в (12.7), запишем:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}; t) &\approx \frac{1}{cr} \sum_{a=1}^N \mathbf{e}_a \frac{d\vec{r}_a(t - r/c)}{dt} \underbrace{\iiint_V \delta\{\vec{r}' - \vec{r}_a(t)\} dV'}_1 = \\ &= \frac{1}{cr} \frac{d}{dt} \sum_{a=1}^N \mathbf{e}_a \vec{r}_a(t - r/c). \end{aligned}$$

Величина

$$\sum_{a=1}^N \mathbf{e}_a \vec{r}_a(t - r/c) = \vec{d}(\tau) \quad (12.9)$$

есть дипольный момент системы в момент времени $\tau = t - r/c$. Поэтому

$$\vec{A}(\vec{r}; t) \approx \frac{\vec{d}(\tau)}{cr}. \quad (12.10)$$

Таким образом, интеграл $\iiint_V \vec{j}(\vec{r}'; t - r/c) dV'$ в (12.7) равен производной по времени от *дипольного момента* системы (в момент времени $\tau = t - r/c$).

Из формул (12.1) следует, что для вычисления напряженностей \vec{E} и \vec{H} поля излучения достаточно знать выражение *только для векторного* потенциала поля \vec{A} . Может возникнуть вопрос: почему скалярный потенциал поля не входит в формулы (12.1)? В конце этого раздела показано, что скалярный потенциал поля излучения определяется выражением:

$$\varphi(\vec{r}; t) \approx \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{d}}(\tau)}{cr}. \quad (12.11)$$

Сравнивая формулы (12.10), (12.11) для векторного и скалярного потенциалов, видим, что величины \vec{A} и φ однозначно связаны между собой простой формулой:

$$\varphi(\vec{r}; t) = (\vec{n}, \vec{A}(\vec{r}; t)). \quad (12.12)$$

Теперь становится понятным, почему напряженность не только магнитного, но и электрического поля излучения (12.1) выражаются через один векторный потенциал поля \vec{A} .

Поскольку потенциалы поля выражаются через производную по времени от дипольного момента системы, рассматриваемое приближение называют *дипольным*. Для того чтобы особо подчеркнуть это обстоятельство, векторный и скалярный потенциалы, а также напряженности поля, снабжаются нижним индексом d :

$$\vec{A}_d(\vec{r}; t) = \frac{\dot{\vec{d}}(\tau)}{cr}; \quad \varphi_d = (\vec{n}, \vec{A}_d) \quad (\tau = t - r/c). \quad (12.13)$$

Нетрудно убедиться, что потенциалы поля излучения (12.13) удовлетворяют условию калибровки Лоренца (3.9):

$$\operatorname{div} \vec{A}_d + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_d}{\partial t} = 0.$$

Подставляя значение векторного потенциала \vec{A}_d в формулы (12.1), получаем окончательные выражения для напряженности магнитного и электрического поля излучения в *дипольном приближении* (в волновой зоне):

$$\vec{H}_d(\vec{r}; t) = \frac{1}{c^2 r} [\ddot{\vec{d}}(\tau), \vec{n}]; \quad \vec{E}_d(\vec{r}; t) = [\vec{H}_d(\vec{r}; t), \vec{r}]. \quad (12.14)$$

Как следует из формул (12.14), в дипольном приближении напряженности поля излучения определяются второй производной по времени от дипольного момента системы (12.9):

$$\ddot{\vec{d}}(\tau) = \sum_{a=1}^N e_a \ddot{\vec{r}}_a(\tau) = \sum_{a=1}^N e_a \vec{w}_a(\tau). \quad (12.15)$$

Величина $\vec{w}_a(\tau)$ – ускорение a -го заряда в момент времени τ .

Из формулы (12.15) следует, что заряды могут излучать электромагнитные волны только в том случае, если они движутся с ускорением.

Рассмотрим самый простой случай, когда система состоит всего из одной частицы m с зарядом e . В этом случае ее дипольный момент $\vec{d} = e\vec{r}(t)$, а $\ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}}(t) = e\vec{w}(t)$. Поскольку дипольное приближение применимо только для нерелятивистских частиц ($v \ll c$), то ускорение заряда \vec{w} определяется вторым законом Ньютона: $m\vec{w} = \vec{F}$, где \vec{F} – действующая на частицу сила. Поэтому для одной частицы

$$\ddot{\vec{d}} = e \cdot (\vec{F}/m). \quad (12.16)$$

Следовательно, напряженности поля излучения в дипольном приближении для одной частицы можно представить в виде:

$$\overset{\text{r}}{H}_d(\vec{r}, t) = \frac{e}{mc^2 r} [\overset{\text{r}}{F}(\tau), \vec{r}]; \quad \overset{\text{l}}{E}_d = [\overset{\text{l}}{H}_d, \vec{r}]. \quad (12.17)$$

Таким образом, одна частица, движущаяся с ускорением, излучает всегда. Как видно из (12.17), при движении заряда во внешнем электрическом или магнитном поле (когда сила F не зависит от массы) поле излучения будет тем больше, чем меньше масса частицы.

Однако если имеется несколько частиц, то ситуация может существенно измениться. Пусть имеется замкнутая система N зарядов с одинаковым отношением заряда частиц к их массе (например, система из одинаковых заряженных частиц). В такой системе

$$e_a / m_a = \text{const}. \quad (12.18)$$

Хотя каждая частица движется с ускорением под действием сил со стороны других частиц системы, в дипольном приближении излучение будет отсутствовать, т.е. напряженности полей излучения в

дипольном приближении для такой системы зарядов будут равны нулю.

Для доказательства этого утверждения перепишем формулу (12.15) для второй производной от дипольного момента системы с учетом соотношения (12.18) в следующем виде:

$$\begin{aligned}\ddot{\vec{d}} &= \sum_{a=1}^N m_a \frac{\vec{e}_a}{m_a} \ddot{r}_a = \frac{\vec{e}_a}{m_a} \frac{d}{dt} \left(\sum_{a=1}^N m_a \frac{d\vec{r}_a}{dt} \right) = \\ &= \frac{\vec{e}_a}{m_a} \frac{d}{dt} \left(\sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a \right).\end{aligned}\quad (12.19)$$

Величина, стоящая в скобках формулы (12.19), есть полный механический импульс системы материальных точек: $\sum_{a=1}^N m_a \vec{v}_a = \vec{P}$.

Поэтому $\ddot{\vec{d}} = (\vec{e}_a / m_a) (d\vec{P} / dt)$. Но в замкнутой системе полный импульс является интегралом движения: $\vec{P} = \text{const}$ – закон сохранения импульса. Следовательно, $d\vec{P} / dt = 0$. Поэтому вторая производная от дипольного момента системы равна нулю: $\ddot{\vec{d}} = 0$. Напряженности поля излучения (12.14) тоже будут равны нулю.

Сказанное не означает, что такая система вообще не излучает электромагнитные волны. Просто для вычисления напряженностей поля излучения нельзя ограничиваться дипольным приближением, т.е. полностью пренебрегать временем внутреннего запаздывания. Для такой системы в разложении векторного потенциала в ряд по величине (\vec{r}', \vec{n}) с нужно удерживать следующие члены разложения. Это приводит к двум дополнительным слагаемым в напряженности поля излучения $\vec{H}(\vec{r}; t) \approx \vec{H}_d + \vec{H}_m + \vec{H}_D$. Напряженность \vec{H}_m выражается через производные магнитного момента системы, а \vec{H}_D – через производные компонент тензора квадрупольного момента. Излучение, описываемое слагаемыми \vec{H}_m и \vec{H}_D , называется магнитно-дипольным и квадрупольным соответственно. При этом во многих случаях магнитно-дипольное

излучение может отсутствовать. Например, в рассмотренном выше примере системы частиц с одинаковым отношением заряда к массе ($e_a/m_a = \text{const}$) магнитно-дипольное излучение, так же как и дипольное, отсутствует. Поэтому поле излучения такой системы отлично от нуля лишь в квадрупольном приближении.

Интенсивность излучения в дипольном приближении

Как уже отмечалось, излучаемые системой электромагнитные волны уносят с собой некоторую энергию. Энергетическими характеристиками поля излучения являются интенсивность излучения dI в элемент телесного угла $d\Omega$ и полная интенсивность (мощность) I излучения во всех направлениях. Интенсивность излучения определяется общей формулой (11.19):

$$dI = \frac{c}{4\pi} H^2 r^2 d\Omega. \quad (12.20)$$

Подставляя сюда выражение (12.14) для напряженности магнитного поля, находим интенсивность излучения в дипольном приближении:

$$dI_d = \frac{1}{4\pi c^3} \left[\frac{\mathbf{H}}{d(\tau), \vec{n}} \right]^2 d\Omega, \quad (12.21)$$

т.е.

$$dI_d(t) = \frac{\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(t)}{4\pi c^3} \sin^2 \vartheta d\Omega. \quad (12.22)$$

Здесь ϑ – угол между вектором $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(t)$ и направлением \vec{n} в точку наблюдения. Величина угла ϑ в различные моменты разная, так как направление вектора $\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}(t)$ изменяется со временем.

Полная интенсивность (мощность) излучения, т.е. энергия, излучаемая в единицу времени во всех направлениях, определяется интегралом:

$$I_d = \iint_{4\pi} dI_d. \quad (12.23)$$

Интегрирование в формуле (12.23) ведется по всем направлениям. Поэтому значение интеграла не может зависеть от выбора на-

правления осей координат при проведении интегрирования. В фиксированный момент времени t вектор $\ddot{d}(t)$ имеет вполне определенное направление в пространстве. Выберем полярную ось z' вдоль вектора $\ddot{d}(t)$ (рис. 12.1).

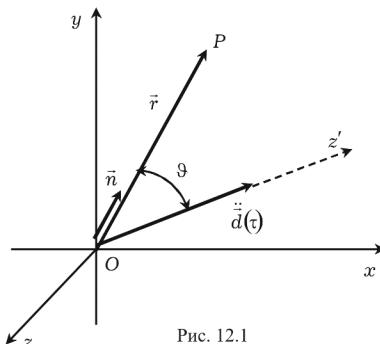


Рис. 12.1

При таком выборе полярной оси $d\Omega = \sin \vartheta d\vartheta d\phi$ из формул (12.23) и (12.22) получаем, что

$$I_d = \frac{\dot{d}^2(t)}{4\pi c^3} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \vartheta \sin^2 \vartheta d\vartheta.$$

Интеграл по азимутальному углу ϕ дает 2π . В интеграле по полярному углу ϑ делаем обычную замену переменной интегрирования: $\cos \vartheta = \mu$. Тогда $\sin \vartheta d\vartheta = -d\mu$, так, что

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \sin \vartheta \sin^2 \vartheta d\vartheta &= \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) d\mu = \\ &= 2 \int_0^1 (1 - \mu^2) d\mu = 2 \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$I_d = \frac{\ddot{d}^2(\tau)}{4\pi c^3} 2\pi \frac{4}{3} \Rightarrow I_d = \frac{2\ddot{d}^2(\tau)}{3c^3}. \quad (12.24)$$

Из формулы (12.24) видим, что интенсивность излучения в ди-
польном приближении зависит только от величины второй про-
изводной дипольного момента $\ddot{d}(t - r/c)$. При этом значение интен-
сивности I в момент времени t на расстоянии r от системы опре-
деляется величиной \ddot{d} в более ранний момент времени
 $\tau = t - r/c$. В остальном же интенсивность излучения не зависит
от расстояния до излучающей системы. Этого и следовало ожидать
на основании закона сохранения энергии: поток энергии, проходя-
щий через замкнутую поверхность, окружающую излучающую
систему, не должен зависеть от размеров поверхности. Поэтому
если в формуле (12.24) заменить величину τ на t , то получим вы-
ражение для энергии, теряемой излучающей системой в единицу
времени во всех направлениях в момент времени t^1 :

$$-\frac{dE(t)}{dt} = I_d(t) = \frac{2\ddot{d}^2(t)}{3c^3}. \quad (12.25)$$

Величина $(-dE/dt)$ есть *убыль энергии* (например, механиче-
ской энергии движения) излучающей системы за единицу времени.

Рассмотрим простой пример вычисления интенсивности ди-
польного излучения, когда дипольный момент системы изменяется
со временем по гармоническому закону с частотой ω_0 :

$$\ddot{d}(t) = \ddot{d}_0 \cos(\omega_0 t). \quad (12.26)$$

Очевидно, что излучаемые электромагнитные волны будут
иметь ту же частоту ω_0 . В этом случае

$$\ddot{d}(t) = -\omega_0^2 \ddot{d}_0 \cos(\omega_0 t). \quad (12.27)$$

¹ Вообще говоря, соотношение (12.25) справедливо лишь в нереляти-
вистском случае, т.е. когда оправдано использование дипольного прибли-
жения.

Подставляя это в формулы (12.14) для полей, получим:

$$\vec{H}_d = \frac{\omega_0^2}{rc^2} [\vec{h}, \vec{d}_0] \cos\{\omega_0(t - r/c)\} \quad (\vec{h} = \vec{r}/r); \quad (12.28)$$

$$\vec{E}_d = \frac{\omega_0^2}{rc^2} [[\vec{h}, \vec{d}_0] \vec{h}] \cos\{\omega_0(t - r/c)\}. \quad (12.29)$$

Формулы (12.28) и (12.29) определяют поле монохроматической, линейно поляризованной волны с частотой ω_0 и с периодом

$$T_0 = 2\pi/\omega_0.$$

Вычислим интенсивность излучения гармонического диполя по формуле (12.24):

$$I_d = \frac{2\omega_0^4}{3c^3} (\vec{d}_0)^2 \cos^2(\omega_0 t). \quad (12.30)$$

Обычно вычисляется среднее за период значение интенсивности излучения:

$$\bar{I}_d = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} I_d(t) dt.$$

Подставляя сюда (12.30) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos^2(\omega_0(t - r/c)) dt &= \frac{1}{T_0} \int_{r/c}^{r/c + T_0} \cos^2(\omega_0 \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} \cos^2(\omega_0 \tau) d\tau = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

находим:

$$\bar{I}_d = \frac{\omega_0^4}{3c^3} (\vec{d}_0)^2. \quad (12.31)$$

Таким образом, интенсивность дипольного излучения для гармонического диполя пропорциональна четвертой степени частоты его колебаний. Волны, имеющие определенную частоту, называются монохроматическими. Если изменение дипольного момента со временем не подчиняется простому гармоническому закону, то возникают волны излучения различных частот, или, как говорят, возникает частотный спектр излучения. На каких-то частотах энер-

гии излучается большие, на каких-то меньше, т.е. возникает распределение энергии излучения по частотам. Именно этому вопросу посвящен следующий раздел, в котором будет получено выражение для энергии, излученной произвольной системой зарядов (необходимо диполем) в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$.

Скалярный потенциал поля излучения в дипольном приближении. Скалярный потенциал поля на больших расстояниях от системы зарядов ($|\vec{r}| \gg L$) определяется формулой (11.10):

$$\varphi(\vec{r}; t) \approx \frac{1}{r} \int_V \rho(\vec{r}'; t - r/c + (\vec{r}', \vec{n})/c) dV'. \quad (12.32)$$

При малых временах внутреннего запаздывания, т.е. когда выполняются условия (12.6), скалярный потенциал поля излучения тоже можно разложить в ряд по малой величине $(\vec{r}', \vec{n})/c$. При этом, в отличие от разложения векторного потенциала, нужно сохранить *оба* члена разложения:

$$\begin{aligned} \varphi(\vec{r}; t) &\approx \frac{1}{r} \int_V \rho(\vec{r}'; t - r/c) dV' + \\ &+ \frac{1}{cr} \int_V (\vec{r}', \vec{n}) \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{r}'; t - r/c) dV'. \end{aligned} \quad (12.33)$$

Первое слагаемое в формуле (12.33) есть полный заряд системы в момент времени $t - r/c$ и не имеет никакого отношения к излучению электромагнитных волн. Для электронейтральной системы этот интеграл равен нулю. Если рассматриваемые заряды не пересекают границы области V , т.е. не входят и не выходят из нее, то полный заряд в любой момент времени остается одним и тем же. Следовательно, первый интеграл в (12.33) есть величина постоянная и не дает вклада в напряженность $\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \partial\vec{A}/\partial t$ электрической составляющей поля излучения. Во втором интеграле в формуле (12.33) можно поменять порядок дифференцирования по времени и интегрирования по координатам и вынести единичный вектор \vec{n} из-под знака интеграла. В результате получим:

$$\varphi(\vec{r}; t) \approx \frac{1}{cr} \frac{d}{dt} \left\{ \vec{n} \int_V \vec{r}' \rho(\vec{r}'; t - r/c) dV' \right\}. \quad (12.34)$$

Интеграл в формуле (12.34) есть дипольный момент системы зондов в момент времени $\tau = t - r/c$. Поэтому выражение для скалярного потенциала поля излучения в рассматриваемом приближении запишется так:

$$\varphi_d(\vec{r}; t) \approx \frac{\vec{n} \cdot \dot{\vec{d}}(t - r/c)}{cr}. \quad (12.35)$$

Поскольку $\vec{A}_d(\vec{r}; t) = \dot{\vec{d}}(\tau)/cr$, то получаем формулу, связывающую скалярный и векторный потенциалы в дипольном приближении:

$$\varphi_d = (\vec{n}, \vec{A}_d). \quad (12.36)$$

Спектральное распределение дипольного излучения

Энергия, излучаемая системой зарядов за промежуток времени $t \div t + dt$, определяется выражением: $dE_{изл}(t) = I(t)dt$. Здесь $I(t)$ – интенсивность излучения, т.е. энергия, излучаемая системой зарядов во всех направлениях в единицу времени. Полная энергия, излучаемая системой зарядов за все время во всех направлениях,

$$E_{изл} = \int_{-\infty}^{\infty} dE_{изл} = \int_{-\infty}^{\infty} I(t)dt. \quad (13.1)$$

Полную энергию, излученную за все время движения зарядов, можно представить в виде суммы энергий, излученных на разных частотах:

$$E_{изл} = \int_0^{\infty} dE_{\omega} = \int_0^{\infty} \left(\frac{dE_{\omega}}{d\omega} \right) d\omega. \quad (13.2)$$

Величина dE_{ω} представляет собой энергию, излученную системой во всех направлениях за все время в интервале частот $\omega \div \omega + d\omega$. Энергия, приходящаяся на единичный интервал частот ($dE_{\omega}/d\omega$), называется *спектральным распределением (спектральной плотностью)* излучения.

Для вычисления величины dE_{ω} нужно воспользоваться *равенством Парсеваля* – интеграл от квадрата действительной функции $f(t)$ можно представить в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 d\omega. \quad (13.3)$$

Здесь величина $f_{\omega} = f(\omega)$ есть фурье-образ функции $f(t)$:

$$f(\omega) = f_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (13.4)$$

Поскольку функция $f(t)$ предполагается действительной ($f = f^*$), то ее фурье-образ обладает следующим свойством: $f^*(\omega) = f(-\omega)$. Именно благодаря этому обстоятельству интеграл в правой части равенства Парсеваля берется по положительным значениям ω .

Равенство Парсеваля остается справедливым и для векторных функций. Например,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \vec{d}^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \vec{d}_{\omega} \vec{d}_{\omega}^* d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |\vec{d}_{\omega}|^2 d\omega. \quad (13.5)$$

Здесь $\vec{d}(\omega)$ – фурье-образ дипольного момента системы движущихся зарядов:

$$\vec{d}(\omega) = \vec{d}_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} \vec{d}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (13.6)$$

Если скорости частиц много меньше скорости света ($v \ll c$), то для вычисления интенсивности излучения $I(t)$ можно использовать дипольное приближение: $I(t) \approx I_d(t)$ (в котором полностью пренебрегается временем запаздывания внутри системы). Интенсивность излучения в дипольном приближении определяется выражением:

$$I_d(t) = \frac{2 \left(\frac{d}{dt} \right)^2}{3c^3}, \quad (13.7)$$

где $\vec{d}(t)$ – дипольный момент системы. Напомним, что для системы N точечных зарядов $\vec{d}(t) = \sum_{a=1}^N \vec{e}_a \vec{r}_a(t)$. Согласно (13.1) и (13.7) полная энергия, излучаемая системой, в дипольном приближении равна

$$E_{\text{изл}} = \frac{2}{3c^3} \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \vec{d}_x^2(t) + \vec{d}_y^2(t) + \vec{d}_z^2(t) \right\}. \quad (13.8)$$

Используя равенство Парсеваля (13.5), выражение (13.8) для полной энергии излучения преобразуем к виду

$$E_{\text{изл}} = \frac{2}{3\pi c^3} \int_0^\infty \left| \left(\ddot{\vec{d}} \right)_\omega \right|^2 d\omega. \quad (13.9)$$

Сравнивая формулы (13.2) и (13.9), находим, что

$$dE_\omega = \frac{2}{3\pi c^3} \left| \left(\ddot{\vec{d}} \right)_\omega \right|^2 d\omega. \quad (13.10)$$

Величина $\left(\ddot{\vec{d}} \right)_\omega$ есть фурье-образ второй производной вектора дипольного момента системы:

$$\left(\ddot{\vec{d}} \right)_\omega = \int_{-\infty}^\infty \ddot{\vec{d}}(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (13.11)$$

Поскольку $\left| \left(\ddot{\vec{d}} \right)_\omega \right|^2 = \left(\ddot{\vec{d}}_\omega, \ddot{\vec{d}}_\omega^* \right) = \left| \left(\ddot{d}_x \right)_\omega \right|^2 + \left| \left(\ddot{d}_y \right)_\omega \right|^2 + \left| \left(\ddot{d}_z \right)_\omega \right|^2$, то

формула (13.10) в развернутом виде будет выглядеть так:

$$dE_\omega = \frac{2}{3\pi c^3} \left\{ \left| \left(\ddot{d}_x \right)_\omega \right|^2 + \left| \left(\ddot{d}_y \right)_\omega \right|^2 + \left| \left(\ddot{d}_z \right)_\omega \right|^2 \right\} d\omega. \quad (13.12)$$

Здесь

$$\left(\ddot{d}_x \right)_\omega = \int_{-\infty}^\infty \ddot{d}_x(t) e^{-i\omega t} dt; \quad \left(\ddot{d}_y \right)_\omega = \int_{-\infty}^\infty \ddot{d}_y(t) e^{-i\omega t} dt;$$

$$\left(\ddot{d}_z \right)_\omega = \int_{-\infty}^\infty \ddot{d}_z(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Выражение (13.12) определяет спектральное распределение излучаемой энергии в *дипольном* приближении.

Если речь идет об *одной* движущейся частице с зарядом e , то

$$\ddot{d}(t) = e\ddot{r}(t); \quad \ddot{d}(t) = e\ddot{r}(t) = e\ddot{w}(t). \quad (13.13)$$

Здесь $\ddot{w}(t)$ – ускорение частицы. Следовательно, в этом простейшем случае

$$dE_{\omega} = \frac{2}{3\pi c^3} \left| \left(\hat{\mathbf{r}} \right)_{\omega} \right|^2 d\omega = \frac{2}{3\pi c^3} \left\{ \left(\hat{\mathbf{x}}_{\omega} \right)^2 + \left(\hat{\mathbf{y}}_{\omega} \right)^2 + \left(\hat{\mathbf{z}}_{\omega} \right)^2 \right\} d\omega. \quad (13.14)$$

Величина $\left(\hat{\mathbf{r}} \right)_{\omega}$ – есть фурье-образ ускорения движущегося заряда.

Равенство Парсеваля. Рассмотрим произвольную действительную функцию $f(t)$, для которой интеграл $\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt$ сходится. Известно, что такую функцию всегда можно разложить в интеграл Фурье:

$$f_{\omega} = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt; \quad f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f_{\omega} e^{i\omega t} d\omega. \quad (13.15)$$

Первая из формул (13.15) называется прямым преобразованием Фурье. Вторая формула – обратным преобразованием Фурье (формула обращения). Комплексная функция $f_{\omega} = f(\omega)$ называется фурье-образом функции $f(t)$, а сама функция $f(t)$ – оригиналом. Поскольку функция $f(t)$ является действительной ($f^* = f$), то из второй формулы (13.15) получаем:

$$f(t) = f^*(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) e^{-i\omega t} d\omega.$$

Делая во втором интеграле замену $\omega' = -\omega$, запишем

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} f^*(-\omega') e^{i\omega' t} d\omega'.$$

Отсюда получаем, что фурье-образ любой действительной функции обладает следующим свойством:

$$f(\omega) = f^*(-\omega) \quad \text{или} \quad f^*(\omega) = f(-\omega). \quad (13.16)$$

Формулы (13.15) позволяют получить очень важное интегральное представление для δ -функции Дирака, которое используется при выводе равенства Парсеваля. Действительно,

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} f_{\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(t') e^{-i\omega t'} dt' \right\} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')} \right\}. \end{aligned}$$

Это равенство должно выполняться для произвольной функции $f(t)$. Поэтому из основного определения δ -функции

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' f(t') \delta(t - t') \quad (13.17)$$

следует, что

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(t-t')}. \quad (13.18)$$

Формула (13.18) представляет собой разложение δ -функции Дирака $\delta(t - t')$ в интеграл Фурье. Такое представление δ -функции часто используется в самых разных разделах теоретической и математической физики.

Теперь вся подготовительная работа выполнена, и можно приступить к выводу самого *равенства Парсеваля*. Рассмотрим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) f^*(t).$$

Используя для каждой из функций $f(t)$ и $f^*(t)$ разложение в интеграл Фурье (13.15), запишем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt f^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) e^{i\omega t} d\omega \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega') e^{-i\omega' t} d\omega' \right\}.$$

Меняя порядок интегрирования, перепишем эту формулу в виде:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f^*(\omega') d\omega' \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega(\omega-\omega')}. \quad (13.19)$$

Последний интеграл по времени t в формуле (13.19) выражается через δ -функцию Дирака с помощью формулы (13.18):

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{it(\omega - \omega')} = 2\pi\delta(\omega - \omega').$$

Подставляя это в формулу (13.19), будем иметь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} d\omega' f(\omega) \cdot f^*(\omega') \delta(\omega - \omega').$$

Выполняя в последней формуле интегрирование по переменной ω' , получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\omega) f^*(\omega) d\omega.$$

Но в силу свойства (13.16) произведение $f(\omega)f^*(\omega) = f(\omega)f(-\omega)$ является четной функцией ω . Учитывая это, окончательно получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} f(\omega) f^*(\omega) d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |f_{\omega}|^2 d\omega. \quad (13.20)$$

Это и есть равенство Парсеваля. Его важная особенность состоит в том, что интеграл в правой части берется по *положительным* значениям ω .

Равенство Парсеваля можно использовать для вычисления интегралов от квадратов функций. Часто оказывается так, что исходная функция $f(t)$ может быть достаточно сложной, а ее фурье-образ $f(\omega)$ оказывается существенно более простой функцией, что и позволяет вычислить интеграл от величины $f^2(t)$.

Время жизни классической модели атома водорода

Рассмотрим вопрос о времени жизни для классической модели атома водорода. В этой модели считается, что вокруг положительно заряженного ядра атома водорода (протона) вращается по окружности радиусом R_0 отрицательно заряженный электрон¹. Задача состоит в том, чтобы учесть влияние излучения электрона на характер его движения вокруг ядра.

Поскольку электрон движется с ускорением \ddot{w} (рис. 14.1), то за счет излучения механическая энергия атома $E_{\text{мех}}$ превращается в энергию электромагнитного поля, т.е. величина $E_{\text{мех}}$ убывает. Однако полная энергия остается неизменной в силу закона сохранения энергии замкнутой системы *атом+поле*:

$$E_{\text{мех}} + E_{\text{изл}} = \text{const}. \quad (14.1)$$

Следовательно,

$$d(E_{\text{мех}} + E_{\text{изл}}) = 0 \Rightarrow dE_{\text{мех}} = -dE_{\text{изл}}. \quad (14.2)$$

Энергия, излученная движущимся электроном за промежуток времени $t \div t + dt$, определяется выражением: $dE_{\text{изл}}(t) = I(t)dt$. Здесь $I(t)$ – интенсивность излучения.

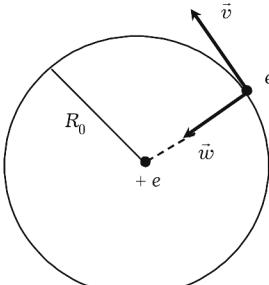


Рис. 14.1

¹ За величину R_0 можно принять боровский радиус атома водорода, который определяется в квантовой механике как: $R_0 \approx 0,5 \cdot 10^{-8} \text{ см}$.

Следовательно, закон сохранения энергии (14.2) может быть записан в виде:

$$\frac{dE_{\text{мех}}}{dt} = -I(t). \quad (14.3)$$

Формула (14.3) выражает тот факт, что механическая энергия атома водорода уменьшается со временем за счет излучения. В дипольном приближении

$$I_d(t) = \frac{\ddot{\vec{d}}^2(t)}{3c^3}. \quad (14.4)$$

Здесь $\ddot{\vec{d}}$ – вторая производная от дипольного момента электрона:

$$\ddot{\vec{d}} = e\ddot{\vec{r}}(t) = e\ddot{\vec{w}} = e\ddot{\vec{r}}/m_e. \quad (14.5)$$

Подставляя (14.5) в (14.4), получим:

$$I_d(t) = \frac{2e^2}{3c^3 m_e^2} F^2. \quad (14.6)$$

Величина силы взаимодействия электрона с ядром атома определяется законом Кулона:

$$F = e^2/r^2(t). \quad (14.7)$$

Подставляя это в формулу (14.6), получаем следующее выражение для интенсивности излучения:

$$I_d(t) = \frac{2e^6}{3c^3 m_e^2 r^4(t)}. \quad (14.8)$$

Формула (14.8) определяет зависимость полной интенсивности излучения от расстояния $r(t)$ между электроном и ядром атома. Подставляя (14.8) в основное уравнение (14.3), получим:

$$\frac{dE_{\text{мех}}(t)}{dt} = -\frac{2e^6}{3c^3 m_e^2 r^4(t)}. \quad (14.9)$$

Это уравнение связывает быстроту уменьшения механической энергии атома $E_{\text{мех}}(t)$ с расстоянием $r(t)$ между ядром атома и вращающимся электроном, т.е. содержит две неизвестные величины: $E_{\text{мех}}(t)$ и $r(t)$. Чтобы получить уравнение только для величины $E_{\text{мех}}(t)$, необходимо из него избавиться от величины $r(t)$.

чины $r(t)$, нужно выразить полную механическую энергию через расстояние $r(t)$:

$$E_{\text{мех}} = E_K + E_{\Pi} = \frac{m_e v^2}{2} - \frac{e^2}{r}. \quad (14.10)$$

Чтобы выразить кинетическую энергию электрона через расстояние $r(t)$, воспользуемся законом Ньютона для вращательного движения. Отклонение от кругового движения, вызванное потерей энергии электрона на излучение, за один оборот весьма мало. Поэтому движение электрона можно представить как равномерное вращение по окружности с медленно убывающим радиусом $r(t)$. Другими словами, можно считать, что в каждый момент времени полное ускорение равно центростремительному w_n , т.е. тангенциальным ускорением $|\ddot{w}_\tau| = \dot{v}$ можно пренебречь ($w_\tau \ll w_n$)¹:

$$\ddot{w} = \ddot{w}_n + \ddot{w}_\tau \approx \ddot{w}_n \Rightarrow w \approx \frac{v^2}{r(t)}. \quad (14.11)$$

Второй закон Ньютона при равномерном вращении имеет вид

$$m_e w_n = F \Rightarrow m_e \frac{v^2}{r(t)} = \frac{e^2}{r^2(t)}. \quad (14.12)$$

Отсюда находим, что

$$m_e v^2(t) = \frac{e^2}{r(t)}. \quad (14.13)$$

Подставляя это в (14.10), выразим полную механическую энергию через радиус $r(t)$:

$$E_{\text{мех}} = \frac{1}{2} \frac{e^2}{r} - \frac{e^2}{r} = -\frac{e^2}{2r(t)}. \quad (14.14)$$

Подставляя найденное значение для величины $E_{\text{мех}}$ в уравнение (14.9), получим:

¹ Фактически это условие начинает нарушаться только на очень малых расстояниях $r \sim e^2 / m_e c^2 \sim 10^{-13} \text{ см}$, на которых классическая электродинамика неприменима (см. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1988).

$$-\frac{e^2}{2} \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{r(t)} \right) = -\frac{2e^6}{3c^3 m_e^2} \frac{1}{r^4(t)} \Rightarrow -\frac{1}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{4e^4}{3c^3 m_e^2} \frac{1}{r^4(t)}.$$

Таким образом, уравнение для радиуса траектории электрона $r(t)$ в момент времени t записывается так:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{4e^4}{3c^3 m_e^2} \frac{1}{r^2(t)}. \quad (14.15)$$

Из (14.15) видно, что радиус траектории убывает, так как $dr/dt < 0$. Начальное условие для уравнения (14.15) имеет вид

$$r(t=0) = R_0. \quad (14.16)$$

Формула (14.15) является уравнением с разделяющимися переменными. Поэтому

$$r^2 dr = -\frac{4e^4}{3c^3 m_e^2} dt. \quad (14.17)$$

Интегрируя (14.17), получаем:

$$\int_{R_0}^r r^2 dr = -\frac{4e^4}{3c^3 m_e^2} \int_0^t dt \Rightarrow \frac{R_0^3}{3} - \frac{r^3}{3} = \frac{4e^4}{3c^3 m_e^2} t.$$

Отсюда находим искомую зависимость радиуса орбиты $r(t)$ от времени:

$$r(t) = \sqrt[3]{R_0^3 - \frac{4e^4}{c^3 m_e^2} t}. \quad (14.18)$$

Приравнивая выражение под знаком радикала нулю, находим время жизни классической модели атома водорода:

$$T = \frac{c^3 m_e^2}{4e^4} R_0^3. \quad (14.19)$$

Для удобства вычислений целесообразно воспользоваться формулой для классического "радиуса" электрона, который находится из условия¹:

¹ См. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1988. – § 37.
124

$$\frac{e^2}{r_e} = m_e c^2 \Rightarrow r_e = \frac{e^2}{m_e c^2} \approx 2,8 \cdot 10^{-13} \text{ см}. \quad (14.20)$$

С учетом выражения для величины r_e (14.20), формулу для времени жизни T можно записать так:

$$T = \frac{1}{4c} \left(\frac{c^4 m_e^2}{e^4} \right) R_0^3, \quad \text{т.е.} \quad T = \frac{R_0}{4c} \left(\frac{R_0}{r_e} \right)^2. \quad (14.21)$$

Подставляя сюда численные значения R_0 , r_e и $c = 3 \cdot 10^{10}$ см/с получим:

$$T = \frac{0,5 \cdot 10^{-8}}{4 \cdot 3 \cdot 10^{10}} \left(\frac{0,5 \cdot 10^{-8}}{2,8 \cdot 10^{-13}} \right)^2 \approx 10^{-11} \text{ с}! \quad (14.22)$$

Таким образом, в рамках *классической* модели атом водорода оказывается неустойчивой системой с очень малым временем жизни. Это противоречит реальному положению вещей. Однако разрешить это противоречие в рамках классической механики невозможно, так как атом водорода является не классическим, а квантовым объектом. Только рассмотрение атома водорода в рамках *квантовой механики* позволяет снять это противоречие.

Сила радиационного трения

Вследствие излучения механическая энергия ускоренно движущихся зарядов преобразуется в энергию электромагнитного поля. Изменение механической энергии зарядов за малый промежуток времени dt связано с интенсивностью дипольного излучения соотношением (12.25):

$$dE_{\text{мех}} = -I_d(t) dt \quad (15.1)$$

(в этом разделе рассматриваем излучение лишь *нерелятивистских* частиц, $v \ll c$). Знак минус в (15.1) говорит о том, что энергия системы *уменьшается*. Потери энергии на излучение приводят к постепенному торможению излучающих частиц. Такое торможение можно представить как результат действия некоторых сил, совершающих над зарядами отрицательную работу. Эти силы называют *силами радиационного трения*, или *лоренцевыми силами трения*, и связывают с обратным действием (реакцией) излучения на излучающие частицы.

Здесь мы сталкиваемся с проблемой описания действия заряда “самого на себя”, т.е. с проблемой взаимодействия заряженной частицы с собственным электромагнитным полем. Ускоренное движение заряда порождает излучение электромагнитных волн, что, в свою очередь, приводит к потере энергии и импульса частицы. Следовательно, само движение излучающей частицы зависит от создаваемого ей поля. Поэтому уравнения движения заряженной частицы должны включать в себя упомянутую выше силу радиационного трения. Однако введение в уравнения движения дополнительных членов, учитывающих обратное влияние излучения, не является вполне корректной процедурой и в некоторых случаях может приводить к абсурдным результатам (см. далее).

Установим явный вид силы радиационного трения. Для этого рассмотрим заряд, совершающий *финитное движение* (т.е. такое движение, при котором частица в течение всего времени остается в ограниченной области пространства). Вычислим среднее по време-

ии значение интенсивности излучения (т.е. среднюю энергию, траекторию частицей в единицу времени)¹

$$\begin{aligned}\langle I_d \rangle &= \frac{2}{3c^3} \left\langle \left(\frac{\mathbf{R}}{d(t)} \right)^2 \right\rangle = \frac{2e^2}{3c^3} \left\langle \left(\frac{\mathbf{R}}{V(t)} \right)^2 \right\rangle = \\ &= \frac{2e^2}{3c^3} \left\langle \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{V} \right) - \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{V} \right)^2 \right\rangle = -\frac{2e^2}{3c^3} \left\langle \left(\frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{v}}{V} \right)^2 \right\rangle.\end{aligned}\quad (15.2)$$

Усреднение по времени в (15.2) ведется по интервалу T , большому по сравнению с характерным временем движения заряда. Поэтому среднее от первого слагаемого в фигурных скобках обращается в нуль (см. сноску). Среднюю энергию (15.2), излучаемую частицей в единицу времени, можно представить в виде

$$\langle I_d \rangle = - \left\langle \left(\frac{\mathbf{F}_{\text{rad}}}{m}, \dot{\mathbf{V}} \right) \right\rangle, \quad (15.3)$$

где $\dot{\mathbf{V}}(t) = \frac{d\mathbf{R}}{dt}$ — скорость заряда, а величина $\frac{\mathbf{F}_{\text{rad}}}{m}$ определяется выражением:

$$\frac{\mathbf{F}_{\text{rad}}}{m} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{\mathbf{R}}{V}. \quad (15.4)$$

Соотношение (15.3) показывает, что $\frac{\mathbf{F}_{\text{rad}}}{m}$ есть искомая сила радиационного трения. Действительно, согласно (15.1) и (15.3), изменение энергии частицы (в единицу времени) вследствие излуче-

¹ Среднее по времени от *непериодической* функции $f(t)$ определяется соотношением, аналогичным (6.1):

$$\langle f \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt f(t),$$

где под T нужно понимать интервал времени, много больший характерного времени изменения функции f . При таком определении остается справедливым утверждение о том, что среднее значение производной всякой *ограниченной* функции равно нулю:

$$\left\langle \frac{df}{dt} \right\rangle = \frac{1}{T} \int_0^T dt \frac{df}{dt} = \frac{f(T) - f(0)}{T} \rightarrow 0$$

при достаточно больших значениях T .

ния равно мощности силы $F_{\text{rad}}^{\text{L}}$. Таким образом, сила радиационного трения пропорциональна третьей производной радиуса-вектора заряда или первой производной от его ускорения $\dot{\vec{w}}(t) = \ddot{\vec{r}}(t)$:

$$F_{\text{rad}}^{\text{L}} = \frac{2e^2}{3c^3} \dot{\vec{w}}. \quad (15.5)$$

Уравнение движения заряженной частицы (второй закон Ньютона) с учетом торможения излучением принимает вид:

$$m\ddot{\vec{r}} = \vec{F} + F_{\text{rad}}^{\text{L}}, \quad (15.6)$$

где \vec{F} – внешняя сила (сила Лоренца), действующая на заряд e . С учетом силы радиационного трения уравнение движения (15.6) оказывается дифференциальным уравнением *третьего* порядка (см. (15.4)).

Важно отметить, что уравнение (15.6) имеет смысл лишь при условии, что сила радиационного трения мала по сравнению с внешней силой \vec{F} :

$$|\vec{F}_{\text{rad}}| \ll |\vec{F}|. \quad (15.7)$$

В противном случае ($|\vec{F}_{\text{rad}}| \gg |\vec{F}|$) в уравнении (15.6) можно было бы пренебречь силой \vec{F} :

$$m\ddot{\vec{r}} \approx F_{\text{rad}}^{\text{L}} \Rightarrow m\ddot{\vec{w}} = \frac{2e^2}{3c^3} \frac{d\vec{w}}{dt} \quad (15.8)$$

и его решение имело бы вид

$$\vec{w}(t) = \vec{w}_0 \exp\left(\frac{3mc^3}{2e^2} t\right) \quad (15.9)$$

(\vec{w}_0 – некоторый постоянный вектор). Таким образом, решение “уравнения движения” (15.8) приводит к экспоненциально расту-

¹ Путем более сложных вычислений, используя формулы для запаздывающих потенциалов, можно показать, что выражение (15.4) определяет не только среднее, но и мгновенное значение силы радиационного трения (см. Ландау Л.Д., Лишниц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1988).

щему со временем ускорению частицы. Согласно (15.9), заряд должен неограниченно “самоускоряться” в отсутствии внешних полей, что, конечно, противоречит не только здравому смыслу, но и всем опытным данным. Возникшее противоречие говорит о том, что неравенство (15.7) является *необходимым условием* применимости уравнения движения (15.6).

Условие (15.7) позволяет упростить уравнение движения (15.6). Будем решать уравнение (15.6) методом последовательных приближений, рассматривая силу радиационного трения \vec{F}_{rad} как *малую добавку* к внешней силе \vec{F} . Тогда в *нулевом* приближении (в пренебрежении силой \vec{F}_{rad}) ускорение заряда будет определяться лишь внешней силой Лоренца: $\overset{\text{r}}{W}^{(0)} \approx \overset{\text{v}}{F}/m$. Подставляя $\overset{\text{r}}{W}^{(0)}$ в (15.5), находим силу радиационного трения

$$\overset{\text{r}}{F}_{\text{rad}} \approx \frac{2e^2}{3c^3} \overset{\text{r}}{W}^{(0)} = \frac{2e^2}{3mc^3} \frac{d\overset{\text{r}}{F}}{dt}. \quad (15.10)$$

С учетом (15.10) уравнение движения заряда будет выглядеть так:

$$m\overset{\text{r}}{F} = \overset{\text{r}}{F}(\overset{\text{r}}{r}, t) + \frac{2e^2}{3mc^3} \frac{d\overset{\text{r}}{F}}{dt}. \quad (15.11)$$

Сила Лоренца $\overset{\text{r}}{F}$, действующая на заряд e в момент времени t , равна

$$\overset{\text{r}}{F} = e\overset{\text{r}}{E}(\overset{\text{r}}{r}; t) + \frac{e}{c} [\overset{\text{r}}{\dot{r}}(t), \overset{\text{r}}{H}(\overset{\text{r}}{r}; t)], \quad (15.12)$$

где $\overset{\text{r}}{E}(\overset{\text{r}}{r}; t)$ и $\overset{\text{r}}{H}(\overset{\text{r}}{r}; t)$ – напряженности внешнего электрического и магнитного полей. В отличие от (15.6) уравнение (15.11) является уже дифференциальным уравнением *второго порядка*.

В заключение еще раз подчеркнем, что выражение (15.4) для силы радиационного трения получено в предположении, что скорости частиц малы ($V \ll c$), и не применимо для релятивистских частиц. В нерелятивистском случае излучаемая энергия обычно весьма велика. Однако она растет с энергией движущейся частицы, и эффект излучения становится существенным при очень больших (релятивистских) энергиях частиц, например для космических частиц в

магнитном поле Земли или быстрых электронов, движущихся в магнитных полях бетатронов. Расчеты показывают, что именно потери энергии на излучение в магнитном поле являются основным источником потерь, определяющих максимально возможные достижимые энергии в бетатроне. При достижении определенной скорости электрона в бетатроне энергия, которую он получает при очередном витке в камере бетатрона от внешнего поля, полностью расходуется на энергию излучения, и скорость электрона не увеличивается.

Частотный спектр излучения гармонического осциллятора с учетом силы радиационного трения

Реакция излучения может заметно влиять на *характер* излучающего поля, так как изменяет ускорение излучаемой частицы. В качестве примера, рассмотрим задачу о вычислении частотного спектра, излучаемого *одномерным осциллятором* с учетом силы *радиационного трения*. Пусть собственная частота колебаний осциллятора равна ω_0 . Без учета реакции излучения осциллятор совершал бы гармонические колебания с частотой ω_0 и излучал (в дипольном приближении) монохроматические волны всего одной частоты ω_0 . За счет силы радиационного трения механическое движение осциллятора изменится и перестанет быть строго гармоническим. Возникнет постепенное затухание колебаний. Поэтому характер излучения тоже изменится: осциллятор будет излучать целый спектр частот вблизи частоты ω_0 . Другими словами, за счет постепенного затухания механических колебаний осциллятора из-за потери на излучение монохроматическое излучение с одной частотой ω_0 превратится в излучение непрерывного спектра с различными частотами ω . Поскольку интенсивность излучения в дипольном приближении обратно пропорциональна квадрату массы частицы ($I(t) \sim \ddot{r}^2 \sim 1/m^2$), то наибольший эффект влияния излучения на характер движения частицы будет наблюдаться для наиболее легких частиц, например для электронов.

Пусть электрон находится под действием упругой силы $F_x = -kx(t)$, где x – смещение электрона вдоль оси Ox из положения равновесия $x = 0$. До момента времени $t \leq 0$ электрон покоялся и находился в смещенном из положения равновесия состоянии: $x(t=0) = x_0$. В начальный момент механическая энергия электрона равна его потенциальной энергии: $E_0 = kx_0^2/2$. По-

сле начала движения возникает сила радиационного трения $(F_{\text{rad}})_x = (2e^2/3c^3)w_x$. Учитывая ее малость по сравнению с упругой силой $F_x = -kx$, можно считать, что $w_x \approx -(k/m_e)x$ и, следовательно, $(F_{\text{rad}})_x \approx -(2e^2/3c^3)(k/m_e)x$. Проекция уравнения движения на ось Ox с учетом силы радиационного трения и начальные условия записывается так:

$$m_e \ddot{x} = -kx(t) - \frac{2e^2 k}{3m_e c^3} \dot{x}; \quad x(t=0) = x_0; \quad \dot{x}(t=0) = 0. \quad (16.1)$$

Поделив обе части уравнения (16.1) на величину m_e , запишем его в обычном виде:

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega_0^2 x(t) = 0; \\ x(t=0) = x_0; \\ \dot{x}(t=0) = 0. \end{cases} \quad (16.2)$$

Здесь обозначено:

$$\gamma = \frac{e^2 k}{3m_e^2 c^3} = \frac{r_e \omega_0^2}{3c} = \frac{2\pi}{3} \frac{r_e}{\lambda_0} \omega_0; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m_e}, \quad (16.3)$$

где r_e – классический “радиус” электрона, $r_e = e^2/m_e c^2 \approx 10^{-13}$ см; λ_0 – длина волны излучения на частоте ω_0 , $\lambda_0 = cT_0 = 2\pi c/\omega_0$.

Решение уравнения (16.2) с соответствующими начальными условиями хорошо известно из курса общей физики:

$$x(t) = x_0 e^{-\gamma t} \cos(\tilde{\omega}t), \quad \text{где } \tilde{\omega} = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} = \omega_0 \sqrt{1 - (\gamma/\omega_0)^2}. \quad (16.4)$$

Наличие “силы трения” несколько изменяет частоту колебаний системы: $\tilde{\omega} < \omega_0$.

Для дальнейших вычислений существенно, что отношение γ/ω_0 очень мало:

$$\frac{\gamma}{\omega_0} = \frac{2\pi}{3} \frac{r_e}{\lambda_0}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\gamma}{\omega_0} \sim \frac{r_e}{\lambda_0} \ll 1. \quad (16.5)$$

Например, для видимого света $\lambda_0 \sim 6000\text{ \AA} = 6 \cdot 10^{-5}\text{ см}$. Поэтому даже для таких сравнительно малых значений длин волн получаем, что $\gamma/\omega_0 \sim 10^{-8}$, а значение $(\gamma/\omega_0)^2 \sim 10^{-16}$! Это обстоятельство позволяет вместо выражения (16.4) с огромной степенью точности считать, что $\tilde{\omega} \approx \omega_0$. Таким образом, радиационное трение практически не изменяет частоты колебаний осциллятора. Поэтому закон движения (16.4) будет приближенно выглядеть так:

$$x(t) \approx \begin{cases} x_0, & \text{если } t < 0; \\ x_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t), & \text{если } t \geq 0. \end{cases} \quad (16.6)$$

Выражение (16.6) определяет закон движения осциллятора с учетом потери энергии на излучение. Формула (16.6) показывает, что из-за радиационного торможения движение осциллятора, хотя и происходит практически с прежней частотой ω_0 , *перестает быть строго гармоническим*. Появляется затухающий множитель $e^{-\gamma t}$. Поэтому амплитуда колебаний экспоненциально уменьшается со временем. Однако, в отличие от рассмотренного ранее атома водорода, осциллятор, как физический объект, будет существовать бесконечно долго. Просто при больших временах $t \gg 1/\gamma$ амплитуда его колебаний будет практически столь мала, что ее невозможно будет наблюдать даже с помощью точных физических приборов.

Теперь вычислим вторую производную от дипольного момента:

$$\frac{d^2}{dt^2} x(t) = \ddot{x}(t) \approx \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ -\omega_0^2 x_0 e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t), & \text{если } t \geq 0. \end{cases} \quad (16.7)$$

При получении формулы (16.7) мы не дифференцировали величину $e^{-\gamma t}$, так как производная от нее приводит к появлению малых членов $\sim \gamma$, которые можно отбросить. Действительно,

$$\begin{aligned} (e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t))' &= -\gamma e^{-\gamma t} \cos(\omega_0 t) - \omega_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t) \approx \\ &\approx -\omega_0 e^{-\gamma t} \sin(\omega_0 t). \end{aligned}$$

Следовательно, интенсивность излучения в дипольном приближении запишется так:

$$I_d(t) = \frac{2\epsilon X}{3c^3} \approx \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ \frac{2\epsilon^2}{3c^3} X_0^2 \omega_0^4 e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega_0 t), & \text{если } t \geq 0. \end{cases} \quad (16.8)$$

Теперь, зная интенсивность излучения, можем вычислить *полную энергию* излучения за все время $0 \leq t < \infty$ от начала движения осциллятора:

$$E_{изл} = \frac{2\epsilon^2}{3c^3} X_0^2 \omega_0^4 \int_0^\infty e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega_0 t) dt. \quad (16.9)$$

Интеграл, входящий в (16.9), не трудно вычислить точно, а уже затем учесть, что $\gamma/\omega_0 \ll 1$:

$$\int_0^\infty e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega_0 t) dt = \frac{1}{4\gamma} \left\{ 1 + \frac{1}{1 + (\gamma/\omega_0)^2} \right\} \approx \frac{1}{4\gamma}.$$

Таким образом, *полная энергия* излучения (16.9) с учетом значения величины γ (16.3) будет определяться выражением:

$$E_{изл} \approx \frac{\epsilon^2}{6\gamma c^3} X_0^2 \omega_0^4 = \frac{kX_0^2}{2}. \quad (16.10)$$

Как и должно быть, за все время движения полная механическая энергия осциллятора преобразуется в энергию электромагнитного излучения.

Заметим, что интеграл в формуле (16.9) можно вычислить совсем просто, если учесть, что $\cos^2(\omega_0 t) = (1 + \cos 2\omega_0 t)/2$. В основной области интегрирования ($t \leq 1/\gamma$), где еще не начинает сказываться влияние затухающей экспоненты, величина $\omega_0 t \leq \omega_0/\gamma$ ($\omega_0/\gamma \gg 1$), и $\cos(2\omega_0 t)$ является быстро осциллирующей функцией. Поэтому ее вкладом в значение интеграла можно пренебречь, т.е. положить $\cos^2(\omega_0 t) \approx 1/2$. Тогда, с точностью до членов $\sim (\gamma/\omega_0)^2$, приближенно можно записать, что

$$\int_0^\infty e^{-2\gamma t} \cos^2(\omega_0 t) dt \approx \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-2\gamma t} dt = \frac{1}{4\gamma}.$$

Теперь приступим к вычислению *спектрального распределения* излучения осциллятора по формуле (13.12):

$$dE_{\omega} = \frac{2}{3\pi c^3} \left| \left(\ddot{d}_x \right)_{\omega} \right|^2 d\omega. \quad (16.11)$$

Для этого сначала нужно вычислить *фурье-образ* второй производной от дипольного момента осциллятора $\left(\ddot{d}_x \right)_{\omega}$. Используя выражение (16.7) для величины $\ddot{d}_x(t)$, запишем:

$$\left(\ddot{d}_x \right)_{\omega} = \int_0^{\infty} \ddot{d}_x(t) e^{-i\omega t} dt = -\frac{e\chi_0\omega_0^2}{2} \int_0^{\infty} dt e^{-(\gamma+i\omega)t} \left\{ e^{i\omega_0 t} + e^{-i\omega_0 t} \right\}.$$

Поскольку

$$\int_0^{\infty} dt e^{-\gamma t} \exp \{-it(\omega - \omega_0)\} = \frac{1}{\gamma + i(\omega - \omega_0)},$$

получаем:

$$\left(\ddot{d}_x \right)_{\omega} = -e\chi_0\omega_0^2 \frac{(\gamma + i\omega)}{[\gamma + i(\omega - \omega_0)][\gamma + i(\omega + \omega_0)]}.$$

Подставляя выражение для величины $\left(\ddot{d}_x \right)_{\omega}$ в формулу (16.11) и учитывая, что $|a/b|^2 = |a|^2/|b|^2$, находим

$$dE_{\omega} = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2 \chi_0^2 \omega_0^4}{c^3} \frac{\gamma^2 + \omega^2}{[\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2][\gamma^2 + (\omega + \omega_0)^2]} d\omega. \quad (16.12)$$

В формуле (16.12) величина ω есть частота излучаемых электромагнитных волн и ее не следует путать с частотой механических колебаний. За счет реакции излучения происходит *естественное уширение спектра* относительно основной частоты ω_0 . При этом выражение (16.12) имеет резко выраженный максимум при частоте $\omega = \omega_0$. Учитывая, что $\gamma \ll \omega_0$, в точной формуле (16.12), в наиболее интересной и значимой области частот, можно положить, что $\gamma^2 + \omega^2 \approx \omega_0^2$ и $\gamma^2 + (\omega + \omega_0)^2 \approx 4\omega_0^2$. Тогда получим:

$$dE_{\omega} \approx \frac{1}{6\pi} \frac{e^2 x_0^2 \omega_0^4}{c^3} \frac{1}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega. \quad (16.13)$$

Из формулы (16.10) следует, что $e^2 x_0^2 \omega_0^4 / 6c^3 = E_{изл} \gamma$. Поэтому формулу (16.13) можно окончательно записать в виде

$$dE_{\omega} \approx \frac{E_{изл}}{\pi} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega. \quad (16.14)$$

Это и есть основная формула для спектрального распределения излучения осциллятора с собственной частотой ω_0 с учетом реакции излучения. Величина γ определяется выражением (16.3): $\gamma/\omega_0 = 2\pi r_e / 3\lambda_0 \ll 1$.

Проанализируем распределение (16.14) более подробно. Прежде всего, вычислим полную энергию излучения во всем диапазоне частот:

$$E_{изл} = \int_0^{\infty} dE_{\omega} = \frac{E_{изл}}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\gamma}{\gamma^2 + (\omega - \omega_0)^2} d\omega.$$

Поскольку $\gamma \ll \omega_0$, то подынтегральная функция имеет резкий максимум при значении $\omega = \omega_0$. Поэтому, делая замену переменной интегрирования $(\omega - \omega_0)/\gamma = \xi$ и расширяя пределы интегрирования до бесконечности ($-\infty < \xi < \infty$), запишем:

$$\frac{E_{изл}}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} = \frac{E_{изл}}{\pi} \left[\arctg \xi \right]_{-\infty}^{\infty} = E_{изл},$$

т.е., как и следовало ожидать, полная энергия, излученная осциллятором за все время движения во всем интервале частот $0 \leq \omega < \infty$, равна величине $E_{изл}$ (16.10).

Из формулы (16.14) видно, что при $\omega = \omega_0$ величина $dE_{\omega} / d\omega$ принимает наибольшее значение: $(dE_{\omega} / d\omega)_{max} = E_{изл} / \pi\gamma$. При частотах $\omega_1 = \omega_0 - \gamma$ и $\omega_2 = \omega_0 + \gamma$ значение величины

$dE_\omega / d\omega$ в два раза меньше ее максимального значения. Поэтому величину

$$\gamma = \frac{2\pi}{3} \frac{r_e}{\lambda_0} \omega_0$$

называют полушириною линии испускания осциллятора. Полуширина линии γ отвечает не зависящий от частоты ω_0 интервалу длин волн, по порядку величины равный классическому радиусу электрона:

$$|\Delta\lambda| = 2\pi \left| \Delta \frac{c}{\omega} \right| \approx \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \Delta\omega = \frac{2\pi c}{\omega_0^2} \frac{2\pi}{3} \frac{r_e}{\lambda_0} \omega_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0 \lambda_0} \frac{2\pi}{3} r_e = \frac{2\pi}{3} r_e. \quad (16.15)$$

На рис. 16.1 изображены графики спектральной плотности излучения $f = (dE_\omega / d\omega) / E_{\text{изл}}$ (16.14) в зависимости от приведенной частоты $x = \omega / \omega_0$ для трех значений параметра γ : $\gamma_1 = 0,02\omega_0$, $\gamma_2 = 0,01\omega_0$ и $\gamma_3 = 0,004\omega_0$.

Как видно из рисунка, все кривые имеют ярко выраженный максимум при $\omega = \omega_0$ ($x = 1$). С уменьшением параметра γ максимум в спектральном распределении становится более резким.

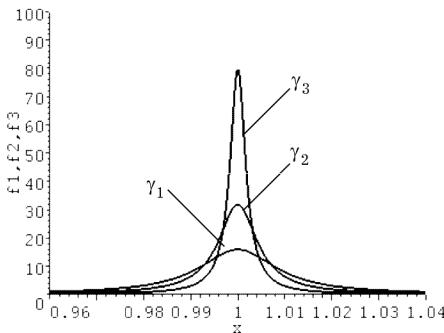


Рис. 16.1

Рассеяние электромагнитных волн свободным зарядом

Рассмотрим эффекты, возникающие при взаимодействии свободных заряженных частиц с электромагнитными волнами, созданными *внешними* источниками. Для определенности будем говорить об электроне. Пусть на свободный электрон¹ падает *извне* плоская монохроматическая волна. Поле падающей волны действует на электрон с силой Лоренца:

$$\vec{F} = e\vec{E} + \frac{e}{c}[\vec{v}\vec{H}]. \quad (17.1)$$

Под действием внешней силы (17.1) электрон приобретает ускорение и сам становится излучателем электромагнитных волн. Причем излучение этих волн может происходить в *любых* направлениях (никак не связанных с направлением распространения первичной волны). Поэтому говорят, что *происходит рассеяние* падающей волны.

Процесс рассеяния электромагнитных волн, так же как рассеяние частиц, принято характеризовать дифференциальным $d\sigma$ и полным σ сечениями рассеяния.

Дифференциальное сечение рассеяния $d\sigma$ в телесный угол $d\Omega$ определяют как отношение средней (по времени) энергии \overline{dl} , излучаемой в угол $d\Omega$ в единицу времени, к средней плотности потока энергии в падающей волне (т.е. к среднему значению вектора Умова – Пойнтинга \bar{S}):

$$d\sigma = \frac{\overline{dl}}{\bar{S}}. \quad (17.2)$$

Величина $d\sigma$ характеризует *угловое распределение* рассеянного излучения и имеет размерность площади (откуда и происходит название “сечение”).

¹ Например, атомные электроны можно считать свободными, если энергия квантов электромагнитного поля $\hbar\omega$ в падающем излучении велика по сравнению с энергией связи электронов в атоме.

Дадим краткое пояснение формулы (17.2). Количество энергии, рассеянной в элемент телесного угла $d\Omega$, при прочих равных условиях пропорционально плотности потока энергии в падающей волне, т.е. величине вектора Пойтинга. Поэтому значение \bar{dI} зависит не только от свойств рассеивающей системы, но и от величины \bar{S} . Поделив \bar{dI} на \bar{S} , исключаем эту зависимость. Дифференциальное сечение $d\sigma$ для данной системы зарядов будет одним и тем же, независимо от величины поля падающей волны, т.е. будет характеризовать только способность *самой* системы рассеивать электромагнитное излучение в данном направлении.

Интеграл от $d\sigma$ по всем направлениям дает полное сечение рассеяния

$$\sigma = \int_{4\pi} d\sigma = \frac{\bar{f}}{\bar{S}}. \quad (17.3)$$

Полное сечение рассеяния σ есть отношение средней (по времени) энергии \bar{f} , излучаемой в единицу времени *во всех направлениях*, к средней плотности потока энергии в падающей волне \bar{S} .

Все средние за период колебаний величины вычисляются по обычной формуле:

$$\bar{f} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt. \quad (17.4)$$

Вычисление полного сечения рассеяния.

Формула Томсона

Вычислим сначала *полное сечение рассеяния* σ плоской монохроматической волны на свободном электроне по формуле (17.3).

Будем предполагать, что скорость, приобретаемая электроном под действием поля волны, мала по сравнению со скоростью света: $v \ll c$. В этом случае магнитной составляющей силы Лоренца (17.1) можно пренебречь (поскольку величины напряженностей полей в падающей волне равны: $E = H$), и второй закон Ньютона для электрона принимает вид:

$$m_e \ddot{\vec{r}} = e \vec{E}(\vec{r}; t). \quad (17.5)$$

Для упрощения выкладок рассмотрим случай линейно поляризованной волны. Тогда уравнение (17.5) запишется так:

$$m_e \ddot{\vec{r}}(t) = e \vec{E}_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r}(t) - \omega t), \quad \vec{k} \perp \vec{E}_0, \quad (17.6)$$

где \vec{k} – волновой вектор, определяющий направление распространения падающей волны ($k = \omega/c$); ω – частота волны. Будем считать, что в начальный момент времени электрон покоялся в начале координат. Тогда колебания электрона будут происходить вдоль направления вектора \vec{E}_0 , т.е. в плоскости, перпендикулярной вектору \vec{k} . Поэтому в любой момент времени будет выполнено равенство $\vec{k} \cdot \vec{r}(t) = 0$, и уравнение (17.6) упрощается:

$$m_e \ddot{\vec{r}}(t) = e \vec{E}_0 \cos(\omega t). \quad (17.7)$$

Используя (17.7), находим вторую производную дипольного момента электрона:

$$\ddot{\vec{d}}(t) = e \ddot{\vec{r}} = \frac{e^2 \vec{E}_0}{m_e} \cos(\omega t). \quad (17.8)$$

Поскольку напряженности поля излучения (12.14) пропорциональны $\frac{d^2}{dt^2}$, то из (17.8) следует, что частота излучаемых электроном (т.е. рассеянных) волн совпадает с частотой падающей волны. Рассеяние, происходящее без изменения частоты, называется *рэлеевским*.

В дипольном приближении полная интенсивность излучения с учетом (17.8) равна

$$I_d = \frac{2 \left(\frac{d^2}{dt^2} \right)}{3c^3} = \frac{2e^4}{3m_e^2 c^3} E_0^2 \cos^2(\omega t) = \frac{2c}{3} E_0^2 r_e^2 \cos^2(\omega t). \quad (17.9)$$

Величина r_e – классический “радиус” электрона, $r_e = e^2 / m_e c^2 \sim 10^{-13}$ см. Усредненная интенсивность (17.9) по времени и учитывая, что

$$\overline{\cos^2(\omega t)} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(2\omega t)}{2} dt = \frac{1}{2},$$

находим среднюю энергию, излучаемую электроном в единицу времени во всех направлениях:

$$\bar{I}_d = cE_0^2 r_e^2 / 3. \quad (17.10)$$

Для вычисления плотности потока энергии падающей волны вспомним, что в плоской волне $\vec{E} \perp \vec{H}$ и $E^2 = H^2$. Поэтому величина вектора Пойтинга

$$|\vec{S}| = \frac{c}{4\pi} \vec{E}^2 = \frac{c}{4\pi} E_0^2 \cos^2(\omega t). \quad (17.11)$$

или после усреднения

$$\bar{S} = cE_0^2 / 8\pi. \quad (17.12)$$

Подставляя (17.10) и (17.12) в формулу (17.3), находим полное сечение рассеяния:

$$\sigma = \frac{8\pi}{3} r_e^2 \approx 6,65 \cdot 10^{-25} \text{ см}^2. \quad (17.13)$$

Соотношение (17.13) называется *формулой Томсона*. Примечательно, что полное сечение рассеяния свободным зарядом оказывается независящим от частоты рассеиваемой волны и определяется лишь характеристиками самой частицы¹.

Вычисление дифференциального сечения рассеяния

Определим угловое распределение излучения, рассеянного свободным электроном. Как и прежде, ограничимся случаем линейно поляризованной волны:

$$\vec{E}(\vec{r}; t) = \vec{E}_0 \cos(k\vec{r} - \omega t). \quad (17.14)$$

¹ Строго говоря, формула Томсона (17.13) справедлива лишь для падающего излучения с длиной волны λ , много большей комптоновской длины волны $\lambda_C \approx 2,4 \cdot 10^{-10} \text{ см}$. При меньших длинах волн ($\lambda \leq \lambda_C$) классическая электродинамика оказывается неприменимой, и взаимодействие электромагнитного поля с электроном должно описываться в рамках *квантовой электродинамики*. Квантовые эффекты приводят, в частности, к зависимости сечения рассеяния от частоты, с ростом частоты сечение убывает (см. Берестецкий В.Б., Лишинц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1989).

В дипольном приближении интенсивность излучения в элемент телесного угла $d\Omega$ в момент времени t определяется выражением (12.21):

$$dI_d = \frac{1}{4\pi c^3} \left[\frac{e}{a(t)} \cdot \vec{h} \right]^2 d\Omega. \quad (17.15)$$

Подставляя в (17.15) найденное выше значение \vec{a} (17.8) и усредняя затем по времени, получим следующее выражение для средней интенсивности излучения:

$$\begin{aligned} \overline{dI_d} &= \frac{e^4}{4\pi m_e^2 c^3} \left[\vec{E}_0 \cdot \vec{h} \right]^2 \overline{\cos^2(\omega t)} d\Omega = \\ &= \frac{cr_e^2}{8\pi} \left[\vec{E}_0 \cdot \vec{h} \right]^2 d\Omega = \frac{cr_e^2}{8\pi} E_0^2 \sin^2 \vartheta d\Omega. \end{aligned} \quad (17.16)$$

Здесь ϑ – угол между направлением рассеяния \vec{n} и вектором напряженности поля \vec{E}_0 (рис. 17.1). Вычисляя отношение $\overline{dI_d}$ к средней плотности потока энергии падающей волны \bar{S} (17.12), находим дифференциальное сечение рассеяния (17.2):

$$d\sigma = r_e^2 \sin^2 \vartheta d\Omega. \quad (17.17)$$

Как следует из (17.17), наиболее интенсивное рассеяние волны происходит в направлениях, перпендикулярных полю ($\vartheta = \pi/2$). Напротив, в направлениях вдоль поля ($\vartheta = 0$ и $\vartheta = \pi$) дифференциальное сечение рассеяния обращается в нуль. Интегрирование выражения (17.17) по полному телесному углу ($d\Omega = 2\pi \sin \vartheta d\vartheta$) дает полное сечение рассеяния (17.13).

Обратим внимание, что угол ϑ не является углом рассеяния волны. Угол *рассеяния* θ определяют как угол между направлением рассеяния \vec{n} и направлением распространения (волновым вектором \vec{k}) падающей волны. Связь между углами ϑ и θ нетрудно найти с помощью рис. 17.1. При указанном на рисунке выборе осей угол рассеяния θ является полярным углом сферической системы координат, а величина $\cos \vartheta$ совпадает с проекцией единичного вектора \vec{n} на ось Ox :

$$\cos \vartheta = n_x = \sin \theta \cos \psi \quad (17.18)$$

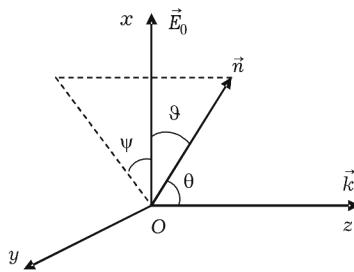


Рис. 17.1

(ψ – азимутальный угол сферической системы координат, см. рисунок). Используя (17.18), выразим дифференциальное сечение (17.17) через угол рассеяния волны θ :

$$d\sigma = r_e^2 (1 - \sin^2 \theta \cos^2 \psi) d\Omega. \quad (17.19)$$

Угол ψ определяет зависимость сечения рассеяния от направления вектора поляризации падающей волны E_0 .

Вычислим, наконец, дифференциальное сечение рассеяния неполяризованного электромагнитного излучения¹. Для этого усредним сечение (17.19) по всем возможным поляризациям, т.е. по всем ориентациям вектора E_0 в плоскости xOy (см. рис. 17.1). Очевидно, такое усреднение эквивалентно усреднению по азимутальному углу ψ :

$$d\bar{\sigma}(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\psi (d\sigma(\theta, \psi)). \quad (17.20)$$

¹ Такая ситуация имеет место, например, если волны, распространяющиеся в данном направлении k , генерируются многими независимыми источниками, так что начальные фазы волн оказываются случайными. Примером неполяризованного излучения может служить естественный свет.

Усредняя (17.19) по формуле (17.20) и учитывая, что $\cos^2 \psi = 1/2$, находим искомое дифференциальное сечение:

$$d\bar{\sigma} = r_e^2 \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{2}\right) d\Omega = \frac{r_e^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega. \quad (17.21)$$

Сечение (17.21) определяет угловое распределение неполяризованного излучения, рассеянного свободным электроном. Легко проверить, что интеграл от $d\bar{\sigma}$ по полному телесному углу ($d\Omega = 2\pi \sin \theta d\theta$) приводит к формуле Томсона (17.13) для полного сечения рассеяния.

**Релятивистская форма записи уравнений Максвелла.
Преобразование полей**

Как известно, описание движения частиц со скоростями, сравнимыми со скоростью света, выходит за рамки классической ньютонаской механики и составляет предмет *релятивистской* механики. Основным постулатом релятивистской теории является принцип относительности Эйнштейна, объединяющий конечность скорости распространения взаимодействий и инвариантность законов природы по отношению к преобразованиям координат и времени при переходе от одной инерциальной системы отсчета (ИСО) к другой. В отличие от классической механики, уравнения Максвелла справедливы при *любых* скоростях движения зарядов. Эйнштейновский принцип относительности уже “заложен” в уравнения электродинамики. В этом разделе установим законы преобразования основных электродинамических величин.

В релятивистской теории оказывается удобным введение четырехмерного комплексного пространства-времени. Любое событие в этом пространстве характеризуется четырехмерным радиусом-вектором

$$x_k = (x, y, z, ict) = (\vec{r}, ict). \quad (18.1)$$

Первые три компоненты $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ представляют собой декартовы координаты точки в обычном трехмерном пространстве. Четвертая, мнимая компонента $x_4 = ict$ определяет момент времени, в который событие произошло. В случае, когда оси координат в системах отсчета K и K' параллельны, а система K' движется относительно системы K вдоль оси Ox со скоростью $\tilde{v}_0 = (v_{0x}, 0, 0)$, формулы преобразования компонент четырехмерного радиуса-вектора при переходе из системы K' в K (преобразования Лоренца) имеют вид

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{x'_1 - i\beta x'_4}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad x_2 = x'_2; \quad x_3 = x'_3; \\x_4 &= \frac{x'_4 + i\beta x'_1}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \beta = v_{0x}/c\end{aligned}\tag{18.2}$$

(за начало отсчета времени по часам наблюдателей в системах K и K' принят тот момент времени, когда начала координат обоих систем, т.е. точки O и O' , совпадают). Если $v_{0x} > 0$, то система

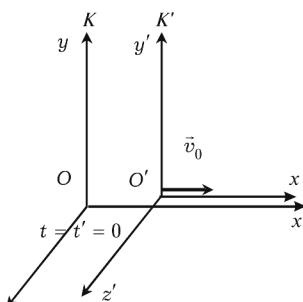


Рис. 18.1

K' движется в положительном направлении оси Ox , т.е. вправо, как это изображено на рис. 18.1. Если $v_{0x} < 0$, то влево.

Вообще, в теории относительности любая совокупность четырех величин $\mathbf{a}_i(a_1, a_2, a_3, a_4)$, которые при переходе от одной ИСО к другой преобразуются так же, как компоненты четырехмерного радиуса-вектора, т.е. по формулам

$$a_1 = \frac{a'_1 - i\beta a'_4}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad a_2 = a'_2; \quad a_3 = a'_3; \quad a_4 = \frac{a'_4 + i\beta a'_1}{\sqrt{1-\beta^2}};\tag{18.2a}$$

называется *четырехмерным вектором* (4-вектором). По аналогии с 4-радиусом-вектором, о первых трех компонентах (a_1, a_2, a_3) говорят, как о пространственных компонентах 4-вектора \mathbf{a}_i . Четвертую компоненту a_4 называют *временной*.

Формулы преобразования (18.2a) могут быть записаны в матричном виде:

$$a_i = \sum_{k=1}^4 \alpha_{ik}(\beta) a'_k = \alpha_{ik}(\beta) a'_k \quad (i = 1, 2, 3, 4). \quad (18.3)$$

По дважды повторяющемуся индексу k (немой индекс) в формуле (18.3) подразумевается суммирование (правило суммирования Эйнштейна). Коэффициенты $\alpha_{ik}(\beta)$ составляют матрицу преобразования Лоренца:

$$\alpha(\beta) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{pmatrix}. \quad (18.4)$$

Матрица обратного преобразования $(\alpha^{-1})_{ik} = \alpha_{ik}(-\beta) = \alpha_{ki}(\beta) = (\alpha^T)_{ik}$, т.е. $\alpha^{-1} = \alpha^T$, где α^T – транспонированная матрица Лоренца. По определению обратной матрицы

$$(\alpha^{-1} \cdot \alpha)_{ik} = (\alpha \cdot \alpha^{-1})_{ik} = \delta_{ik}. \quad (18.5)$$

Здесь δ_{ik} – символ Кронекера.

Перемножая прямую и транспонированную матрицы из (18.5) получаем, что

$$\alpha_{mi} \alpha_{mk} = \alpha_{im} \alpha_{km} = \delta_{ik}. \quad (18.6)$$

Таким образом, формула обратного преобразования для 4-радиуса-вектора (впрочем, как и для любого 4-вектора), выглядит так:

$$x'_k = (\alpha^{-1})_{ki} x_i = (\alpha^T)_{ki} x_i = \alpha_{ik}(\beta) x_i. \quad (18.7)$$

Используя формулу (18.7), легко получить формулы преобразования производных в четырехмерном пространстве:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x'_k} = \alpha_{ik} \frac{\partial}{\partial x'_k}; \quad (18.8)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_m} = \alpha_{ik} \alpha_{mn} \frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_n}. \quad (18.9)$$

(По повторяющимся индексам в формулах (18.8) и (18.9) подразумевается суммирование.)

Величины, инвариантные по отношению к преобразованию координат и времени при переходе от одной ИСО к другой, называют *4-скалярами*. Используя формулы преобразования (18.3) и свойства матрицы Лоренца (18.6), нетрудно показать, что 4-скаляром является, например, скалярное произведение двух любых 4-векторов \mathbf{a}_i и \mathbf{b}_k :

$$(\mathbf{a}_i, \mathbf{b}_l) = \alpha_{im} \alpha_{ik} \mathbf{a}'_m \mathbf{b}'_k = \delta_{mk} \mathbf{a}'_m \mathbf{b}'_k = \mathbf{a}'_k \mathbf{b}'_k = \text{inv}. \quad (18.10)$$

Если в формуле (18.9) положить $m = i$, то с учетом свойства (18.6) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} &= \frac{\partial^2}{\partial x'_i \partial x'_i} = \alpha_{mk} \alpha_{mn} \frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_n} = \\ &= \delta_{kn} \frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_n} = \frac{\partial^2}{\partial x'_k \partial x'_k} = \text{inv}. \end{aligned} \quad (18.11)$$

В обычных переменных дифференциальный оператор $\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ имеет вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \Delta - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \text{inv}. \quad (18.12)$$

Таким образом, волновой оператор (оператор Даламбера) не изменяется при переходе от одной инерциальной системы координат к другой ИСО, т.е. является 4-скаляром.

Получим формулу преобразования 4-дивергенции от произвольного 4-вектора

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial x'_k}{\partial x_i} \frac{\partial (\alpha_{im} A'_m)}{\partial x'_k} = \alpha_{ik} \alpha_{im} \frac{\partial A'_m}{\partial x'_k} = \delta_{km} \frac{\partial A'_m}{\partial x'_k} = \frac{\partial A'_k}{\partial x'_k}, \\ \text{т.е.} \quad \frac{\partial A_i}{\partial x_i} &= \frac{\partial A'_k}{\partial x'_k} = \text{inv}. \end{aligned} \quad (18.13)$$

Таким образом, 4-дивергенция от векторной функции $A_i(x_1, x_2, x_3, x_4)$ тоже является 4-скаляром.

Как уже отмечалось, основной задачей электродинамики является определение напряженностей электрического и магнитного полей по известному распределению зарядов и токов. Поэтому в первую очередь необходимо установить законы, по которым преобразуются плотности зарядов $\rho(\vec{r}, t)$ и токов $j(\vec{r}, t)$ при переходе от одной ИСО к другой. Для определения законов преобразования $\rho(\vec{r}, t)$ и $j(\vec{r}, t)$ воспользуемся фундаментальным свойством заряда частиц – его независимостью от выбора системы отсчета, т.е. инвариантностью по отношению к преобразованиям координат и времени. Рассмотрим некоторый элемент объема dV , расположенный в точке с радиусом-вектором \vec{r} . Если в некоторый момент времени t плотность заряда в точке \vec{r} равна $\rho(\vec{r}, t)$, то заряд, сосредоточенный в элементе объема dV , равен

$$d\mathbf{e} = \rho(\vec{r}, t)dV. \quad (18.14)$$

Пусть за малое время dt перемещение заряда составляет величину $d\vec{r}$. Поскольку координаты $\vec{r}(x, y, z)$ и величину ict можно рассматривать как компоненты радиуса-вектора в четырехмерном пространстве-времени, для изменения 4-радиуса-вектора заряда можно записать

$$dx_k = (dx, dy, dz, icdt) = (d\vec{r}, icdt) = (\hat{v}, ic)dt, \quad (18.15)$$

где \hat{v} – скорость движения заряда в точке \vec{r} в момент времени t , $\hat{v} = d\vec{r}/dt$. Умножим равенство (18.14) на величину dx_k :

$$d\mathbf{e} dx_k = \rho dV dx_k = \rho \frac{dx_k}{dt} dV dt. \quad (18.16)$$

Произведение $dV dt$, связанное с четырехмерным объемом $d^4x = ic dV dt$, является 4-скаляром, т.е. не изменяется при преобразованиях Лоренца. Действительно, при преобразовании (18.2) изменяются только координаты x_1 и x_4 ($x_2 = x'_2$, $x_3 = x'_3$). Используя якобиан перехода от переменных (x_1, x_4) к (x'_1, x'_4) , можно записать:

$$dx_1 dx_4 = |J| dx'_1 dx'_4,$$

где

$$J = \frac{\partial(x_1, x_4)}{\partial(x'_1, x'_4)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x'_4} \\ \frac{\partial x_4}{\partial x'_1} & \frac{\partial x_4}{\partial x'_4} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{-i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{i\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом,

$$dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = dx'_1 dx'_2 dx'_3 dx'_4 \text{ или } dV/dt = dV'/dt' = \text{inv}.$$

В силу инвариантности заряда $d\phi$ и определения величины dx_k (18.15), левая часть равенства (18.16) представляет собой 4-вектор. Следовательно, правая часть равенства (18.16) также должна быть 4-вектором. Поэтому можно заключить, что величина

$$j_k = \rho \frac{dx_k}{dt} \quad (k = 1, 2, 3, 4) \quad (18.17)$$

является 4-вектором. Вектор j_k (18.17) называют *четырехмерным вектором плотности тока*. Согласно (18.15) и (18.17), три пространственные компоненты j_k ($k = 1, 2, 3$) образуют трехмерный вектор плотности тока (1.7)

$$\vec{j}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{r}, t)\rho(\vec{r}, t). \quad (18.18)$$

Четвертая же компонента 4-вектора плотности тока, как следует из (18.15) и (18.17), пропорциональна объемной плотности заряда: $j_4 = i\phi\rho(\vec{r}, t)$. Таким образом, плотности зарядов $\rho(\vec{r}, t)$ и токов $\vec{j}(\vec{r}, t)$ образуют в четырехмерном пространстве 4-вектор

$$j_k = (\vec{j}, i\phi\rho). \quad (18.19a)$$

Закон преобразования величин ρ и \vec{j} при переходе из системы K' в систему K будет выглядеть так:

$$j_x' = \frac{j_x + v_{0x}\rho'}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad j_y' = j_y; \quad j_z' = j_z; \quad \rho' = \frac{\rho' + (v_{0x}/c^2)j_x'}{\sqrt{1-\beta^2}}. \quad (18.19b)$$

С учетом соотношений (18.1) и (18.19) уравнение непрерывности (1.13), выражющее закон сохранения заряда,

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} + \frac{\partial(i\phi\rho)}{\partial(ict)} = 0 \quad (18.20)$$

можно записать в виде

$$\frac{\partial j_1}{\partial x_1} + \frac{\partial j_2}{\partial x_2} + \frac{\partial j_3}{\partial x_3} + \frac{\partial j_4}{\partial x_4} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0, \quad \text{т.е.} \quad \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = 0. \quad (18.21)$$

Левая часть равенства (18.21) представляет 4-дивергенцию 4-вектора плотности тока j_i . Но в соответствие с формулой (18.13) 4-дивергенция от любого 4-вектора является 4-скаляром. Таким образом, закон сохранения заряда (18.20) является инвариантным по отношению к преобразованиям координат и времени:

$$\sum_{i=1}^4 \frac{\partial j_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^4 \frac{\partial j'_i}{\partial x'_i} = 0. \quad (18.22)$$

Обратимся теперь к уравнениям Максвелла для потенциалов поля (3.12)

$$\begin{cases} \Delta \vec{A}(\vec{r}; t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}(\vec{r}; t)}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}(\vec{r}; t); \\ \Delta \varphi(\vec{r}; t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi(\vec{r}; t)}{\partial t^2} = -4\pi \rho(\vec{r}; t) \end{cases} \quad (18.23)$$

и запишем их в четырехмерной форме. С учетом соотношения (18.12) уравнения для потенциалов (18.23) можно записать в виде

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x_i^2} = -\frac{4\pi}{c} \vec{j}; \\ i \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = -\frac{4\pi}{c} (i\varphi). \end{cases} \quad (18.24)$$

Правые части уравнений (18.24) с точностью до множителя $(-4\pi/c)$ совпадают с компонентами 4-вектора плотности тока j_k (18.19). Следовательно, левые части уравнений (18.24) также должны образовывать вектор в четырехмерном пространстве. Но поскольку оператор $\partial^2/\partial x_i^2$ является 4-скаляром, потенциалы поля должны образовывать четырехмерный вектор:

$$A_k = (\vec{A}, i\varphi). \quad (18.25)$$

Совокупность четырех величин $A_k = (A_x, A_y, A_z, i\varphi)$ (18.25) называют *4-потенциалом электромагнитного поля*. Три пространственные компоненты 4-потенциала составляют обычный трехмерный векторный потенциал \vec{A} . Временная компонента $A_4 = i\varphi$ с точностью до мнимой единицы совпадает со скалярным потенциалом φ . В явном виде формулы преобразования для потенциалов поля аналогичны формулам преобразования Лоренца (18.2) для координат и времени и выглядят так:

$$A_x = \frac{A'_x + \beta\varphi'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad A_y = A'_y; \quad A_z = A'_z; \quad \varphi = \frac{\varphi' + \beta A'_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (18.26)$$

Здесь учтено, что $A_4 = i\varphi$, $A'_4 = i\varphi'$.

Таким образом, первое уравнение системы (18.24) можно рассматривать как пространственные, а второе уравнение – как временную компоненты следующего четырехмерного уравнения:

$$\frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i^2} = -\frac{4\pi}{c} j_k \quad (k = 1, 2, 3, 4). \quad (18.27)$$

Уравнения для потенциалов (18.24) были получены при условии, что векторный потенциал \vec{A} и скалярный потенциал поля φ удовлетворяют калибровке Лоренца (3.9):

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad \text{т.е. } \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} + \frac{\partial (ic\varphi)}{\partial (ict)} = 0. \quad (18.28)$$

Используя определение 4-потенциала поля (18.25), условие калибровки (18.28) можно представить как равенство нулю 4-дивергенции вектора A_k :

$$\frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0. \quad (18.29)$$

В соответствии с (18.13) 4-дивергенция от 4-вектора A_k является 4-скаляром. Поэтому условие калибровки Лоренца (18.28) *релятивистски инвариантно*: потенциалы \vec{A} и φ , удовлетворяющие этому условию в одной системе отсчета, будут удовлетворять ему и в лю-

бой другой инерциальной системе отсчета. Система уравнений (18.27) и (18.29)

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 A_k}{\partial x_i^2} = -\frac{4\pi}{c} j_k; \\ \frac{\partial A_k}{\partial x_k} = 0 \end{cases} \quad (18.30)$$

представляет собой четырехмерную (релятивистски инвариантную) форму записи уравнений (3.12) для потенциалов поля.

Запишем далее соотношения (3.2) и (3.4), связывающие напряженности электрического и магнитного полей с потенциалами \vec{A} и φ , в четырехмерной форме. Согласно соотношению (3.4) и определению (18.25), проекции вектора напряженности электрического поля в декартовой системе координат можно записать в виде

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_x}{\partial t} = i \left(\frac{\partial(i\varphi)}{\partial x} - \frac{1}{ic} \frac{\partial A_x}{\partial t} \right),$$

т.е. $E_1 = i \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_4} \right); \quad (18.31a)$

$$E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_y}{\partial t} = i \left(\frac{\partial(i\varphi)}{\partial y} - \frac{1}{ic} \frac{\partial A_y}{\partial t} \right),$$

т.е. $E_2 = i \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_4} \right); \quad (18.31b)$

$$E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{c} \frac{\partial A_z}{\partial t} = i \left(\frac{\partial(i\varphi)}{\partial z} - \frac{1}{ic} \frac{\partial A_z}{\partial t} \right),$$

т.е. $E_3 = i \left(\frac{\partial A_4}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_4} \right). \quad (18.31c)$

Используя соотношение (3.2) и выражение для ротора в декартовых координатах, находим следующие выражения для проекций вектора напряженности магнитного поля:

$$H_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \text{ т.е. } H_1 = \frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}; \quad (18.32a)$$

$$H_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \text{ т.е. } H_2 = \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}; \quad (18.32b)$$

$$H_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}, \text{ т.е. } H_3 = \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}. \quad (18.32c)$$

Как видно из уравнений (18.31), (18.32), напряженности электрического и магнитного полей выражаются через производные 4-потенциала поля по четырехмерным координатам. Обозначим комбинации производных в правых частях уравнений (18.31) и (18.32) как

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4). \quad (18.33)$$

Совокупность 16-ти величин F_{ik} носит название *4-тензора электромагнитного поля*. Из определения (18.33) видно, что тензор F_{ik} является антисимметричным:

$$F_{ik} = -F_{ki}, \quad F_{ik} = 0 \text{ при } i = k. \quad (18.34)$$

Компоненты тензора электромагнитного поля F_{ik} можно записать в виде матрицы (4×4) , в которой индекс $i = 1, 2, 3, 4$ нумерует строки, а индекс k – столбцы. Принимая во внимание соотношения (18.31), (18.32), находим следующее выражение для тензора поля:

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (18.35)$$

Таким образом, проекции векторов напряженностей электрического и магнитного полей являются компонентами одного 4-тензора электромагнитного поля. Компоненты 4-тензора преобразуются как произведение проекций двух 4-векторов, т.е. по формулам

$$F_{ik} = \alpha_{im} \alpha_{kn} F'_{mn}. \quad (18.36)$$

Используя явный вид матрицы Лоренца (18.4), из соотношения (18.36) можно найти формулы преобразования напряженностей \vec{E} и \vec{H} при переходе от одной ИСО к другой:

$$E_x = E'_x; \quad E_y = \frac{E'_y + \beta H'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad E_z = \frac{E'_z - \beta H'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad (18.37)$$

$$H_x = H'_x; \quad H_y = \frac{H'_y - \beta E'_z}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad H_z = \frac{H'_z + \beta E'_y}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \quad (18.38)$$

Таким образом, при переходе от системы K к системе K' продольные составляющие полей не изменяются (в отличие от потенциалов поля), а изменяются только поперечные компоненты напряженностей полей.

Поле равномерно движущегося заряда

Определим поле, создаваемое *равномерно движущимся* зарядом. Наиболее просто эта задача может быть решена с помощью формул преобразования потенциалов поля от одной инерциальной системы отсчета к другой.

Пусть заряд e движется с постоянной скоростью \vec{v}_0 вдоль оси Ox неподвижной системы отсчета K , причем в момент времени $t = 0$ заряд проходит через начало системы координат. Тогда радиус-вектор заряда $\vec{r}_e(t)$ в системе K имеет компоненты

$$\vec{r}_e(t) = \vec{v}_0 t = (v_0 t, 0, 0). \quad (19.1)$$

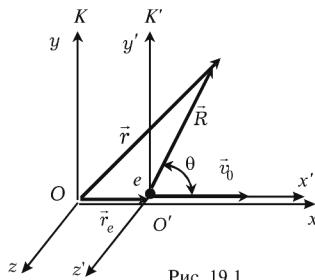


Рис. 19.1

Выберем систему отсчета K' , движущуюся вместе с зарядом так, чтобы заряд поконился в начале координат системы K' (рис. 19.1). Тогда в момент $t = 0$ начала координат обеих систем совпадают.

Для выбранных таким образом систем K и K' справедливы формулы преобразований Лоренца для координат и времени (18.2) и потенциалов поля (18.26):

$$A_x = \frac{A'_x + \beta \varphi'}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad A_y = A'_y; \quad A_z = A'_z; \\ \varphi = \frac{\varphi' + \beta A'_x}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \beta = \frac{v_0}{c}. \quad (19.2)$$

Используя соотношения (19.2), можно найти потенциалы поля \vec{A} и φ в неподвижной системе K по известным выражениям для потенциалов \vec{A}' и φ' в системе K' .

Определение потенциалов поля в системе K' , в которой заряд поконится, не составляет труда. Как известно, покоящийся заряд не создает магнитного поля. Следовательно, в силу того, что $\vec{H}' = \text{rot} \vec{A}'$, векторный потенциал в системе K' может быть выбран тождественно равным нулю:

$$\vec{A}'(\vec{r}') = 0. \quad (19.3)$$

С учетом (19.3) формулы преобразования потенциалов (19.2) принимают вид

$$A_x = \frac{V_0}{c} \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}}; A_y = 0; A_z = 0; \varphi = \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad \left(\beta = \frac{V_0}{c} \right). \quad (19.4)$$

Как видно из (19.4), в неподвижной системе отсчета K единственная отличная от нуля компонента векторного потенциала A_x с точностью до постоянного множителя V_0/c совпадает со скалярным потенциалом φ :

$$A_x = \frac{V_0}{c} \frac{\varphi'}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{V_0}{c} \varphi.$$

Учитывая, что скорость заряда \vec{v}_0 направлена вдоль оси Ox $\vec{v}_0 = (V_{0x}, 0, 0)$, первые три равенства в (19.4) можно записать в векторной форме:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\vec{v}_0}{c} \varphi(\vec{r}, t). \quad (19.5)$$

Формула (19.5) устанавливает простую связь между величинами \vec{A} и φ в системе K . Таким образом, задача сводится к вычислению только скалярного потенциала φ в системе K .

Для нахождения величины $\varphi(\vec{r}; t)$ воспользуемся последним из соотношений (19.4). В движущейся системе K' заряд поконится в начале координат. Следовательно, скалярный потенциал поля в

системе K' определяется законом Кулона для точечного заряда (4.8):

$$\varphi'(\vec{r}') = \frac{e}{r'}, \quad r' = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}. \quad (19.6)$$

Подставляя (19.6) в последнюю формулу (19.4), находим выражение для скалярного потенциала поля φ в неподвижной системе отсчета K :

$$\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{e}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}}. \quad (19.7)$$

Формула (19.7), однако, еще не решает поставленной задачи, поскольку выражает потенциал поля φ в системе K через координаты точки наблюдения в системе K' . Теперь необходимо выразить координаты (x', y', z') в формуле (19.7) через координаты точки наблюдения (x, y, z) и время t в системе K . Согласно формулам обратного преобразования Лоренца, которые получаются из (18.2) заменой $v_0 \rightarrow -v_0$ ($-i\beta x'_4 \rightarrow -i(-\beta)ict = -v_0 t$) имеем:

$$x' = \frac{x - v_0 t}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad y' = y'; \quad z' = z'. \quad (19.8)$$

С учетом соотношений (19.8) выражения (19.7) и (19.5) для скалярного и векторного потенциалов поля в системе K принимают вид:

$$\begin{cases} \varphi(\vec{r}; t) = \frac{e}{\sqrt{(x - v_0 t)^2 + (1 - \beta^2)y^2 + z^2}}; \\ \vec{A}(\vec{r}; t) = \frac{\vec{v}_0}{c} \frac{e}{\sqrt{(x - v_0 t)^2 + (1 - \beta^2)y^2 + z^2}} \end{cases} \left(\beta = \frac{v_0}{c} \right). \quad (19.9)$$

Формулы (19.9) определяют потенциалы поля, создаваемого зарядом, движущимся с произвольной по величине постоянной скоростью v_0 (разумеется, $v_0 < c$!).

Напряженности электрического и магнитного полей могут быть найдены по известным формулам:

$$\overset{\text{r}}{E}(\vec{r}; t) = -\text{grad} \varphi(\vec{r}; t) - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \overset{\text{r}}{A}(\vec{r}; t); \quad \overset{\text{r}}{H}(\vec{r}; t) = \text{rot} \overset{\text{r}}{A}(\vec{r}; t). \quad (19.10)$$

Подставляя потенциалы поля в первую формулу (19.10) и вычисляя производные по координатам и времени, получаем для напряженности электрического поля в системе K следующее выражение:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{e(1 - \beta^2)}{\{(x - v_0 t)^2 + (1 - \beta^2)(y^2 + z^2)\}^{3/2}} \vec{R}(\vec{r}, t). \quad (19.11)$$

Здесь $\vec{R}(\vec{r}, t)$ – радиус-вектор, проведенный в системе K от заряда e в точку наблюдения (см. рис. 19.1). Из рисунка видно, что

$$\vec{R}(\vec{r}, t) = \vec{r} - \vec{r}_e(t) = \vec{r} - \vec{v}_0 t, \text{ т.е. } \vec{R} = (x - v_0 t, y, z). \quad (19.12)$$

Полученному выражению (19.11) для напряженности электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ можно придать более наглядный вид, если ввести угол $\theta(\vec{r}, t)$ между направлением скорости движения заряда \vec{v}_0 и радиусом-вектором $\vec{R}(\vec{r}, t)$ (см. рис. 19.1). Видно, что

$$\begin{aligned} x - v_0 t &= R \cos \theta, \quad y^2 + z^2 = R^2 \sin^2 \theta, \\ R &= \sqrt{(x - v_0 t)^2 + y^2 + z^2}. \end{aligned} \quad (19.13)$$

Используя соотношения (19.13), находим

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{e\vec{R}}{R^3} F(\theta; \beta), \text{ где } F(\theta; \beta) = \frac{1 - \beta^2}{\{1 - \beta^2 \sin^2 \theta\}^{3/2}}. \quad (19.14)$$

При скоростях v_0 , малых по сравнению со скоростью света ($\beta \ll 1$), когда $F \approx 1$, формула (19.14) переходит в обычную формулу закона Кулона для нерелятивистски движущегося точечного заряда:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{e\vec{R}}{R^3} = e \frac{\vec{r} - \vec{v}_0 t}{|\vec{r} - \vec{v}_0 t|^3} \quad (v_0 \ll c). \quad (19.15)$$

Таким образом, первый сомножитель в (19.14) есть обычный закон Кулона без учета релятивистских эффектов. Релятивистские эффекты проявляются в отличие функции $F(\theta; \beta)$ от единицы.

Проанализируем формулу (19.14) для напряженности электрического поля заряда. Как и в случае покоящегося заряда, напряженность электрического поля *направлена* по радиусу-вектору \vec{R} ,

проведенному от заряда в точку наблюдения. Однако величина напряженности поля E зависит теперь не только от расстояния до заряда R , но и от угла θ между векторами \vec{R} и \vec{v}_0 и величины $\beta = v_0/c$ (посредством релятивистского фактора $F(\theta; \beta)$). При фиксированном расстоянии R наибольшее значение напряженность электрического поля E имеет в направлении, перпендикулярном направлению движения заряда ($\theta = \pi/2$, $\sin \theta = 1$). В этом случае

$$F(\theta = \pi/2; \beta) = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

т.е. $|\vec{E}(\theta = \pi/2)| = E_{\perp} = \frac{e}{R^2} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$ (19.16a)

При уменьшении угла θ от $\pi/2$ до нуля, а также при увеличении θ от $\pi/2$ до π величина поля E убывает и достигает наименьшего значения в направлении вдоль вектора скорости ($\theta = 0$ или $\theta = \pi$, $\sin \theta = 0$). В этом случае

$$F(\sin \theta = 0; \beta) = 1 - \beta^2,$$

т.е. $|\vec{E}(\sin \theta = 0)| = E_{||} = \frac{e}{R^2} (1 - \beta^2).$ (19.16b)

Интересно отметить, что при увеличении скорости заряда (т.е. при приближении параметра β к единице) величина поля E_{\perp} возрастает, а $E_{||}$ — уменьшается. Можно сказать, что электрическое поле движущегося заряда как бы “сплющивается” по направлению движения. При скоростях v_0 , близких к скорости света, числитель в формуле (19.14) стремится к нулю. Поэтому поле будет отлично от нуля лишь в узком интервале углов, близких к $\pi/2$, когда знаменатель в (19.14) также оказывается малым. Понятно, что отмеченный эффект “сплющивания” поля в поперечном направлении носит релятивистский характер и исчезает при малых скоростях заряда.

На рис. 19.2 представлены графики зависимости функции $F(\theta; \beta)$ в полярных координатах по углу θ для трех различных значений величины $\beta = 0,1; 0,7$ и $0,9$. Видно, что даже при $\beta = 0,1$

($v_0 \approx 30000$ км/с) функция F практически равна единице, т.е. напряженность электрического поля (19.14) почти не отличается от закона Кулона. Но при $\beta = 0,9$ отличие становится весьма заметным и наблюдается эффект “сплющивания” поля в поперечном направлении.

Фактически функция $F(\theta; \beta)$ определяет величину напряженности электрического поля в единицах $(e R^2)$. Поэтому графики на рис. 19.2 показывают угловую зависимость поля $E(\theta)$ при фиксированном значении R (19.13).

Вычислим степень “сплющивания” поля, т.е. отношение $E_{\perp}/E_{||}$:

$$\frac{E_{\perp}}{E_{||}} = \frac{1}{(1 - \beta^2)^{3/2}} \quad \left(\beta = \frac{v_0}{c} \right) \quad (19.17)$$

в зависимости от кинетической энергии частицы $T = mc^2/\sqrt{1 - (v_0/c)^2} - mc^2$. Поскольку $1/\sqrt{1 - (v_0/c)^2} = 1 + T/mc^2$, то из (19.17) получаем:

$$\frac{E_{\perp}}{E_{||}} = \left(1 + \frac{T}{mc^2} \right)^{3/2}. \quad (19.18)$$

Если кинетическая энергия равна энергии покоя частицы ($\beta = \sqrt{3}/2 \approx 0,87$), получаем, что $E_{\perp}/E_{||} = \sqrt{8} \approx 2,8$. При $T = 3mc^2$ ($\beta = \sqrt{15}/4 \approx 0,968$) значение $E_{\perp}/E_{||} = 8$.

Вычислим напряженность магнитного поля $H(\vec{r}, t)$. Подставим выражение (19.5) для векторного потенциала во вторую формулу

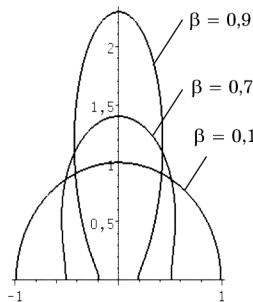


Рис. 19.2

(19.10). Используя известную формулу векторного анализа (см. прил. I), получаем

$$\vec{H} = \text{rot} \left(\frac{\vec{v}_0}{c} \phi \right) = -[\vec{v}_0, \text{grad } \phi]. \quad (19.19)$$

Выразим $\text{grad } \phi$ в (19.19) через напряженность электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$. Согласно первой формуле (19.10) и с учетом (19.5) имеем

$$\text{grad } \phi(\vec{r}; t) = -\vec{E} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \vec{A} = -\vec{E} - \frac{\vec{v}_0}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t}. \quad (19.20)$$

Подставляя далее соотношение (19.20) в (19.19) и учитывая равенство нулю векторного произведения вектора \vec{v}_0 на самого себя, окончательно находим:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} [\vec{v}_0, \vec{E}(\vec{r}, t)] = \frac{e}{c} \frac{[\vec{v}_0, \vec{R}]}{R^3} F(\theta; \beta). \quad (19.21)$$

Таким образом, напряженность магнитного поля $\vec{H}(\vec{r}, t)$, создаваемого равномерно движущимся зарядом, однозначно связана с напряженностью создаваемого им электрического поля $\vec{E}(\vec{r}, t)$ (19.14). В каждой точке пространства вектор \vec{H} оказывается перпендикулярным векторам \vec{E} и \vec{v}_0 . При этом величина напряженности магнитного поля всегда меньше величины электрического поля:

$$|\vec{H}| = \frac{V_0}{c} |\vec{E}| \sin \theta. \quad (19.22)$$

Как видно из (19.22), в продольном направлении ($\theta = 0, \pi$) магнитное поле вообще отсутствует. Подставляя значение величины вектора \vec{E} в формулу (19.22), получим следующее выражение для величины напряженности магнитного поля равномерно движущегося заряда:

$$|\vec{H}| = \frac{V_0}{c} \frac{e}{R^2} \sin \theta F(\theta; \beta). \quad (19.23)$$

При скоростях v_0 , малых по сравнению со скоростью света ($\beta \ll 1$), когда $F \approx 1$, формулы (19.21) и (19.23) определяют напряженность магнитного поля нерелятивистски движущегося заряда:

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{e [\vec{v}_0 \cdot \vec{R}]}{c R^3}, \quad |\vec{H}| = \frac{v_0}{c} \frac{e}{R^2} \sin \theta \quad (v_0 \ll c). \quad (19.24)$$

Так же как и для электрического поля, релятивистские эффекты проявляются в отличие фактора $F(0; \beta)$ от единицы.

На рис. 19.3 представлены в полярных координатах графики зависимости $|\vec{H}|$

(19.23) (в единицах e/R^2) от угла θ при фиксированном значении R для прежних трех значений параметра $\beta = 0,1; 0,7$ и $0,9$. Из сравнения рис. 19.2 и 19.3 видно, что при $\beta = 0,1$ величина магнитного поля существенно меньше величины электрического поля. При $\beta = 0,9$ в соответствии с (19.22) напряженность магнитного поля в поперечном направлении в 0,9 раз меньше напряженности электрического поля заряда. В продольном направлении магнитное поле отсутствует.

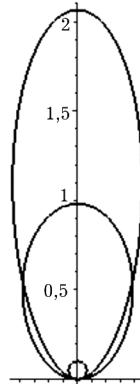


Рис. 19.3

Задачи к разделу 1

Задача 1.1. Точечный заряд e_a движется вдоль оси Ox по произвольному закону $x = x_a(t)$. Непосредственным вычислением убедиться в том, что уравнение непрерывности (1.14) выполняется независимо от закона движения.

Решение. Так как заряд движется вдоль оси Ox , то в любой момент времени $y_a(t) = z_a(t) = 0$. По той же причине отлична от нуля только проекция вектора плотности тока на ось Ox : $j_y = j_z = 0$. При одномерном движении уравнение непрерывности (1.14) выглядит так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j_x}{\partial x} = 0. \quad (1)$$

В соответствие с общими формулами (1.6) и (1.8) будем иметь:

$$\rho(\vec{r}; t) = e_a \delta\{x - x_a(t)\} \cdot \delta\{y\} \cdot \delta\{z\}; \quad (2)$$

$$j_x(\vec{r}; t) = e_a \mathbf{x}_a(t) \delta\{x - x_a(t)\} \cdot \delta\{y\} \cdot \delta\{z\}. \quad (3)$$

Здесь $\mathbf{x}_a(t)$ – проекция скорости заряда на ось Ox , $\mathbf{x}_a(t) = dx_a(t)/dt = (\dot{V}_a(t))_x$. Обозначим $u(x; t) = x - x_a(t)$, так, что $du/dt = -\dot{x}_a(t)$ и $du/\partial x = 1$. Тогда, используя правило дифференцирования сложной функции, можем записать:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = e_a \frac{d\delta\{u\}}{du} \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \delta\{y\} \cdot \delta\{z\} = -e_a \mathbf{x}_a(t) \cdot \frac{d\delta\{u\}}{du} \cdot \delta\{y\} \cdot \delta\{z\}; \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{j} &= \frac{\partial j_x}{\partial x} = e_a \mathbf{x}_a(t) \frac{d\delta\{u\}}{du} \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \delta\{y\} \cdot \delta\{z\} = \\ &= e_a \mathbf{x}_a(t) \cdot \frac{d\delta\{u\}}{du} \cdot \delta\{y\} \cdot \delta\{z\} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \end{aligned} \quad (5)$$

Следовательно, уравнение непрерывности (1) выполняется при любом законе движения $x_a(t)$ точечного заряда e_a .

Задача 1.2. Равномерно заряженный шар радиусом R вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 относительно вертикальной оси Oz , проходящей через центр шара (см. рисунок). Полный заряд шара – Q . Определить плотность заряда и плотность тока такой системы. Убедиться, что выполняется уравнение непрерывности (1.14).

Решение. Поместим начало системы координат в центр шара. Вне шара ($r > R$) заряды отсутствуют. Поэтому вне шара плотность заряда и плотность тока равны нулю. Внутри шара плотность заряда постоянна, так как по условию задачи шар заряжен равномерно. Следовательно,

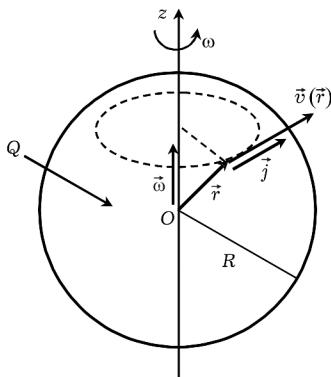
$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & \text{если } 0 \leq r \leq R; \\ 0, & \text{если } r > R. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь

$$\rho_0 = \frac{Q}{V_{\text{шара}}} = \frac{3Q}{4\pi R^3}. \quad (2)$$

По определению (1.8) $\overset{\text{l}}{j}(\overset{\text{l}}{r}, t) = \rho(\overset{\text{l}}{r}, t) \cdot \overset{\text{l}}{v}(\overset{\text{l}}{r}, t)$. Линейная скорость точки $\overset{\text{l}}{v}(\overset{\text{l}}{r})$ связана с угловой скоростью вращения хорошо известной из курса общей физики формулой: $\overset{\text{l}}{v}(\overset{\text{l}}{r}) = [\overset{\text{l}}{\omega}, \overset{\text{l}}{r}]$.

В нашем случае $\overset{\text{l}}{\omega} = \overset{\text{l}}{\omega}_0 = \text{const}$, причем вектор $\overset{\text{l}}{\omega}_0$ направлен по оси вращения Oz : $\overset{\text{l}}{\omega}_0 = (0, 0, \omega_0)$. Плотность тока не зависит от времени и выглядит так:



$$\begin{aligned} \overset{\text{r}}{j}(\overset{\text{r}}{r}) &= \rho(\overset{\text{r}}{r}) \cdot \overset{\text{r}}{V}(\overset{\text{r}}{r}) = \rho(\overset{\text{r}}{r}) \cdot [\overset{\text{r}}{\omega}_0, \overset{\text{r}}{r}] = \\ &= \begin{cases} \rho_0 [\overset{\text{r}}{\omega}_0, \overset{\text{r}}{r}], & \text{если } 0 \leq r \leq R; \\ 0, & \text{если } r > R. \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

В каждой точке $\overset{\text{r}}{r}$ внутри шара вектор плотности тока сонаправлен с вектором линейной скорости (в этой точке) и лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Выпишем в явном виде проекции вектора $\overset{\text{r}}{j}$ в декартовой системе координат. В области $0 \leq r \leq R$

$$\overset{\text{r}}{j} = \rho_0 [\overset{\text{r}}{\omega}_0, \overset{\text{r}}{r}] = \rho_0 \begin{vmatrix} \overset{\text{r}}{\mathbf{e}}_x & \overset{\text{r}}{\mathbf{e}}_y & \overset{\text{r}}{\mathbf{e}}_z \\ 0 & 0 & \omega_0 \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\overset{\text{r}}{\mathbf{e}}_x \omega_0 y + \overset{\text{r}}{\mathbf{e}}_y \omega_0 x,$$

$$\text{т.е. } \overset{\text{r}}{j} = (-\omega_0 y, \omega_0 x, 0). \quad (4)$$

Так как плотность зарядов не зависит явно от времени, то $\partial\rho/\partial t = 0$. Поэтому уравнение непрерывности (1.14) выглядит так:

$$\operatorname{div} \overset{\text{r}}{j} = 0, \text{ т.е. } \partial j_x(\overset{\text{r}}{r})/\partial x + \partial j_y(\overset{\text{r}}{r})/\partial y + \partial j_z(\overset{\text{r}}{r})/\partial z = 0. \quad (5)$$

Подставляя сюда проекции вектора $\overset{\text{r}}{j}$ (4), получим:

$$-\omega_0 (\partial y / \partial x) + \omega_0 (\partial x / \partial y) = 0 + 0 = 0,$$

т.е. уравнение непрерывности выполняется в любой точке $\overset{\text{r}}{r}$.

Задача 1.3. Определить плотность заряда равномерно заряженного эллипсоида с полуосами a , b и c (см. рисунок). Полный заряд эллипсоида – Q .

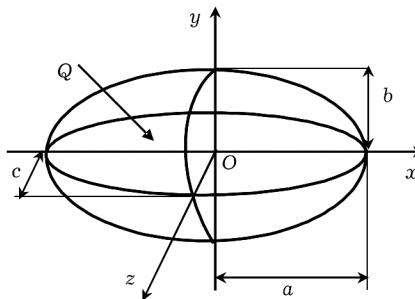
Решение. Уравнение поверхности эллипсоида в декартовых координатах выглядит так:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \quad (1)$$

Вне эллипсоида заряды отсутствуют и поэтому плотность заряда равна нулю.

Так как эллипсоид заряжен равномерно, то плотность заряда внутри эллипсоида

$$\rho_0 = \frac{Q}{V_{abc}}. \quad (2)$$



Здесь V_{abc} – объем эллипсоида:

$$V_{abc} = \iiint_V dV = \iiint_V dx dy dz. \quad (3)$$

Интегрирование в (3) ведется по области пространства внутри эллипсоида, т.е. по области

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1. \quad (4)$$

Введем новые переменные интегрирования $x' = x/a$, $y' = y/b$ и $z' = z/c$. В новых переменных $dx dy dz = abc \cdot dx' dy' dz'$ и выражение (3) принимает вид:

$$V_{abc} = abc \cdot \iiint_{V'} dx' dy' dz'. \quad (5)$$

Интегрирование в (5) ведется по объему V' :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 \leq 1. \quad (6)$$

Следовательно, V' есть объем сферы единичного радиуса, т.е. $V' = 4\pi/3$. Поэтому объем эллипсоида будет определяться выражением:

$$V_{abc} = \frac{4}{3}\pi \cdot abc. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (2), получаем следующее выражение для плотности заряда равномерно заряженного эллипсоида:

$$\rho_0 = \frac{3Q}{4\pi \cdot abc}. \quad (8)$$

Задача 1.4. Записать уравнения Максвелла (1.18), используя оператор ∇ . Выписать обе пары этих уравнений в развернутом виде в прямоугольной декартовой системе координат.

Решение. Как известно, дивергенцию вектора можно представить в виде скалярного произведения векторного оператора “набла” на этот вектор, а ротор вектора можно формально записать в виде векторного произведения оператора “набла” на этот вектор. Учитывая это, можно записать уравнения Максвелла в следующем виде.

$$\text{I. } \left[\nabla, \frac{\mathbf{E}}{c} \right] = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}(\mathbf{r}; t)}{\partial t}, \quad \text{II. } \left[\nabla, \frac{\mathbf{E}}{c} \right] = 4\pi\rho(\mathbf{r}; t); \\ \left(\nabla, \frac{\mathbf{H}}{c} \right) = 0. \quad \left[\nabla, \frac{\mathbf{H}}{c} \right] = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}(\mathbf{r}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}; t)}{\partial t}. \quad (1)$$

Теперь выпишем в развернутом виде первую пару уравнений (1). Учитывая, что

$$\nabla_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad \nabla_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad \nabla_z = \frac{\partial}{\partial z}, \quad (2)$$

запишем $\text{rot } \frac{\mathbf{E}}{c}$ в развернутом виде

$$\begin{aligned} \left[\nabla, \frac{\mathbf{E}}{c} \right] &= \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{vmatrix} = \\ &= \mathbf{e}_x \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + \mathbf{e}_y \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) + \mathbf{e}_z \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Теперь, используя формулу (3), выпишем систему уравнений Максвелла (1) в декартовой системе координат.

$$\text{I. } \begin{cases} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{1}{c} \frac{\partial H_z}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad \text{II. } \begin{cases} \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 4\pi\rho; \\ \frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} = \frac{4\pi}{c} j_x + \frac{1}{c} \frac{\partial E_x}{\partial t}; \\ \frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} = \frac{4\pi}{c} j_y + \frac{1}{c} \frac{\partial E_y}{\partial t}; \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \frac{4\pi}{c} j_z + \frac{1}{c} \frac{\partial E_z}{\partial t}. \end{cases} \quad (4)$$

Задачи к разделу 3

Задача 3.1. Заданы потенциалы поля $\vec{A}'(\vec{r}; t)$ и $\varphi'(\vec{r}; t)$, которые не удовлетворяют условию калибровки Лоренца (3.9):

$$\operatorname{div} \vec{A}' + (\partial \varphi' / \partial t) / c = g(\vec{r}; t). \quad (1)$$

Здесь $g(\vec{r}; t)$ – некоторая функция, не равная тождественно нулю. Показать, что всегда можно найти такую функцию $f(\vec{r}; t)$, чтобы новые потенциалы поля $\vec{A}(\vec{r}; t)$ и $\varphi(\vec{r}; t)$, определяемые формулами (3.5a) и (3.5b), удовлетворяли условию калибровки Лоренца (3.9). Какому уравнению должна удовлетворять функция $f(\vec{r}; t)$?

Решение. Используем формулы (3.5a) и (3.5b):

$$\vec{A}' = \vec{A} + \operatorname{grad} f(\vec{r}; t), \quad \varphi' = \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial f(\vec{r}; t)}{\partial t}. \quad (2)$$

Подставляя выражения (2) в (1), получим

$$\operatorname{div} \vec{A} + \operatorname{div} \operatorname{grad} f(\vec{r}; t) + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}; t)}{\partial t^2} = g(\vec{r}; t). \quad (3)$$

Потребуем, чтобы новые потенциалы удовлетворяли условию калибровки Лоренца:

$$\operatorname{div} \vec{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0. \quad (4)$$

Учитывая, что $\operatorname{div} \operatorname{grad} f(\vec{r}; t) = \Delta f$, из (3) получаем уравнение для функции $f(\vec{r}; t)$:

$$\Delta f(\vec{r}; t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 f(\vec{r}; t)}{\partial t^2} = g(\vec{r}; t). \quad (5)$$

Формула (5) представляет собой неоднородное волновое уравнение. Общее решение этого уравнения складывается из любого частного решения неоднородного уравнения (5) и общего решения однородного волнового уравнения

$$\Delta f^{\text{одн}}(\vec{r}; t) - \left(\frac{\partial^2 f^{\text{одн}}}{\partial t^2} \right) / c^2 = 0.$$

Но общее решение дифференциального уравнения второго порядка в частных производных содержит две произвольные функции (а не константы!). Поэтому существует даже не одна, а бесконечное множество функций $f(\vec{r}; t)$, определяемых уравнением (5), каждая из которых преобразует исходные потенциалы поля $\vec{A}'(\vec{r}; t)$ и $\varphi'(\vec{r}; t)$ в новые потенциалы $\vec{A}(\vec{r}; t)$ и $\varphi(\vec{r}; t)$, удовлетворяющие условию калибровки (4).

Задачи к разделу 4

Задача 4.1. Шар радиусом R равномерно заряжен. Полный заряд шара $Q_0 > 0$. Используя электростатическую теорему Гаусса, определить напряженность и потенциал во всех точках пространства.

Решение. Поместим начало координат в центр шара. Так как вне шара заряды отсутствуют, а сам шар заряжен равномерно, то плотность заряда будет определяться формулой:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & \text{если } 0 \leq r \leq R; \\ 0, & \text{если } r > R, \end{cases} \quad \text{где } \rho_0 = \frac{Q_0}{V_{\text{шара}}} = \frac{3Q_0}{4\pi R^3}. \quad (1)$$

Из сферической симметрии распределения зарядов следует, что эквипотенциальными поверхностями являются сферы радиусом $r = \text{const}$. Вектор напряженности направлен по внешней нормали в каждой точке поверхности Σ_r , поскольку заряд шара положителен. Модуль вектора напряженности поля \vec{E} одинаков во всех точ-

ках таких поверхностей $\left| \vec{E}(\vec{r}_\Sigma) \right| = E(r) = \text{const}$ и выносится за знак поверхностного интеграла. Поэтому

$$\iint_{\Sigma_r} \vec{E}(\vec{r}_\Sigma) d\vec{\Sigma} = E(r) \Sigma_r = 4\pi r^2 \cdot E(r). \quad (2)$$

Теперь электростатическая теорема Гаусса (4.18) принимает вид

$$4\pi r^2 \cdot E(r) = 4\pi Q_V(r), \text{ т.е. } E(r) = \frac{Q_V(r)}{r^2}. \quad (3)$$

Таким образом, величина напряженности поля равна отношению заряда $Q_V(r)$, находящегося внутри сферической поверхности, к квадрату радиуса этой поверхности. Формула (2) для потока вектора \vec{E} справедлива для сферической поверхности любого радиуса ($0 < r < \infty$). Что же касается заряда $Q_V(r)$, то его величина существенно зависит от того, чему равен радиус выбранной сферической поверхности. Поэтому нужно рассмотреть два случая.

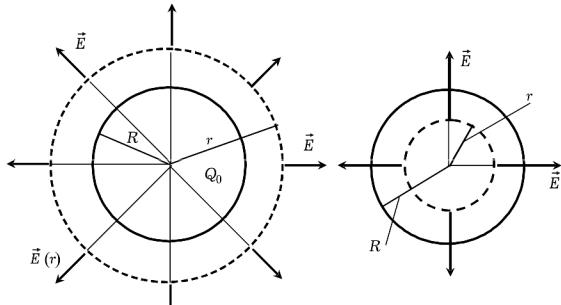


Рис. 1

Рис. 2

I. Радиус сферической поверхности больше (или равен) радиуса шара: $r \geq R$ (рис. 1). В этом случае внутри поверхности Σ_r находится весь заряд шара $Q_V(r \geq R) = Q_0$. Поэтому из (3) получаем:

$$E(r \geq R) = \frac{Q_0}{r^2}. \quad (4)$$

II. Радиус сферической поверхности меньше радиуса шара: $0 \leq r \leq R$ (рис. 2). В этом случае внутри поверхности Σ_r находится только часть заряда шара

$$Q_V(r \leq R) = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_0 = \frac{4}{3} \pi \rho_0 R^3 \cdot \frac{r^3}{R^3} = Q_0 \frac{r^3}{R^3}. \quad (5)$$

Поэтому из (3) получаем:

$$E(r \leq R) = \frac{Q_V(r \leq R)}{r^2} = \frac{Q_0}{R^3} r. \quad (6)$$

Видим, что при $r = R$ результаты расчета по формулам (4) и (6) совпадают, т.е. напряженность является непрерывной функцией расстояния до центра шара r . Объединяя обе формулы (4) и (6), запишем:

$$\overset{r}{E}(\overset{r}{r}) = E(r) \frac{\overset{r}{r}}{r} = \begin{cases} \frac{Q_0 \overset{r}{r}}{r^3}, & \text{если } r \geq R; \\ \frac{Q_0 \overset{r}{r}}{R^3}, & \text{если } r \leq R. \end{cases} \quad (7)$$

Теперь, определив напряженность поля, можем вычислить потенциал $\varphi(r)$ из уравнения

$$\overset{l}{E}(\overset{r}{r}) = -\mathbf{grad} \varphi(r).$$

Используем известное выражение градиента от сферически симметричной функции $\mathbf{grad} \varphi(r) = (d\varphi/dr) \cdot (\overset{l}{r}/r)$. Учитывая, что вектор $\overset{l}{E}$ направлен вдоль радиуса-вектора, т.е. $\overset{l}{E}(\overset{r}{r}) = E(r) \cdot (\overset{r}{r}/r)$, получим уравнение для определения потенциала поля:

$$\frac{d\varphi(r)}{dr} = -E(r). \quad (8)$$

В первой области ($r \geq R$) уравнение (9) выглядит так:

$$\frac{d\varphi_l}{dr} = -\frac{Q_0}{r^2}. \quad (9)$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\Phi_I = - \int \frac{Q_0}{r^2} dr + C_I = \frac{Q_0}{r} + C_I.$$

Константу C_I определяем из условия, чтобы $\Phi_I(r \rightarrow \infty) = 0$, что дает $C_I = 0$. Таким образом, в первой области

$$\Phi_I = \varphi(r > R) = \frac{Q_0}{r}. \quad (10)$$

Во второй области ($r < R$) уравнение (8) записывается так:

$$\frac{d\Phi_{II}}{dr} = -\frac{Q_0}{R^3} r. \quad (11)$$

Интегрируя это уравнение, получаем

$$\Phi_{II} = - \int \frac{Q_0}{R^3} r dr = -\frac{Q_0}{R^3} \frac{r^2}{2} + C_{II}.$$

Константу C_{II} определяем из условия непрерывности потенциала на поверхности шара $\Phi_I(r = R) = \Phi_{II}(r = R)$. Получаем уравнение $Q_0/R = -Q_0/2R + C_{II}$. Отсюда находим, что $C_{II} = 3Q_0/2R$. Таким образом, во второй области

$$\Phi_{II} = \varphi(r < R) = -\frac{Q_0}{R^3} \frac{r^2}{2} + \frac{3Q_0}{2R} = \frac{Q_0}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (12)$$

Объединяя обе формулы (10) и (12) записем:

$$\varphi(r) = \begin{cases} \frac{Q_0}{r}, & \text{если } r \geq R; \\ \frac{Q_0}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right), & \text{если } 0 \leq r \leq R. \end{cases} \quad (13)$$

Графики зависимости $E(r)$ и $\varphi(r)$ представлены на рис. 3 для значений $Q_0 = 1$ и $R = 2$ (в условных единицах). Видим, что в центре шара напряженность поля равна нулю. По мере увеличения расстояния r величина напряженности линейно возрастает до своего наибольшего значения $E_m = Q_0/R^2 = 0,25$ на поверхности шара, когда $r = R = 2$. Затем напряженность уменьшается

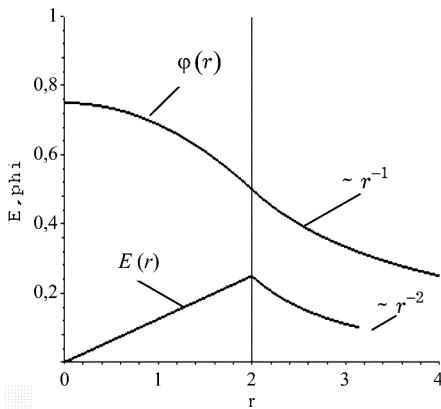


Рис. 3

обратно пропорционально квадрату расстояния, т.е. по закону Кулона, так как если бы весь заряд был сосредоточен в центре шара.

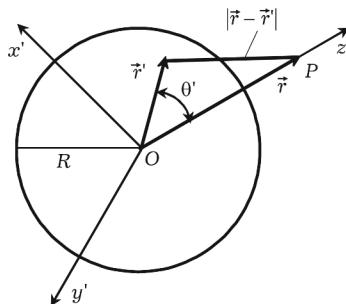
Совсем иначе выглядит зависимость потенциала поля от расстояния до центра шара. В центре шара потенциал имеет наибольшее значение, равное $3Q_0/2R = 0,75$.

Затем значение потенциала монотонно уменьшается до величины $Q_0/R = 0,5$ на поверхности шара. При $r > R$ потенциал поля убывает обратно пропорционально расстоянию, т.е. по закону Кулона для точечного заряда.

Задача 4.2. Шар радиусом R равномерно заряжен. Полный заряд шара $Q_0 > 0$. Используя интегральное выражение (4.21), определить напряженность и потенциал во всех точках пространства.

Решение. Поместим начало координат в центр шара. Так как вне шара заряды отсутствуют, а внутри шара заряд распределен с постоянной плотностью

$$\rho_0 = 3Q_0/4\pi R^3, \quad (1)$$



то выражение для потенциала поля на любом расстоянии r от центра шара будет определяться выражением

$$\varphi(\vec{r}) = \rho_0 \iiint_{r' \leq R} \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (2)$$

Интегрирование в (2) ведется по объему шара.

Величину $|\vec{r} - \vec{r}'|$ запишем в виде

$$|\vec{r} - \vec{r}'| = \sqrt{(\vec{r} - \vec{r}')^2} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\vec{r}'} = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}, \quad (3)$$

где θ' – угол между фиксированным вектором \vec{r}' в точку наблюдения P и вектором \vec{r}' . По штрихованным переменным ведется интегрирование в (2). Интегрирование будем проводить в сферических координатах, выбрав полярную ось Oz' вдоль вектора \vec{r}' . При таком выборе осей угол θ' будет являться полярным углом в штрихованной системе координат (см. рисунок). Элемент объема в сферической системе координат $dV' = r'^2 dr' \sin\theta' d\theta' d\phi'$. Теперь формула (2) записывается так:

$$\varphi(r) = \rho_0 \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^\pi \sin\theta' d\theta' \int_0^R \frac{r'^2 dr'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\theta'}}. \quad (4)$$

Из (4) видно, что потенциал поля будет зависеть только от расстояния до центра шара r . Так как подынтегральное выражение не

зависит от азимутального угла ϕ' , то интегрирование по азимуту дает 2π . Затем делаем стандартную замену переменной интегрирования: $\mu' = \cos \theta'$, т.е. $\sin \theta' d\theta' = -d\mu'$. После этого, меняя порядок интегрирования, запишем выражение (4) в виде

$$\varphi(r) = 2\pi\rho_0 \int_0^R r'^2 dr' \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\mu'}}. \quad (5)$$

Интегрирование по μ' производится элементарно. Обозначая $(r^2 + r'^2)/2rr' = a$, запишем:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\mu'}} &= \frac{1}{\sqrt{2rr'}} \int_{-1}^1 \frac{d\mu'}{\sqrt{a - \mu'}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2rr'}} (-\sqrt{a - \mu'})_{-1}^1 = \frac{2(\sqrt{a+1} - \sqrt{a-1})}{\sqrt{2rr'}}, \\ \sqrt{a+1} &= \sqrt{\frac{r^2 + r'^2}{2rr'}} + 1 = \sqrt{\frac{(r+r')^2}{2rr'}} = \frac{r+r'}{\sqrt{2rr'}}; \\ \sqrt{a-1} &= \sqrt{\frac{r^2 + r'^2}{2rr'}} - 1 = \sqrt{\frac{(r-r')^2}{2rr'}} = \frac{|r-r'|}{\sqrt{2rr'}}. \end{aligned}$$

В последнем выражении учтено, что $\sqrt{b^2} = |b|$. В результате выражение (5) свелось к однократному интегралу по r' :

$$\varphi(r) = \frac{2\pi\rho_0}{r} \int_0^R r' dr' \{r + r' - |r - r'|\}. \quad (6)$$

При вычислении интеграла (6) нужно отдельно рассмотреть два случая.

1. Точка P лежит вне шара, т.е. в области $r > R$. В этом случае, так как $r' \leq R$, то $r' \leq r$. Поэтому $|r - r'| = r - r'$ и выражение в фигурных скобках (6) равно $2r'$. В результате получаем

$$\varphi(r \geq R) = \frac{4\pi\rho_0}{r} \int_0^R r'^2 dr' = \frac{4\pi\rho_0 R^3}{3} \frac{1}{r},$$

т.е.

$$\varphi(r \geq R) = \frac{Q_0}{r}. \quad (7)$$

Это в точности совпадает с формулой (10) предыдущей задачи.

2. Точка P лежит внутри шара, т.е. в области $r < R$. В этом случае интеграл (6) нужно разбить на два интеграла по областям $0 \leq r' \leq r$ и $r \leq r' \leq R$:

$$\varphi(r) = \frac{2\pi\rho_0}{r} \int_0^r r'dr' \{r + r' - |r - r'\}\} + \frac{2\pi\rho_0}{r} \int_r^R r'dr' \{r + r' - |r - r'\}\}.$$

В первом интеграле $r' \leq r$, и поэтому $|r - r'| = r - r'$, так что выражение в фигурных скобках равно $2r'$. Во втором интеграле $r' \geq r$ и $|r - r'| = r' - r$. Поэтому выражение в фигурных скобках второго интеграла равно $2r$. С учетом сказанного получаем:

$$\varphi(r \leq R) = \frac{4\pi\rho_0}{r} \int_0^r r'^2 dr' + 4\pi\rho_0 \int_r^R r'dr' = \frac{4\pi\rho_0}{3} r^2 + 2\pi\rho_0 (R^2 - r^2),$$

т.е.

$$\varphi(r \leq R) = 2\pi\rho_0 R^2 - \frac{2\pi\rho_0}{3} r^2.$$

Подставляя сюда значение ρ_0 (1), получим:

$$\varphi(r \leq R) = \frac{3Q_0}{2R} - \frac{Q_0}{2R^3} r^2 = \frac{Q_0}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (8)$$

Полученный результат совпадает, конечно, с формулой (12) предыдущей задачи.

Задача 4.3. Определить напряженность поля в центре равномерно заряженного полушара. Радиус полушара – R , полный заряд – Q_0 .

Решение. Поместим начало координат в центр полушара. Ось Oz направим вертикально вверх, перпендикулярно основанию полушара (см. рисунок). Вне полушара заряды отсутствуют, а сам полушар заряжен равномерно. Плотность заряда будет определяться формулой:

$$\rho_0 = \frac{Q_0}{V_{шара}/2} = \frac{3Q_0}{2\pi R^3}. \quad (1)$$

Для вычисления напряженности воспользуемся общим решением (4.13) уравнения Пуассона:

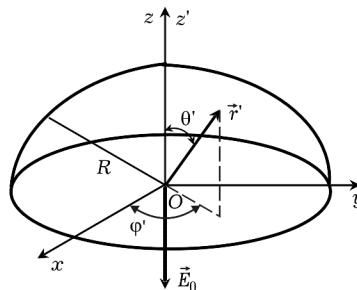
$$\vec{E}(\vec{r}) = \iiint_V \rho(\vec{r}') \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (2)$$

Из аксиальной симметрии задачи следует, что напряженность поля в центре шара направлена по оси Oz , т.е.

$$\vec{E}(\vec{r} = 0) = \vec{E}_0 = (0, 0, E_{0z}). \quad (3)$$

Полагая в (2) $\rho(\vec{r}') = \rho_0$, $\vec{r} = 0$ и проецируя уравнение (2) на ось Oz , получим:

$$E_{0z} = -\rho_0 \iiint_V \frac{z'}{(r')^3} dV'. \quad (4)$$



Интегрирование будем проводить в сферических координатах. Направим полярную ось Oz' вдоль оси Oz . Тогда $dV' = r'^2 dr' \sin \theta' d\phi'$, $z' = r' \cos \theta'$. Здесь θ' и ϕ' – полярный и азимутальный углы соответственно. При интегрировании по объему получшара $0 \leq r' \leq R$; $0 \leq \theta' \leq \pi/2$; $0 \leq \phi' \leq 2\pi$. С учетом всего сказанного интеграл (4) разбивается на произведение трех независимых интегралов и принимает вид

$$E_{0z} = -\rho_0 \int_0^{2\pi} d\phi' \int_0^{\pi/2} \cos\theta' \sin\theta' d\theta' \int_0^R dr'. \quad (5)$$

Интегрирование по азимутальному углу дает 2π . Интеграл по полярному углу равен $1/2$, поскольку $\cos\theta' \sin\theta' d\theta' = \sin\theta' d\sin\theta' = (1/2)d(\sin\theta')^2$. В результате получаем, что $E_{0z} = -\pi\rho_0 R$. Подставляя сюда значение ρ_0 , определяемое формулой (1), окончательно получим:

$$E_{0z} = -\frac{3Q_0}{2R^2}. \quad (6)$$

Таким образом, как и должно быть, если $Q_0 > 0$, вектор напряженности \vec{E}_0 в центре полушара направлен в сторону, противоположную направлению оси Oz .

Задача 4.4. Шар радиусом R равномерно заряжен. Полный заряд шара положителен, т.е. $Q_0 > 0$. Используя уравнение Пуассона для потенциала поля, определить потенциал во всех точках пространства. Затем, определив $\phi(r)$, вычислить напряженность поля во всех точках пространства, как снаружи, так и внутри шара. При решении учесть, что на поверхности шара, т.е. при $r = R$, потенциал поля $\phi(r)$ и его производная $\phi'(r)$ должны быть непрерывными функциями.

Решение. Поместим начало координат в центр шара. Так как вне шара заряды отсутствуют, а сам шар заряжен равномерно, то плотность заряда будет определяться формулой:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & \text{если } 0 \leq r \leq R; \\ 0, & \text{если } r > R, \end{cases}$$

где $\rho_0 = \frac{Q_0}{V_{\text{шара}}} = \frac{3Q_0}{4\pi R^3} > 0$. (1)

Поскольку задача обладает сферической симметрией, то в сферических координатах потенциал поля будет зависеть только от расстояния r : $\phi = \phi(r)$, т.е. потенциал поля есть функция одной

переменной r . Поэтому, используя выражение (4.24с) для оператора Лапласа в сферических координатах, запишем уравнение Пуассона в виде:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi}{dr} \right) = -4\pi\rho(r). \quad (2)$$

Так как плотность зарядов имеет разрыв первого рода при $r = R$, то нужно решить уравнение Лапласа в двух областях – вне и внутри шара. Затем нужно определить неизвестные константы, используя соответствующие дополнительные условия на бесконечности и в центре шара, а также условие непрерывности потенциала и его производной на поверхности шара.

I. Точка наблюдения находится вне шара: $r > R$.

За пределами шара заряды отсутствуют. Поэтому в этой области потенциал $\phi_I(r)$ будет удовлетворять однородному уравнению Пуассона, т.е. уравнению Лапласа:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi_I}{dr} \right) = 0. \quad (3)$$

Решая уравнение (3), последовательно получаем:

$$r^2 \frac{d\phi_I}{dr} = C_1 \rightarrow \frac{d\phi_I}{dr} = \frac{C_1}{r^2} \rightarrow \phi_I = \int \frac{C_1}{r^2} dr + C_2.$$

Таким образом, в первой области общее решение уравнения (3) имеет вид

$$\phi_I(r) = -\frac{C_1}{r} + C_2. \quad (4)$$

Константу C_2 находим из условия равенства потенциала нулю на бесконечности: $\phi_I(r \rightarrow \infty) = 0$. Отсюда получаем, что $C_2 = 0$.

Следовательно, в первой области

$$\phi_I(r) = -\frac{C_1}{r}. \quad (5)$$

II. Точка наблюдения находится внутри шара: $0 \leq r < R$.

Внутри шара плотность зарядов постоянна и равна ρ_0 . Поэтому уравнение Пуассона имеет вид

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\phi_{II}}{dr} \right) = -4\pi\rho_0. \quad (6)$$

Решение уравнения Пуассона (6), т.е. неоднородного уравнения Лапласа, складывается из общего решения однородного уравнения и любого частного решения $\Phi_{II}(r)$ неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения определяется формулой (4). Поэтому общее решение уравнения (6) будет выглядеть так:

$$\varphi_{II}(r) = -\frac{C_3}{r} + C_4 + \Phi_{II}(r) \quad (0 \leq r < R). \quad (7)$$

Решение $\Phi_{II}(r)$ должно быть ограничено внутри шара, т.е. при $r \rightarrow 0$. Отсюда получаем, что $C_3 = 0$. Следовательно, внутри шара

$$\varphi_{II}(r) = C_4 + \Phi_{II}(r). \quad (8)$$

Осталось определить любое частное решение неоднородного уравнения

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi_{II}}{dr} \right) = -4\pi\rho_0, \text{ т.е. } r^2 \frac{d^2\Phi_{II}}{dr^2} + 2r \frac{d\Phi_{II}}{dr} = -4\pi\rho_0 r^2. \quad (9)$$

Будем искать решение уравнения (9) в виде $\Phi_{II} = A \cdot r^2$, где A – некоторая константа. Подставляя это в (9), получаем:

$$2A \cdot r^2 + 4A \cdot r^2 = -4\pi\rho_0 r^2.$$

Отсюда находим, что $6A = -4\pi\rho_0$, т.е. $A = -2\pi\rho_0 / 3$. Следовательно, внутри шара

$$\varphi_{II}(r) = C_4 - \frac{2\pi\rho_0}{3} r^2 = C_4 - \frac{Q_0}{2R^3} r^2. \quad (10)$$

Две неизвестные константы C_1 и C_4 определяются из условия непрерывности потенциала и его первой производной (т.е. фактически из условия непрерывности напряженности поля) на поверхности шара:

$$\begin{cases} \varphi_I(r = R) = \varphi_{II}(r = R); \\ \left(\frac{d\varphi_I}{dr} \right)_{r=R} = \left(\frac{d\varphi_{II}}{dr} \right)_{r=R}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -C_1/R = C_4 - Q_0/2R; \\ C_1/R^2 = -Q_0/R^2. \end{cases} \quad (11)$$

Из второго уравнения сразу получаем, что $C_1 = -Q_0$. Подставляя это в первое уравнение, находим, что $C_4 = 3Q_0/2R$. После этого

получаем окончательное выражение для потенциала поля как вне, так и внутри шара:

$$\varphi_I(r \geq R) = \frac{Q_0}{r}; \quad \varphi_{II}(r \leq R) = \frac{Q_0}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (12)$$

Это, естественно, совпадает с формулой (13) задачи 4.1.

Определив потенциал поля, напряженность находим из уравнения $\vec{E} = -\operatorname{grad} \varphi(r)$. В сферических координатах $\operatorname{grad} \varphi(r) = (d\varphi/dr) \cdot (\vec{r}/r)$. В результате получаем, что

$$\vec{E}_I(r \geq R) = \frac{Q_0 \vec{r}}{r^3}; \quad \vec{E}_{II}(r \leq R) = \frac{Q_0 \vec{r}}{R^3}. \quad (13)$$

Это в точности совпадает с формулой (7) задачи 4.1.

Задача 4.5. Шар радиусом R равномерно заряжен. Полный заряд шара $Q_0 > 0$. Вычислить энергию поля во всем пространстве (двумя способами). Определить энергию поля внутри шара. Какая часть полной энергии сосредоточена внутри шара?

Решение. Поместим начало координат в центр шара. Так как вне шара заряды отсутствуют, а сам шар заряжен равномерно, то плотность заряда будет определяться формулой:

$$\rho(r) = \begin{cases} \rho_0, & \text{если } 0 \leq r \leq R; \\ 0, & \text{если } r > R, \end{cases} \quad \text{где } \rho_0 = \frac{Q_0}{V_{\text{шара}}} = \frac{3Q_0}{4\pi R^3}. \quad (1)$$

Вычислим энергию поля во всем пространстве первым способом, т.е. используя формулу (4.16):

$$W = \frac{1}{2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \rho(\vec{r}) \varphi(\vec{r}) dV. \quad (2)$$

Поскольку плотность заряда (1) отлична от нуля только внутри шара, из (2) получаем:

$$W = \frac{1}{2} \rho_0 \iiint_V \varphi_{II}(r) dV. \quad (2a)$$

Здесь интегрирование ведется уже по объему шара, а величина потенциала внутри шара определяется полученными в предыдущих задачах формулами (например, формулой (12) предыдущей задачи):

$$\varphi_{II}(r \leq R) = \frac{Q_0}{2R} \left(3 - \frac{r^2}{R^2} \right). \quad (3)$$

Интегрирование будем проводить в сферических координатах:
 $dV = r^2 dr \sin \theta d\phi$. Интегрирование по угловым переменным дает полный телесный угол 4π . Поэтому из (2а) с учетом (3) получим:

$$W = \frac{\pi \rho_0 Q_0}{R} \int_0^R (3 - r^2/R^2) r^2 dr = \frac{3Q_0^2}{4R^4} \int_0^R (3 - r^2/R^2) r^2 dr. \quad (4)$$

Поскольку

$$\int_0^R (3 - r^2/R^2) r^2 dr = R^3 - R^3/5 = 4R^3/5,$$

окончательно получаем следующее выражение для полной энергии поля равномерно заряженного шара:

$$W = \frac{3Q_0^2}{5R}. \quad (5)$$

Теперь вычислим энергию поля вторым способом, используя базовую формулу (4.14):

$$W = \frac{1}{8\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} E^2(r) dV = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} E^2(r) r^2 dr. \quad (6)$$

Здесь учтено, что интегрирование по углам в сферической системе координат дает полный телесный угол 4π . Так как величина напряженности поля определяется различными формулами в областях вне и внутри шара, то представим интеграл в формуле (6) в виде суммы двух интегралов – по области $r \geq R$ вне шара и области $r \leq R$ внутри шара. Тогда можем записать:

$$W = W_f + W_{fi},$$

$$\text{где } W_f = \frac{1}{2} \int_R^{\infty} E_f(r) r^2 dr, \quad W_{fi} = \frac{1}{2} \int_0^R E_{fi}(r) r^2 dr. \quad (7)$$

Величина W_f определяет энергию поля вне шара, а величина W_{fi} – энергию поля внутри шара.

Значения величин E_I и E_{II} находятся по формулам (4) и (6) задачи 4.1:

$$E_I (r \geq R) = \frac{Q_0}{r^2}, \quad E_{II} (r \leq R) = \frac{Q_0}{R^3} r. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (7), получаем:

$$W_I = \frac{Q_0^2}{2} \int_R^\infty \frac{dr}{r^2} = \frac{Q_0^2}{2R}; \quad W_{II} = \frac{Q_0^2}{2R^6} \int_0^R r^4 dr = \frac{Q_0^2}{10R}. \quad (9)$$

Складывая найденные значения для величин W_I и W_{II} , получим выражение полной энергии электростатического поля шара во всем пространстве:

$$W = W_I + W_{II} = \frac{Q_0^2}{2R} + \frac{Q_0^2}{10R} = \frac{3Q_0^2}{5R}. \quad (10)$$

Таким образом, расчет полной энергии поля по формулам (2) и (6) приводит, как и должно быть, к одному и тому же результату. Однако формула (6) позволяет определить энергию поля в любом объеме, а не только во всем пространстве. В частности, величина W_{II} определяет энергию только в объеме шара. Поэтому можем найти часть полной энергии, сосредоточенной внутри шара:

$$\delta = W_{II} / W = 1/6. \quad (11)$$

Следовательно, $5/6$ энергии поля сосредоточено в области вне шара.

Задача 4.6. Доказать, что напряженность однородного электрического поля $\vec{E}_0 = \text{const}$ и скалярный потенциал такого поля $\varphi(\vec{r})$ связаны соотношением: $\varphi(\vec{r}) = -(\vec{E}_0, \vec{r})$.

Решение. Так как электростатическое поле является потенциальным, то $\vec{E}_0 = -\text{grad } \varphi(\vec{r})$. Поскольку $\text{grad}(\vec{a}, \vec{r}) = \vec{a}$, то если в этой формуле заменить $\vec{a} \rightarrow \vec{E}_0$, получим, что $\text{grad}(\vec{E}_0, \vec{r}) = \vec{E}_0$. Следовательно, $(\vec{E}_0, \vec{r}) = -\varphi(\vec{r})$.

Задачи к разделу 5

Задача 5.1. Сравнить результаты расчета потенциала поля двух точечных зарядов $\Theta_1 = q$ и $\Theta_2 = -q$ по точной формуле (4.11) и в дипольном приближении по формуле (5.14).

Решение. Потенциал поля в произвольной точке b от двух точечных зарядов определяется выражением

$$\varphi(\vec{r}_b) = \frac{\Theta_1}{|\vec{r}_b - \vec{r}_1|} + \frac{\Theta_2}{|\vec{r}_b - \vec{r}_2|}. \quad (1)$$

Здесь \vec{r}_b – радиус-вектор точки наблюдения, а \vec{r}_1 и \vec{r}_2 – радиусы-векторы зарядов Θ_1 и Θ_2 соответственно. Рассматриваемая система зарядов представляет собой диполь.

Так как диполь – электронейтральная система, то величина и направление его дипольного момента не зависят от выбора системы координат. Поместим начало координат в место расположения отрицательного (второго) заряда, а ось Ox направим вдоль линии, проходящей через заряды (см. рисунок).

При таком выборе системы координат $\vec{r}_1 = \vec{a}$, $\vec{r}_2 = 0$ и точная формула (1) запишется так:

$$\varphi(\vec{r}_b) = \frac{q}{|\vec{r}_b - \vec{a}|} - \frac{q}{|\vec{r}_b|}. \quad (2)$$

Дипольный момент будет определяться выражением

$$\vec{d} = \Theta_1 \vec{r}_1 + \Theta_2 \vec{r}_2 = q \vec{a}. \quad (3)$$

Вектор \vec{a} направлен по оси Ox . Следовательно, дипольный момент имеет ненулевую проекцию только на ось Ox : $d = (qa, 0, 0)$.

Поэтому выражение для потенциала поля диполя в дипольном приближении (4.11) записывается в виде

$$\varphi_d(\vec{r}_b) = \frac{\left(\vec{d}, \vec{r}_b\right)}{r_b^3} = q \frac{x_b}{r_b^3}. \quad (4)$$

Здесь x_b – проекция радиуса-вектора \vec{r}_b на ось Ox , т.е. абсцисса точки b .

Для простоты рассмотрим поле в произвольной точке b в плоскости xOy (см. рисунок), где $z = 0$, так, что $\vec{r}_b(x_b; y_b; 0)$ и $|\vec{r}_b - \vec{a}| = \sqrt{(x_b - a)^2 + y_b^2}$. Обозначим расстояние от точки b до начала координат через l , т.е. $|\vec{r}_b| = l$. Тогда точная и приближенная формулы для потенциала запишутся в виде

$$\varphi(\vec{r}_b) = q \left\{ \frac{1}{\sqrt{(x_b - a)^2 + y_b^2}} - \frac{1}{l} \right\}, \quad \varphi_d(\vec{r}_b) = q \frac{x_b}{l^3}. \quad (5)$$

В полярных координатах $x_b = l \cos \psi$; $y_b = l \sin \psi$, где ψ – угол между вектором дипольного момента \vec{d} и вектором \vec{r}_b в точку наблюдения b . Поэтому формулы (5) запишутся так:

$$\begin{aligned} \varphi_b &= q \left\{ \frac{1}{\sqrt{l^2 + a^2 - 2al \cos \psi}} - \frac{1}{l} \right\} = \\ &= \frac{q}{l} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 + (a/l)^2 - 2(a/l) \cos \psi}} - 1 \right\}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\varphi_d(\vec{r}_b) = \frac{q}{l} \left\{ \frac{a}{l} \cos \psi \right\}. \quad (7)$$

Таким образом, в рассматриваемой задаче отличие точной формулы (6) от приближенной (7) определяется отличием выражений, стоящих в фигурных скобках этих формул.

Пусть точка b лежит на расстоянии $l > a$ на оси X , т.е. $\psi = 0$. В этом случае $\cos \psi = 1$ и из формул (6) и (7) получаем:

$$\varphi(\psi = 0) = q \left\{ \frac{1}{l - a} - \frac{1}{l} \right\} = \frac{qa}{l(l - a)} = \frac{d}{l(l - a)}, \quad \varphi_d = \frac{qa}{l^2} = \frac{d}{l^2}. \quad (8)$$

Относительная ошибка

$$\delta \% = \frac{\Phi - \Phi_d}{\Phi} 100 \% = \frac{a}{l} 100 \%.$$

Из полученной формулы видно, что, как и следовало ожидать, с увеличением l разница между точной и приближенной формулами уменьшается $\sim a/l$ и стремится к нулю на больших расстояниях от системы зарядов, когда $l \gg a$.

Однако полученный результат не носит общего характера, так как был рассмотрен частный случай, когда точка b лежит на оси x . Ситуация радикально меняется, если точка b будет лежать на оси y . В этом случае $\psi = \pi/2$ и получаем:

$$\varphi = q \left\{ \frac{1}{\sqrt{l^2 + a^2}} - \frac{1}{l} \right\} < 0, \quad \varphi_d = 0.$$

Таким образом, в этом случае в дипольном приближении потенциал поля равен нулю для любых l . Это означает, что для вычисления поля в точках, лежащих на вертикальной оси, дипольного приближения недостаточно.

Задача 5.2. Доказать, что дипольный момент равномерно заряженного шара равен нулю в системе координат, начало которой расположено в центре шара. Радиус шара – R , полный заряд – Q .

Решение. Проще всего доказать равенство нулю дипольного момента шара в указанной системе координат, используя тот факт, что задача обладает полной сферической симметрией – все направления равноправны. Поэтому нет выделенного направления в пространстве, вдоль которого мог бы быть направлен вектор d . Единственный выход из возникшей ситуации – равенство нулю дипольного момента шара.

Сделанное утверждение о равенстве нулю дипольного момента шара следует, конечно, из выражения для потенциала вне шара, полученного в задачах раздела 4:

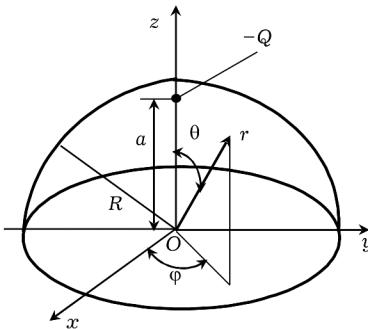
$$\Phi_{\text{шара}}(r) = Q/r \quad (r \geq R). \quad (1)$$

Сравнивая эту точную формулу с разложением (5.9)

$$\varphi(\vec{r}) \approx Q/r + (d, \vec{r})/r^2 + K \quad (r \gg R), \quad (2)$$

заключаем, что дипольный момент равен нулю.

Задача 5.3. Вычислить дипольный момент электронейтральной системы, состоящей из равномерно заряженного полушара радиусом R (полный заряд $Q > 0$) и точечного отрицательного заряда $-Q$, расположенного на расстоянии $a < R$ от основания полушара на оси вращения Oz (см. рисунок). При каком расстоянии a дипольный момент системы будет равен нулю?



Решение. Поскольку система электронейтральна, то ее дипольный момент не зависит от выбора начала системы координат. Поместим начало координат в центр полушара, а оси координат направим так, как указано на рисунке. Вне полушара плотность заряда равна нулю, а внутри определяется выражением:

$$\rho(\vec{r}) = -Q\delta(\vec{r} - \vec{a}) + \rho_0. \quad (1)$$

Здесь \vec{a} — радиус-вектор отрицательного точечного заряда $-Q$, $\vec{a} = a\hat{e}_z$; ρ_0 — плотность заряда самого полушара, $\rho_0 = 3Q/2\pi R^3$.

В соответствии с общей формулой (5.7) будем иметь

$$\vec{d} = \iiint_V \vec{r} \rho(\vec{r}) dV = -Q\vec{a} + \rho_0 \iiint_V \vec{r} dV. \quad (2)$$

Первое слагаемое в (2) определяет вклад в дипольный момент от точечного отрицательного заряда, а второе слагаемое — от равно-

мерно заряженного полушара. Определить дипольный момент системы – означает определить три его проекции d_x , d_y и d_z на выбранные оси координат. Очевидно, что ввиду аксиальной симметрии задачи относительно оси Oz дипольный момент системы будет иметь отличную от нуля проекцию только на ось Oz , в то время как $d_x = d_y = 0$. Проецируя равенство (2) на ось Oz , запишем:

$$d_z = -Qa + \rho_0 \iiint_V z dV. \quad (3)$$

Интегрирование в (3) ведется по объему полушара. Интегрирование будем проводить в сферических координатах: $dV = r^2 dr \sin \theta d\phi$, $z = r \cos \theta$. Здесь θ и ϕ – полярный и азимутальный углы соответственно. При интегрировании по объему половина

$$0 \leq r \leq R; \quad 0 \leq \theta \leq \pi/2; \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi.$$

С учетом всего сказанного интеграл в (3) разбивается на произведение трех независимых интегралов и принимает вид

$$\iiint_V z dV = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos \theta \sin \theta d\theta \int_0^R r^3 dr. \quad (4)$$

Интеграл по полярному углу равен $1/2$, поскольку $\cos \theta \sin \theta d\theta = (1/2) d(\sin^2 \theta)$. Интегрирование по r дает $R^4/4$. В результате получаем, что:

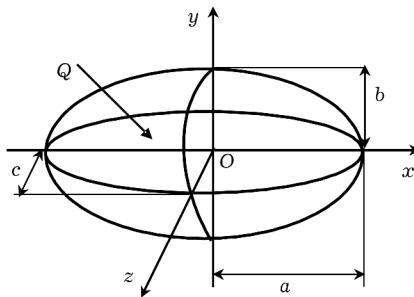
$$d_z = -Qa + \pi \rho_0 R^4 / 4. \quad (5)$$

Подставляя сюда значение ρ_0 , окончательно получим:

$$d_z = -Qa + 3QR/8 = Q(3R/8 - a). \quad (6)$$

Таким образом, если $a < 3R/8$, то $d_z > 0$, т.е. дипольный момент направлен вверх. Если $a > 3R/8$, то $d_z < 0$, и дипольный момент направлен вниз. При $a = 3R/8$ дипольный момент системы равен нулю.

Задача 5.4. Вычислить дипольный момент равномерно заряженного эллипсоида с полуосами a , b и c . Полный заряд эллипсоида – Q . Начало координат поместить в центр эллипса (см. рисунок).



Решение. В соответствии с общей формулой (5.7) дипольный момент эллипсоида

$$d_{abc} = \rho_0 \iiint_{V_{abc}} r dV. \quad (1)$$

Здесь ρ_0 – плотность заряда внутри эллипсоида. Интегрирование в (1) ведется по области

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1. \quad (2)$$

Проектируя равенство (1) на координатные оси, получим

$$d_x = \rho_0 \iiint_{V_{abc}} x dV, \quad d_y = \rho_0 \iiint_{V_{abc}} y dV, \quad d_z = \rho_0 \iiint_{V_{abc}} z dV. \quad (3)$$

Введем новые переменные интегрирования $x' = x/a$, $y' = y/b$ и $z' = z/c$. В новых переменных $dx dy dz = abc \cdot dx' dy' dz' = abc \cdot dV'$ и выражения (3) принимают вид:

$$d_x = \rho_0 a \iiint_{V'} x' dV', \quad d_y = \rho_0 b \iiint_{V'} y' dV', \quad d_z = \rho_0 c \iiint_{V'} z' dV'. \quad (4)$$

Интегрирование в (4) ведется по объему V' :

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 \leq 1, \quad (5)$$

т.е. по объему шара единичного радиуса. Следовательно, с точностью до множителей a , b и c формулы (4) определяют проекции дипольного момента на координатные оси равномерно заряженного шара единичного радиуса. Но дипольный момент равномерно заряженного шара в системе координат, начало которой находится в центре шара, равен нулю (см. задачу 5.2). Следовательно, дипольный момент равномерно заряженного эллипсоида тоже равен нулю:

$$\overset{\Gamma}{d}_{abc} = 0. \quad (6)$$

Задача 5.5. Вычислить напряженность электростатического поля системы зарядов на больших расстояниях в дипольном приближении, если задан дипольный момент системы зарядов $\overset{\Gamma}{d}$, т.е. получить формулу (5.12) для напряженности поля в дипольном приближении.

Решение. Напряженность электростатического поля связана с потенциалом поля общим соотношением $\overset{\Gamma}{E}(\overset{\Gamma}{r}) = -\text{grad } \varphi(\overset{\Gamma}{r})$. Потенциал поля в дипольном приближении определяется выражением: $\varphi_d(\overset{\Gamma}{r}) = (\overset{\Gamma}{d}, \overset{\Gamma}{r}) / r^3$. Таким образом, в дипольном приближении

$$\overset{\Gamma}{E}_d(\overset{\Gamma}{r}) = -\text{grad } \varphi_d(\overset{\Gamma}{r}) = -\text{grad} \left\{ (1/r^3) \cdot (\overset{\Gamma}{d}, \overset{\Gamma}{r}) \right\}. \quad (1)$$

Градиент от произведения двух скалярных функций определяется выражением: $\text{grad}(f \cdot g) = f \cdot \text{grad}(g) + g \cdot \text{grad}(f)$. В нашем случае $f = 1/r^3$ и $g = (\overset{\Gamma}{d}, \overset{\Gamma}{r})$. Поэтому

$$\overset{\Gamma}{E}_d(\overset{\Gamma}{r}) = - \left\{ \frac{1}{r^3} \text{grad}(\overset{\Gamma}{d}, \overset{\Gamma}{r}) + (\overset{\Gamma}{d}, \overset{\Gamma}{r}) \text{grad}\left(\frac{1}{r^3}\right) \right\}. \quad (2)$$

Величина $\text{grad} \left(1/r^3 \right)$ есть градиент от сферически симметричной функции $\text{grad } f(r) = \frac{df(r)}{dr} \frac{\vec{r}}{r}$:

$$\text{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -3 \frac{\vec{r}}{r} \frac{1}{r^4} = -3 \frac{\vec{r}}{r^5}. \quad (3)$$

Осталось вычислить $\text{grad} \left(\vec{d}, \vec{r} \right)$. В декартовых координатах

$$\begin{aligned} \text{grad} \left(\vec{d}, \vec{r} \right) &= \left(\vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (d_x x + d_y y + d_z z) = \\ &= \vec{e}_x d_x + \vec{e}_y d_y + \vec{e}_z d_z, \end{aligned}$$

т.е.

$$\text{grad} \left(\vec{d}, \vec{r} \right) = \vec{d}. \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получим:

$$E_d(\vec{r}) = - \left\{ \frac{\vec{d}}{r^3} - \frac{3(\vec{d}\vec{r}) \cdot \vec{r}}{r^5} \right\} = \frac{3(\vec{d}\vec{r}) \cdot \vec{r} - \vec{d} \cdot r^2}{r^5}. \quad (5)$$

Задачи к разделу 6

Задача 6.1. Можно ли в пространстве создать объемный ток с плотностью $\vec{j}(\vec{r}) = j_0 \cdot \vec{g}(r)$, где $\vec{g}(r)$ – произвольная сферически симметричная функция, а j_0 – постоянный вектор?

Решение. Чтобы ответить на поставленный вопрос нужно выяснить, когда будет выполняться условие $\text{div} \vec{j} = 0$. Используем известную формулу $\text{div} \{ \vec{a} \cdot \vec{f} \} = \vec{f} \cdot \text{div} \vec{a} + (\vec{a}, \text{grad} \vec{f})$. В нашем случае $\vec{a} = \vec{j}_0 = \text{const}$, $\vec{f} = \vec{g}(r)$. Следовательно,

$$\text{div} \{ \vec{j}_0 \cdot \vec{g}(r) \} = \vec{g} \cdot \text{div} \vec{j}_0 + (\vec{j}_0, \text{grad} \vec{g}) = (\vec{j}_0, \text{grad} \vec{g}). \quad (1)$$

Градиент сферически симметричной функции $\text{grad } g(r) = (dg/dr) \cdot (\vec{r}/r)$. Поэтому

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{1}{r} \frac{d\vec{g}}{dr} \cdot (\vec{j}_0, \vec{r}). \quad (2)$$

Отсюда заключаем, что ток с объемной плотностью $\vec{j}(\vec{r}) = \vec{j}_0 \cdot \vec{g}(r)$ не может существовать, поскольку условие

$$(\vec{j}_0, \vec{r}) = 0$$

не может быть выполнено в *каждой* точке пространства для постоянного вектора \vec{j}_0 .

Задача 6.2. Определить плотность тока \vec{j} , если в цилиндрических координатах r_\perp, ψ, z напряженность магнитного поля

$$\vec{H}(r_\perp, \psi, z) = \vec{e}_\perp H_{r_\perp}(r_\perp, \psi, z) + \vec{e}_\psi H_\psi(r_\perp, \psi, z) + \vec{e}_z H_z(r_\perp, \psi, z)$$

имеет следующие проекции: $H_{r_\perp} = 0$, $H_\psi = a \cdot r_\perp$, $H_z = b \cdot (R^2 - r_\perp^2)$ при $r_\perp \leq R$ (т.е. внутри цилиндра радиусом R).

Вне цилиндра (т.е. при $r_\perp > R$) напряженность поля равна нулю. Величины $a, b = \text{const}$. (В цилиндрических координатах r_\perp – расстояние от точки \vec{r} до полярной оси Oz ; ψ – азимутальный угол; z – обычная декартова координата.)

Решение. Внутри цилиндра $r_\perp \leq R$ магнитное поле имеет вид

$$\vec{H}(r_\perp, \psi, z) = \vec{e}_\psi \{a \cdot r_\perp\} + \vec{e}_z \{b \cdot (R^2 - r_\perp^2)\} \quad (r_\perp \leq R). \quad (1)$$

Прежде всего, проверим, является ли заданное магнитное поле соленоидальным, т.е. выполняется ли условие $\operatorname{div} \vec{H} = 0$. Поскольку вектор \vec{H} задан в цилиндрических координатах, то вычисление дивергенции вектора \vec{H} нужно производить тоже в цилиндрических координатах:

$$\operatorname{div} \vec{H} = \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial}{\partial r_\perp} (r_\perp H_{r_\perp}) + \frac{1}{r_\perp} \frac{\partial H_\psi}{\partial \psi} + \frac{\partial H_z}{\partial z}. \quad (2)$$

Поскольку $H_{r_\perp} = 0$, H_ψ не зависит от полярного угла ψ и H_z не зависит от z , то все частные производные в (2) равны нулю и поэтому заданное магнитное поле является соленоидальным:

$$\operatorname{div} \overset{\text{r}}{H}(\overset{\text{r}}{f}) \equiv 0. \quad (3)$$

Из второго уравнения магнитостатики $\operatorname{rot} \overset{\text{r}}{H}(\overset{\text{r}}{f}) = (4\pi/c) \overset{\text{r}}{j}(\overset{\text{r}}{f})$ определяем значение вектора плотности тока:

$$\overset{\text{r}}{j}(r_{\perp}, \psi, z) = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \overset{\text{r}}{H}(r_{\perp}, \psi, z). \quad (4)$$

Таким образом, вычисление плотности тока

$$\overset{\text{r}}{j}(r_{\perp}, \psi, z) = \overset{\text{r}}{e}_{\perp} j_{r_{\perp}}(r_{\perp}, \psi, z) + \overset{\text{r}}{e}_{\psi} j_{\psi}(r_{\perp}, \psi, z) + \overset{\text{r}}{e}_z j_z(r_{\perp}, \psi, z) \quad (5)$$

сводится к вычислению ротора магнитного поля в цилиндрических координатах:

$$j_{r_{\perp}} = \frac{c}{4\pi} (\operatorname{rot} \overset{\text{r}}{H})_{r_{\perp}} = \frac{c}{4\pi} \cdot \left(\frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial H_z}{\partial \psi} - \frac{\partial H_{\psi}}{\partial z} \right); \quad (6a)$$

$$j_{\psi} = \frac{c}{4\pi} (\operatorname{rot} \overset{\text{r}}{H})_{\psi} = \frac{c}{4\pi} \cdot \left(\frac{\partial H_{r_{\perp}}}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r_{\perp}} \right) = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial H_z}{\partial r_{\perp}}; \quad (6b)$$

$$j_z = \frac{c}{4\pi} (\operatorname{rot} \overset{\text{r}}{H})_z = \frac{c}{4\pi} \cdot \frac{1}{r_{\perp}} \left(\frac{\partial}{\partial r_{\perp}} (\rho H_{\psi}) - \frac{\partial H_{r_{\perp}}}{\partial \psi} \right) = \frac{c}{4\pi r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} (r_{\perp} H_{\psi}). \quad (6c)$$

Подставляя в (6.a) – (6.c) заданные значения проекций, $H_{\psi} = a \cdot r_{\perp}$

и $H_z = b \cdot (R^2 - r_{\perp}^2)$, получим, что $j_{r_{\perp}} = 0$, $j_{\psi} = (c/2\pi) br_{\perp}$ и

$j_z = (c/2\pi) a$. Следовательно, внутри цилиндра

$$\overset{\text{r}}{j}(r_{\perp} \leq R, \psi, z) = \frac{c}{2\pi} \{ \overset{\text{r}}{e}_{\psi} b r_{\perp} + \overset{\text{r}}{e}_z a \}. \quad (7)$$

Вне цилиндра $\overset{\text{r}}{j} = 0$.

Проверим, удовлетворяет ли вектор (7) уравнению непрерывности $\operatorname{div} \overset{\text{r}}{j} = 0$. Для этого расписываем дивергенцию в полярных координатах, как это было сделано в формуле (2):

$$\operatorname{div} \overset{\text{r}}{j} = \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} (r_{\perp} j_{r_{\perp}}) + \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial j_{\psi}}{\partial \psi} + \frac{\partial j_z}{\partial z}. \quad (8)$$

Подставляя сюда найденные значения проекций $j_{r_{\perp}}$, j_{ψ} и j_z , получим

$$\operatorname{div} \vec{j} = \frac{c}{2\pi} \left\{ \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial \psi} (br_{\perp}) + \frac{\partial}{\partial z} a \right\} \equiv 0. \quad (9)$$

Задача 6.3. Используя теорему о циркуляции магнитного поля, вычислить напряженность поля постоянного тока I , текущего по бесконечному цилиндру радиусом a (плотность тока внутри цилиндра считать постоянной).

Решение. Задача обладает аксиальной симметрией относительно оси цилиндра.

Направим ось Oz вдоль оси цилиндра вверх (рис. 1). При таком выборе осей отличной от нуля будет только проекция вектора плотности тока j_z на ось Oz:

$$\hat{j} = \hat{e}_z j_0 = \frac{I}{\pi a^2}. \quad (1)$$

В силу аксиальной симметрии задачи напряженность магнитного поля в каждой точке пространства будет лежать в плоскости, перпендикулярной оси цилиндра, причем величина напряженности будет зависеть только от расстояния r_{\perp} до оси: $H = H(r_{\perp})$. Для решения задачи воспользуемся теоремой о циркуляции магнитного поля (6.24):

$$\oint_L \vec{H}(r_L) \cdot d\vec{l} = \frac{4\pi}{c} J_{\Sigma_L}. \quad (2)$$

Для вычисления напряженности поля в точке \vec{r} проведем через эту точку плоскость, перпендикулярную оси цилиндра. В качестве кон-

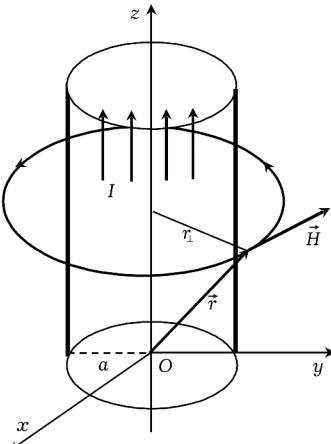


Рис. 1

тура L нужно выбрать силовую линию поля, которая является окружностью C_{r_\perp} радиусом r_\perp в выбранной плоскости. Направление векторов $\overset{\perp}{H}$ и $\overset{\perp}{dl}$ связано с направлением плотности тока $\overset{\perp}{j}$ правилом правого буравчика (следствие закона Био – Савара – Лапласа).

Рассмотрим два случая.

1. Расстояние от точки наблюдения до оси цилиндра больше или равно радиусу цилиндра: $r_\perp \geq a$.

Ток J_{Σ_L} , охватываемый вспомогательной окружностью C_{r_\perp} , будет равен полному току, текущему по всему цилиндру:

$$J_{\Sigma_L} = \iint_{\substack{r_\perp \\ r_L \geq a}}^L \overset{\perp}{j} d\Sigma = \pi a^2 j_0 = I. \quad (3)$$

Циркуляция вектора напряженности по контуру C_{r_\perp} равна произведению длины окружности C_{r_\perp} на величину напряженности поля:

$$\oint_L^r H(r) \cdot \overset{\perp}{dl} = 2\pi r_\perp H(r_\perp). \quad (4)$$

Подставляя (3) и (4) в (2), получим,

$$2\pi r_\perp H(r_\perp) = 4\pi I / c,$$

т.е.

$$H(r_\perp \geq a) = 2I / cr_\perp. \quad (5)$$

2. Расстояние от точки наблюдения до оси цилиндра меньше радиуса цилиндра: $r_\perp < a$.

Ток J_{Σ_L} , охватываемый вспомогательной окружностью C_{r_\perp} , будет равен току, текущему по части сечения цилиндра радиусом $r_\perp < a$:

$$J_{\Sigma_L} = \iint_{\substack{r_\perp \\ r_L \leq a}}^L \overset{\perp}{j} d\Sigma = \pi r_\perp^2 j_0 = Ir_\perp^2 / a^2. \quad (6)$$

Подставляя это в формулу (2), получим:

$$2\pi r_\perp H(r_\perp) = 4\pi Ir_\perp^2 / ca^2,$$

т.е.

$$H(r_\perp < a) = 2Ir_\perp / ca^2. \quad (7)$$

Объединяя найденные выше формулы (5) и (7), запишем выражение для напряженности поля в виде

$$H = \frac{r}{\epsilon_\psi} \cdot \frac{2I}{ca} \begin{cases} a/r_\perp, & \text{если } r_\perp \geq a; \\ r_\perp/a, & \text{если } r_\perp < a. \end{cases} \quad (8)$$

Здесь $\frac{1}{\epsilon_\psi}$ – единичный вектор в цилиндрической системе координат, направленный по касательной к окружности C_{r_\perp} (к силовой линии поля). На рис. 2 представлена зависимость $H(r)$, где r – приведенное расстояние до оси цилиндра, $r = r_\perp/a$. За единицу напряженности поля принята величина $2I/ca$:

$$H(r) = \begin{cases} 1/r, & \text{если } r \geq 1; \\ r, & \text{если } r < 1. \end{cases} \quad (9)$$

Внутри цилиндра напряженность поля линейно возрастает от нуля (на оси цилиндра) до своего максимального значения

$$H_{\max} = H(r_\perp = a) = 2I/ca \quad (10)$$

на поверхности цилиндра при $r_\perp = a$. Вне цилиндра напряженность поля убывает обратно пропорционально расстоянию до оси цилиндра.

Задача 6.4. Используя уравнение Пуассона для векторного потенциала поля

$$\Delta A(\vec{r}) = -\frac{4\pi}{c} j(\vec{r}),$$

вычислить напряженность магнитного поля постоянного тока I , текущего по бесконечному цилинду радиусом a (плотность тока внутри цилиндра считать постоянной).

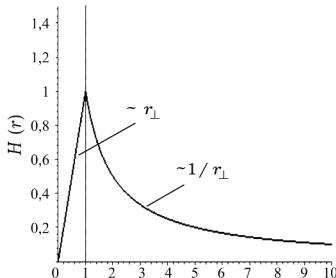
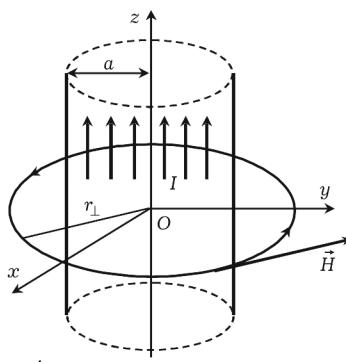


Рис. 2



Решение. Распределение плотности тока обладает аксиальной симметрией относительно оси цилиндра. Поэтому задачу будем решать в цилиндрических координатах. Направим ось Oz вдоль оси цилиндра вверх (см. рисунок). При таком выборе осей, очевидно, что вектор плотности тока

$$\overset{\text{r}}{j}(r_{\perp}, \psi, z) = \overset{\text{r}}{e}_{r_{\perp}} j_{r_{\perp}}(r_{\perp}, \psi, z) + \overset{\text{r}}{e}_{\psi} j_{\psi}(r_{\perp}, \psi, z) + \overset{\text{r}}{e}_z j_z(r_{\perp}, \psi, z) \quad (1)$$

будет иметь только одну проекцию на ось z ($j_{r_{\perp}} = 0, j_{\psi} = 0$) и ее значение будет постоянным внутри цилиндра:

$$\overset{\text{r}}{j} = \begin{cases} 0, & \text{если } r_{\perp} > a; \\ \overset{\text{r}}{e}_z j_0, & \text{если } r_{\perp} \leq a; \end{cases} \quad j_0 = \frac{I}{\pi a^2}. \quad (2)$$

Векторный потенциал поля тоже будет иметь только одну ненулевую проекцию на ось Oz, причем значение A_z будет зависеть в силу аксиальной симметрии задачи только от расстояния r_{\perp} до оси цилиндра, т.е.

$$\begin{aligned} \overset{\text{r}}{A}(r_{\perp}, \psi, z) = & \overset{\text{r}}{e}_{r_{\perp}} A_{r_{\perp}}(r_{\perp}, \psi, z) + \\ & + \overset{\text{r}}{e}_{\psi} A_{\psi}(r_{\perp}, \psi, z) + \overset{\text{r}}{e}_z A_z(r_{\perp}, \psi, z) = \overset{\text{r}}{e}_z A_z(r_{\perp}). \end{aligned} \quad (3)$$

Уравнение Пуассона в цилиндрических координатах для величины $A_z(r_{\perp})$ будет выглядеть так:

$$\begin{aligned} \Delta A_z(r_{\perp}) &= -\frac{4\pi}{c} j_z(r_{\perp}); \\ \frac{1}{r_{\perp}} \frac{d}{dr_{\perp}} \left(r_{\perp} \frac{dA_z(r_{\perp})}{dr_{\perp}} \right) &= -\frac{4\pi}{c} j_z(r_{\perp}). \end{aligned} \quad (4)$$

Так как плотность токов имеет разрыв первого рода при $r_{\perp} = a$, то нужно решить уравнение Лапласа в двух областях – вне и внутри цилиндра. Затем нужно определить неизвестные константы, используя условие ограниченности решения внутри цилиндра, а также условие непрерывности векторного потенциала и его нормальной производной на поверхности цилиндра.

Обозначим векторный потенциал вне цилиндра через $A_I(r_{\perp})$, а внутри цилиндра – через $A_{II}(r_{\perp})$. Тогда система уравнений для векторного потенциала будет выглядеть так:

$$\begin{cases} \frac{1}{r_{\perp}} \frac{d}{dr_{\perp}} \left(r_{\perp} \frac{dA_I(r_{\perp})}{dr_{\perp}} \right) = 0, & r_{\perp} > a; \\ \frac{1}{r_{\perp}} \frac{d}{dr_{\perp}} \left(r_{\perp} \frac{dA_{II}(r_{\perp})}{dr_{\perp}} \right) = -\frac{4\pi}{c} j_0, & r_{\perp} < a. \end{cases} \quad (5a)$$

Дополнительные условия:

$$\begin{cases} A_I(r_{\perp} = a) = A_{II}(r_{\perp} = a); \\ \left. \frac{dA_I}{dr_{\perp}} \right|_{r_{\perp}=a} = \left. \frac{dA_{II}}{dr_{\perp}} \right|_{r_{\perp}=a}; \\ A_{II}(r_{\perp} = 0) \text{ ограничено.} \end{cases} \quad (5b)$$

Получим решение уравнения Пуассона *вне цилиндра*:

$$\frac{d}{dr_{\perp}} \left(r_{\perp} \frac{dA_I(r_{\perp})}{dr_{\perp}} \right) = 0 \Rightarrow r_{\perp} \frac{dA_I(r_{\perp})}{dr_{\perp}} = C_1 \Rightarrow A_I(r_{\perp}) = C_1 \int \frac{dr_{\perp}}{r_{\perp}} + C_2,$$

т.е. вне цилиндра общее решение уравнения Пуассона имеет вид

$$A_I(r_{\perp}) = C_1 \ln r_{\perp} + C_2 \quad (r_{\perp} > a). \quad (6)$$

Получим решение уравнения Пуассона *внутри цилиндра*, где плотность тока отлична от нуля:

$$\frac{1}{r_{\perp}} \frac{d}{dr_{\perp}} \left(r_{\perp} \frac{dA_{II}(r_{\perp})}{dr_{\perp}} \right) = -\frac{4\pi}{c} j_0 \Rightarrow \frac{d^2 A_{II}}{dr_{\perp}^2} + \frac{1}{r_{\perp}} \frac{dA_{II}}{dr_{\perp}} = -\frac{4\pi}{c} j_0. \quad (7)$$

Решение уравнения Пуассона (7), т.е. неоднородного уравнения Лапласа, складывается из общего решения однородного уравнения и любого частного решения $\tilde{A}_{II}(r_{\perp})$ неоднородного уравнения.

Общее решение однородного уравнения определяется формулой (6). Поэтому общее решение уравнения (7) будет выглядеть так:

$$A_{II}(r_{\perp}) = C_3 \ln r_{\perp} + C_4 + A_{II}'(r_{\perp}). \quad (8)$$

Осталось определить любое частное решение неоднородного уравнения (7).

Будем искать частное решение уравнения (7) в виде $A_{II}' = B \cdot r_{\perp}^2$, где B – некоторая константа. Подставляя это в (7), получаем:

$$2B + 2B = -4\pi j_0 / c.$$

Отсюда находим, что $B = -\pi j_0 / c$. Следовательно, внутри цилиндра, с учетом формулы (2) для j_0 , получаем:

$$A_{II}(r_{\perp}) = C_3 \ln r_{\perp} + C_4 - \frac{\pi}{c} j_0 r_{\perp}^2 = C_3 \ln r_{\perp} + C_4 - \frac{l}{c} \frac{r_{\perp}^2}{a^2}. \quad (9)$$

Из ограниченности векторного потенциала внутри цилиндра (т.е. при $r_{\perp} = 0$) получаем, что $C_3 = 0$. Поэтому

$$A_{II}(r_{\perp}) = C_4 - \frac{l}{c} \frac{r_{\perp}^2}{a^2} \quad (r_{\perp} < a). \quad (10)$$

Оставшиеся константы определяем из условия спивки потенциала и его нормальных производных на поверхности цилиндра:

$$\begin{cases} A_I(r_{\perp} = a) = A_{II}(r_{\perp} = a); \\ \left. \frac{dA_I}{dr_{\perp}} \right|_{r_{\perp}=a} = \left. \frac{dA_{II}}{dr_{\perp}} \right|_{r_{\perp}=a}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 \ln a + C_2 = C_4 - l / c; \\ \frac{C_1}{a} = -\frac{2l}{c \cdot a}. \end{cases} \quad (11)$$

Из второго уравнения (11) сразу находим $C_1 = -2l / c$. Подставляя это в первое уравнение системы (11), получим

$$C_2 = C_4 + \frac{2l}{c} \ln a - \frac{l}{c}. \quad (12)$$

Обозначая неопределенную константу C_4 буквой C , запишем выражение для векторного потенциала поля в виде

$$A_I(r_{\perp}) = -\frac{2l}{c} \ln \frac{r_{\perp}}{a} - \frac{l}{c} + C \quad (r_{\perp} > a); \quad (13)$$

$$A_{II}(r_{\perp}) = -\frac{I}{c} \frac{r_{\perp}^2}{a^2} + C \quad (r_{\perp} > a). \quad (14)$$

В определении константы C нет необходимости, поскольку ее значение никак не отразится на напряженности поля \vec{H} , так как при вычислении ротора от векторного потенциала производная от этой константы обратится в нуль.

Определив векторный потенциал поля, можем вычислить напряженность поля по обычной формуле

$$\vec{H}(\vec{r}) = \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}). \quad (15)$$

В цилиндрических координатах

$$H_{r_{\perp}} = (\operatorname{rot} \vec{A})_{r_{\perp}} = \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial A_z(r_{\perp})}{\partial \psi} - \frac{\partial A_{\psi}}{\partial z}; \quad (16a)$$

$$H_z = (\operatorname{rot} \vec{A})_z = \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial}{\partial r_{\perp}} (r_{\perp} A_{\psi}) - \frac{1}{r_{\perp}} \frac{\partial A_{r_{\perp}}}{\partial \psi}; \quad (16b)$$

$$H_{\psi} = (\operatorname{rot} \vec{A})_{\psi} = \frac{\partial A_{r_{\perp}}}{\partial z} - \frac{\partial A_z(r_{\perp})}{\partial r_{\perp}}. \quad (16c)$$

Поскольку $A_{r_{\perp}} = 0$, $A_{\psi} = 0$, а проекция A_z зависит только от расстояния до оси цилиндра r_{\perp} , из первых двух формул (16a) и (16b) получаем, что

$$H_{r_{\perp}} = 0, \quad H_z = 0. \quad (17)$$

Единственная отличная от нуля проекция H_{ψ} будет определяться выражением

$$H_{\psi}(r_{\perp}) = -\frac{dA_z(r_{\perp})}{dr_{\perp}}. \quad (18)$$

В первой области (вне цилиндра)

$$H_{\psi}(r_{\perp} \geq a) = -\frac{dA_I}{dr_{\perp}} = -\frac{d}{dr_{\perp}} \left\{ \frac{2I}{c} \ln \frac{r_{\perp}}{a} - \frac{I}{c} + C \right\} = \frac{2I}{cr_{\perp}}. \quad (19a)$$

Во второй области (внутри цилиндра)

$$H_{\psi}(r_{\perp} < a) = -\frac{dA_{II}}{dr_{\perp}} = -\frac{d}{dr_{\perp}} \left\{ -\frac{I}{c} \frac{r_{\perp}^2}{a^2} + C \right\} = \frac{2I}{ca^2} r_{\perp}. \quad (19b)$$

Таким образом, окончательно можно записать, что

$$H = \vec{e}_\psi \cdot \frac{2I}{ca} \begin{cases} \frac{a}{r_\perp}, & \text{если } r_\perp \geq a; \\ \frac{r_\perp}{a}, & \text{если } r_\perp < a. \end{cases} \quad (20)$$

Здесь \vec{e}_ψ – единичный орт в цилиндрической системе координат, направленный по касательной к окружности C_{r_\perp} (к силовой линии поля).

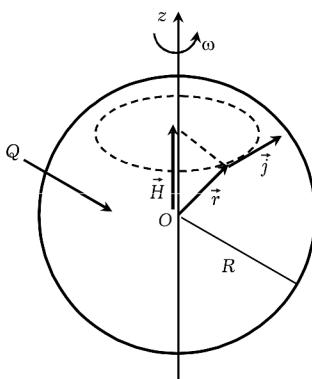
Задача 6.5. Вычислить напряженность поля в центре равномерно заряженного шара, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω . Радиус шара – R , полный заряд – Q .

Решение. Воспользуемся общим решением уравнения Пуассона (6.17):

$$H(\vec{r}) = \frac{1}{c} \iiint_V \frac{[\vec{j}(\vec{r}'), (\vec{r} - \vec{r}')]^T}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (1)$$

Поместим начало координат в центр шара, а ось Oz направим вдоль направления вращения так, что вектор угловой скорости будет иметь отличную от нуля проекцию только на ось Oz : $\vec{\omega} = (0; 0; \omega)$.

Нужно вычислить напряженность поля в точке O . Полагая в (1) $\vec{r}' = 0$ и обозначая для сокращения письма переменную интегрирования $\vec{r}' = \vec{r}$, запишем:



$$H(0) = \frac{1}{c} \iiint_{r \leq R} \left[\frac{\vec{r}, \vec{j}(\vec{r})}{r^3} \right] dV. \quad (2)$$

Интегрирование будем проводить в сферических координатах:
 $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$. Так как шар заряжен равномерно, то
 $\rho = \rho_0 = 3Q/4\pi R^3$. Плотность тока в рассматриваемой задаче
 $\vec{j} = \rho_0 \vec{V} = \rho_0 [\vec{\omega}, \vec{r}]$, так что

$$\left[\vec{r}, \vec{j}(\vec{r}) \right] = \rho_0 \left[\vec{r}, [\vec{\omega}, \vec{r}] \right] = \rho_0 \vec{\omega} r^2 - \rho_0 \vec{r} \cdot (\vec{\omega}, \vec{r}). \quad (3)$$

Подставляя (3) в (2), запишем:

$$H(0) = \frac{\rho_0}{c} \iiint_{r \leq R} \frac{\vec{\omega} \cdot r^2 - \vec{r} \cdot (\vec{\omega}, \vec{r})}{r^3} dV. \quad (4)$$

Из соображений симметрии очевидно, что отличной от нуля будет только проекция вектора H на направление оси вращения, т.е.
 $H = (0; 0; H_z)$. Процируя уравнение (4) на ось Oz , получим:

$$H_z(0) = \frac{\rho_0}{c} \iiint_{r \leq R} \frac{\{\vec{\omega} \cdot r^2 - \vec{r} \cdot (\vec{\omega}, \vec{r})\}_z}{r^3} dV. \quad (5)$$

Поскольку

$$\{\vec{\omega} \cdot r^2 - \vec{r} \cdot (\vec{\omega}, \vec{r})\}_z = \omega \cdot r^2 - z \cdot \omega r \cos \theta = \omega \cdot r^2 \cdot (1 - \cos^2 \theta)$$

(здесь учтено, что $z = r \cos \theta$ и $(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega r \cos \theta$), то формула (5) принимает вид

$$\begin{aligned} H_z(0) &= \frac{\rho_0}{c} \omega \iiint_{r \leq R} \frac{(1 - \cos^2 \theta)}{r} dV = \\ &= \frac{\rho_0}{c} \omega \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \int_0^R r dr. \end{aligned} \quad (6)$$

Так как

$$\int_0^{\pi} (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) d\mu = 2 \int_0^1 (1 - \mu^2) d\mu = 4/3,$$
$$\int_0^R r dr = R^2/2,$$

то получаем следующее значение напряженности поля в центре равномерно вращающегося шара:

$$H_z(0) = \frac{\rho_0}{c} \omega \frac{4}{3} \pi R^2 = \frac{Q}{cR} \omega,$$

т.е.

$$H(0) = \frac{Q}{cR} \omega. \quad (7)$$

Задача 6.6. Доказать, что напряженность однородного магнитного поля $H_0 = \text{const}$ и векторный потенциал \vec{A} этого поля связаны соотношением: $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2} [\vec{H}_0 \vec{r}]$.

Решение. Воспользуемся формулой (см. прил. I): $\text{rot} [\vec{a}, \vec{b}] = 2\vec{a}$; $\vec{a} = \text{const}$. Полагая в этой формуле $\vec{a} = \vec{H}_0$, запишем: $\frac{1}{2} \text{rot} [\vec{H}_0, \vec{r}] = \vec{H}_0$. Поскольку $\vec{H}_0 = \text{rot} \vec{A}$, то получаем, что в однородном магнитном поле $\vec{A}(\vec{r}) = \frac{1}{2} [\vec{H}_0 \vec{r}]$.

Задачи к разделу 7

Задача 7.1. Используя формулу (7.16) для векторного потенциала поля на больших расстояниях, получить формулу (7.17) для напряженности магнитного поля.

Решение. Напряженность магнитного поля связана с векторным потенциалом поля общим соотношением $\vec{H}(\vec{r}) = \text{rot} \vec{A}(\vec{r})$. Векторный потенциал поля на больших расстояниях от системы токов

определяется выражением: $\overset{\text{r}}{A}(\overset{\text{r}}{r}) = [\overset{\text{r}}{m}, \overset{\text{r}}{r}] / r^3$, где $\overset{\text{r}}{m}$ – магнитный момент системы (7.18), (7.20). Таким образом, на больших расстояниях

$$\overset{\text{r}}{H}_m(\overset{\text{r}}{r}) = \text{rot } \overset{\text{r}}{A}_m(\overset{\text{r}}{r}) = \text{rot} \left\{ \frac{1}{r^3} \cdot [\overset{\text{r}}{m}, \overset{\text{r}}{r}] \right\}. \quad (1)$$

Ротор от произведения скалярной функции $f(\overset{\text{r}}{r})$ на векторную $\overset{\text{r}}{b}(\overset{\text{r}}{r})$ определяется выражением: $\text{rot}(f \cdot \overset{\text{r}}{b}) = f \cdot \text{rot} \overset{\text{r}}{b} + [\text{grad } f, \overset{\text{r}}{b}]$.

В нашем случае $f = 1/r^3$ и $\overset{\text{r}}{b} = [\overset{\text{r}}{m}, \overset{\text{r}}{r}]$. Поэтому

$$\overset{\text{r}}{H}(\overset{\text{r}}{r}) = \left\{ \frac{1}{r^3} \text{rot} [\overset{\text{r}}{m}, \overset{\text{r}}{r}] + [\overset{\text{r}}{m}, \overset{\text{r}}{r}] \text{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) \right\}. \quad (2)$$

Величина $\text{grad}(1/r^3)$ есть градиент от сферически симметричной функции: $\text{grad } f(r) = \frac{df(r)}{dr} \frac{\overset{\text{r}}{r}}{r}$:

$$\text{grad} \left(\frac{1}{r^3} \right) = \frac{\overset{\text{r}}{r}}{r} \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r^3} \right) = -3 \frac{\overset{\text{r}}{r}}{r} \frac{1}{r^4} = -3 \frac{\overset{\text{r}}{r}}{r^5}. \quad (3)$$

Осталось вычислить $\text{rot}[\overset{\text{r}}{m}, \overset{\text{r}}{r}]$. Учитывая, что $\overset{\text{r}}{m}$ – постоянный вектор, находим $\text{rot}[\overset{\text{r}}{m}\overset{\text{r}}{r}] = 2\overset{\text{r}}{m}$. Поэтому

$$\text{rot} \frac{[\overset{\text{r}}{m}\overset{\text{r}}{r}]}{r^3} = \frac{2\overset{\text{r}}{m}}{r^3} - \frac{3}{r^5} [\overset{\text{r}}{r}, [\overset{\text{r}}{m}\overset{\text{r}}{r}]]. \quad (4)$$

Второе слагаемое в (4) есть двойное векторное произведение: $[\overset{\text{r}}{r}, [\overset{\text{r}}{m}\overset{\text{r}}{r}]] = \overset{\text{r}}{m}r^2 - \overset{\text{r}}{r}(\overset{\text{r}}{m}\overset{\text{r}}{r})$. Подставляя это в (4), получим:

$$\text{rot} \frac{[\overset{\text{r}}{m}\overset{\text{r}}{r}]}{r^3} = 2 \frac{\overset{\text{r}}{m}}{r^3} - \frac{3}{r^5} (\overset{\text{r}}{m}r^2 - \overset{\text{r}}{r}(\overset{\text{r}}{m}\overset{\text{r}}{r})) = \frac{2\overset{\text{r}}{m}}{r^3} - \frac{3\overset{\text{r}}{m}}{r^3} + \frac{3\overset{\text{r}}{r}(\overset{\text{r}}{m}\overset{\text{r}}{r})}{r^5}. \quad (5)$$

Следовательно,

$$\overset{\text{r}}{H}_m = \text{rot} \frac{[\overset{\text{r}}{m}\overset{\text{r}}{r}]}{r^3} = \frac{3\overset{\text{r}}{r}(\overset{\text{r}}{m}\overset{\text{r}}{r}) - \overset{\text{r}}{m}r^2}{r^5}. \quad (6)$$

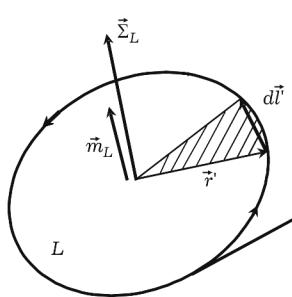
Задача 7.2. Вычислить магнитный момент плоского замкнутого контура L , по которому протекает постоянный ток I .

Решение. В этом случае $\int dV' = I \int dl'$. Здесь $\int dS = l$ – постоянный ток, протекающий по сечению проводника; dl' – элемент длины проводника, направленный по касательной в сторону течения тока. Направления векторов \vec{j} и dl' совпадают. Из общей формулы (7.20)

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \iiint_V [\vec{r}', \vec{j}(\vec{r}')] dV', \quad (1)$$

получим

$$\vec{m}_L = \frac{I}{2c} \oint_L [\vec{r}', dl']. \quad (2)$$



Векторы \vec{r}' и dl' лежат в плоскости контура L . Поэтому магнитный момент \vec{m} направлен перпендикулярно плоскости контура с током.

С другой стороны, величина $[\![dl', dl']\!]$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах \vec{r}' и dl' , т.е. удвоенной площади заштрихованного сектора (см. рисунок).

Поэтому величина интеграла (2) равна удвоенной площади контура с током. Учитывая все сказанное, получаем следующее выражение для магнитного момента плоского контура с током:

$$\vec{m}_L = I \vec{\Sigma}_L / c. \quad (3)$$

Вектор $\vec{\Sigma}_L$ направлен по нормали к площади контура и связан с направлением тока правилом правого буравчика. Величина вектора $\vec{\Sigma}_L$ равна площади контура L .

Формула (3) допускает наглядную интерпретацию. Всякий замкнутый ток, например одна частица, движущаяся по замкнутой траектории, обладает магнитным моментом, пропорциональным площади траектории, независимо от ее формы – будь то окружность, эллипс или что-либо другое.

Задача 7.3. Показать, что в нерелятивистском случае магнитный и механический моменты системы из двух зарядов пропорциональны друг другу при произвольных отношениях заряда к массе частиц.

Решение. В такой системе

$$\overset{\circ}{m} = \frac{1}{2c} \{ \Theta_1 [\overset{\circ}{r}_1, \overset{\circ}{v}_1] + \Theta_2 [\overset{\circ}{r}_2, \overset{\circ}{v}_2] \}. \quad (1)$$

Поместим начало координат в центр масс системы. Напомним, что для частиц, движущихся со скоростью много меньшей скорости света, радиус-вектор центра масс системы определяется формулой $\overset{\circ}{R}_{\text{ц}} = (m_1 \overset{\circ}{r}_1 + m_2 \overset{\circ}{r}_2) / (m_1 + m_2)$. Тогда

$$m_1 \overset{\circ}{r}_1 + m_2 \overset{\circ}{r}_2 = 0 \quad \text{и} \quad m_1 \overset{\circ}{v}_1 + m_2 \overset{\circ}{v}_2 = 0. \quad (2)$$

Введем относительное расстояние между частицами и относительную скорость частиц:

$$\overset{\circ}{r}_{\text{отн}} = \overset{\circ}{r}_2 - \overset{\circ}{r}_1 \quad \text{и} \quad \overset{\circ}{v}_{\text{отн}} = \overset{\circ}{v}_2 - \overset{\circ}{v}_1. \quad (3)$$

Из уравнений (2), (3) находим, что (как и в задаче двух тел)

$$\overset{\circ}{r}_1 = -\overset{\circ}{r}_{\text{отн}} \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \overset{\circ}{r}_2 = \overset{\circ}{r}_{\text{отн}} \frac{m_1}{m_1 + m_2}; \quad (4)$$

$$\overset{\circ}{v}_1 = -\overset{\circ}{v}_{\text{отн}} \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad \overset{\circ}{v}_2 = \overset{\circ}{v}_{\text{отн}} \frac{m_1}{m_1 + m_2}. \quad (5)$$

Подставляя это в формулу (1) для магнитного момента $\overset{\circ}{m}$, получаем:

$$\overset{\circ}{m} = \frac{1}{2c} \left\{ \Theta_1 \frac{m_2^2}{(m_1 + m_2)^2} [\overset{\circ}{r}_{\text{отн}}, \overset{\circ}{v}_{\text{отн}}] + \Theta_2 \frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} [\overset{\circ}{r}_{\text{отн}}, \overset{\circ}{v}_{\text{отн}}] \right\},$$

$$\text{т.е.} \quad \overset{\circ}{m} = \frac{1}{2c} \left\{ \Theta_1 \frac{m_2^2}{m_1 + m_2} + \Theta_2 \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} \right\} \frac{[\overset{\circ}{r}_{\text{отн}}, \overset{\circ}{v}_{\text{отн}}]}{m_1 + m_2}. \quad (6)$$

Механический момент импульса в системе центра масс определяется выражением: $\vec{L}_{\text{OTH}} = \mu [\vec{r}_{\text{OTH}}, \vec{v}_{\text{OTH}}]$, где μ – приведенная масса, $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$. С учетом этого последняя формула записывается так:

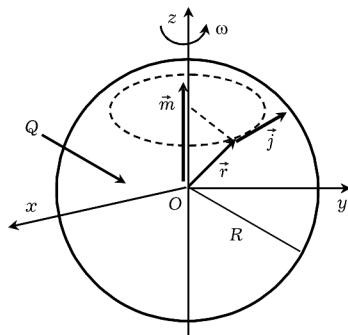
$$\begin{aligned}\vec{m} &= \frac{1}{2c(m_1 + m_2)} \left\{ \Theta_1 \frac{m_2}{m_1} + \Theta_2 \frac{m_1}{m_2} \right\} \vec{L}_{\text{OTH}} = \\ &= \frac{1}{2c} \left\{ \frac{\Theta_1}{m_1^2} + \frac{\Theta_2}{m_2^2} \right\} \mu \vec{L}_{\text{OTH}}.\end{aligned}\quad (7)$$

Если частицы имеют к тому же одинаковое отношение заряда к массе:

$$\frac{\Theta_1}{m_1} = \frac{\Theta_2}{m_2} = \frac{e}{m}, \quad (8)$$

то формула (7) записывается так:

$$\vec{m} = \frac{e}{2mc} \vec{L}_{\text{OTH}}. \quad (9)$$



Задача 7.4. Вычислить магнитный момент равномерно заряженного шара, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω . Радиус шара – R , полный заряд – Q .

Решение. Для решения задачи воспользуемся общим выражением (7.20) для магнитного момента:

$$\vec{m} = \frac{1}{2c} \iiint_{r \leq R} [\vec{r}, \vec{j}(\vec{r})] dV. \quad (1)$$

Формула (1) только множителем $1/2r^3$ под знаком интеграла отличается от выражения (2) для напряженности в центре шара (см. задачу 6.5). Поэтому вычисление магнитного момента аналогично вычислению напряженности магнитного поля в центре шара.

Поместим начало координат в центр шара, а ось Oz направим вдоль направления вращения, так что вектор угловой скорости будет иметь отличную от нуля проекцию только на ось Oz : $\vec{\omega} = (0; 0; \omega)$.

Интегрирование в (1) будем проводить в сферических координатах: $dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$. Так как шар заряжен равномерно, то $\rho = \rho_0 = 3Q/4\pi R^3$. Плотность тока в рассматриваемой задаче $\vec{j} = \rho_0 \vec{V} = \rho_0 [\vec{r}, \vec{r}]$. Следовательно,

$$[\vec{r}, \vec{j}(\vec{r})] = \rho_0 [\vec{r}, [\vec{r}, \vec{r}]] = \rho_0 \vec{r} r^2 - \rho_0 \vec{r} \cdot (\vec{\omega}, \vec{r}). \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), запишем:

$$\vec{m} = \frac{\rho_0}{2c} \iiint_{r \leq R} \left\{ \vec{\omega} \cdot r^2 - \vec{r} \cdot (\vec{\omega}, \vec{r}) \right\} dV. \quad (3)$$

Из соображений симметрии очевидно, что отличной от нуля будет только проекция магнитного момента \vec{m} на направление оси вращения, т.е. $\vec{m} = (0; 0; m)$. Проецируя уравнение (3) на ось Oz , получим:

$$m_z = \frac{\rho_0}{2c} \iiint_{r \leq R} \left\{ \vec{\omega} \cdot r^2 - \vec{r} \cdot (\vec{\omega}, \vec{r}) \right\}_z dV. \quad (4)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \left\{ \vec{\omega} \cdot r^2 - \vec{r} \cdot (\vec{\omega}, \vec{r}) \right\}_z &= \omega \cdot r^2 - z \cdot (\omega r \cos \theta) = \\ &= \omega \cdot r^2 \cdot (1 - \cos^2 \theta) \end{aligned}$$

(здесь учтено, что $z = r \cos \theta$ и $(\vec{\omega}, \vec{r}) = \omega r \cos \theta$), то формула (4) принимает вид

$$\begin{aligned}
m_z &= \frac{\rho_0}{2c} \omega \iiint_{r \leq R} (1 - \cos^2 \theta) dV = \\
&= \frac{\rho_0}{c} \omega \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta \int_0^R r^4 dr.
\end{aligned} \tag{5}$$

Таким образом, тройной интеграл по объему шара распался на произведение трех интегралов. Интегрирование по азимутальному углу дает 2π , по полярному углу —

$$\int_0^\pi (1 - \cos^2 \theta) \sin \theta d\theta = \int_{-1}^1 (1 - \mu^2) d\mu = 2 \int_0^1 (1 - \mu^2) d\mu = 4/3,$$

а интеграл по радиусу — $R^5/5$. Учитывая все сказанное, получаем следующее значение магнитного момента равномерно вращающегося шара:

$$\begin{aligned}
m_z &= m = \frac{\rho_0}{2c} \omega 2\pi \frac{4}{15} R^5 = \frac{QR^2}{5c} \omega, \\
\text{т.е. } &\vec{m} = \frac{QR^2}{5c} \vec{\omega}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Задачи к разделу 8

Задача 8.1. Две монохроматические волны с частотой ω поляризованы по кругу в противоположные стороны и распространяются в одном направлении. Амплитуды волн одинаковы и равны E_0 . Фазы волн отличаются на постоянную величину α . Определить поляризацию результирующей волны.

Решение. Выберем ось Oz в направлении распространения волн. Тогда, согласно условию задачи, векторы напряженностей электрических полей волн $\vec{E}_1(z; t)$ и $\vec{E}_2(z; t)$ можно представить в виде

$$\vec{E}_1(z; t) = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - kz + \alpha) + E_0 \vec{e}_y \sin(\omega t - kz + \alpha); \tag{1}$$

$$\vec{E}_2(z; t) = E_0 \vec{e}_x \cos(\omega t - kz) - E_0 \vec{e}_y \sin(\omega t - kz), \tag{2}$$

где $\hat{\mathbf{e}}_x$ и $\hat{\mathbf{e}}_y$ – единичные орты осей Ox и Oy соответственно. Знаки "+" и "-" перед вектором $\hat{\mathbf{e}}_y$ в формулах (1) и (2) соответствуют право- и левополяризованной волнам.

В силу принципа суперпозиции, напряженность электрического поля результирующей волны равна векторной сумме напряженностей E_1 и E_2 :

$$\overset{\text{r}}{E}(z; t) = \overset{\text{r}}{E}_1(z; t) + \overset{\text{r}}{E}_2(z; t). \quad (3)$$

Складывая выражения (1) и (2) по правилам векторного сложения, запишем:

$$\begin{aligned} E_x(z; t) &= E_{1x}(z; t) + E_{2x}(z; t) = \\ &= E_0 \{ \cos(\omega t - kz + \alpha) + \cos(\omega t - kz) \}; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} E_y(z; t) &= E_{1y}(z; t) + E_{2y}(z; t) = \\ &= E_0 \{ \sin(\omega t - kz + \alpha) - \sin(\omega t - kz) \}; \end{aligned} \quad (5)$$

Учитывая известные формулы тригонометрии

$$\begin{aligned} \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \\ \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \end{aligned} \quad (6)$$

находим следующие выражения для компонент напряженности электрического поля суммарной волны:

$$E_x(z; t) = 2E_0 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\omega t - kz + \frac{\alpha}{2}\right); \quad (7)$$

$$E_y(z; t) = 2E_0 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\omega t - kz + \frac{\alpha}{2}\right). \quad (8)$$

В векторном виде формулы (7) и (8) для напряженности поля суммарной волны записутся так:

$$\overset{\text{r}}{E}(z; t) = \overset{\text{r}}{e}_x E_x(z; t) + \overset{\text{r}}{e}_y E_y(z; t) = 2E_0 \overset{\text{r}}{I} \cos\left(\omega t - kz + \frac{\alpha}{2}\right). \quad (9)$$

Здесь $\overset{\text{r}}{I}$ – единичный вектор поляризации волны:

$$\overset{\text{r}}{I} = \overset{\text{r}}{e}_x \cos \frac{\alpha}{2} + \overset{\text{r}}{e}_y \sin \frac{\alpha}{2}, \quad \overset{\text{r}}{I}^2 = 1. \quad (10)$$

Как видно из (9), результирующая волна имеет линейную поляризацию. В произвольный момент времени в произвольной точке пространства напряженность поля волны направлена вдоль единичного вектора $\overset{\text{r}}{l}$. Направление вектора поляризации $\overset{\text{r}}{l}$ зависит от разности фаз складываемых волн. Если фазы волн совпадают ($\alpha = 0$), то суммарная волна поляризована вдоль оси Ox ($\overset{\text{r}}{l} = \overset{\text{r}}{e}_x$). При разности фаз, равной $\alpha = \pi$, результирующая волна поляризована вдоль оси Oy ($\overset{\text{r}}{l} = \overset{\text{r}}{e}_y$). Амплитуда суммарной волны оказывается в два раза большей, чем амплитуды складываемых волн.

Задача 8.2. Две монохроматические линейно поляризованные волны с частотой ω распространяются в одном направлении. Амплитуды волн одинаковы и равны E_0 , а векторы поляризации $\overset{\text{r}}{l}_1$ и $\overset{\text{r}}{l}_2$ перпендикулярны:

$$\overset{\text{r}}{l}_1 \perp \overset{\text{r}}{l}_2, \quad \overset{\text{r}}{l}_1^2 = \overset{\text{r}}{l}_2^2 = 1.$$

Фазы волн α_1 и α_2 произвольны. Другими словами, напряженности электрического поля волн

$$\overset{\text{r}}{E}_1(\overset{\text{r}}{r}; t) = E_0 \overset{\text{r}}{l}_1 \cos(\omega t - \overset{\text{r}}{k} \overset{\text{r}}{r} + \alpha_1) \quad \text{и} \quad \overset{\text{r}}{E}_2(\overset{\text{r}}{r}; t) = E_0 \overset{\text{r}}{l}_2 \cos(\omega t - \overset{\text{r}}{k} \overset{\text{r}}{r} + \alpha_2),$$

где $\overset{\text{r}}{k}$ – волновой вектор, указывающий направление распространения волн ($\overset{\text{r}}{l}_1 \perp \overset{\text{r}}{k}$ и $\overset{\text{r}}{l}_2 \perp \overset{\text{r}}{k}$).

Определить поляризацию суммарной волны.

Решение. I способ

Выберем ось Oz вдоль волнового вектора волн $\overset{\text{r}}{k}$, так что $\overset{\text{r}}{k} \overset{\text{r}}{l} = k z$. Тогда поскольку $\overset{\text{r}}{l}_1 \perp \overset{\text{r}}{k}$ и $\overset{\text{r}}{l}_2 \perp \overset{\text{r}}{k}$, то взаимно перпендикулярные векторы $\overset{\text{r}}{l}_1$ и $\overset{\text{r}}{l}_2$ будут расположены в плоскости xOy . Направим ось Ox вдоль вектора $\overset{\text{r}}{l}_1$. Тогда вектор $\overset{\text{r}}{l}_2$ будет направлен вдоль оси Oy или в противоположном направлении, т.е.

$$\overset{\text{r}}{l}_1 = \overset{\text{r}}{e}_x, \quad \overset{\text{r}}{l}_2 = \pm \overset{\text{r}}{e}_y. \quad (1)$$

Будем для определенности считать, что $\overset{\Gamma}{E}_2 = \overset{\Gamma}{E}_y$. Выберем за начало отсчета времени момент t_0 , при котором $\omega t_0 + \alpha_1 = 0$, т.е. $\omega t_0 = -\alpha_1$. При сделанных предположениях напряженности полей в первой и второй волнах будут выглядеть так:

$$\overset{\Gamma}{E}_1(z; t) = E_0 \overset{\Gamma}{e}_x \cos(\omega t - kz); \quad (2)$$

$$\overset{\Gamma}{E}_2(z; t) = E_0 \overset{\Gamma}{e}_y \cos(\omega t - kz + \Psi). \quad (3)$$

Здесь Ψ – разность фаз второй и первой волн:

$$\Psi = \alpha_2 - \alpha_1. \quad (4)$$

Напряженность поля результирующей волны определяется суммой векторов $\overset{\Gamma}{E}_1$ и $\overset{\Gamma}{E}_2$:

$$\begin{aligned} \overset{\Gamma}{E}(z; t) &= \overset{\Gamma}{E}_1(z; t) + \overset{\Gamma}{E}_2(z; t) = \\ &= E_0 \overset{\Gamma}{e}_x \cos(\omega t - kz) + E_0 \overset{\Gamma}{e}_y \cos(\omega t - kz + \Psi). \end{aligned} \quad (5)$$

Таким образом, проекции вектора $\overset{\Gamma}{E}(z; t)$ на оси Ox и Oy отличаются только фазой Ψ . Задача состоит в том, чтобы так преобразовать выражение для суммарного поля $\overset{\Gamma}{E}(z; t)$, чтобы оно приняло вид (9.35). Для этого осуществим поворот

системы координат вокруг оси Oz на угол $\varphi = 45^\circ$ против часовой стрелки (рис. 1). При повороте осей в плоскости xOy проекции вектора $\overset{\Gamma}{A}$ в этой плоскости преобразуются по известным формулам:

$$A'_x = A_x \cos \varphi + A_y \sin \varphi; \quad A'_y = -A_x \sin \varphi + A_y \cos \varphi.$$

Поскольку $\varphi = 45^\circ$, то $\cos \varphi = \sin \varphi = \sqrt{2}/2$. Поэтому в повернутой системе координат проекции вектора $\overset{\Gamma}{E}$ на оси Ox' и Oy' будут:

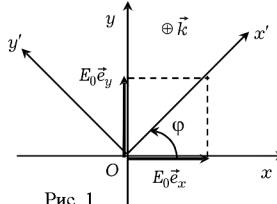


Рис. 1

$$E_x(z,t) = E_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \{ \cos(\omega t - kz + \Psi) + \cos(\omega t - kz) \}; \quad (6)$$

$$E_y(z,t) = E_0 \frac{\sqrt{2}}{2} \{ \cos(\omega t - kz + \Psi) - \cos(\omega t - kz) \}. \quad (7)$$

Учитывая известные формулы тригонометрии:

$$\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2},$$

$$\cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2},$$

получим: $E_x(z,t) = \sqrt{2}E_0 \cos \frac{\Psi}{2} \cos \left(\omega t - kz + \frac{\Psi}{2} \right); \quad (8)$

$$E_y(z,t) = -\sqrt{2}E_0 \sin \frac{\Psi}{2} \sin \left(\omega t - kz + \frac{\Psi}{2} \right). \quad (9)$$

Поделим обе части уравнения (8) на $E_0 \sqrt{2} \cos \frac{\Psi}{2}$, а (9) на

$$E_0 \sqrt{2} \sin \frac{\Psi}{2}. \text{ Затем возведем оба уравнения в квадрат и сложим их.}$$

Тогда получим

$$\frac{E_x^2}{a^2} + \frac{E_y^2}{b^2} = 1, \text{ где } a = E_0 \sqrt{2} \cos \frac{\Psi}{2} \text{ и } b = E_0 \sqrt{2} \sin \frac{\Psi}{2}. \quad (10)$$

Уравнение (10) есть уравнение эллипса с полуосами $|a|$ по оси Ox' и $|b|$ по оси Oy' :

$$a = E_0 \sqrt{2} \cos \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}; \quad b = E_0 \sqrt{2} \sin \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}. \quad (11)$$

Таким образом, суперпозиция двух линейно поляризованных (во взаимно перпендикулярных направлениях) волн дает волну с эллиптической поляризацией. Главные оси эллипса повернуты относительно векторов поляризации исходных волн \vec{l}_1 и \vec{l}_2 на угол 45° против часовой стрелки, если смотреть вдоль направления распространения волн. Направление вращения вектора $\vec{E}(z,t)$ зависит от

знаков величин $\sin(\psi/2)$ и $\cos(\psi/2)$, так что результирующая волна может быть как право-, так и левополяризованной.

Если фазы складываемых волн одинаковы ($\Psi = 0$) или отличаются на π ($\Psi = \pi$), то результирующая волна имеет линейную поляризацию вдоль осей Ox или Oy соответственно:

$$E'_x(z, t; \Psi = 0) = E_0 \sqrt{2} \cos(\omega t - kz), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} E'_y(z, t; \Psi = \pi) &= -E_0 \sqrt{2} \sin\left(\omega t - kz + \frac{\pi}{2}\right) = \\ &= -E_0 \sqrt{2} \cos(\omega t - kz). \end{aligned} \quad (13)$$

Если же фазы волн отличаются на величину $\Psi = \pi/2$, то эллипс превращается в окружность, так что суммарная волна имеет круговую поляризацию с амплитудой E_0 .

На рис. 2 – 7 представлены кривые, описываемые концом вектора \vec{E} (годограф вектора \vec{E}), рассчитанные по формуле (5) за один период ($E_0 = 1$, $z = 0$, $\omega = 2\pi/T$), при различных значениях сдвига фаз $\Psi = \alpha_2 - \alpha_1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_x(t) = \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right); \\ E_y(t) = \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \Psi\right). \end{array} \right. \quad (14)$$

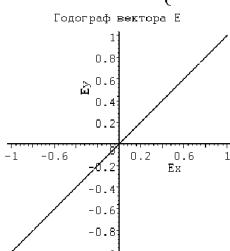


Рис. 2

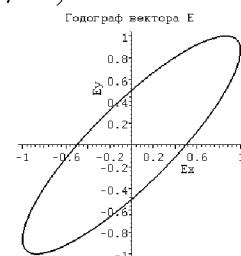
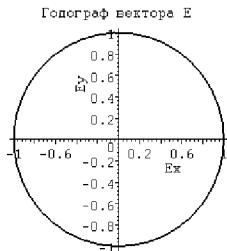
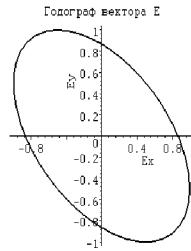


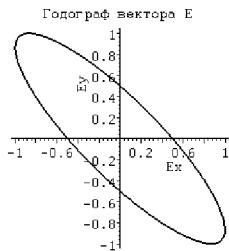
Рис. 3



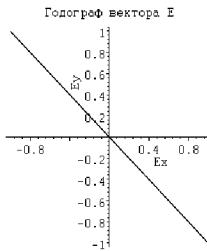
$\Psi = 90^\circ$
Рис. 4



$\Psi = 120^\circ$
Рис. 5



$\Psi = 150^\circ$
Рис. 6



$\Psi = 180^\circ$
Рис. 7

II способ

Выберем ось Oz вдоль волнового вектора волн \vec{k} , так что $\vec{k}\vec{r} = kz$. Тогда взаимно перпендикулярные векторы \vec{l}_1 и \vec{l}_2 будут расположены в плоскости xOy . Напряженности электрических полей волн $\vec{E}_1(z; t)$ и $\vec{E}_2(z; t)$ представим в комплексном виде

$$\vec{E}_1(z; t) = \operatorname{Re} \left\{ E_0 \vec{l}_1 e^{i(\omega t - kz + \alpha_1)} \right\}; \quad (1)$$

$$\vec{E}_2(z; t) = \operatorname{Re} \left\{ E_0 \vec{l}_2 e^{i(\omega t - kz + \alpha_2)} \right\}. \quad (2)$$

Тогда для напряженности поля суммарной волны получим следующее выражение:

$$\vec{E}(z; t) = \vec{E}_1(z; t) + \vec{E}_2(z; t) = \operatorname{Re} \left\{ E_0 \left[\vec{l}_1 e^{i\alpha_1} + \vec{l}_2 e^{i\alpha_2} \right] e^{i(\omega t - kz)} \right\}. \quad (3)$$

Величина $E_0 \left[\vec{l}_1 e^{i\alpha_1} + \vec{l}_2 e^{i\alpha_2} \right]$ представляет собой комплексную амплитуду суммарной волны. (Истинная амплитуда каждой из волн E_0 , конечно, является величиной действительной).

Для определения поляризации суммарной волны запишем комплексную амплитуду волны в виде

$$E_0 \left[\vec{l}_1 e^{i\alpha_1} + \vec{l}_2 e^{i\alpha_2} \right] = (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2) e^{i\beta}. \quad (4)$$

где \vec{b}_1 и \vec{b}_2 – некоторые вещественные векторы, подлежащие определению вместе с неизвестной вещественной фазой β . Умножая обе части уравнения (4) на $e^{-i\beta}$, запишем

$$\vec{b}_1 + i\vec{b}_2 = E_0 \left[\vec{l}_1 e^{i\alpha_1 - i\beta} + \vec{l}_2 e^{i\alpha_2 - i\beta} \right].$$

Отделяя реальную и мнимую части и учитывая вещественность векторов \vec{l}_1 , \vec{l}_2 , \vec{b}_1 и \vec{b}_2 , находим:

$$\vec{b}_1 = E_0 \left[\vec{l}_1 \cos(\alpha_1 - \beta) + \vec{l}_2 \cos(\alpha_2 - \beta) \right]; \quad (5)$$

$$\vec{b}_2 = E_0 \left[\vec{l}_1 \sin(\alpha_1 - \beta) + \vec{l}_2 \sin(\alpha_2 - \beta) \right]. \quad (6)$$

Неизвестную фазу β выберем так, чтобы векторы \vec{b}_1 и \vec{b}_2 были перпендикулярны друг другу:

$$(\vec{b}_1, \vec{b}_2) = 0. \quad (7)$$

Подставляя (5), (6) в (7) и учитывая перпендикулярность векторов \vec{l}_1 и \vec{l}_2 , находим уравнение для фазы β :

$$\cos(\alpha_1 - \beta) \sin(\alpha_1 - \beta) + \cos(\alpha_2 - \beta) \sin(\alpha_2 - \beta) = 0. \quad (8)$$

С учетом формул для синуса двойного угла и суммы синусов, уравнение (8) можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \sin[2(\alpha_1 - \beta)] + \sin[2(\alpha_2 - \beta)] = 0 \Rightarrow \\ & \Rightarrow 2 \sin(\alpha_1 + \alpha_2 - 2\beta) \cos(\alpha_1 - \alpha_2) = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Как нетрудно видеть, одним из решений уравнения (9) является значение

$$\beta = \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}. \quad (10)$$

Подставляя значение β в (5) и (6), находим искомые выражения для векторов \vec{b}_1 и \vec{b}_2 :

$$\vec{b}_1 = E_0 \left[\vec{l}_1 + \vec{l}_2 \right] \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right); \quad (11)$$

$$\vec{b}_2 = E_0 \left[\vec{l}_1 - \vec{l}_2 \right] \sin\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right). \quad (12)$$

Так как векторы \vec{l}_1 и \vec{l}_2 – единичные, то

$$\left| \vec{l}_1 + \vec{l}_2 \right| = \left| \vec{l}_1 - \vec{l}_2 \right| = \sqrt{2}. \quad (13)$$

Действительно, $(\vec{l}_1 \pm \vec{l}_2)^2 = \vec{l}_1^2 \pm 2\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 + \vec{l}_2^2 = 2$. Поэтому независимо от значения фаз α_1 и α_2 имеет место соотношение:

$$\vec{b}_1^2 + \vec{b}_2^2 = 2E_0^2.$$

Теперь исходную формулу (3), с учетом соотношения (4), можем записать в виде

$$\begin{aligned} \vec{E}(z, t) &= \operatorname{Re} \left\{ E_0 [\vec{l}_1 e^{i\alpha_1} + \vec{l}_2 e^{i\alpha_2}] e^{i(\omega t - kz)} \right\} = \\ &= \operatorname{Re} \left\{ (\vec{b}_1 + i\vec{b}_2) e^{i\beta} e^{i(\omega t - kz)} \right\}. \end{aligned} \quad (14)$$

При вычислении реальной части следует иметь ввиду, что векторы \vec{b}_1 и \vec{b}_2 являются действительными. В результате получаем следующее выражение для напряженности поля суммарной волны:

$$\vec{E}(z, t) = \vec{b}_1 \cos(\omega t - kz + \beta) - \vec{b}_2 \sin(\omega t - kz + \beta). \quad (15)$$

Величины β , \vec{b}_1 и \vec{b}_2 определяются формулами (10) – (12). Кроме того, векторы \vec{b}_1 и \vec{b}_2 лежат в плоскости xOy и взаимно перпендикулярны.

С учетом всего сказанного напряженность поля результирующей волны будет выглядеть так:

$$\vec{E}(z, t) = E_0 [\vec{l}_1 + \vec{l}_2] \cos\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \cos\left(\omega t - kz + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right) - \\ - E_0 [\vec{l}_1 - \vec{l}_2] \sin\left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right) \sin\left(\omega t - kz + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right).$$

Выберем оси координат Ox' и Oy' вдоль векторов $(\vec{l}_1 + \vec{l}_2)$ и $(\vec{l}_2 - \vec{l}_1)$ (рис. 8). Тогда проекции напряженности электрического поля суммарной волны в повернутой системе координат $x' Oy'$ запишутся в виде

$$E_{x'}(z, t) = (\vec{E}, \vec{l}_1 + \vec{l}_2) = \\ = \sqrt{2} E_0 \cos\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \cos\left(\omega t - kz + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right); \quad (16)$$

$$E_{y'}(z, t) = (\vec{E}, \vec{l}_2 - \vec{l}_1) = \\ = -\sqrt{2} E_0 \sin\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2}\right) \sin\left(\omega t - kz + \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2}\right). \quad (17)$$

Формулы (16), (17) лишь началом отсчета времени отличаются от выражений (8) и (9), полученных первым способом, так как $\alpha_2 - \alpha_1 = \psi$.

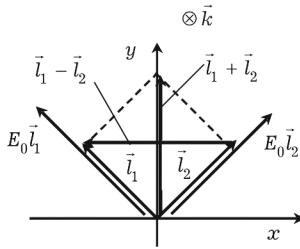


Рис. 8

Задачи к разделу 12

Задача 12.1. Частица массой m и зарядом $e > 0$ движется перпендикулярно однородному постоянному магнитному полю напряженностью \vec{H}_0 . Величина скорости частицы v_0 мала по сравнению со скоростью света c . Найти интенсивность дипольного излучения частицы I_d .

Решение. Интенсивность дипольного излучения частицы в момент времени t определяется выражением:

$$I_d = \frac{2\ddot{\vec{d}}^2(\tau)}{3c^3}, \quad \tau = t - r/c, \quad (1)$$

где r – расстояние от начала координат до точки наблюдения. Для отдельной заряженной частицы дипольный момент $\vec{d}(t) = \vec{\sigma}_e(t)$, где $\vec{r}_e(t)$ – радиус-вектор заряда. Поэтому вторая производная от дипольного момента пропорциональна вектору ускорения заряда:

$$\ddot{\vec{d}}(t) = \vec{\sigma}_e''(t). \quad (2)$$

Таким образом, для вычисления интенсивности дипольного излучения достаточно найти ускорение заряженной частицы. Подставляя (2) в формулу (1), получаем:

$$I_d = \frac{2e^2 \left(\vec{\sigma}_e(\tau) \right)^2}{3c^3}. \quad (3)$$

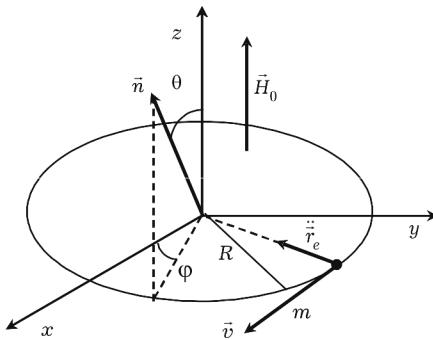
Величина $\ddot{\vec{r}}_e(t)$ может быть найдена из уравнения движения заряда (второго закона Ньютона):

$$m\ddot{\vec{r}}_e(t) = \frac{e}{c} [\vec{V}_e(t), \vec{H}_0]. \quad (4)$$

Здесь $\vec{V}_e(t) = \dot{\vec{r}}_e(t)$ – вектор скорости заряда. Решение уравнения (4) известно: если в начальный момент времени скорость заряда \vec{v}_0 перпендикулярна напряженности магнитного поля, то заряд будет равномерно вращаться по окружности с постоянной по величине

скоростью $|\vec{v}_e(t)| = v_0$ (см. рисунок). Частота вращения и радиус окружности будут:

$$\omega = \frac{eH_0}{mc}, \quad R = \frac{v_0}{\omega} = \frac{mc}{eH_0} v_0. \quad (5)$$



При равномерном вращении по окружности вектор $\ddot{\vec{r}}_e(t)$ представляет собой центростремительное ускорение, равное по величине

$$|\ddot{\vec{r}}_e| = v_0^2 / R = \omega v_0. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (3), находим интенсивность дипольного излучения заряда, движущегося перпендикулярно однородному постоянному магнитному полю:

$$I_d = \frac{2e^4 H_0^2 v_0^2}{3m^2 c^5}. \quad (7)$$

Излучение заряда, движущегося по окружности в однородном постоянном магнитном поле, называют *магнитотормозным*. В дипольном приближении интенсивность магнитотормозного излучения оказывается пропорциональной *квадрату скорости* частицы.

Задача 12.2. В условиях предыдущей задачи найти интенсивность dI_d дипольного излучения в телесный угол $d\Omega$ в среднем по времени за период движения частицы.

Решение. В дипольном приближении интенсивность dI_d излучения в телесный угол $d\Omega$ в направлении \vec{n} определяется выражением:

$$dI_d = \frac{[\mathbf{E}_e(\tau), \vec{n}]^2}{4\pi c^3} d\Omega, \quad \tau = t - r/c. \quad (1)$$

Для одной частицы второй производной дипольного момента равна $\ddot{\mathbf{d}}(t) = \ddot{\mathbf{e}}_e(t)$, поэтому интенсивность излучения dI_d принимает вид:

$$dI_d(t) = \frac{\epsilon_0^2 [\mathbf{E}_e(\tau), \vec{n}]^2}{4\pi c^3} d\Omega. \quad (2)$$

Квадрат векторного произведения в (2) удобно преобразовать к виду

$$[\mathbf{E}_e(\tau), \vec{n}]^2 = \frac{\epsilon_0 r_e^2}{c^2} \sin^2 \vartheta = \frac{\epsilon_0 r_e^2}{c^2} - \frac{\epsilon_0 r_e^2}{c^2} \cos^2 \vartheta = \frac{\epsilon_0}{c^2} - \left(\frac{\mathbf{E}_e}{c}, \vec{n} \right)^2. \quad (3)$$

Здесь ϑ – угол между вектором ускорения $\mathbf{E}_e(\tau)$ и единичным вектором \vec{n} в момент времени τ (не путать угол ϑ с полярным углом θ (см. рисунок предыдущей задачи)). Для вычисления произведения (\vec{r}_e, \vec{n}) определим компоненты векторов $\vec{r}_e(t)$ и \vec{n} в декартовой системе координат. Координаты частицы, движущейся в плоскости xOy по окружности радиусом R с постоянной скоростью,

$$\vec{r}_e(t) = (R \cos \omega t, R \sin \omega t, 0), \quad (4)$$

где частота вращения и радиус орбиты заряда определяются выражениями (5) предыдущей задачи. Дифференцируя выражение (4) дважды по времени, найдем вектор ускорения заряда

$$\ddot{\vec{r}}_e(t) = (-\omega^2 R \cos \omega t, -\omega^2 R \sin \omega t, 0). \quad (5)$$

Как и должно быть, ускорение частицы в любой момент времени направлено к центру окружности и остается постоянным по величине:

$$\ddot{\vec{r}}_e(t) = -\omega^2 \vec{r}_e(t), \quad |\ddot{\vec{r}}_e(t)| = \omega^2 R = \text{const}. \quad (6)$$

Декартовы компоненты единичного вектора \vec{n} могут выражены через полярный θ и азимутальный ϕ углы (см. рис. 1 предыдущей задачи):

$$\vec{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta). \quad (7)$$

Перемножая скалярно выражения (5) и (7), получим

$$\begin{aligned} (\ddot{\vec{r}}_e, \vec{n}) &= -\omega^2 R \sin \theta (\cos \phi \cos \omega t + \sin \phi \sin \omega t) = \\ &= -\omega^2 R \sin \theta \cos(\omega t - \phi). \end{aligned} \quad (8)$$

С учетом (8) и (5) квадрат векторного произведения (3) принимает вид

$$[\vec{R}_e(\tau), \vec{n}]^2 = \omega^4 R^2 - \omega^4 R^2 \sin^2 \theta \cos^2(\omega t - \phi). \quad (9)$$

Подставляя выражение (9) в (3), находим интенсивность dI_d излучения в телесный угол $d\Omega$:

$$dI_d(t) = \frac{e^2 \omega^4 R^2}{4\pi c^3} [1 - \sin^2 \theta \cos^2(\omega(t - r/c) - \phi)] d\Omega. \quad (10)$$

Периодический характер движения заряда приводит к тому, что интенсивность излучения dI_d в данном направлении осциллирует со временем около некоторого среднего значения. Поэтому для зарядов, совершающих периодическое движение, обычно вычисляется среднее за период значение интенсивности:

$$d\bar{I}_d = \frac{1}{T} \int_0^T (dI_d) dt, \quad T = \frac{2\pi}{\omega}. \quad (11)$$

Усредненная выражение (10) по формуле (11) и подставляя значения ω и R , находим интенсивность излучения $d\bar{I}_d$ в телесный угол $d\Omega$ в среднем по времени за период движения заряда:

$$d\bar{I}_d = \frac{e^2 \omega^4 R^2}{4\pi c^3} \left(1 - \frac{\sin^2 \theta}{2}\right) d\Omega = \frac{e^2 H_0^2 V_0^2}{8\pi m^2 c^5} (1 + \cos^2 \theta) d\Omega \quad (12)$$

(при вычислении $d\bar{I}_d$ было учтено, что среднее по периоду от квадрата косинуса равно $1/2$). Обратим внимание, что усредненная интенсивность излучения зависит только от полярного угла точки наблюдения. При этом *максимальная* энергия излучается в направлениях, перпендикулярных плоскости вращения заряда ($\theta = 0, \theta = \pi$), *минимальная* – в экваториальной плоскости ($\theta = \pi/2$). Нетрудно убедиться, что выражение (12), проинтегрированное по всему телесному углу, совпадает с формулой (7) предыдущей задачи для полной интенсивности магнитотормозного излучения.

Задача 12.3. Частица массой m и зарядом e пролетает через конденсатор. Расстояние между обкладками конденсатора равно L . Напряженность однородного поля между пластинами $\tilde{E}_0 = \text{const}$. Направление скорости частицы \vec{V}_0 при влете совпадает с вектором \tilde{E}_0 . Найти угловое распределение полной энергии dE , теряемой частицей на дипольное излучение за время пролета через конденсатор.

Решение. Интенсивность dI_d дипольного излучения отдельной частицы в телесный угол $d\Omega$ в направлении \hat{h} определяется формулой (2) предыдущей задачи:

$$dI_d(t) = \frac{e^2 [\tilde{r}_e(\tau), \hat{h}]^2}{4\pi c^3} d\Omega, \quad \tau = t - r/c, \quad (1)$$

где $\ddot{\tilde{r}}_e(t)$ – ускорение заряда. Полная энергия dE_d , излучаемая частицей в телесный угол $d\Omega$, может быть получена интегрированием выражения (1) по времени:

$$dE_d = \int_{-\infty}^{\infty} (dI_d) dt. \quad (2)$$

При движении заряженной частицы в постоянном и однородном электрическом поле на нее действует постоянная сила $e\tilde{E}_0$, сообщающая ей *постоянное* ускорение. Уравнение движения частицы (второй закон Ньютона) при этом имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}}_e(t) = e\vec{E}_0. \quad (3)$$

Однако ускорением частица будет обладать только внутри конденсатора. Поэтому зависимость вектора $\ddot{\vec{r}}_e(t)$ от времени имеет вид

$$\ddot{\vec{r}}_e(t) = \begin{cases} \frac{e\vec{E}_0}{m}, & 0 \leq t \leq T_0; \\ 0, & t < 0, t > T_0. \end{cases} \quad (4)$$

Здесь T_0 – время пролета частицы через конденсатор. Момент влета выбран за начало отсчета $t = 0$. С учетом (1) и (4) угловое распределение излучаемой энергии (2) принимает вид

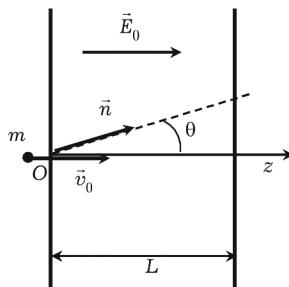
$$dE_d = \frac{e^4 \left[\frac{E_0}{E_0 - h} \right]^2}{4\pi m^2 c^3} d\Omega \int_0^{T_0} dt = \frac{e^4 \left[\frac{E_0}{E_0 - h} \right]^2}{4\pi m^2 c^3} T_0 d\Omega. \quad (5)$$

Как видно из (5), интенсивность излучения заряда при движении внутри конденсатора не зависит от времени и поэтому $dE \sim T_0$. Время пролета T_0 можно найти, интегрируя уравнение движения (3). Так, в проекции на ось Z (см. рисунок) уравнение (3) дает:

$$z_e(t) = v_0 t + \frac{eE_0}{m} \frac{t^2}{2}. \quad (6)$$

Приравнивая координату заряда расстоянию между обкладками $z_e(t) = L$, и решая полученное уравнение относительно T_0 , находим время пролета частицы через конденсатор:

$$T_0 = \frac{mv_0}{eE_0} \left(\sqrt{\frac{2eE_0 L}{mv_0^2}} + 1 - 1 \right). \quad (7)$$



Угловая зависимость излучаемой энергии (5) содержится в множителе

$$\left[\frac{r}{E_0}, \frac{r}{h} \right]^2 = E_0^2 \sin^2 \theta. \quad (8)$$

где θ – угол между направлением в точку наблюдения \vec{r} и напряженностью поля \vec{E}_0 (см. рисунок).

Окончательно находим следующее выражение для полной энергии dE , излучаемой частицей в телесный угол $d\Omega$ за все время пролета через конденсатор:

$$dE_d = \frac{e^3 E_0 v_0}{4\pi m c^3} \left(\sqrt{\frac{2eE_0 L}{mv_0^2}} + 1 - 1 \right) \sin^2 \theta d\Omega. \quad (9)$$

Таким образом, угловое распределение излучаемой энергии оказывается существенно не изотропным. Максимальная энергия излучается частицей в направлениях, перпендикулярных полу (0 = $\pi/2$).

Вдоль поля ($\theta = 0$, $\theta = \pi$) частица не излучает вовсе.

Интегрирование выражения (9) по полному телесному углу дает полную энергию E_d , излучаемую частицей во всех направлениях за все время пролета через конденсатор:

$$E_d = \frac{2e^3 E_0 v_0}{3mc^3} \left(\sqrt{\frac{2eE_0 L}{mv_0^2}} + 1 - 1 \right). \quad (10)$$

Напомним, что выражения (9) и (10) получены в *дипольном приближении*, а потому справедливы лишь при малых (по сравнению со скоростью света) скоростях движения заряда. Угловое распределение энергии, излучаемой реалистической частицей в аналогичных условиях, будет существенно отличаться от закона (9).

Задача 12.4. Частица массой m и зарядом e движется перпендикулярно однородному постоянному магнитному полю напряженностью H . В начальный момент времени скорость частицы равна v_0 . Найти закон изменения скорости $V(t)$ и радиуса траектории $r(t)$ частицы вследствие дипольного излучения.

Решение. В пренебрежении излучением движение заряда представляло бы равномерное вращение по окружности, радиус которой R_0 можно найти из второго закона Ньютона:

$$m \frac{v_0^2}{R_0} = \frac{e}{c} v_0 H \Rightarrow R_0 = \frac{mc}{eH} v_0. \quad (1)$$

Потери энергии на излучение приводят к постепенному уменьшению скорости частицы $v(t)$. Как увидим ниже, при не очень больших полях характерное время изменения скорости мало по сравнению с периодом вращения заряда T_0 . Поэтому движение излучающей частицы в магнитном поле можно представить как вращение по окружности с медленно убывающим радиусом $r(t)$ (см. рисунок). Математически условия медленного изменения величин $r(t)$ и $v(t)$ можно выразить как

$$T_0 |\dot{r}(t)| \ll r(t), \quad T_0 |\dot{v}(t)| \ll v(t). \quad (2)$$

Закон изменения механической энергии частицы вследствие излучения в дипольном приближении имеет вид:

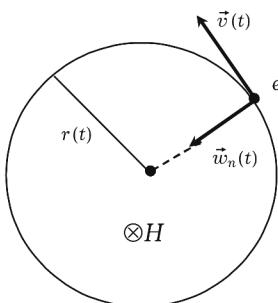
$$\frac{dE_{\text{мех}}}{dt} = -I_d(t), \quad (3)$$

$$I_d(t) = \frac{2\dot{r}(t)}{3c^3} = \frac{2e^2 \ddot{r}(t)}{3c^3}. \quad (4)$$

В рассматриваемой задаче механическая энергия $E_{\text{мех}}$ заряда совпадает с его кинетической энергией

$$E_{\text{мех}}(t) = \frac{mv^2(t)}{2}. \quad (5)$$

Используя второй закон Ньютона, можно найти связь радиуса траектории заряда и его скорости в произвольный момент времени. Действительно, учитывая, что центростремительное ускорение $w_n(t) = v^2(t)/r(t)$, получаем



$$m \frac{v^2(t)}{r(t)} = \frac{e}{c} v(t) H . \quad (6)$$

Следовательно, $r(t) = \frac{mc}{eH} v(t) . \quad (7)$

Как видно из (7), радиус орбиты прямо пропорционален скорости частицы. Поэтому период обращения заряда не зависит от времени:

$$T = \frac{2\pi r(t)}{v(t)} = 2\pi \frac{mc}{eH} = T_0 = \text{const} . \quad (8)$$

С помощью соотношений (7) и (8) нетрудно показать, что условия медленного изменения радиуса траектории и скорости частицы (2) эквивалентны условию малости тангенциального ускорения w_τ по сравнению с центростремительным w_n :

$$w_\tau \ll w_n \Rightarrow |w_\tau| \ll \frac{v^2(t)}{r(t)} . \quad (9)$$

Поэтому в интенсивности дипольного излучения (4) можно пре-небречь тангенциальной составляющей ускорения частицы ($\frac{d}{dt} = W_n + \dot{W}_\tau \approx W_n$):

$$I_d(t) \approx \frac{2e^2 w_n^2(t)}{3c^3} = \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{v^2(t)}{r(t)} \right)^2 . \quad (10)$$

Подставляя интенсивность излучения (10) в (3), с учетом (6), находим следующее дифференциальное уравнение для определения зависимости скорости частицы от времени $v(t)$:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{mv^2(t)}{2} \right) = - \frac{2e^2}{3c^3} \left(\frac{eH}{mc} \right)^2 v^2(t) . \quad (11)$$

Вычисляя производную, преобразуем (11) к виду

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\alpha v(t), \quad \alpha = \frac{2e^4 H^2}{3m^3 c^5} . \quad (12)$$

Решение уравнения с начальным условием $v(t=0) = v_0$ дает экспоненциальную зависимость скорости частицы от времени

$$v(t) = v_0 e^{-\alpha t}, \quad (13)$$

$$\text{или } v(t) = v_0 \exp \left\{ -\frac{2e^4 H^2}{3m^3 c^5} t \right\} = v_0 \exp \left\{ -\frac{4\pi}{3} \frac{e^3 H}{m^2 c^4} \frac{t}{T_0} \right\}. \quad (14)$$

Таким образом, скорость частицы $v(t)$, а вместе с ней и радиус траектории (7)

$$r(t) = \frac{mc}{eH} v_0 e^{-\alpha t} = R_0 \exp \left\{ -\frac{4\pi}{3} \frac{e^3 H}{m^2 c^4} \frac{t}{T_0} \right\} \quad (15)$$

убывают по экспоненциальному закону. Формально это означает, что частица потеряет всю свою кинетическую энергию за бесконечно большое время (в отличие от электрона, движущегося в кулоновском поле ядра, в классической модели атома водорода).

Теперь определим область применимости полученных результатов. Характерное время изменения скорости частицы $v(t)$ и радиуса траектории $r(t)$, согласно (14), (15), равно

$$t_{\text{хар}} : \frac{1}{\alpha} : \frac{m^2 c^4}{e^3 H} T_0. \quad (16)$$

Движение излучающей частицы можно рассматривать как равномерное вращение по окружности с медленно меняющимся радиусом, если время (16) мало по сравнению с периодом обращения заряда (8): $t_{\text{хар}} \ll T_0$. Как следует из (16), это условие будет удовлетворено, если

$$H \ll \frac{m^2 c^4}{e^3}. \quad (17)$$

Условия (2) и (9) приводят, разумеется, к тому же неравенству (17)¹. Таким образом, полученные результаты справедливы лишь при условии, что напряженность магнитного поля мала по сравнению с величиной $m^2 c^4 / e^3$. Вторым необходимым условием явля-

¹ Вообще говоря, неравенство (17) является одним из условий применимости самой классической электродинамики. Поля : $m^2 c^4 / e^3$ являются той границей, за которой классическая электродинамика приводит к внутренним противоречиям (см.: Ландау Л.Д., Либшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1988).

ется требование малости начальной скорости заряда по сравнению со скоростью света $v_0 \ll c$ (когда оправдано использование дипольного приближения).

Задачи к разделу 13

Задача 13.1. Частица массой m и зарядом e пролетает через конденсатор. Расстояние между обкладками конденсатора равно L . Напряженность однородного поля между пластинами $\bar{E}_0 = \text{const}$. Направление скорости частицы \vec{v}_0 при влете совпадает с вектором \bar{E}_0 (см. рисунок задачи 12.3). Найти в дипольном приближении энергию dE_ω , излучаемую заряженной частицей во всех направлениях в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$ при пролете через конденсатор.

Решение. В дипольном приближении энергия, излучаемая одной частицей за все время движения во всех направлениях в интервале частот от ω до $\omega + d\omega$, определяется выражением

$$dE_\omega = \frac{2e^2}{3\pi c^3} |\langle \ddot{\vec{r}}_e \rangle_\omega|^2 d\omega, \quad (1)$$

где $\langle \ddot{\vec{r}}_e \rangle_\omega$ – фурье-образ ускорения частицы:

$$\langle \ddot{\vec{r}}_e \rangle_\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \ddot{\vec{r}}_e(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (2)$$

При движении внутри конденсатора ускорение частицы постоянно и равно $e\bar{E}_0/m$, вне конденсатора ускорение заряда равно нулю. Поэтому

$$\langle \ddot{\vec{r}}_e \rangle_\omega = \frac{e\bar{E}_0}{m} \int_0^{T_0} e^{-i\omega t} dt. \quad (3)$$

Здесь T_0 – время пролета частицы через конденсатор. Интеграл в (3) преобразуем к виду:

$$\int_0^{T_0} e^{-i\omega t} dt = \frac{1}{(-i\omega)} (e^{-i\omega T_0} - 1) = \\ = \frac{2}{\omega} e^{-i\omega T_0 / 2} \frac{e^{i\omega T_0 / 2} - e^{-i\omega T_0 / 2}}{2i} = \frac{2}{\omega} e^{-i\omega T_0 / 2} \sin\left(\frac{\omega T_0}{2}\right). \quad (4)$$

Учитывая, что $|e^{-i\omega T_0 / 2}| = 1$, для квадрата модуля фурье-образа ускорения заряда получаем

$$|\tilde{f}_e(\omega)|^2 = 4 \left(\frac{eE_0}{m} \right)^2 \frac{\sin^2(\omega T_0 / 2)}{\omega^2}. \quad (5)$$

Подставляя результат (5) в (1), находим спектральное распределение энергии, излучаемой зарядом при пролете через конденсатор:

$$dE_\omega = \frac{8e^4 E_0^2 T_0^2}{3\pi m^2 c^3} F(\omega T_0) d\omega, \quad (6a)$$

где $F(x) = \frac{\sin^2(x/2)}{x^2}$ ($x = \omega T_0$). (6b)

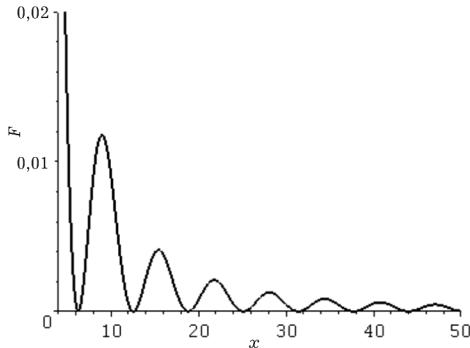
Время пролета через конденсатор T_0 определяется формулой (7) задачи 12.3:

$$T_0 = \frac{mv_0}{eE_0} \left(\sqrt{\frac{2eE_0 L}{mv_0^2}} + 1 - 1 \right). \quad (7)$$

На рисунке представлен график зависимости частотной функции $F(x)$. Видим, что распределение (6a) обнаруживает чередующийся ряд интерференционных максимумов и минимумов. Положения максимумов распределения (кроме главного максимума при $\omega = 0$) определяются из условия равенства величины $\sin^2(\omega T_0 / 2)$ единице: $\omega_{\max} = \frac{\pi}{T_0} + \frac{2\pi}{T_0} n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$).

С ростом номера максимума значение спектральной плотности $dE_\omega / d\omega$ в нем уменьшается. На частотах $\omega_{\min} = \frac{2\pi}{T_0} n$ ($n = 1, 2, \dots$) расположены минимумы распределения (6a), в кото-

рых спектральная плотность $dE_\omega / d\omega$ обращается в нуль (на этих частотах энергия не излучается вовсе).



В области низких частот распределение (6а) перестает зависеть от частоты. Действительно, $\sin^2(\omega T_0/2) \approx \omega^2 T_0^2 / 4$ при $\omega T_0 \ll 1$, так что спектральное распределение (6а) принимает вид

$$dE_\omega = \frac{2e^4 E_0^2 T_0^2}{3\pi m^2 c^3} d\omega \text{ при } \omega \ll \frac{1}{T_0}.$$

В заключение отметим, что наличие непрерывного частотного спектра излучаемой энергии характерно для любого *непериодического* движения заряда (разумеется, ускоренного). Если заряд совершает периодическое движение, то частота излучаемых волн будет кратна частоте движения заряда. Например, заряд, равномерно вращающийся по окружности с частотой ω , будет излучать волны с частотами $\omega, 2\omega, 3\omega$ и т.д.

Основные формулы векторного анализа

1. $\operatorname{grad}(r) = \nabla \cdot r = \vec{r} / r = \vec{n}_r.$
2. $\operatorname{grad}_{\vec{r}} |\vec{r} - \vec{r}'| = -\operatorname{grad}_{\vec{r}'} |\vec{r} - \vec{r}'| = \frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \vec{n}_{\vec{r}-\vec{r}'}.$
3. $\operatorname{div}(\vec{r}) = (\nabla, \vec{r}) = 3.$
4. $\operatorname{rot}(\vec{r}) = [\nabla, \vec{r}] = 0.$
5. $\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi(\vec{r}) = [\nabla, \nabla \varphi] \equiv 0.$
6. $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = (\nabla, [\nabla \vec{A}]) \equiv 0.$
7. $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{A}(\vec{r}) = [\nabla, [\nabla \vec{A}]] = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{A} - \Delta \vec{A}.$
8. $\operatorname{grad} f(r) = \nabla \cdot \varphi(r) = \frac{\vec{r}}{r} \frac{df}{dr} = \vec{n}_r \frac{df(r)}{dr}; \quad \nabla \rightarrow \vec{n}_r \frac{d}{dr}.$
9. $\operatorname{div} \vec{A}(r) = (\nabla, \vec{A}(r)) = \left(\frac{\vec{r}}{r}, \frac{d\vec{A}(r)}{dr} \right) = \left(\vec{n}_r, \frac{d\vec{A}(r)}{dr} \right); \quad \nabla \rightarrow \vec{n}_r \frac{d}{dr}.$
10. $\operatorname{rot} \vec{A}(r) = [\nabla, \vec{A}(r)] = \left[\frac{\vec{r}}{r}, \frac{d\vec{A}(r)}{dr} \right] = \left[\vec{n}_r, \frac{d\vec{A}(r)}{dr} \right]; \quad \nabla \rightarrow \vec{n}_r \frac{d}{dr}.$
11. $\operatorname{grad}(f \cdot \varphi) = f \operatorname{grad}(\varphi) + \varphi \operatorname{grad}(f); \quad f = f(\vec{r}); \quad \varphi = \varphi(\vec{r}).$
12. $\operatorname{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{A}, \nabla) \vec{B} + (\vec{B}, \nabla) \vec{A} + [\vec{A}, \operatorname{rot} \vec{B}] + [\vec{B}, \operatorname{rot} \vec{A}].$
13. $\operatorname{div}(\vec{A} \varphi) = (\nabla, (\vec{A} \varphi)) = \vec{A} \operatorname{grad} \varphi + \varphi \operatorname{div} \vec{A}.$
14. $\operatorname{rot}(\vec{A} \varphi) = [\nabla, (\vec{A} \varphi)] = \varphi \operatorname{rot} \vec{A} + [\operatorname{grad} \varphi, \vec{A}].$
15. $\operatorname{div}[\vec{A}, \vec{B}] = (\nabla, [\vec{A}, \vec{B}]) = \vec{B} \operatorname{rot} \vec{A} - \vec{A} \operatorname{rot} \vec{B}.$
16. $\operatorname{rot}[\vec{A}, \vec{B}] = [\nabla, [\vec{A}, \vec{B}]] = (\vec{B}, \nabla) \vec{A} - (\vec{A}, \nabla) \vec{B} - \vec{B} \operatorname{div} \vec{A} + \vec{A} \operatorname{div} \vec{B};$
в примерах (12) – (16) $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r}); \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{r}); \quad \varphi = \varphi(\vec{r}).$
17. $\operatorname{grad} F(\varphi) = \frac{dF}{d\varphi} \operatorname{grad} \varphi(r); \quad F(\varphi(\vec{r})) - \text{сложная функция.}$
18. $\operatorname{div} \vec{A}(\varphi) = \frac{d\vec{A}}{d\varphi} \operatorname{grad} \varphi(r).$

19. $\operatorname{rot} \vec{A}(\varphi) = \left[\operatorname{grad} \varphi(\vec{r}), \frac{d\vec{A}}{d\varphi} \right]$; формулы (8) – (10) являются частным случаем формул (17) – (19), когда $\varphi(r) = r$.
20. $\operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \operatorname{grad}(r) = -\frac{1}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} = -\frac{\vec{r}}{r^3}$.
21. $\operatorname{grad}_{\vec{r}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = -\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} \cdot \operatorname{grad}(|\vec{r} - \vec{r}'|) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$.
22. $\operatorname{grad} e^{i\vec{k}\vec{r}} = \nabla \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} = i\vec{k} \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}}$; $\nabla \rightarrow i\vec{k}$.
23. $\operatorname{div} (\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}) = \nabla \cdot (\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}) = \vec{E}_0 \cdot \operatorname{grad} e^{i\vec{k}\vec{r}} = i(\vec{k} \vec{E}_0) \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}}$; $\nabla \rightarrow i\vec{k}$.
24. $\operatorname{rot} (\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}}) = [\nabla \cdot (\vec{E}_0 e^{i\vec{k}\vec{r}})] = [\operatorname{grad} e^{i\vec{k}\vec{r}} \cdot \vec{E}_0] = i[\vec{k} \vec{E}_0] \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}}$; $\nabla \rightarrow i\vec{k}$.
25. $\Delta e^{i\vec{k}\vec{r}} = \nabla^2 \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}} = \operatorname{div}(\operatorname{grad} e^{i\vec{k}\vec{r}}) = -k^2 \cdot e^{i\vec{k}\vec{r}}$; $\nabla \rightarrow i\vec{k}$.
26. $\Delta \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi \delta(\vec{r})$; $\delta(\vec{r})$ – дельта-функция Дирака.
27. $\operatorname{grad}(\vec{E}_0 \vec{r}) = \vec{E}_0$.
28. $\operatorname{rot}[\vec{m}\vec{r}] = -(\vec{m}\nabla)\vec{r} + \vec{m} \operatorname{div}(\vec{r}) = 2\vec{m}$ ($\vec{m} = \text{const}$).
29. $\vec{E}_d = -\operatorname{grad} \frac{\vec{d}\vec{r}}{r^3} = \frac{3\vec{r}(\vec{d}\vec{r}) - \vec{d}r^2}{r^5}$; напряженность электрического поля диполя \vec{d} .
30. $\vec{H}_m = \operatorname{rot} \frac{[\vec{m}\vec{r}]}{r^3} = \frac{3\vec{r}(\vec{m}\vec{r}) - \vec{m}r^2}{r^5}$; напряженность поля магнитного момента \vec{m} .
31. $\frac{\partial \chi_i}{\partial x_k} = \delta_{ik}$; δ_{ik} – символ Кронекера.
32. $\frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} = n_i$; $\vec{n} = \vec{r}/r$ – единичный радиус-вектор.

Решение волнового уравнения для потенциалов поля

Здесь изложим более последовательный метод решения уравнения (10.5) – метод Даламбера. Рассмотрим систему зарядов, совершающих произвольное движение в некотором объеме V . Распределения зарядов $p(\vec{r}; t)$ и токов $\vec{j}(\vec{r}; t)$ будем считать известными в любой момент времени $-\infty < t < \infty$. Разобьем весь объем V на совокупность сколь угодно малых объемов dV' . Положение произвольного элемента объема dV' определяется его радиус-вектором \vec{r}' . В момент времени t в объеме dV' будет находиться элементарный заряд $dQ' = p(\vec{r}'; t)dV'$. Пусть \vec{r} – радиус-вектор фиксированной точки наблюдения. Именно в этой точке необходимо определить скалярный потенциал поля $\phi(\vec{r}; t)$ в произвольный момент времени t .

Предположим сначала, что никаких других зарядов, кроме указанного выше заряда dQ' , не существует. Определим потенциал поля $\delta\phi'$, создаваемого этим зарядом в точке наблюдения \vec{r} . Величина $\delta\phi'$ будет зависеть от радиуса-вектора точки наблюдения \vec{r} , момента времени наблюдения t , а также от радиуса-вектора \vec{r}' заряда dQ' : $\delta\phi' = \delta\phi(\vec{r}'; \vec{r}; t)$. Затем, в силу принципа суперпозиции, сможем определить полный потенциал $\phi(\vec{r}; t)$ как сумму потенциалов $\delta\phi'$, создаваемых всеми элементарными зарядами dQ' , входящими в систему:

$$\phi(\vec{r}; t) = \sum \delta\phi', \quad \text{т.е.} \quad \phi(\vec{r}; t) = \iiint_V d\phi(\vec{r}'; \vec{r}; t). \quad (\text{П.П.1})$$

Сосредоточим внимание на вычислении поля такого *уединенного* точечного заряда.

Следует подчеркнуть, что закон сохранения заряда не допускает существования, с одной стороны, уединенного, а с другой стороны, переменного во времени заряда $dQ'(\vec{r}'; t)$. В действительности изменение (напри-

мер, убывание) заряда dQ' во времени предполагает одновременное увеличение заряда dQ'' где-то в другом элементе объема dV'' так, чтобы полный заряд внутри всего объема V оставался неизменным. Однако при нахождении потенциала $d\phi'$, создаваемого выделенным зарядом dQ' , формально можно не учитывать существование остальных зарядов. Возникающее при этом кажущееся нарушение закона сохранения заряда (т.е. уравнения непрерывности (10.1)), никак не отразится на конечном решении, в котором будет проведено суммирование (интегрирование) (П.П.1) по всем элементарным зарядам системы¹.

Введем сферическую систему координат с началом, помещенным в объеме dV' . Уравнение Даламбера для единственного точечного заряда во всем пространстве $R > 0$, т.е. за исключением самой точки $\bar{R} = 0$, является однородным:

$$\Delta_{\bar{R}} \delta\phi'(\bar{R}; t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta\phi'(\bar{R}; t)}{\partial t^2} = 0, \quad R \neq 0. \quad (\text{П.П.2})$$

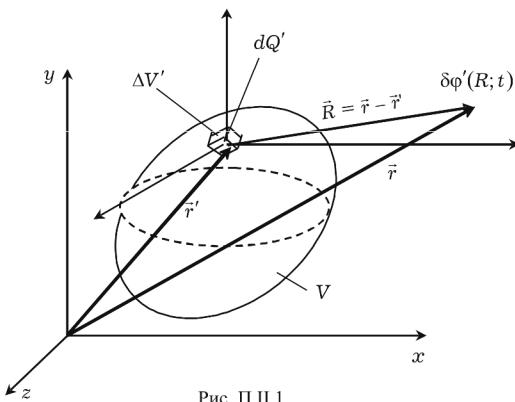


Рис. П.П.1

¹ Левич В.Г. Курс теоретической физики. – Т.1. – М.: Физматгиз, 1962.

Наша первая задача – получить решение этого уравнения в области $R > 0$.

Поле вне объема dV' обладает сферической симметрией, так как потенциал $\delta\varphi'$ зависит только от расстояния $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ до точки наблюдения (рис. П.П.1):

$$\delta\varphi' = \delta\varphi'(R; t).$$

Поэтому в сферической системе координат величина $\delta\varphi'$ является функцией двух переменных R и t .

Запишем радиальную часть оператора Лапласа (в сферических координатах) в виде

$$\Delta_R = \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial R} \left(R^2 \frac{\partial}{\partial R} \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} R \right). \quad (\text{П.П.3})$$

Тогда уравнение (П.П.2) примет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} R \right) \delta\varphi'(R; t) - \frac{\partial^2 \delta\varphi'(R; t)}{c^2 \partial t^2} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial^2}{\partial R^2} (R \delta\varphi') - \frac{\partial^2}{c^2 \partial t^2} (R \delta\varphi') = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.П.4})$$

Из уравнения (П.П.4) видно, что вместо величины $\delta\varphi'(R; t)$ удобно ввести новую функцию

$$f(R; t) = R \delta\varphi'(R; t). \quad (\text{П.П.5})$$

Для функции $f(R; t)$ получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial R^2} f(R; t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(R; t) = 0, \\ \text{или} \quad \left\{ \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right\} f(R; t) = 0. \end{aligned} \quad (\text{П.П.6})$$

Уравнение (П.П.6) по виду в точности совпадает с уравнением для плоских волн (8.17): $\partial^2 f(x; t) / \partial x^2 - \partial^2 f(x; t) / c^2 \partial t^2 = 0$. Поэтому и метод решения уравнения (П.П.6) будет таким же. Вместо переменных R и t введем новые переменные

$$\xi = t - \frac{R}{c}, \quad \eta = t + \frac{R}{c}. \quad (\text{П.П.7})$$

Старые переменные выражаются через новые переменные по формулам:

$$t = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad R = \frac{\eta - \xi}{2} c. \quad (\text{П.П.8})$$

Используем далее обычные формулы замены переменных:

$$\frac{\partial}{\partial R} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial R} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial R} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \right);$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial \xi} \right).$$

Поскольку

$$\frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} = \left(\frac{\partial}{\partial R} - \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \left(\frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right),$$

то в новых переменных уравнение (П.П.6) запишется так:

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi \partial \eta} f(\xi; \eta) = 0. \quad (\text{П.П.9})$$

Однородное дифференциальное уравнение (П.П.9) содержит лишь смешанную производную и поэтому легко интегрируется. Очевидно, что оно удовлетворяется любыми функциями $\psi_1(\xi)$ и $\psi_2(\eta)$ одной переменной ξ или η . Поскольку уравнение (П.П.9) является линейным дифференциальным уравнением, то его общее решение можно записать в виде

$$f(\xi; \eta) = \psi_1(\xi) + \psi_2(\eta). \quad (\text{П.П.10})$$

Полученный результат находится в полном соответствии с одной из основных теорем дифференциальных уравнений: общее решение дифференциального уравнения в частных производных n -го порядка (в данном случае второго) содержит n произвольных функций. В данном случае это функции $\psi_1(\xi)$ и $\psi_2(\eta)$.

Возвращаясь к старым переменным R и t по формулам (П.П.8), с учетом (П.П.5) получаем следующее выражение для величины $\delta\varphi'(R; t) = f(R; t)/R$:

$$\delta\varphi'(R; t) = \frac{\psi_1\left(t - \frac{R}{c}\right)}{R} + \frac{\psi_2\left(t + \frac{R}{c}\right)}{R} \quad (R \neq 0). \quad (\text{П.П.11})$$

Любая сферическая поверхность $R = \text{const}$ является геометрическим местом точек, в которых потенциал (П.П.11) в данный момент времени t имеет одно и то же значение. Выражение (П.П.11) описывает волновой процесс, причем потенциал $\delta\phi'(R; t)$ представляет собой суперпозицию расходящейся сферической волны (первое слагаемое в (П.П.11)) и сходящейся к заряду dQ' сферической волны (второе слагаемое (П.П.11)). Расходящаяся волна определяет *запаздывающий* потенциал поля, а сходящаяся – *опережающий* потенциал, который является еще одним частным решением уравнения Даламбера.

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что при последовательном решении уравнения (П.П.6) запаздывающий и опережающий потенциалы возникают автоматически. Поэтому с математической точки зрения оба слагаемых в формуле (П.П.11) *совершенно равноправны*. Это обстоятельство неслучайно. Как и уравнения механики, уравнение для скалярного потенциала (П.П.2) симметрично относительно будущего и прошедшего, т.е. не изменяется при замене t на $(-t)$. Формально это следует из того, что уравнение (П.П.2) содержит *вторую* производную по времени. Поэтому и *общее* решение (П.П.11) должно быть инвариантным при такой замене. Действительно, если в формуле (П.П.11) заменить $t \rightarrow -t$, то она примет вид

$$\delta\phi'(R; -t) = \frac{\psi_1(-t - R/c)}{R} + \frac{\psi_2(-t + R/c)}{R}.$$

Поскольку функции ψ_1 и ψ_2 совершенно произвольны, то, обозначая $\psi_1(-t - R/c) = \tilde{\psi}_2(t + R/c)$ и $\psi_2(-t + R/c) = \tilde{\psi}_1(t - R/c)$, получим:

$$\delta\phi'(R; -t) = \frac{\tilde{\psi}_1(t - R/c)}{R} + \frac{\tilde{\psi}_2(t + R/c)}{R},$$

что только обозначениями произвольных функций отличается от формулы (П.П.11) и поэтому тоже удовлетворяет волновому уравнению.

Таким образом, первая часть поставленной нами задачи выполнена: определили вид скалярного потенциала во всех точках пространства, кроме той, где находится сам точечный заряд dQ' , т.е.

кроме точки $R = 0$. Для определенности рассмотрим первое слагаемое в общей формуле (П.П.11):

$$\delta\varphi'(R; t) = \frac{\psi_1(t - R/c)}{R}, \quad R \neq 0. \quad (\text{П.П.12})$$

(второе слагаемое отличается от первого лишь заменой знака “–” на “+”).

При нахождении потенциала поля на расстоянии, сколь угодно близком к заряду dQ' (т.е. в выбранной нами системе при $R \rightarrow 0$), не будем вообще учитывать конечность скорости распространения взаимодействия. Действительно, время распространения сигнала от заряда dQ' до точки наблюдения, находящейся на бесконечно малом расстоянии $R \rightarrow 0$, стремится к нулю при конечном значении скорости c . Но это означает, что в уравнении (10.4) можно положить $c \rightarrow \infty$. Тогда оно превратится в уравнение для электростатического потенциала, решение которого описывается обычным законом Кулона для “точечного” заряда dQ' (при этом время t будет играть роль параметра):

$$\delta\varphi'(R \rightarrow 0; t) = \frac{dQ'(t)}{R} = \frac{p(t)dV'}{R}, \quad R \rightarrow 0. \quad (\text{П.П.13})$$

Чтобы решение (П.П.12) непрерывно переходило в (П.П.13), нужно положить $\psi_1 = p(t - R/c)$. Напомним, что плотность заряда берется в точке r' , которая принята за начало новой системы координат (см. рис. П.П.1). Окончательно получаем, что

$$\delta\varphi'(R; t) = \frac{p\left(t - \frac{R}{c}\right)dV'}{R}, \quad R \geq 0. \quad (\text{П.П.14})$$

Второе слагаемое в (П.П.11) будет выглядеть так:

$$\delta\varphi'(R; t) = \frac{p\left(t + \frac{R}{c}\right)dV'}{R}. \quad (\text{П.П.15})$$

Выражения (П.П.14) и (П.П.15) определяют решение уравнения Даламбера (10.4) во всем пространстве $0 \leq R < \infty$. Однако потенциал (П.П.15) не удовлетворяет *принципу причинности* – сначала изменяется расположение зарядов внутри объема V , и только за-

тем это изменение сказывается на потенциале поля $\varphi(\vec{r}; t)$ в точке наблюдения. Кроме того, выражение (П.П.15) описывает волну, распространяющуюся к заряду, а не от него. Поэтому оно не соответствует рассматриваемой физической задаче.

Следовательно, потенциал поля, создаваемый элементарным зарядом dQ' на расстоянии R от него, будет определяться только формулой (П.П.14). Учитывая, что $R = |\vec{r} - \vec{r}'|$ и плотность заряда берется в точке \vec{r}' , запишем:

$$\delta\varphi' = \frac{\rho(\vec{r}'; t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c})dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (\text{П.П.16})$$

Интегрируя выражение (П.П.16) по всем зарядам системы внутри объема V , получим:

$$\varphi(\vec{r}; t) = \int_V \int \int \rho(\vec{r}'; t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (\text{П.П.17})$$

Аналогично получается формула для векторного потенциала:

$$\vec{A}(\vec{r}; t) = \frac{1}{c} \int_V \int \int \vec{j}(\vec{r}'; t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{c}) \frac{dV'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}. \quad (\text{П.П.18})$$

Формулы (П.П.17) и (П.П.18) в точности совпадают с полученными ранее выражениями (10.8) и (10.10).

Вывод формулы для напряженности магнитного поля излучения

Вычислим напряженность магнитного поля излучения, используя выражение (11.11) для векторного потенциала поля:

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \operatorname{rot}_r \left\{ \frac{1}{r} \iiint_V \vec{j} \left(\vec{r}; t - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{r}', \vec{y})}{c} \right) dV' \right\}. \quad (\text{П.П.1})$$

Поскольку речь идет о вычислении магнитного поля излучения ($H \sim 1/r$ при $r \rightarrow \infty$), то при дифференцировании по координатам множитель $1/r$ можно считать постоянным, вынося его из-под знака производной. В противном случае будут возникать слагаемые, убывающие при $r \rightarrow \infty$ быстрее, чем $1/r$, и не имеющие поэтому отношения к полю излучения. Это уже видно при вычислении ротора в формуле (П.П.1). Обозначим интеграл вектором \vec{D} :

$$\vec{D}(\vec{y}, t) = \iiint_V \vec{j} \left(\vec{r}'; t - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{r}', \vec{y})}{c} \right) dV'. \quad (\text{П.П.2})$$

Тогда

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{1}{c} \operatorname{rot}_r \left\{ \frac{1}{r} \vec{D} \right\} = \\ &= \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{r} \operatorname{rot} \vec{D} - \left[\vec{D}, \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right] \right\} = \frac{1}{cr} \operatorname{rot} \vec{D} + \frac{1}{cr^2} [\vec{D}, \vec{n}]. \end{aligned} \quad (\text{П.П.3})$$

Видим, что второе слагаемое в (П.П.3) $\sim 1/r^2$ и им следует пренебречь. Таким образом, напряженность магнитного поля излучения должна вычисляться по формуле:

$$\vec{H} = \frac{1}{cr} \iiint_V \operatorname{rot}_r \vec{j} \{ \vec{r}'; u(\vec{r}; \vec{r}') \} dV'. \quad (\text{П.П.4})$$

Здесь обозначено

$$u(\vec{r}; \vec{r}') = t - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{r}', \vec{n})}{c}. \quad (\text{П.П.5})$$

Напомним, что операция rot_r берется по радиусу-вектору \vec{r} . Величины \vec{r}' и t при этом считаются постоянными.

Таким образом, необходимо вычислить rot_r от сложной функции $\vec{j}(u(\vec{r}))$. При вычислении rot нужно пренебречь членами $\sim 1/r$, так как множитель $1/r$ уже имеется в формуле (П.П.4). Используем известную формулу векторного анализа для ротора векторной функции сложного аргумента:

$$\text{rot}_r \left\{ \vec{j}(u(\vec{r})) \right\} = \left[\text{grad} u(\vec{r}), \frac{d\vec{j}}{du} \right].$$

Вычислим каждый из сомножителей векторного произведения:

$$\begin{aligned} \text{grad}_r u(\vec{r}) &= \text{grad}_r \left\{ t - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{r}', \vec{n})}{c} \right\} = \\ &= -\frac{\vec{n}}{c} + \frac{1}{c} \text{grad}_r \left(\vec{r}' \frac{\vec{r}}{r} \right) \approx -\frac{\vec{n}}{c} + \frac{1}{cr} \underbrace{\text{grad}_r (\vec{r}' \vec{r})}_{\vec{r}'} . \end{aligned}$$

Последним слагаемым нужно пренебречь. Поэтому

$$\text{grad}_r u(\vec{r}) \approx -\frac{\vec{n}}{c}. \quad (\text{П.П.6})$$

$$\text{Далее } \frac{d\vec{j}(u)}{du} = \frac{d\vec{j}(u)}{dt} \frac{dt}{du} = \frac{d\vec{j}(u)}{dt}. \quad (\text{П.П.7})$$

Таким образом,

$$\text{rot}_r \left\{ \vec{j}(u(\vec{r})) \right\} = -\frac{1}{c} \left[\vec{n}, \frac{d\vec{j}}{dt} \right] = \frac{1}{c} \left[\frac{d\vec{j}}{dt}, \vec{n} \right]. \quad (\text{П.П.8})$$

Подставляя (П.П.8) в исходную формулу (П.П.4), получаем:

$$\vec{H} = \frac{1}{c} \left\{ \frac{1}{cr} \int_V^r \left[\frac{d\vec{j}(u)}{dt}, \vec{n} \right] \right\}. \quad (\text{П.П.9})$$

Меняя порядок интегрирования по \vec{r}' и дифференцирования по времени, можно записать, что

$$\frac{1}{cr} \iiint_V \left[\frac{d\vec{j}}{dt}, \vec{n} \right] dV' = \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{cr} \iiint_A^{\vec{r}} j(u) dV', \vec{n} \right].$$

Окончательно получаем, что

$$\vec{H}(\vec{r}; t) = \frac{1}{c} [\dot{\vec{A}}, \vec{n}]. \quad (\text{П.П.10})$$

Векторный потенциал \vec{A} поля излучения определяется формулой (11.11):

$$\vec{A}(\vec{r}; t) \approx \frac{1}{cr} \iiint_V^{\vec{r}} j \left(\vec{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{(\vec{r}', \vec{n})}{c} \right) dV'.$$

ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЯ

1. Перечислите основные дифференциальные операторы векторного анализа. Запишите их с помощью символьического оператора ∇ .
2. Сформулируйте теорему Остроградского – Гаусса и теорему Стокса. В чем состоят дифференциальное и интегральное условия потенциальности (соленоидальности) векторного поля?
3. Дайте определение дельта-функции Дирака. Назовите ее основные свойства.
4. В чем состоит основная задача теории электромагнитного поля в вакууме? Дайте определения объемной плотности заряда и плотности тока. Запишите уравнение непрерывности в интегральной и дифференциальной формах.
5. Напишите выражения для объемной плотности заряда и тока в случае произвольно движущегося точечного заряда.
6. Запишите уравнения Максвелла в дифференциальной и интегральной формах.
7. Напишите выражения для плотности потока электромагнитной энергии (вектор Пойнтинга) и плотности энергии поля. Каков физический смысл этих величин?
8. Дайте определение векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля. Запишите уравнения для потенциалов поля. В чем состоит условие калибровки Лоренца?
9. Выпишите уравнения электростатики для напряженности поля и скалярного потенциала (уравнение Пуассона). Запишите общее решение уравнения Пуассона.
10. Какие методы решения задач электростатики знаете? Приведите примеры.
11. Запишите выражения для скалярного потенциала и напряженности электростатического поля на большом расстоянии от системы зарядов. Дайте определение дипольного момента системы зарядов и перечислите его основные свойства.
12. Вычислите энергию электростатического поля, создаваемого равномерно заряженным шаром.
13. Выпишите уравнения магнитостатики для напряженности магнитного поля и векторного потенциала. Запишите общее решение уравнения Пуассона для векторного потенциала поля.

14. Запишите выражения для векторного потенциала и напряженности магнитного поля на большом расстоянии от системы постоянных токов. Дайте определение магнитного момента системы и перечислите его основные свойства.
15. Какая связь существует между магнитным моментом и механическим моментом импульса системы нерелятивистских частиц с одинаковым отношением заряда к массе?
16. Дайте определение плоской электромагнитной волны. Каков общий вид векторного потенциала и напряженности поля плоской волны, распространяющейся в произвольном направлении \vec{P} ?
17. Запишите выражения для плотности энергии и вектора Пойтинга в плоской электромагнитной волне.
18. Дайте определение плоской монохроматической волны. К какую поляризацию может иметь плоская монохроматическая волна?
19. Запишите выражения для запаздывающих потенциалов при произвольном распределении зарядов и токов. Какую физическую интерпретацию, связанную с конечностью скорости распространения взаимодействий, можно дать запаздывающим потенциалам?
20. Запишите приближенные выражения для запаздывающих потенциалов на большом расстоянии от системы зарядов. Что такое внешнее и внутреннее время запаздывания?
21. Дайте определение поля излучения. В чем его основная особенность? Как эта особенность используется при передаче электромагнитных сигналов на большие расстояния?
22. Дайте определение интенсивности излучения dI в элемент телесного угла $d\Omega$ и полной интенсивности (мощности) I излучения. Каков физический смысл этих величин?
23. Что такое волновая зона? Запишите выражения для потенциалов и напряженности полей в волновой зоне.
24. Выпишите выражения для векторного потенциала \vec{A}_d и напряженностей \vec{H}_d и \vec{E}_d поля излучения в дипольном приближении.
25. Какой вид имеет угловое распределение излучения в дипольном приближении? Вычислите интенсивность поля излучения dI_d в дипольном приближении.

26. Напишите выражение для полной интенсивности дипольного излучения I_d .
27. Напишите формулу для спектральной плотности энергии дипольного излучения.
28. Напишите выражение для силы радиационного трения в не-релятивистском случае.
29. В чем состоит процесс рассеяния электромагнитных волн свободными зарядами? Что такое сечение рассеяния электромагнитной волны? Выпишите формулу Томсона для полного сечения рассеяния свободным электроном.
30. Запишите уравнение непрерывности и уравнения для потенциалов поля в четырехмерной (релятивистски инвариантной) форме.
31. Выпишите формулы преобразования Лоренца для потенциалов поля.
32. Напишите выражение для напряженности электрического поля, создаваемого равномерно движущимся зарядом. В чем состоит эффект поперечного "сплошивания поля" при скоростях, близких к скорости света?

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная

1. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория поля. – М.: Наука, 1988.
2. Левич В.Г. Курс теоретической физики. – Т.1. – М.: Физматгиз, 1962.
3. Тамм И.Е. Основы теории электричества. – М.: Наука, 1976.
4. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Сборник задач по электродинамике. – М.: Наука, 1970.
5. Алексеев А.Й. Сборник задач по классической электродинамике. – М.: Наука, 1975.
6. Сивухин Д.В. Общий курс физики. – Т.3. – М.: Наука, 1977.
7. Ремизович В.С. Математический практикум по физике (для групп вечернего факультета): Учебное пособие. – М.: МИФИ, 2007.

Дополнительная

8. Джексон Дж. Классическая электродинамика. – М.: Мир, 1965.
9. Компанеец А.С. Курс теоретической физики. – Т.1. – М.: Просвещение, 1972.
10. Савельев И.В. Основы теоретической физики. – Т.1. – М.: Наука, 1977.
11. Батыгин В.В., Топтыгин И.Н. Современная электродинамика. – Ч.1. – М.: Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
12. Пановский В., Филипс М. Классическая электродинамика. – М.: Физматлит, 1963.
13. Берестецкий В.Б., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Квантовая электродинамика. – М.: Наука, 1989.
14. Физический энциклопедический словарь / Гл. ред. А.М. Прохоров. – М.: Советская энциклопедия, 1983.