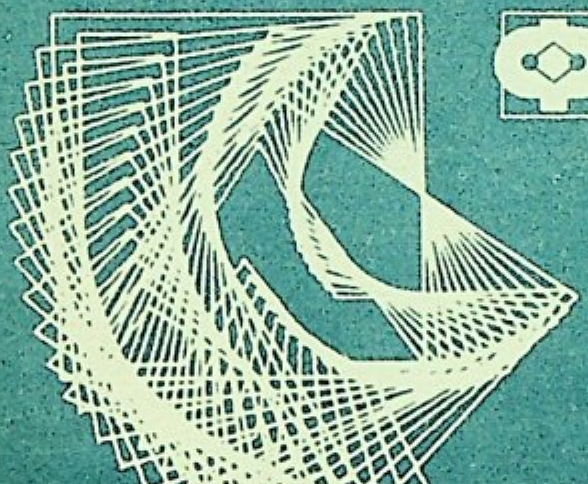
517
П76

Московский ордена Трудового Красного Знамени
инженерно-физический институт

А. И. Прилепко Е. Д. Соломенцев



ФАКУЛЬТЕТ
ТЕХНИЧЕСКОЙ
ФИЗИКИ

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Текст лекций по курсу
«Математический анализ»

Москва 1992

517
П76

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ, ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ
И ТЕХНИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

А. И. Прилепко Е. Д. Соломенцев

ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Текст лекций по курсу «Математический анализ»

*Утверждено
редсоветом института
в качестве
учебного пособия*

УЧЕБНЫЙ ФОНД
б-ки МИФИ

Москва 1992

УДК 517.1/07/

Прилепко А. И., Соломенцев Е. Д. Дифференцирование функций одного переменного. Текст лекций по курсу «Математический анализ». М.: МИФИ, 1992.— 80 с.

Данное пособие является второй частью текста лекций по курсу «Математический анализ», первая часть — «Последовательности, функции, пределы». Текст лекций по курсу «Математический анализ». М.: МИФИ, 1989.

Предназначено для студентов первого курса, начинающих изучение математического анализа.

© *Московский инженерно-физический институт, 1992 г.*

ПРЕДИСЛОВИЕ

От существующих учебников это пособие, представляющее собой вторую часть текста лекций по курсу «Математический анализ», наряду с первой частью «Последовательности, функции, пределы». М.: МИФИ, 1989, отличается максимальной сжатостью изложения, сохраняя при этом полноту и глубину освещения предмета. Самое главное, что основные понятия современного математического анализа, такие как норма, метрика, метрическое и нормированное пространства, компактность, полнота, и методы, связанные с ними, в их простейших вариантах вводятся с первых месяцев обучения. По мере изучения дальнейших разделов эти понятия освещаются более широко и углубленно, что позволяет студенту действительно овладеть применением основных современных методов математического анализа. Компактность изложения максимально облегчает и рационализирует самостоятельную работу студентов.

Глава 1
ПРОИЗВОДНЫЕ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЫ

§ 1. Производная, дифференцируемость и дифференциал

В этом параграфе вводятся три основных понятия дифференциального исчисления: производная, дифференцируемость и дифференциал.

Пусть функция $y=f(x)$ определена в окрестности $U_{\delta_0}(x_0)=\{x\in R: |x-x_0|<\delta_0\}$ точки $x_0\in R$. Изменяя x, мы получаем *приращение* (или *разность* значений) независимого переменного $\Delta x=x-x_0$ и соответствующее ему *приращение* (или *разность* значений) функции $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$. Отношение этих приращений, или *разделенная разность* $\Delta y/\Delta x$, рассматривается при фиксированном x_0 как функция от Δx, определенная при $0<|\Delta x|<\delta_0$.

Производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 называется конечный предел отношения $\Delta y/\Delta x$ при $\Delta x\to 0$; этот предел обозначается y', или $f'(x_0)$, т. е.

$$y'=f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}. \tag{1.1}$$

Теорема 1.1. (необходимое условие существования производной). Если функция $y=f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке.

В самом деле, если существует предел (1.1), то в силу связи функций, имеющих предел, с бесконечно малыми (б. м.) функциями:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(\Delta x), \quad 0<|\Delta x|<\delta_0,$$

где $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Отсюда получаем:

$$\Delta y=f'(x_0)\,\Delta x+\alpha(\Delta x)\,\Delta x, \tag{1.2}$$

т. е. $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$. #

Однако можно привести ряд примеров непрерывных функций, не имеющих производной. Функция $y=|x|$ непрерывна всюду на числовой оси и в любой точке $x_0\neq 0$ имеет производную, причем $y'=1$ при $x_0>0$ и $y'=-1$ при $x_0<0$ (докажите!), но в точке $x_0=0$ разделенная разность равна $+1$ при $\Delta x>0$ и равна -1 при $\Delta x<0$, а это означает, что в точке $x_0=0$ производной не существует.

Функция

$$y=f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases} \tag{1.3}$$

также непрерывна на всей оси, но в точке $x_0=0$ не имеет производной.

Существование производной в точке x_0 связано с некоторой гладкостью графика функции $y=f(x)$ при подходе к соответствующей точке $M_0=(x_0, y_0)$, $y_0=f(x_0)$. Пусть на рис. 1.1 $M=(x, f(x))$ — некоторая соседняя точка на графике функции, M_0M — секущая прямая. Если $y=f(x)$ — непрерывная функция в точке x_0, то $\Delta y\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $M\to M_0$ при $\Delta x\to 0$, так как расстояние

$$|M_0M|=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}\to 0.$$

При $\Delta x\to 0$ секущая M_0M вращается вокруг точки M_0 и при определенных условиях стремится занять некоторое предельное положение M_0N. Прямая линия M_0N, представляющая собой предельное положение секущей M_0M при $\Delta x\to 0$, называется *касательной* к графику функции $y=f(x)$ в точке M_0. При этом

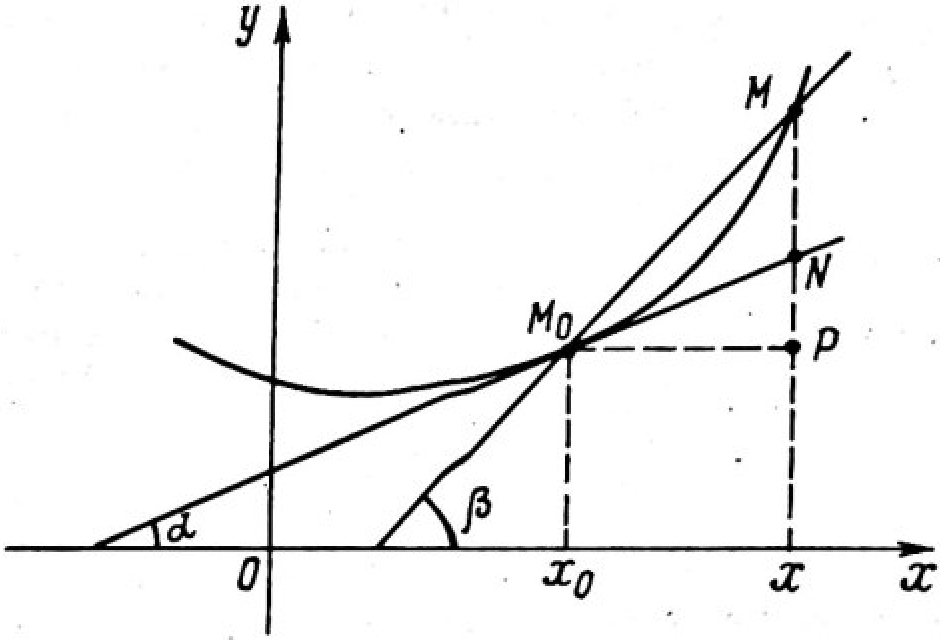


Рис. 1.1

следует различать два случая в зависимости от величины угла наклона касательной α к оси абсцисс $0x$: если $|\alpha|<\pi/2$, то прямая M_0N называется *наклонной касательной*, если же $|\alpha|=\pi/2$, то M_0N — *вертикальная касательная*.

Так как тангенс угла наклона секущей равен разделенной разности $\operatorname{tg}\beta=PM/M_0P=\Delta y/\Delta x$, то существование конечного предела (1.1) есть необходимое и достаточное условие существования наклонной касательной в точке M_0, причем предел $f'(x_0)=\operatorname{tg}\alpha$ дает тангенс угла наклона касательной. Таким образом, геометрический смысл производной функции $y=f(x)$ в точке x_0 состоит в том, что она равна тангенсу угла наклона (наклонной) касательной к графику функции в соответствующей точке M_0.

Записывая уравнение секущей M_0M в виде

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{y-y_0}{x-x_0}=\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

видим, что для того чтобы в точке M_0 существовала вертикальная касательная, необходимо и достаточно, чтобы предел (1.1) был бесконечным.

Попутно получено решение одной из классических задач геометрии: к кривой, заданной уравнением $y=f(x)$, провести касательную в данной точке M_0. А именно, зная тангенс угла наклона $f'(x_0)$, пишем *уравнение касательной* как уравнение прямой, проходящей через точку M_0:

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0), \tag{1.4}$$

где y — ордината точки касательной. *Нормалью* к кривой $y=f(x)$ в точке M_0 называется прямая, проходящая через M_0 и перпендикулярная касательной. Используя условие перпендикулярности прямых, получаем *уравнение нормали* в виде:

$$y-y_0=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0), \tag{1.5}$$

где y — ордината точки нормали.

Функция $y=f(x)$ называется *дифференцируемой* в точке x_0, если ее приращение можно представить в виде суммы

$$\Delta y=a\Delta x+o(\Delta x), \quad \Delta x\to 0 \tag{1.6}$$

линейной части (или линейной формы*) $a\Delta x$ относительно Δx и б. м. высшего порядка $o(\Delta x)$ по сравнению с Δx при $\Delta x\to 0$. Линейная часть приращения называется *дифференциалом* функции $y=f(x)$ в точке x_0 и обозначается $dy=df(x_0;\Delta x)$.

Так как б. м. высшего порядка $\Theta(\Delta x)$ всегда можно записать в виде $o(\Delta x)=\beta(\Delta x)|\Delta x|$, где $\beta(\Delta x)$ — б. м. функция при $\Delta x\to 0$, то формула (1.6) записывается в эквивалентном виде:

$$\Delta y=a\Delta x+\beta(\Delta x)|\Delta x|. \tag{1.7}$$

Теорема 1.2. Для того чтобы функция $y=f(x)$ была дифференцируемой в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы она имела производную в точке x_0, причем в этом случае в формулах (1.6) и (1.7) $a=f'(x_0)$.

В самом деле, из (1.7) вытекает, что $|\Delta y-a\Delta x|=\beta(\Delta x)|\Delta x|$. Разделив здесь обе части на $|\Delta x|$ при $\Delta x\neq 0$, получаем равенство

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}-a\right|=|\beta(\Delta x)|,$$

* Многочлен $g(x_1, ..., x_n)$ от n переменных $x_1, ..., x_n$ называется *однородным степени p*, или *формой степени p*, если каждый из составляющих его одночленов имеет полную степень p по совокупности переменных $x_1, ..., x_n$. Формы степени 1, 2 и 3 называются соответственно линейными, квадратичными и кубичными. Таким образом, в общем случае линейная форма от n переменных имеет вид $g(x_1, ..., x_n)=a_1x_1+...+a_nx_n$, а линейная форма от одного переменного $g(x)=ax$.

показывающее, что производная существует, причем $f'(x_0)=a$. Обратно, из формулы (1.2) вытекает, что функция, имеющая производную, дифференцируема. #

Дифференциал независимого переменного, по определению, $dx=\Delta x$. Это согласуется с тем обстоятельством, что для функции $y=x$ в любой точке x_0, очевидно, $y'=1$ и $dy=\Delta x$. Таким образом, во всякой точке x_0, где функция $y=f(x)$ дифференцируема, имеем

$$dy=df(x_0; dx)=f'(x_0)\,dx, \tag{1.8}$$

т. е. дифференциал функции $y=f(x)$ зависит от выбора точки x_0 и является линейной формой от переменного приращения dx, $-\infty<dx<+\infty$; в итоге дифференциал зависит, в сущности, от двух величин x_0 и dx, а производная $f'(x_0)$ — только от выбора x_0. Сравнивая формулы (1.4) и (1.8), видим, что геометрический смысл дифференциала $dy=f'(x_0)\,dx$ состоит в том, что это есть приращение ординаты касательной $dy=\tilde{y}-y_0=PN$ при переходе от точки x_0 к точке x_0+dx (рис. 1.1).

Формула (1.8) показывает также, что задачи вычисления производной и дифференциала по существу совпадают: если известна производная $f'(x_0)$, то дифференциал получается умножением $f'(x_0)$ на dx; с другой стороны, производная равна отношению дифференциалов dy и dx:

$$y'=f'(x_0)=\frac{dy}{dx}. \tag{1.9}$$

В формуле (1.9) зафиксировано еще одно, новое обозначение производной в виде отношения дифференциалов. Поэтому общий процесс вычисления производной и дифференциала называется общим термином *дифференцирование*.

Мы установим теперь несколько простейших основных правил дифференцирования.

1°. Постоянная функция $y=c$ дифференцируема всюду, причем $c'=dc=0$.

Это вытекает из того, что $\Delta c=0$.

2°. Постоянный множитель можно выносить за знак производной, или дифференциала, т. е. если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то и функция $w=cy$ дифференцируема в x_0, причем $w'=cy'$, $dw=cdy$.

3°. Производная (дифференциал) суммы двух функций u и v равна сумме производных (соответственно дифференциалов) слагаемых, т. е. если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то и их сумма $w(x)=u(x)+v(x)$ дифференцируема в x_0, причем $w'(x_0)=u'(x_0)+v'(x_0)$, $dw=du+dv$.

Это вытекает из того, что $\Delta w=\Delta u+\Delta v$.

Свойство 3° верно, очевидно, и при любом конечном фиксированном числе слагаемых.

4°. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то и их произведение $w(x)=u(x)v(x)$ дифференцируемо в x_0, причем

$$w'(x_0)=u'(x_0)\,v(x_0)+u(x_0)\,v'(x_0), \quad dw=vdu+udv. \tag{1.10}$$

В самом деле, $\Delta w=u(x_0+\Delta x)\,v(x_0+\Delta x)-u(x_0)\,v(x_0)=$ $=\Delta u v(x_0)+u(x_0)\,\Delta v$.

Разделив на Δx и переходя к пределу, получаем первую из формул (1.10). Вторая следует из нее в силу (1.8). #

5°. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0 и $v(x_0)\neq 0$, то и частное $w(x)=u(x)/v(x)$ дифференцируемо в x_0, причем

$$w'(x_0)=\frac{u'(x_0)\,v(x_0)-u(x_0)\,v'(x_0)}{v^2(x_0)},$$

$$dw=\frac{vdu-udv}{v^2}. \tag{1.11}$$

В самом деле, во-первых, в силу непрерывности $v(x)$ в точке x_0 частное $w(x)$ определено в окрестности точки x_0. Далее,

$$\Delta w=\frac{u(x_0+\Delta x)}{v(x_0+\Delta x)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}=\frac{\Delta u v(x_0)-\Delta v u(x_0)}{v(x_0)\,v(x_0+\Delta x)}.$$

Разделив на Δx и переходя к пределу при $\Delta x\to 0$, получаем первую из формул (1.11). Вторая следует из нее в силу (1.8). #

Теорема 1.3 (о производной сложной функции). Пусть функция $u=f(x)$ определена при $|x-x_0|<\delta_1$, $\delta_1>0$, и имеет производную $f'(x_0)$ в точке x_0, $u_0=f(x_0)$, а функция $y=g(u)$ определена при $|u-u_0|<\delta_2$, $\delta_2>0$, и имеет производную $g'(u_0)$ в точке u_0. Тогда сложная функция $y=F(x)=$ $=g[f(x)]$ определена в некоторой окрестности точки x_0 и имеет производную $F'(x_0)$, причем

$$F'(x_0)=g'(u_0)\,f'(x_0). \tag{1.12}$$

Согласно теореме 1.1 по δ_2 можно найти такое δ, $0<\delta<<\delta_1$, что при $|x-x_0|<\delta$ будет $|u-u_0|<\delta_2$, и, следовательно, сложная функция $u=F(x)$ определена при $|x-x_0|<\delta$. Уменьшая, если нужно, δ, можем считать согласно теореме 1.2, что

$$\Delta u=f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x, \quad |\Delta x|<\delta$$

и

$$\Delta y=g'(u_0)\Delta u+\beta(\Delta u)\Delta u, \quad |\Delta u|<\bar{\delta}<\delta_2. \tag{1.13}$$

Подставляя выражение для Δu в (1.13), получаем

$$\Delta y=g'(u_0)f'(x_0)\Delta x+[\beta(\Delta u)f'(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)g'(u_0)\Delta x+$$
$$+\beta(\Delta u)\alpha(\Delta x)\Delta x], \quad |\Delta x|<\delta. \tag{1.14}$$

В правой части (1.14) $\alpha(\Delta x)\to 0$ и $\beta(\Delta u)\to 0$ при $\Delta x\to 0$, так как $\Delta u\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Следовательно, выражение в квадратных скобках в (1.14) есть б. м. высшего порядка по сравнению с $|\Delta x|$ при $\Delta x\to 0$, а это показывает согласно формуле (1.7), что $y=F(x)$ есть дифференцируемая функция в точке x_0 и справедлива формула (1.12). #

Теорема 1.4 (о производной обратной функции). Пусть функция $y=f(x)$ строго монотонна и непрерывна при $|x-x_0|<\delta$, $\delta>0$, и имеет производную $f'(x_0)\neq 0$ в точке x_0. Тогда обратная функция $x=g(y)$ непрерывна в некоторой окрестности точки $y_0=f(x_0)$ и имеет производную $g'(y_0)$, причем

$$g'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}. \tag{1.15}$$

Согласно теореме 14.4 из ТЛКМА-1* обратная функция $x=g(y)$ строго монотонна и непрерывна в некоторой окрестности $|y-y_0|<\delta_1$, $\delta_1>0$. Полагая $\Delta x=\Delta g(y_0)=g(y_0+\Delta y)-g(y_0)$, имеем $\Delta y\neq 0\Rightarrow\Delta x\neq 0$ в силу строгой монотонности, а также $\Delta y\to 0\Rightarrow\Delta x\to 0$ в силу непрерывности. Далее,

$$\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}},$$

но $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)\neq 0$, а значит $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}=\frac{1}{f'(x_0)}$ #.

---

* Здесь и далее ТЛКМА-1 обозначается первая часть «Последовательности, функции, пределы». Текст лекций по курсу «Математический анализ». М.: МИФИ, 1989.

Изложенные правила дифференцирования позволяют вычислить производные (и дифференциалы) основных элементарных функций.

I. Тригонометрические функции. Если $y=f(x)=\sin x$, то

$$\Delta y=\sin(x_0+\Delta x)-\sin x_0=2\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2},$$

и переходя к пределу, получаем

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos\left(x_0+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x_0.$$

Следовательно,

$$(\sin x)'=\cos x,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Аналогично находим

$$(\cos x)'=-\sin x,\quad -\infty<x<+\infty.$$

Применяя правило 5°, теперь получаем:

$$(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x},\quad \cos x\neq 0;$$

$$(\operatorname{ctg} x)'=-\frac{1}{\sin^2 x},\quad \sin x\neq 0.$$

Пусть $y=g(x)=\arcsin x$, $x=f(y)=\sin y$, $x_0=\sin y_0$. Применяя теорему 1.4, находим

$$g'(x_0)=\frac{1}{f'(y_0)}=\frac{1}{\cos y_0}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y_0}}=\frac{1}{\sqrt{1-x_0^2}},$$

т. е.

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad -1<x<1.$$

Аналогично получаем

$$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad -1<x<1.$$

Если $y=g(x)=\operatorname{arctg} x$, $x=f(y)=\operatorname{tg} y$, $x_0=\operatorname{tg} y_0$, то

$$g'(x_0)=\frac{1}{f'(y_0)}=\cos^2 y_0=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y_0}=\frac{1}{1+x_0^2},$$

т. е.

$$(\operatorname{arctg} x)'=\frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty<x<+\infty.$$

Аналогично получаем

$$(\operatorname{arcctg} x)'=-\frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty<x<+\infty.$$

II. Показательная и логарифмическая функции. Пусть $y=f(x)=a^x$, $a>0$. Тогда

$$\Delta y=a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}=a^{x_0}(a^{\Delta x}-1)$$

и

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x_0}(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}=a^{x_0}\ln a,$$

т. е.

$$(a^x)'=a^x\ln a, \quad -\infty<x<+\infty, \quad (e^x)'=e^x, \quad -\infty<x<+\infty.$$

Если $y=f(x)=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$, $0<x<+\infty$, то

$$\Delta y=\log_a(x_0+\Delta x)-\log_a x_0=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)$$

и

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\dfrac{\Delta x}{x_0}\right)}{\Delta x}=\frac{1}{x_0\ln a},$$

т. е.

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}, \quad 0<x<+\infty,$$

$$(\ln x)'=\frac{1}{x}, \quad 0<x<+\infty.$$

Пример. Применяя теорему 1.3, доказать, что

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}, \quad x\neq 0.$$

III. Степенная функция. Пусть $n\in\mathbf{N}$ — натуральное число, $y=x^n$, $-\infty<x<+\infty$. По правилу дифференцирования произведения получаем

$$(x^n)'=x^{n-1}+\ldots+x^{n-1} \quad (n \text{ раз})=nx^{n-1},$$

т. е.

$$(x^n)'=nx^{n-1}, \quad -\infty<x<+\infty.$$

Пусть $y=x^{-1}=1/x$, $x\neq 0$. Тогда

$$\Delta y=\frac{1}{x+\Delta x}-\frac{1}{x}=-\frac{\Delta x}{x(x+\Delta x)}$$

и

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=(x^{-1})'=-x^{-2},\quad x\neq 0.$$

Если $y=x^{-n}=(1/x)^n$, $x\neq 0$, то применяя теорему 1.3, получаем

$$y'=n\left(\frac{1}{x}\right)^{n-1}\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-nx^{-n-1},$$

т. е.

$$(x^{-n})'=-nx^{-n-1},\quad x\neq 0.$$

Пусть функция $y=f(x)=x^{p/q}$, $p\in \mathbf{Z}$, $q\in \mathbf{N}$, определена в окрестности точки $x_0\neq 0$, $y_0=x_0^{p/q}=\sqrt[q]{x_0^p}$, $u_0=x_0^p=y_0^q$. Применяя теоремы 1.3 и 1.4, находим

$$f'(x_0)=px_0^{p-1}\frac{1}{qy_0^{q-1}}=\frac{p}{q}x_0^{\frac{p}{q}-1},$$

т. е.

$$(x^{p/q})'=\frac{p}{q}x^{\frac{p}{q}-1}.$$

Пусть $y=x^{\alpha}$, $\alpha\in R$, $x>0$. Тогда применяя теорему 1.3, получаем

$$y'=(e^{\alpha\ln x})'=e^{\alpha\ln x}\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1},\quad x>0. \tag{1.16}$$

Таким образом, общая формула дифференцирования степенной функции (1.16) применима во всех тех внутренних точках ее области определения при данном конкретном показателе α, в которых формула (1.16) сохраняет смысл.

IV. Гиперболические функции. В технике находят широкое применение некоторые комбинации показательных функций, получившие название гиперболических функций. Связь их с гиперболой и с тригонометрическими (или круговыми) функциями будет выяснена позднее.

Гиперболические синус, косинус, тангенс и котангенс определяются формулами:

$$\operatorname{sh} x=\frac{e^x-e^{-x}}{2},\quad \operatorname{ch} x=\frac{e^x+e^{-x}}{2},$$

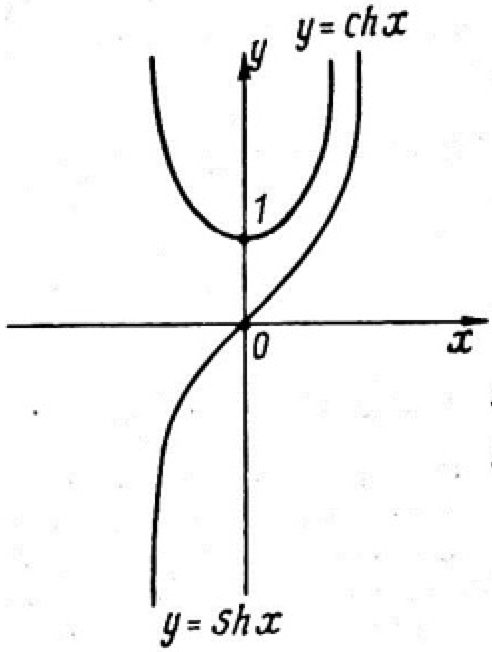


Рис. 1.2

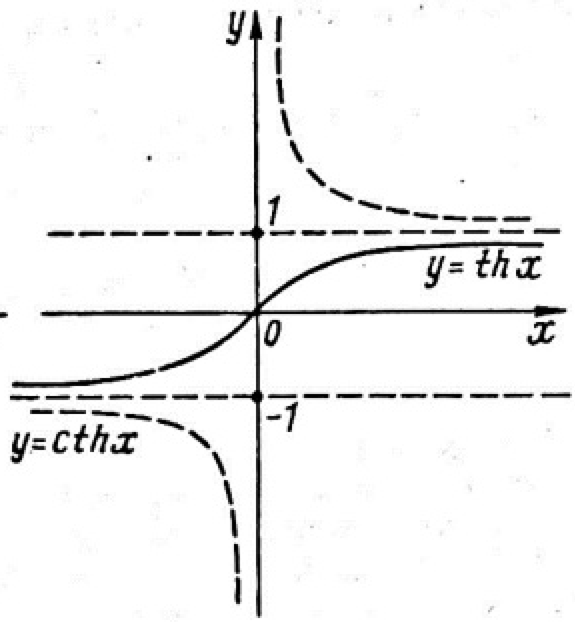


Рис. 1.3

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

На рис. 1.2 и 1.3 изображены графики этих функций. Функции $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ связаны легко проверяемым соотношением

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Производные гиперболических функций нетрудно найти, применяя правила 1°—5° и теорему 1.3:

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

$$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$$

Иногда затруднения возникают при дифференцировании функций вида $y = [g(x)]^{f(x)}$, $g(x) > 0$, которые на первый взгляд трудно отнести к определенному классу. На самом деле, определение этой функции имеет вид:

$$y = e^{f(x) \ln g(x)}$$

и

$$\ln y = f(x) \ln g(x). \tag{1.17}$$

Применяя к обеим частям тождества (1.17) теорему 1.3, получаем

$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = f'(x)\ln g(x) + f(x)\frac{g'(x)}{g(x)},$$

и, следовательно,

$$y' = [g(x)]^{f(x)}\left[f'(x)\ln g(x) + f(x)\frac{g'(x)}{g(x)}\right] =$$
$$= [g(x)]^{f(x)}\ln g(x) f'(x) + f(x)[g(x)]^{f(x)-1} g'(x).$$

Выражение $(\ln y)' = y'/y$ называется *логарифмической производной,* а сам процесс дифференцирования с предварительным логарифмированием — *логарифмическим дифференцированием.* Кроме указанного случая, он часто оказывается полезным, когда функция имеет вид сложного произведения или дроби.

Так как в основе определения производной лежит понятие предела, то его можно расширить, применяя односторонние и бесконечные пределы.

Пусть функция $y = f(x)$ определена хотя бы при $x_0 \leqslant x < x_0 + \delta$. Тогда односторонний предел

$$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0+} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'_+(x_0),$$

если он существует, называется *производной справа функции* $f(x)$ *в точке* x_0. Аналогично, если функция $y = f(x)$ определена хотя бы при $x_0 - \delta < x \leqslant x_0$, *производная слева* определяется как предел

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Теорема 1.5. Для того чтобы существовала производная $f'(x_0)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали и были равны обе односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$; при этом

$$f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = f'(x_0). \tag{1.18}$$

Очевидно, что если существует производная $f'(x_0)$, то существуют односторонние производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$ как пределы разделенной разности по множествам, причем выполняется (1.18). Обратно, если $f'_+(x_0) = f'_-(x_0) = a$, то $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\ \delta_1 > 0$ и $\delta_2 > 0$ такие, что

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}-a\right|<\varepsilon \tag{1.19}$$

при $x_0<x<x_0+\delta_1$ и при $x_0-\delta_2<x<x_0$. Полагая $\delta=\min\times$ $\times\{\delta_1, \delta_2\}$, получаем, что (1.19) выполняется при $0<|x-x_0|<\delta$, а это и доказывает (1.18). #

Примеры. 1. Докажите, что функция $y=|x|$ имеет обе односторонние производные $f'_+(0)=1$ и $f'_-(0)=-1$, но она не дифференцируема в точке $x_0=0$.

2. Функция

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$$

дифференцируема при всех $x_0\in\mathbf{R}$, причем

$$y'=f'(x_0)=\begin{cases} 2x_0\sin\frac{1}{x_0}-\cos\frac{1}{x_0}, & x_0\neq 0;\\ 0, & x_0=0,\end{cases} \tag{1.20}$$

но пределы производной $\lim\limits_{x\to 0+}f'(x)=f'(0+)$ и $\lim\limits_{x\to 0-}f'(x)=f'(0-)$ не существуют, т. е. в точке $x_0=0$ производная $f'(x)$, рассматриваемая как функция от x, имеет разрыв II рода.

Формула (1.20) при $x_0\neq 0$ получается по правилу дифференцирования произведения; при $x_0=0$ она вытекает из того, что $\Delta x=x$, $\Delta y=x^2\sin\frac{1}{x}$ и $\Delta y/\Delta x=x\sin\frac{1}{x}$ в точке $x_0=0$. Пределы производной $f'(0+)$ и $f'(0-)$ не существуют потому, что пределы $\lim\limits_{x_0\to 0\pm}\cos\frac{1}{x_0}$ не существуют, а $\lim\limits_{x_0\to 0\pm}2x_0\sin\frac{1}{x_0}=0$.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна при $|x-x_0|<\delta$, $\delta>0$. Если существует один из бесконечных пределов

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\pm\infty \text{ или } f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\infty,$$

то говорят, что существует бесконечная производная в точке x_0.

Примеры. 1. Функция $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$ непрерывна при $-\infty<x<+\infty$ и имеет бесконечную производную $f'(0)=+\infty$.

2. Функция $y=f(x)=\sqrt[3]{x^2}$ непрерывна при $-\infty<x<+\infty$ и имеет бесконечную производную $f'(0)=\infty$.

Положительное направление на наклонной касательной к графику функции $y=f(x)$ соответствует возрастанию независимого переменного x; вертикальная касательная может быть направлена вверх или вниз. Геометрически равенство $f'(x_0)=+\infty$ или $f'(x_0)=-\infty$ указывает именно на то, что эта вертикальная касательная направлена параллельно оси ординат соответственно вверх или вниз. В случае же, когда $f'(x_0)=\infty$, а $f'_-(x_0)=-\infty$ и $f'_+(x_0)=+\infty$ (или $f'_-(x_0)=+\infty$ и $f'_+(x_0)=-\infty$), на графике функции $y=f(x)$ точка $(x_0, f(x_0))$ является *острием* (или *точкой возврата*), в которой направление касательной меняется скачком.

§ 2. Производные и дифференциалы высших порядков

Пусть функция $y=f(x)$ определена и дифференцируема в каждой точке интервала (a, b). Тогда, в свою очередь, производная $y'=f'(x)$ является функцией, определенной для всех $x \in (a, b)$, и может оказаться, что она также дифференцируема. В этом случае производная от производной

$$y''=f''(x)=[f'(x)]'$$

называется *производной второго порядка* от функции $y=f(x)$, а $y'=f'(x)$ называется также производной *первого порядка*. Аналогично определяются производные третьего, четвертого и др. порядков:

$$y'''=f'''(x)=[f''(x)]',$$
$$y^{\mathrm{IV}}=f^{\mathrm{IV}}(x)=[f'''(x)]'.$$

Пусть n — любое натуральное число. *Производной порядка* n от функции $y=f(x)$ называется производная от производной $(n-1)$—го порядка:

$$y^{(n)}=f^{(n)}(x)=[f^{(n-1)}(x)]'. \qquad (2.1)$$

При этом сама функция $y=f(x)$ отождествляется с производной нулевого порядка: $f^{(0)}(x)=f(x)$. Таким образом, существование на интервале (a, b) производной n-го порядка означает, что производные всех предыдущих порядков $0, 1, \ldots, n-1$ существуют и непрерывны на (a, b).

Для многих элементарных функций легко построить формулы, выражающие производные любого порядка. Например, легко проверить справедливость следующих формул:

$$(e^x)^{(n)}=e^x, \quad -\infty<x<+\infty;$$

$$(\sin x)^{(n)}=\sin\left(x+n\frac{\pi}{2}\right), \quad -\infty<x<+\infty;$$

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+n\frac{\pi}{2}\right), \quad -\infty<x<+\infty.$$

Для непосредственного вычисления производной любого порядка n от произведения двух функций $u=u(x)$ и $v=v(x)$ оказывается полезной так называемая *формула Лейбница:*

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}, \tag{2.2}$$

частным случаем которой является правило 4° § 1: $(uv)'=u'v+$ $+uv'$. В этой формуле C_n^k обозначают биномиальные коэффициенты:

$$C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad k=1, \ldots, n-1;$$

$$C_n^0=C_n^n=1.$$

Докажем формулу (2.2) методом математической индукции. Пусть она справедлива для порядка n, тогда для порядка $n+1$ имеем:

$$(uv)^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\left(u^{(k+1)}v^{(n-k)}+u^{(k)}v^{(n-k+1)}\right)=$$

$$=C_n^0 uv^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\left(C_n^{k-1}+C_n^k\right)u^{(k)}v^{(n+1-k)}+C_n^n u^{(n+1)}v=$$

$$=\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(k)} v^{(n+1-k)},$$

так как

$$C_n^{k-1}+C_n^k=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{(k-1)!}+\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}=$$

$$=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+2)}{k!}(k+n-k+1)=C_{n+1}^k, \quad 1\leqslant k\leqslant n.$$

Поскольку при $n=1$ формула (2.2) верна, она оказывается верной и при всех $n\in\mathbf{N}$. #

Пример. Вычислить $(x\sin x)^{(110)}$. По формуле (2.2) имеем

УЧЕБНЫЙ ФОНД
б-ки МИФИ

$$(x \sin x)^{(110)} = x (\sin x)^{(110)} + C_{110}^{1} (\sin x)^{(109)} =$$
$$= 110 \cos x - x \sin x.$$

Как уже отмечалось в § 1, дифференциал

$$dy = f'(x) dx \tag{2.3}$$

есть функция от двух переменных x и dx, причем от dx он зависит линейно (линейная форма от dx). *Дифференциал второго порядка,* по определению, есть дифференциал от дифференциала (причем dx считается постоянным):

$$d^2 y = d[f'(x) dx] = d[f'(x)] \quad dx = f''(x) dx^2.$$

Вообще, *дифференциал порядка n* есть дифференциал от дифференциала порядка $n-1$:

$$d^n y = d[d^{n-1} y] = d[f^{(n-1)}(x) dx^{n-1}] =$$
$$= f^{(n)}(x) dx^n. \tag{2.4}$$

При этом дифференциал (2.3) иначе называется еще *дифференциалом первого порядка.*

Переписав формулу (2.4) в виде

$$f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}, \tag{2.5}$$

получаем выражение производной порядка n в виде отношения дифференциала $d^n y$ порядка n и n-й степени dx^n дифференциала независимого переменного dx. Эта формула обобщает запись производной первого порядка $y' = dy/dx$ в виде отношения двух дифференциалов первого порядка.

Как показывает формула (2.4), дифференциал $d^n y$ порядка n также зависит от двух переменных x и dx, $-\infty < dx < +\infty$, причем относительно дифференциала dx это есть форма степени n, нелинейная при $n > 1$.

Нелинейность дифференциалов высшего порядка относительно dx обусловливает различие в их поведении при замене переменного по сравнению с дифференциалами первого порядка. Если $u = f(x)$, $y = g(u)$ и $y = F(x) = g[f(x)]$ — сложная функция, то согласно теореме 1.3

$$dy = F'(x) dx = g'(u) f'(x) dx = g'(u) du, \tag{2.6}$$

т. е. *форма дифференциала первого порядка не зависит от выбора переменного*; иначе говоря, она инвариантна при замене переменного $u = f(x)$.

В случае же, например, дифференциала второго порядка имеем, с одной стороны, согласно (2.4)

$$d^2y=F''(x)\,dx^2, \tag{2.7}$$

а с другой стороны,

$$\begin{aligned} d^2y&=d[g'(u)\,du]=d[g'(u)]\,du+g'(u)\,d[du]=\\ &=g''(u)\,du^2+g'(u)\,d^2u, \end{aligned} \tag{2.8}$$

т. е. *форма дифференциала порядка* $n>1$ *зависит от выбора переменного* или, иначе говоря, она в общем случае не инвариантна относительно замены переменного $u=f(x)$.

Замечание. Различие в формах записи (2.7) и (2.8) произошло, очевидно, вследствие того, что в общем случае $d^2u\neq 0$. В одном важном частном случае, когда замена производится при помощи многочлена первой степени $u=ax+b$, имеем $d^2u=0$, и форма дифференциала любого порядка n остается инвариантной:

$$d^ny=F^{(n)}(x)\,dx^n=g^{(n)}(u)\,du^n,\quad u=ax+b.$$

Пусть на интервале (a,b) заданы две непрерывные функции

$$x=\varphi(t),\quad y=\Psi(t), \tag{2.9}$$

причем, скажем, функция $x=\varphi(t)$ строго монотонна. Тогда существует непрерывная обратная функция $\varphi^{-1}(x)$, подставляя которую в выражение для y, получаем сложную функцию

$$y=\psi[\varphi^{-1}(x)]=F(x).$$

В этой ситуации говорят, что функция $y=F(x)$ задана *параметрически* при помощи формул (2.9), выражающих x и y как функции вспомогательного переменного, или *параметра*, t.

Геометрически пара функций (2.9) определяет плоскую непрерывную кривую Γ как множество точек:

$$\Gamma=\{(x,y):x=\varphi(t),\ y=\Psi(t),\ a<t<b\}$$

(при этом строгая монотонность функции $x=\varphi(t)$ не требуется). Кривая Γ принадлежит классу $C^n(a,b)$, если функции (2.9) на интервале (a,b) имеют непрерывные производные до порядка n включительно. Рассуждая как в § 1, видим, что кривая Γ будет иметь определенную касательную в точке $M_0=(x_0=\varphi(t_0),\ y_0=\Psi(t_0))$, если существует предел, конечный или бесконечный, отношения $\Delta y/\Delta x$ при $\Delta x\to 0$. Запись

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta t}:\frac{\Delta x}{\Delta t}\tag{2.10}$$

показывает, что если кривая Γ класса $C^1(a, b)$ и $\varphi'(t_0)\neq 0$, то Γ имеет в точке M_0 наклонную касательную с угловым коэффициентом

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\Psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)};$$

если же $\varphi'(t_0)=0$, но $\Psi'(t_0)\neq 0$, то предел отношения (2.10) бесконечный, и касательная вертикальная. Таким образом, если кривая принадлежит классу $C^1(a, b)$, причем всюду

$$[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2>0,$$

то кривая имеет в каждой точке определенную касательную; такие кривые называются *гладкими*.

В силу теоремы 1.4 о производной обратной функции заданная параметрически сложная функция $y=F(x)$ имеет производную, если функция $x=\varphi(t)$ строго монотонна и $\varphi'(t)\neq 0$. При этом для дифференцирования функций, заданных параметрически, как и вообще в дифференциальном исчислении, можно использовать метод производных или же метод дифференциалов. Вычисляя по методу производных, имеем:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{dy}{dt}:\frac{dx}{dt}=\frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)},\tag{2.11}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right):\frac{dx}{dt}=$$

$$=\frac{\Psi''\varphi'-\Psi'\varphi''}{(\varphi')^2}\cdot\frac{1}{\varphi'}=\frac{\varphi''\varphi'-\Psi'\varphi''}{(\varphi')^3},\tag{2.12}$$

и т. д.

По методу дифференциалов имеем $dx=\varphi'(t)\,dt$, $dy=\Psi'(t)\,dt$ и

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\Psi'(t)}{\varphi'(t)},$$

т. е. снова получаем (2.11); здесь мы опираемся на инвариантность дифференциала первого порядка. Для дальнейших вычислений необходимы дифференциалы обратной функции $t=\varphi^{-1}(x)$:

$$dt=\frac{dx}{\varphi'(t)},\quad d^2t=d\left[\frac{dx}{\varphi'(t)}\right]=-\frac{\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}dx^2.$$

Далее имеем

$$d^2y=d[\Psi'(t)\,dt]=d[\Psi'(t)]\,dt+\Psi'(t)\,d^2t=$$

$$=\Psi''(t)\,dt^2+\Psi'(t)\,d^2t=\Psi''(t)\frac{dx^2}{[\varphi'(t)]^2}-\Psi'(t)\frac{\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}dx^2,$$

откуда снова находим (2.12) в виде отношения d^2y/dx^2.

Глава 2

ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ

§ 3. Свойства дифференцируемых функций

В этом параграфе будут доказаны основные теоремы дифференциального исчисления, служащие базой как для дальнейшего построения аппарата анализа, так и для применений.

Теорема 3.1 (П. Ферма). Пусть функция $y=f(x)$ определена на интервале $a<x<b$ и в точке c, $a<c<b$, достигает наибольшего или наименьшего значения на (a, b). Если при этом существует производная $f'(c)$, то $f'(c)=0$.

\# Пусть $\forall\, x\in(a, b): f(x)\leqslant f(c)$, а значит

$$\Delta x>0\Rightarrow\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\leqslant 0\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\leqslant 0,$$

$$\Delta x<0\Rightarrow\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}\geqslant 0\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x}=f'(c)\geqslant 0.$$

Следовательно, $f'(c)=0$. Случай наименьшего значения рассматривается аналогично. #

Замечание. Геометрический смысл теоремы Ферма заключается в том, что если существует конечная производная в точке c, где достигается наибольшее или наименьшее значение, то касательная к графику функции в точке $(c, f(c))$ параллельна оси абсцисс (сделайте чертеж!).

Теорема 3.2 (М. Ролль). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, имеет производную хотя бы при $a<x<b$ и $f(a)=f(b)$. Тогда найдется точка c, $a<c<b$, такая, что $f'(c)=0$.

\# Обозначим $s(f)=\inf\{f(x): a\leqslant x\leqslant b\}$, $S(f)=\sup\{f(x): a\leqslant x\leqslant b\}$.

а) Если $s(f)=S(f)$, то $f(x)=\text{const}$ и $f'(x)=0\ \forall\, x\in(a, b)$.

б) Если $s(f)<S(f)$, то возможно, что $s(f)=f(a)=f(b)$, но тогда $S(f)>f(a)=f(b)$, или $S(f)=f(a)=f(b)$, но тогда $s(f)<f(a)=f(b)$. Во всех случаях в силу теоремы Вейерштрасса 18.2 из ТЛКМА-1 существует точка c, $a<c<b$, в которой либо $S(f)=f(c)$, либо $s(f)=f(c)$. По теореме Ферма 3.1 $f'(c)=0$. #

Замечания. 1. Геометрический смысл теоремы Ролля состоит в том, что в условиях теоремы существует точка $(c, f(c))$ на графике функции, в которой касательная параллельна оси абсцисс (сделайте чертеж!).

2. Эквивалентная формулировка теоремы Ролля получается, если в условиях теоремы положить $f(a)=f(b)=0$: между двумя нулями функции находится по крайней мере один нуль ее производной.

Теорема 3.3 (Ж. Лагранж). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и имеет производную хотя бы при $a<x<b$. Тогда существует точка c, $a<c<b$ такая, что

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a). \tag{3.1}$$

Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x)=f(x)-\lambda x$, в которой множитель λ подберем так, чтобы $F(a)=F(b)$:

$$f(a)-\lambda a=f(b)-\lambda b,$$

т. е. пусть

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

По теореме Ролля 3.2 существует точка c, $a<c<b$, такая, что $F'(c)=f'(c)-\lambda=0$, т. е.

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}, \tag{3.2}$$

а это равенство эквивалентно (3.1). #

Замечания. 1. Теорема Лагранжа остается в силе и при $a>b$.

2. Обозначим $\Theta=(c-a)/(b-a)$. Тогда утверждение теоремы принимает следующую эквивалентную форму: $\exists\,\Theta$, $0<\Theta<1$, такое, что

$$f(b)-f(a)=f'[a+\Theta(b-a)](b-a). \tag{3.3}$$

Формулы (3.1) — (3.3) называют *формулами Лагранжа.*

3. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ и имеет производную хотя бы при $a<x<b$. Тогда для любой пары точек $x_0\in[a, b]$, $x=x_0+\Delta x\in[a, b]$ формулу Лагранжа можно записать в виде:

$$f(x)=f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0+\Theta\Delta x)\,\Delta x=$$
$$=f(x_0)+d f(x_0+\Theta\Delta x),\ 0<\Theta<1. \qquad (3.4)$$

Эта форма записи называется *формулой конечных приращений,* в отличие от *формулы бесконечно малых приращений:*

$$f(x)=f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\,\Delta x+o(\Delta x)=$$
$$=f(x_0)+d f(x_0)+o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0, \qquad (3.5)$$

вытекающей из определения производной $f'(x_0)$ (в случаях $x_0=a$ или $x_0=b$ в формуле (3.5) подразумевается, что существует соответствующая односторонняя производная $f_+(a)$ или $f_-(b)$). Формула конечных приращений (3.4) имеет *глобальный характер,* т. е. она несет одинаковую информацию о приращении функции для любых точек x_0, $x\in[a,b]$. Напротив, формула бесконечно малых приращений (3.5) имеет *локальный характер,* так как она позволяет оценить приращение функции только при достаточно малых Δx.

4. Правая часть формулы Лагранжа (3.2)

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

есть тангенс угла наклона секущей к графику функции, проведенной через концевые точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$ (рис. 3.1). Таким образом, геометрический смысл теоремы Лагранжа состоит в том, что существует точка $(c, f(c))$ на графике, в которой касательная параллельна секущей.

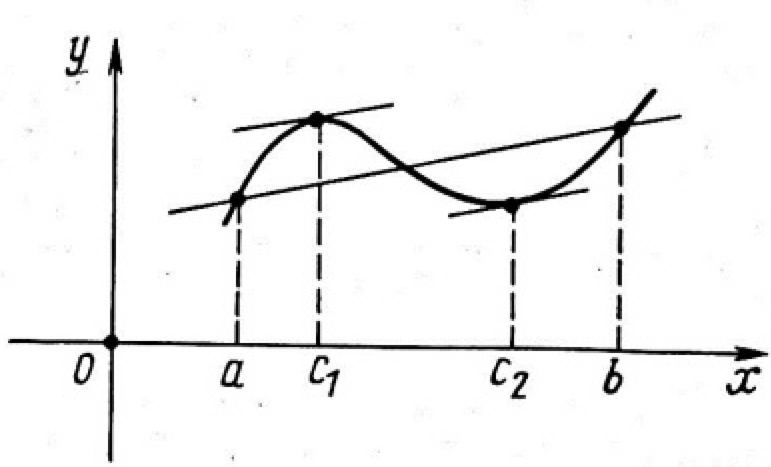


Рис. 3.1

Теорема 3.4 (О. Коши). Пусть две функции $f(t)$ и $g(t)$ непрерывны на отрезке $a\leqslant t\leqslant b$ и имеют производные хотя бы при $a<t<b$, причем $g'(t)\neq 0\ \forall\ t\in(a,b)$. Тогда существует точка c, $a<c<b$, такая, что

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{3.6}$$

Заметим, прежде всего, что в условиях теоремы $g(b)\neq\neq g(a)$. В самом деле, если бы $g'(a)=g(b)$, то по теореме Ролля 3.2 $\exists\ c_0\in(a,b):g'(c_0)=0$, а это противоречит условию теоремы.

Рассмотрим теперь вспомогательную функцию $F(t)=f(t)-\lambda g(t)$, в которой множитель λ подберем из условия $F(a)=F(b)$:

$$f(a)-\lambda g(a)=f(b)-\lambda g(b),$$

т. е. пусть

$$\lambda=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

По теореме Ролля 3.2 $\exists\ c\in(a,b):F'(c)=0$, т. е. $f'(c)-\lambda g'(c)=0$, а это эквивалентно формуле (3.6). #

Замечание. Пусть в условиях теоремы $x=g(t)$, $y=f(t)$, т. е. имеем заданную параметрически функцию $y=F(x)$. Тогда

$$\frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{dy}{dx}\Big|_{t=c}$$

есть тангенс угла наклона касательной к графику функции $y=F(x)$ (рис. 3.2), откуда следует, что геометрический смысл теоремы Коши тот же самый, что и теоремы Лагранжа.

Как уже говорилось, класс всех функций $y=f(x)$, непрерывных на интервале (a,b), обозначается $c(a,b)$; класс всех функций, непрерывных на отрезке $[a,b]$, обозначается $C[a,b]$. Если $f(x)\in c[a,b]$, то согласно теореме 19.1 из ТЛКМА-1 $f(x)$ равномерно непрерывна на $[a,b]$. Обратно, если $f(x)$ равномерно непрерывна на интервале (a,b), то согласно теореме 19.3 из ТЛКМА-1 существуют конечные пределы $f(a+o)$ и $f(b-o)$, принимая которые за значения функции $\bar{f}(a)=f(a+o)$ и $\bar{f}(b)=f(b-o)$, получаем на всем отрезке функцию $\bar{f}(x)\in C[a,b]$.

Функция $y=f(x)$, по определению, имеет производную на отрезке $[a,b]$, если: а) она дифференцируема во всех внутренних точках x_0, $a<x_0<b$; б) в точке a имеется производная справа $f'_+(a)$; в) в точке b имеется производная слева $f'_-(b)$.

Теорема 3.5. Пусть функция $y=f(x)\in C[a,b]$ дифференцируема на (a,b) и существуют конечные пределы:

$$f'(a+o)=\lim_{x\to a+0}f'(x),$$

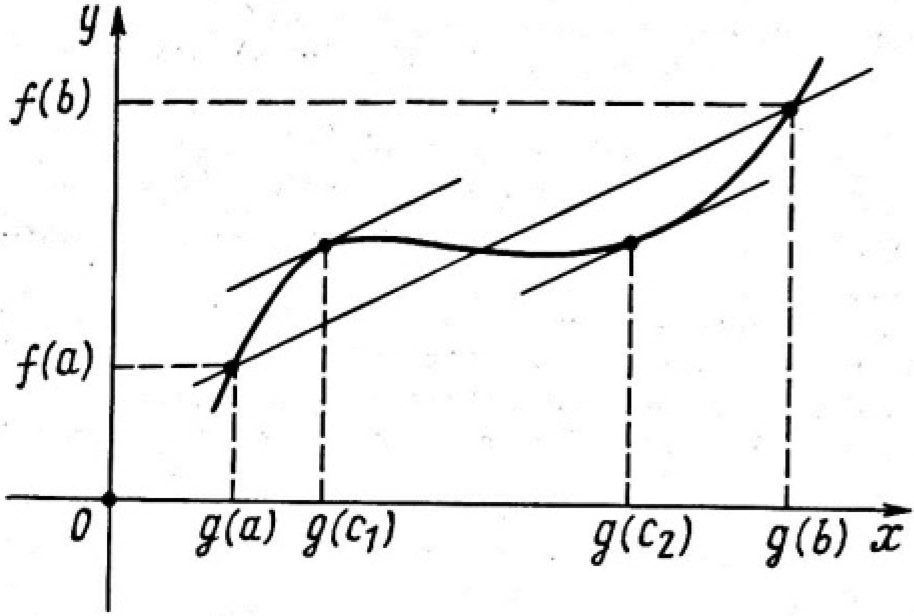


Рис. 3.2

$$f'(b-o)=\lim_{x\to b-0} f'(x).$$

Тогда односторонние производные $f_+(a)$ и $f_-(b)$ также существуют, причем $f_+(a)=f'(a+o)$ и $f'_-(b)=f'(b-o)$.

\# По формуле Лагранжа при $\Delta x>0$ существует такое Θ, $0<\Theta<1$, что

$$\frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}=f'(a+\Theta\Delta x).$$

При этом каждому $\Delta x>0$ могут соответствовать, вообще говоря, несколько (или даже бесконечно много) Θ; выбирая из них первое попавшееся, получаем некоторую функцию $\Theta=\Theta(\Delta x)$. Для нее во всяком случае выполняются неравенства $0\leqslant a+\Theta\Delta x-a<\Delta x$ и, следовательно, $\lim\limits_{\Delta x\to 0+}(a+\Theta\Delta x)=a$. По теореме о пределе сложной функции 13.4 из ТЛКМА-1 предел правой части $\lim\limits_{\Delta x\to 0+} f'(a+\Theta\Delta x)=f'(a+o)$. Следовательно, предел левой части $f'_+(a)$ существует и $f'_+(a)=f'(a+o)$. Для точки b рассуждение аналогично. #

Теорема 3.6. Если функция $f(x)\in C[a,b]$ имеет конечную производную $f'(x)$ всюду на отрезке $[a,b]$, то $f'(x)$ не может иметь точек разрыва I рода. В каждой точке $x_0 \in [a, b]$ либо $f'(x)$ непрерывна, либо имеет разрыв II рода.

\# Пусть для $a < x_0 < b$ существуют пределы $f'(x_0+o)$ и $f'(x_0-o)$. Применяя теорему 3.5 к отрезкам $x_0 \leqslant x \leqslant b$ и $a \leqslant x \leqslant x_0$, соответственно получим $f'(x_0+o) = f'_+(x_0) = f'(x_0)$ и $f'(x_0-o) = f'_-(x_0) = f'(x_0)$, т. е. $f'(x)$ непрерывна в точке x_0. Случаи концевых точек $x_0 = a$ и $x_0 = b$ рассматриваются аналогично. #

Пример производной с точкой разрыва II рода дан в § 1.

Класс всех функций $y = f(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и имеющих на $[a, b]$ непрерывные производные $f'(x), \ldots, f^{(n)}(x)$, обозначается $C^n[a, b]$. Класс $C^\infty[a, b]$ состоит из всех функций, имеющих на $[a, b]$ непрерывные производные всех порядков. Функции класса $C^1[a, b]$ иначе называются *гладкими*. Функция $y = f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a, b]$, $f(x) \in Q[a, b]$, если она непрерывна на $[a, b]$, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва I рода. Функция $y = f(x)$ называется *кусочно-гладкой* на отрезке $[a, b]$, если она кусочно-непрерывна на $[a, b]$, и отрезок $[a, b]$ можно разбить на конечное число отрезков, на каждом из которых производная $f'(x)$ существует и непрерывна.

Теорема 3.7 Если производная функции $f(x) \in C(a, b)$ существует и ограничена на интервале (a, b), то $f(x)$ единственным образом непрерывно продолжается на весь отрезок $[a, b]$, причем продолженная функция $\tilde{f}(x) \in C[a, b]$.

\# Пусть $|f'(x)| \leqslant M \ \forall x \in (a, b)$. Тогда для $\forall x', x'' \in (a, b)$ из формулы Лагранжа получаем

$$|f(x'') - f(x')| \leqslant M\,|x'' - x'|,$$

т. е. $f(x)$ равномерно непрерывна на (a, b). Теперь заключение теоремы следует из теоремы 19.3 из ТЛКМА-1. #

Следствие. Пусть производная $f^{(n+1)}(x)$ функции $f(x) \in C^n(a, b)$ существует и ограничена на интервале (a, b). Тогда функция $f(x)$ единственным образом продолжается на весь отрезок $[a, b]$, причем продолженная функция $\tilde{f}(x) \in C^n[a, b]$.

§ 4. Раскрытие неопределенностей

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены при $a < x < b$ и являются б. м. функциями при $x \to a+o$. Тогда предел отношения

$$\lim_{x \to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{4.1}$$

часто называют *неопределенным выражением*, или просто *неопределенностью* типа 0/0. Применение теоремы Коши 3.4 при некоторых условиях позволяет упростить нахождение этого предела, т. е. как говорят, позволяет *раскрыть неопределенность* по правилу Лопиталя.

Теорема 4.1. Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняются следующие условия: 1) существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$ на интервале $a<x<b$; 2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=0$; 3) $g'(x)\neq 0\ \forall\ x\in(a,b)$; 4) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K. \tag{4.2}$$

Тогда существует и предел отношения функций (4.1), причем

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=K. \tag{4.3}$$

\# Положим $f(a)=g(a)=0$. Тогда для функций $f(x)$ и $g(x)$ на любом отрезке $[a,x]$, $a<x<b$, выполняются условия теоремы Коши 3.4 и, следовательно, существует такая точка c, $a<c<x$, что

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

При этом каждому x могут соответствовать несколько (или даже бесконечно много) c; выбирая из них первую попавшуюся, получаем некоторую функцию $c=c(x)$. Для нее во всяком случае выполняются неравенства $a<c<x$ и, следовательно, $\lim\limits_{x\to a+0} c(x)=a$. Применяя теорему о пределе сложной функции 13.4 из ТЛКМА-1 видим, что

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(c)}{g'(c)}=K,$$

а значит, равенство (4.3) установлено. #

Замечание. В теореме 4.1 рассмотрен случай одностороннего предела справа. Ясно, что так же можно рассмотреть случай предела слева и случай обычного предела.

Пример применения теоремы 4.1. Для нахождения предела частного дифференцируем дважды числитель и знаменатель:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{6x}=\frac{1}{6}.$$

Так как последний предел существует и все остальные условия теоремы 4.1 выполнены, то применение этой теоремы оправдано.

Теорема 4.2. Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняются следующие условия: 1) существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$ при $x>a>0$; 2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$; 3) $g'(x)\neq 0\ \forall\, x>a$; 4) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K. \tag{4.4}$$

Тогда существует и предел отношения функций, причем

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=K. \tag{4.5}$$

\# При $a<x<+\infty$ пусть $t=1/x$, $x=1/t$, $0<t<1/a$. Тогда $x\to+\infty \Leftrightarrow t\to 0+$. Заменяя переменное $x=1/t$, получаем

$$f(x)=f\left(\frac{1}{t}\right)=F(t),\quad g(x)=g\left(\frac{1}{t}\right)=G(t),$$

$$F'(t)=-f'(x)\frac{1}{t^2},\quad G'(t)=-g'(x)\frac{1}{t^2}.$$

Для функций $F(t)$ и $G(t)$ существует предел

$$\lim_{t\to 0+}\frac{F'(t)}{G'(t)}=\lim_{t\to 0+}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K,$$

а следовательно, по теореме 4.1

$$\lim_{t\to 0+}\frac{F(t)}{G(t)}=K.$$

Но в силу теоремы о пределе сложной функции 13.4 из ТЛКМА-1 тогда существует и предел

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{t\to 0+}\frac{F(t)}{G(t)}=K. \ \#$$

Аналогичные теоремы имеют место для неопределенностей типа $\frac{\infty}{\infty}$, т. е. для пределов отношений бесконечно больших (б. б.) функций.

Теорема 4.3. Пусть для функций $f(x)$ и $g(x)$ выполняются следующие условия: 1) существуют производные $f'(x)$ и $g'(x)$ при $a<x<b$; 2) $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} g(x)=\infty$; 3) $g'(x)\neq 0\ \forall\ x\in(a,b)$; 4) существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=K. \tag{4.6}$$

Тогда существует и предел отношения функций, причем

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=K. \tag{4.7}$$

В условиях теоремы существует $\delta>0$ такое, что при $0<\lambda-a<\delta$ и $a<x\leqslant\lambda<b$ имеем $f(x)\neq 0$ и $g(x)\neq 0$.

а) Допустим сначала, что предел (4.6) конечный. Применяя теорему Коши 3.4 к отрезку $[x,\lambda]$, получаем

$$\frac{f(\lambda)-f(x)}{g(\lambda)-g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},\quad x<c<\lambda,$$

или

$$\frac{f(x)}{g(x)}\,\frac{\dfrac{f(\lambda)}{f(x)}-1}{\dfrac{g(\lambda)}{g(x)}-1}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Отсюда находим

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}\,\frac{1-\dfrac{g(\lambda)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\lambda)}{f(x)}}.$$

При этом $c=c(\lambda)$ и $\lim\limits_{\lambda\to a+0} c(\lambda)=a$. Следовательно,

$$\lim_{\lambda\to a+0}\frac{f'(c)}{g'(c)}=K. \tag{4.8}$$

Кроме того, при фиксированном λ в силу условия 2

$$\lim_{x\to a+0}\frac{1-\dfrac{g(\lambda)}{g(x)}}{1-\dfrac{f(\lambda)}{f(x)}}=1. \tag{4.9}$$

Пусть дано ε, $0<\varepsilon<1$. Согласно (4.8), существует такое δ_1, $0<\delta_1<\delta$, что при $0<\lambda-a<\delta_1$

$$K-\frac{\varepsilon}{3+|K|}<\frac{f'(c)}{g'(c)}<K+\frac{\varepsilon}{3+|K|}.$$

Зафиксировав такое $\lambda>a$, находим теперь δ_2, $0<\delta_2<\lambda-a$, для которого при $0<x-a<\delta_2$ согласно (4.9) выполняются неравенства

$$1-\frac{\varepsilon}{3(3+|K|)}<\frac{1-\frac{g(\lambda)}{g(x)}}{1-\frac{f(\lambda)}{f(x)}}<1+\frac{\varepsilon}{3(3+|K|)}.$$

Из полученных неравенств вытекает, что при $0<|x-a|<\delta_2$

$$K-\varepsilon<K-\frac{\varepsilon}{3+|K|}-\frac{\varepsilon K}{3(3+|K|)}+\frac{\varepsilon^2}{(3+|K|)^2}<$$

$$<\frac{f'(c)}{g'(c)}\frac{1-\frac{g(\lambda)}{g(x)}}{1-\frac{f(\lambda)}{f(x)}}<K+\frac{3}{3+|K|}+\frac{\varepsilon K}{3(3+|K|)}+\frac{\varepsilon^2}{(3+|K|)^2}<K+\varepsilon,$$

т. е. получаем (4.7).

б) Если

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\infty,$$

то $f'(x)\neq 0$ при $0<\lambda-a<\delta_1$ и, следовательно,

$$\lim_{x\to a+0}\frac{g'(x)}{f'(x)}=0,$$

откуда следует по доказанному, что

$$\lim_{x\to a+0}\frac{g(x)}{f(x)}=0,$$

а значит,

$$\lim_{x\to a+0}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty. \ \#$$

Замечание. Случай неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ при $x\to+\infty$ сводится к случаю теоремы 4.3 точно так же, как в теореме 4.2.

Примеры. 1. Докажем, что при $a>1$, $\mu>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}}=0.$$

\# Пусть сначала $0<\mu\leqslant 1$. Тогда

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\mu}}{a^{x}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\mu x^{\mu-1}}{a^{x}\ln a}=0.$$

При $\mu>1$ дифференцируем $[\mu]+1$ раз. #

2. Докажите, что при $\mu>0$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\mu}}=0.$$

Неопределенности вида $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ сводятся к случаям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ посредством алгебраических преобразований.

3. Доказать, что при $\mu>0$

$$\lim_{x\to 0+}x^{\mu}\ln x=0.$$

\# В самом деле,

$$\lim_{x\to 0+}x^{\mu}\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{x^{-\mu}}=\lim_{x\to 0+}\frac{x^{-1}}{-\mu x^{-\mu-1}}=\lim_{x\to 0+}\frac{-x^{\mu}}{\mu}=0. \quad \#$$

Неопределенности вида 0^0, 1^{∞} и ∞^0 сводятся к случаям $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$ посредством логарифмирования и последующих алгебраических преобразований.

Примеры. 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0+}x^{x}=1$.

\# Если $y=x^{x}$, $x>0$, то $\ln y=x\ln x$ и, согласно предыдущему примеру, $\lim\limits_{x\to 0+}\ln y=0$. Следовательно, $\lim\limits_{x\to 0+}y=1$. #

2. Доказать, что функция

$$y=f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

принадлежит классу $C^{\infty}(-\infty,+\infty)$, причем $f^{(n)}(0)=0\ \forall\, n\in\mathbf{N}$.

\# Пусть $t=1/x^2$. Тогда $x=\pm 1/\sqrt{t}$, и при $x\neq 0$ имеем:

$$f(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{e^{t}},$$

$$f'(x)=\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}=\frac{2t^{3/2}}{e^t}.$$

Отсюда находим

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x}=\lim_{t\to+\infty}\pm\frac{\sqrt{t}}{e^t}=0$$

и, аналогично, $f'(0+)=f'(0-)=0$. Следовательно, $f(x)\in C^1\times\times(-\infty,+\infty)$ и $f'(0)=0$. Такие же рассуждения применимы для производных высших порядков. #

§5. Формула Тейлора

Решим сначала вспомогательную задачу об определении коэффициентов многочлена $P_n(x)$ степени n по значениям его производных в какой-либо точке $x_0\in R$. Записав $P_n(x)$ в виде

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}b_k(x-x_0)^k \tag{5.1}$$

и полагая $x=x_0$, получаем $b_0=P_n(x_0)$. Дифференцируя тождество (5.1):

$$P_n'(x)=b_1+2b_2(x-x_0)+\ldots+n\,b\,n(x-x_0)^{n-1}$$

и снова полагая $x=x_0$, находим $b_1=P_n'(x_0)$. Продолжая этот процесс, получаем решение задачи в форме

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \tag{5.2}$$

которую мы будем называть *записью многочлена $P_n(x)$ в форме Тейлора*. В частности, при $x_0=0$ получаем *запись в форме Маклорена:*

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{P_n^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Пусть теперь при $|x-x_0|<\delta$, $\delta>0$, определена функция $y=f(x)$ и существуют производные $f'(x_0),\ldots,f^{(n)}(x_0)$. Тогда для нее возможно построить *многочлен Тейлора степени n*:

$$T_n(x_0; x) = T_n(x_0, f; x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k, \tag{5.3}$$

основные свойства которого состоят в том, что $T_n(x_0; x_0) = f(x_0)$ и $T_n^{(k)}(x_0; x_0) = f^{(k)}(x_0)$, $k = 1, \ldots, n$.

Большое теоретическое и практическое значение имеет вопрос о том, в какой мере многочлен Тейлора может приближенно представлять функцию $f(x)$. Разность

$$f(x) - T_n(x_0; x) = R_{n+1}(x_0; x)$$

называется *остаточным членом формулы Тейлора*, а сама *формула Тейлора* записывается в виде:

$$f(x) = T_n(x_0; x) + R_{n+1}(x_0; x). \tag{5.4}$$

Речь идет, таким образом, о возможности в той или иной мере оценить поведение остаточного члена $R_{n+1}(x_0; x)$, характеризующего отклонение $f(x)$ от $T_n(x_0; x)$.

Теорема 5.1 (формула Тейлора в форме Пеано). Пусть функция $y = f(x)$ определена при $|x - x_0| < \delta$, $\delta > 0$, и существуют производные $f'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)$. Тогда справедлива формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x) = T_n(x_0; x) + o\left((x - x_0)^n\right), \quad x \to x_0. \tag{5.5}$$

По условию, остаточный член $R_{n+1}(x_0; x)$ имеет производные до $(n-1)$-го порядка включительно в некоторой окрестности точки x_0 и производную n-го порядка в точке x_0, причем

$$R_{n+1}(x_0; x_0) = 0, R'_{n+1}(x_0; x_0) = 0, \ldots, R^{(n)}_{n+1}(x_0; x_0) = 0.$$

Раскроем неопределенность типа 0/0, применяя $n-1$ раз теорему 4.1:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_{n+1}(x_0; x)}{(x-x_0)^n} = \lim_{x \to x_0} \frac{R^{(n-1)}_{n+1}(x_0; x)}{n!(x-x_0)} = \frac{1}{n!} \lim_{x \to x_0} \times$$

$$\times \frac{R^{(n-1)}_{n+1}(x_0; x) - R^{(n-1)}_{n+1}(x_0; x_0)}{x - x_0} = R^{(n)}_{n+1}(x_0; x_0) = 0,$$

что и доказывает наше утверждение. #

Теорема 5.2 (единственности). Если для функции $y = f(x)$ имеет место разложение вида (5.5) в форме Пеано

$$f(x)=V_n(x_0;x)+o\left((x-x_0)^n\right),\ x\to x_0,$$

где $V_n(x_0;x)$ — некоторый многочлен степени не выше n, то $V_n(x_0;x)$ есть многочлен Тейлора для $f(x)$.

Пусть $T_n(x_0;x)=\sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k$, $b_k=f^{(k)}(x_0)/k!$

и $V_n(x_0;x)=\sum_{k=0}^{n} c_k(x-x_0)^k$. Имеем

$$f(x)=T_n(x_0;x)+o\left((x-x_0)^n\right),\quad x\to x_0;$$

$$f(x)=V_n(x_0;x)+o\left((x-x_0)^n\right),\quad x\to x_0.$$

Переходя здесь к пределу при $x\to x_0$, получаем $c_0=b_0=f(x_0)$. Следовательно,

$$b_1+b_2(x-x_0)+\ldots+b_n(x-x_0)^{n-1}+o\left((x-x_0)^{n-1}\right)=$$

$$=c_1+c_2(x-x_0)+\ldots+c_n(x-x_0)^{n-1}+o\left((x-x_0)^{n-1}\right),\ x\to x_0.$$

Переходя здесь к пределу при $x\to x_0$, получаем $c_1=b_1=f'(x_0)$. Продолжая этот процесс, находим, что $c_k=b_k=f^{(k)}(x_0)/k!$, $k=1,2,\ldots,n$ #

Замечания. 1. Теорема единственности показывает, что если каким-либо способом установлено, что разность $f(x)-V_n\times$ $\times(x_0;x)$ есть $o\left((x-x_0)^n\right)$ при $x\to x_0$, то $V_n(x_0;x)$ — многочлен Тейлора для $f(x)$ с центром x_0.

2. Формула (5.5) представляет собой в сущности уточнение формулы б. м. приращений (3.5) для того случая, когда существуют производные $f'(x_0),\ldots,f^{(n)}(x_0)$ в виде

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+$$
$$+o(\Delta x^n),\quad \Delta x\to 0, \tag{5.6}$$

так как $x-x_0=\Delta x$. Подобно формуле б. м. приращений, формулы (5.5) и (5.6) справедливы и для того случая, когда функция $f(x)$ определена при $x_0\leqslant x<x_0+\delta$ или при $x_0-\delta<x\leqslant x_0$, $\delta>0$, причем производные в точке x_0 понимаются как соответствующие односторонние; теорема единственности также справедлива, в доказательства необходимо лишь внести небольшие соответственные изменения, связанные с односторонним переходом к пределу.

3. Подставляя в формулу (5.6) выражения для дифференциалов $dx=\Delta x$ и $d^k f(x_0)=f^{(k)}(x_0)\,dx^k$, получаем формулу Тейлора в виде разложения по последовательным дифференциалам:

$$f(x)=f(x_0)+df(x_0)+\ldots+\frac{1}{n!}d^n f(x_0)+$$
$$+o(dx^n),\quad dx\to 0. \tag{5.7}$$

4. Если $x_0=0$, то $dx=\Delta x=x$, и получаем формулу Маклорена в форме Пеано:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+$$
$$+o(x^n),\quad x\to 0. \tag{5.8}$$

5. Как и формула б. м. приращений (3.5), формулы Тейлора в форме Пеано (5.5) — (5.8) имеют локальный характер, так как они позволяют оценить приращение функции только при достаточно малых Δx.

Теорема 5.3 (формула Тейлора в форме Лагранжа и Коши). Пусть функция $y=f(x)$ и ее производные $f'(x),\ldots,f^{(n)}(x)$ непрерывны на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, $a<b$, а производная $f^{(n+1)}(x)$ существует хотя бы при $a<x<b$. Тогда для любого x_0, $a\leqslant x_0\leqslant b$, и для всех x, $a<x<b$, справедлива формула Тейлора (5.4) с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$R_{n+1}(x_0;x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\Theta(x-x_0)]}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \tag{5.9}$$

или в форме Коши:

$$R_{n+1}(x_0;x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\Theta(x-x_0)]}{n!}(1-\Theta)^n(x-x_0)^{n+1}, \tag{5.10}$$

где числа Θ таковы, что $0<\Theta<1$ (но в формулах (5.9) и (5.10) они, вообще говоря, различны).

Пусть $f(x)=T_n(x_0;x)+R_{n+1}(x_0;x)$. Запишем $R_{n+1}\times$ $\times(x_0;x)$ в виде:

$$R_{n+1}(x_0;x)=(x-x_0)^p H(x_0;x), \tag{5.11}$$

где p — некоторое натуральное число (пока произвольное), $0<p\leqslant n+1$, а $H=H(x_0;x)$ — некоторая функция, подлежа-

щая определению. Пусть x_0 фиксировано на отрезке $a \leqslant x_0 \leqslant b$, а x фиксировано на интервале $a<x<b$, $x_0<x$ (в случае $x_0=x$ утверждение теоремы выполняется тривиально, случай $x_0>x$ рассматривается аналогично), и $\Phi(t)$ — вспомогательная функция, определяемая на отрезке $x_0 \leqslant t \leqslant x$ равенством

$$\Phi(t)=f(t)+f'(t)(x-t)+\ldots+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n+(x-t)^p H.$$

Функция $\Phi(t)$ непрерывна на $[x_0, x]$, $\Phi(x_0)=f(x)$, $\Phi(x)=$ $=f(x)$ и при $x_0<t<x$ существует производная

$$\Phi'(t)=f'(t)+f''(t)(x-t)-f'(t)+\ldots\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-$$

$$-\frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}-p(x-t)^{p-1}H=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\times$$

$$\times(x-t)^n-p(x-t)^{p-1}H.$$

Следовательно, применима теорема Ролля 3.2, согласно которой существует точка c, $x_0<c<x$, т. е. $c=x_0+\Theta(x-x_0)$, $0<\Theta<1$, такая, что $\Phi'(c)=0$. Значит

$$\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n-p(x-c)^{p-1}H=0,$$

откуда находим:

$$H=\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!\,p}(x-c)^{n-p+1}.$$

Подставляя найденное выражение в (5.11), получаем:

$$R_{n+1}(x_0; x)=\frac{f^{(n+1)}[x_0+\Theta(x-x_0)]}{n!\,p}(1-\Theta)^{n-p+1}(x-x_0)^{n+1}, \quad (5.12)$$

так как $x-c=(1-\Theta)(x-x_0)$. При $p=n+1$ из (5.12) получается (5.9), а при $p=1$ получается (5.10). #

Замечания. 1. Выражение (5.12) называется *формой остаточного члена Шлемильха-Роша.* Число $\Theta=\Theta(x_0, x; p, n)$ зависит, вообще говоря, от выбора x_0, x, p и n.

2. В случае $x_0=0$ получаем из (5.4) формулу Маклорена:

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+2}(0; x) \quad (5.13)$$

с остаточным членом в форме Лагранжа:

$$R_{n+1}(0; x)=\frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$$

или в форме Коши:

$$R_{n+1}(0;x)=\frac{f^{(n+1)}(\Theta x)}{n!}(1-\Theta)^n x^{n+1}.$$

3. Теорема 5.3 представляет собой в сущности уточнение теоремы Лагранжа 3.3 и, в частности, формулы конечных приращений (3.4) для того случая, когда функция $f(x)$ и ее производные $f'(x),\ldots,f^{(n)}(x)$ непрерывны на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, а производная $f^{(n+1)}(x)$ хотя бы существует на интервале $a<x<b$. При $n=0$ теорема 5.3 в точности переходит в теорему 3.3, а формулы (5.4) и (5.9) или (5.10) дают формулу (3.4). В отличие от теоремы 5.1, теорема 5.3 и соответствующие формулы (5.9), (5.10), (5.12), (5.13) имеют глобальный характер. Они позволяют дать глобальную оценку остаточного члена на всем интервале $a<x<b$ (не обязательно малом), а следовательно, они позволяют в определенных случаях приближенно вычислять значения функции $f(x)$, заменяя $f(x)$ ее многочленом Тейлора и оценивая получающуюся при этом погрешность по какой-либо из формул (5.9), (5.10), (5.12), (5.13). Для того чтобы такие вычисления можно было проводить с любой точностью, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось соотношение

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x_0;x)=0,\quad a<x<b, \tag{5.14}$$

позволяющее с любой сколь угодно малой погрешностью воспользоваться приближенным равенством $f(x)\approx T_n(x_0;x)$, $a<x<b$.

В связи с этим важное значение имеет следующая теорема.

Теорема 5.4. Пусть при $a\leqslant x\leqslant b$ функция $f(x)$ имеет производные всех порядков, которые равномерно ограничены, т. е. существует число $M>0$ такое, что $|f(x)|\leqslant M$ и $|f^{(n)}(x)|\leqslant M$, $n=1,2,\ldots$. Тогда для остаточного члена справедлива оценка

$$|R_{n+1}(x_0;x)|\leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \tag{5.15}$$

и, следовательно, выполняется соотношение (5.14).

Оценка (5.15) непосредственно вытекает из (5.9). Так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}=0$$

(докажите!), то получаем (5.14).

Укажем теперь ряд примеров, иллюстрирующих применение формулы Тейлора для приближенного выражения основных элементарных функций.

1. Для функции $y=e^x$, $x_0=0$ имеем

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+R_{n+1}, \qquad (5.16)$$

где $R_{n+1}=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}$. Если $|x|<a$, то в формуле (5.15) $M=e^a$ и неравенство

$$|R_{n+1}|\leqslant M\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

дает оценку погрешности приближенной формулы

$$e^x\approx 1+x+\dots+\frac{x^n}{n!}.$$

Например, для числа e справедлива формула

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\dots+\frac{1}{n!}+\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},$$

где $\frac{e^{\theta}}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}$. Исходя из этой формулы, возможно доказать иррациональность числа e.

2. Для функции $y=\sin x$, $x_0=0$ получаем

$$\sin x=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}+R_{2n+1}, \quad -\infty<x<+\infty,$$

где

$$|R_{2n+1}|\leqslant\frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad -\infty<x<+\infty.$$

Аналогично, для функции $y=\cos x$, $x_0=0$ имеем

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}+R_{2n+2}, \quad -\infty<x<+\infty,$$

где

$$|R_{2n+2}|\leqslant\frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}, \quad -\infty<x<+\infty.$$

3. Разложения для гиперболических функций $y=\operatorname{sh} x$ и $y=\operatorname{ch} x$ получаются на основании теоремы единственности 5.2 из формулы (5.16) для e^x и e^{-x} посредством простых алгебраических действий:

$$\operatorname{sh} x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})=x+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+0(x^{2n}),\quad x\to 0;$$

$$\operatorname{ch} x=\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})=1+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^{2n}}{(2n)!}+0(x^{2n+1}),\quad x\to 0.$$

4. Пусть $y=\ln(1+x)$, $x_0=0$. Имеем

$$y'=\frac{1}{1+x},\quad y''=-\frac{1}{(1+x)^2},\quad \ldots,\quad y^{(n)}=\frac{(1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n}.$$

Отсюда

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+R_{n+1}(x).$$

Докажем, что для любого x, $-1<x\leqslant 1$, в этой формуле $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0$. При $0\leqslant x\leqslant 1$ применяем формулу Лагранжа (5.9) и получаем

$$|R_{n+1}(x)|<\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}<\frac{1}{n+1}.$$

Пусть теперь $0<\delta<1$ и $-1<-\delta\leqslant x\leqslant 0$. Применяя формулу Коши (5.10), получаем

$$R_{n+1}(x)=(-1)^n\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n\frac{x^{n+1}}{1+\theta x}.$$

Так как $0<\frac{1-\theta}{1+\theta x}<1$, то

$$|R_{n+1}(x)|<\frac{\delta^{n+1}}{1+\theta x}<\frac{\delta^{n+1}}{1-\delta}.$$

В силу произвольности δ, $0<\delta<1$, утверждение доказано.

5. Биномиальная формула. Пусть $y=(1+x)^{\mu}$, $x_0=0$, $\mu\in R$. Тогда

$$y'=\mu(1+x)^{\mu-1},\ \ldots,\ y^{(n)}=\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)(1+x)^{\mu-n}$$

и получаем разложение

$$(1+x)^{\mu}=1+\mu x+\frac{\mu(\mu-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{\mu(\mu-1)\ldots(\mu-n+1)}{n!}x^n+$$

$$+R_{n+1}(x), \tag{5.17}$$

где

$$R_{n+1}(x)=\frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n)}{(n+1)!}(1+\Theta x)^{\mu-n-1}x^{n+1}$$

и

$$R_{n+1}(x)=o(x^n), \quad x\to 0.$$

Если $\mu=n$, $n\in\mathbf{N}$, то $R_{n+1}(x)=0$, а следовательно, формула (5.17) является обобщением формулы бинома Ньютона на произвольные показатели μ. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0, \quad -1<x<1$$

при произвольном $\mu\in R$.

Приведем еще пример применения формулы Тейлора для вычисления пределов (раскрытия неопределенностей). Пусть требуется найти предел

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{\sqrt{1-x}-\cos\sqrt{x}}.$$

Предварительно находим

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2), \quad x\to 0;$$

$$\sqrt{1-x}=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{8}+o(x^2), \quad x\to 0;$$

$$\cos\sqrt{x}=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{24}+o(x^2), \quad x\to 0.$$

Подставляя эти разложения, получаем

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)-1-x}{1-x-\frac{x^2}{8}+o(x^2)-1+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{24}+o(x^2)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}}{-\frac{x^2}{6}}=-3.$$

В заключение этого параграфа заметим, что принадлежность функции $y=f(x)$ к классу $C^\infty(|x-x_0|\leqslant\delta)$ сама по себе отнюдь не гарантирует выполнение равенства (5.14). Например, для введенной в §4 функции

$$y=f(x)=\begin{cases} e^{-1/x^2}, & x\neq 0;\\ 0, & x=0\end{cases}$$

имеем $f(x)\in C^{\infty}(-\infty,+\infty)$ и $f(o)=f^{(n)}(o)=0$ $n=1,2,\dots$ Следовательно, для нее $T_n(0;x)=0$, $R_{n+2}(0;x)=e^{-1/x^2}$ при $x\neq 0$, и соотношение (5.14) не выполняется.

Глава 3
НЕКОТОРЫЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§6. Исследование функций при помощи производных и построение графиков

Доказанные в §§4 и 5 теоремы дают твердую основу для исследования поведения функций во всей их области определения и построения графиков. При этом имеется в виду исследование характеристических, принципиальных черт в поведении функции и ее графика, а не построение графика по многим точкам, полученным путем кропотливых вычислений.

Теорема 6.1. Пусть функция $y=f(x)\in C[a,b]$ имеет производную хотя бы при $a<x<b$. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) $\forall\, x\in[a,b]: f(x)=\text{const}\Leftrightarrow \forall\, x\in(a,b): f'(x)=0$;

2) $f(x)$ неубывающая на $[a,b]\Leftrightarrow \forall\, x\in(a,b): f'(x)\geqslant 0$;
$f(x)$ невозрастающая на $[a,b]\Leftrightarrow \forall\, x\in(a,b): f'(x)\leqslant 0$;

3) $\forall\, x\in(a,b): f'(x)>0\Rightarrow f(x)$ — возрастающая на $[a,b]$; $\forall\, x\in(a,b): f'(x)<0\Rightarrow f(x)$ — убывающая на $[a,b]$.

\# 1. Если $f(x)=\text{const}$, то $\forall\, x\in(a,b): f'(x)=0$. Обратно, если $\forall\, x\in(a,b): f'(x)=0$, то по формуле Лагранжа

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)=0,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

и, следовательно, $f(x)=f(a)=\text{const}$, $a\leqslant x\leqslant b$.

2. Пусть $f(x)$ — неубывающая функция на $[a,b]$, $a<x_0<b$, $\Delta x>0$, $a<x_0+\Delta x<b$. Тогда

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\geqslant 0,$$

откуда следует, что предел этого отношения $f'(x_0)\geqslant 0$. Обратно, пусть $\forall\, x\in(a,b): f'(x)\geqslant 0$ и $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$. Тогда по формуле Лагранжа

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1)\geqslant 0. \qquad (6.0)$$

Для невозрастающей функции рассуждения аналогичны.

3. Если $\forall\, x\in(a,b): f'(x)>0$, то в (6.0) будет строгое неравенство. #

Замечание. Если, однако, $f(x)$ возрастает на $[a,b]$, то отсюда не следует, что $\forall\, x\in(a,b): f'(x)>0$. Пример: функция $y=x^3$, $-1\leqslant x\leqslant 1$, возрастает (докажите!), но $f'(0)=0$.

Пусть функция $y=f(x)$ определена при $|x-x_0|<\delta_1$, $\delta_1>0$. Точка x_0 называется *точкой максимума* для $f(x)$, если существует такое δ, $0<\delta\leqslant\delta_1$, что $f(x)\leqslant f(x_0)$ при $|x-x_0|<\delta$, т.е. $\Delta y\leqslant 0$ при $|\Delta x|<\delta$; x_0 — *точка минимума*, если $f(x)\geqslant f(x_0)$ при $|x-x_0|<\delta$, т.е. $\Delta y\geqslant 0$ при $|\Delta x|<\delta$; точки максимума и минимума вместе называются *точками экстремума*. В точке x_0 достигается *строгий максимум*, если $0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow f(x)<f(x_0)$, т.е. $\Delta y<0$ при $0<|\Delta x|<\delta$; *строгий минимум*, если $0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow f(x)>f(x_0)$, т.е. $\Delta y>0$ при $0<|\Delta x|<\delta$. В отличие от наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке экстремум является понятием локальным, относящимся к достаточно малой окрестности точки.

Теорема 6.2 (необходимое условие экстремума). Если x_0 — точка экстремума для функции $y=f(x)$ и существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0)=0$.

Если $|x-x_0|<\delta\Rightarrow f(x_0)\geqslant f(x)$, то $f(x_0)=\sup\{f(x): : x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta\}$. Следовательно, по теореме Ферма 4.1 $f'(x_0)=0$.

Замечания. 1. Точки x_0, в которых $f'(x_0)=0$, называются *стационарными*. Если x_0 — стационарная точка, то это еще не означает, что x_0 — точка экстремума. Пример: $y=x^3$, $x_0=0$.

2. Экстремумы непрерывных функций могут достигаться также в тех точках x_0, где $f'(x_0)$ не существует или $f'(x_0)=\infty$ (*критические точки*). Примеры: а) $y=|x|$, $x_0=0$; б) $y=\sqrt[3]{x^2}$, $x_0=0$.

Точка x_0 называется *точкой возрастания*, если $\exists\,\delta$, $0<\delta\leqslant\delta_1$, такое, что $x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow f(x)>f(x_0)$ и $x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow f(x)<f(x_0)$, т.е. $\Delta x\ \Delta y>0$ при $0<|\Delta x|<\delta$; x_0 — *точка убывания*, если $\exists\,\delta$, $0<\delta\leqslant\delta_1$, такое, что $x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow f(x)<f(x_0)$ и $x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow f(x)>f(x_0)$, т.е. $\Delta x\ \Delta y<0$ при $0<|\Delta x|<\delta$. Следует иметь в виду, что точки экстремума

возрастания и убывания в совокупности не исчерпывают всех возможностей локального поведения функции. Например, для дифференцируемой функции

$$y=f(x)=\begin{cases} x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0; \\ 0, & x=0 \end{cases}$$

точка $x_0=0$ не принадлежит ни к одному из этих типов (докажите!).

Теорема 6.3. Пусть функция $y=f(x)$ имеет производную $f'(x_0)\neq 0$. Тогда, если $f'(x_0)>0$, то x_0 — точка возрастания, если $f'(x_0)<0$, то x_0 — точка убывания.

Пусть $f'(x_0)>0$. Тогда $\exists\,\delta>0$ такое, что при $0<|\Delta x|<\delta$ имеем $\Delta y/\Delta x>0$, а это эквивалентно неравенству $\Delta x\,\Delta y>0$. Аналогично рассуждаем при $f'(x_0)<0$.

Теорема 6.4 (достаточное условие строгого экстремума по производной первого порядка). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна при $|x-x_0|<\delta$, $\delta>0$, и имеет производную хотя бы при $0<|x-x_0|<\delta$. Тогда, если производная $f'(x)$ при переходе через точку x_0 меняет знак с $+$ на $-$, то x_0 — точка строгого максимума; если $f'(x)$ меняет знак с $-$ на $+$, то x_0 — точка строгого минимума (рис. 6.1).

Перемена знака с $+$ на $-$ означает, например, что

$$x_0-\delta<x<x_0\Rightarrow f'(x)>0 \text{ и } x_0<x<x_0+\delta\Rightarrow f'(x)<0.$$

Пусть $\Delta x<0$, $x_0-\delta<x_0+\Delta x<x_0$. По теореме Лагранжа

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(c)\,\Delta x,\quad x_0+\Delta x<c<x_0,$$

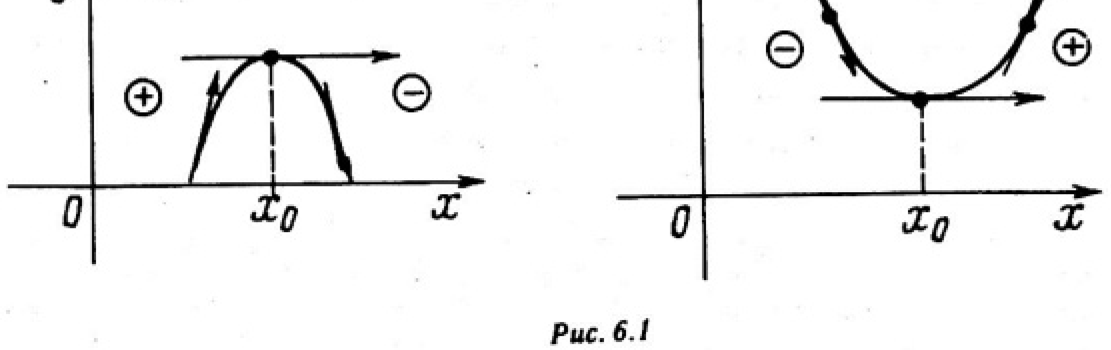


Рис. 6.1

и $\Delta y<0$, так как $f'(c)>0$, а $\Delta x<0$. Пусть $\Delta x>0$, $x_0<x_0+$ $+\Delta x<x_0+\delta$; тогда $\Delta y<0$, так как $f'(c)<0$, а $\Delta x>0$. Следовательно, x_0 — точка строгого максимума. Случай перемены знака с — на + рассматривается аналогично. #

Теорема 6.5 (достаточное условие строгого экстремума по производным высших порядков). Пусть функция $y=f(x)$ и ее производные $f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x)$ непрерывны при $|x-x_0|<\delta_1$, $\delta_1>0$, и существует производная $f^{(n)}(x_0)$, причем $f^{(k)}(x_0)=0$, $k=1, \ldots, n-1$, а $f^{(n)}(x_0)\neq 0$.

Тогда: 1) если $n=2m$ — четное число и $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 — точка строгого максимума; 2) если $n=2m$ и $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 — точка строгого минимума; 3) если $n=2m-1$ — нечетное число и $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 — точка убывания; 4) если $n=2m-1$ и $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 — точка возрастания.

Запишем приращение функции по формуле Тейлора:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}\Delta x^n+\beta(\Delta x)\Delta x^n=$$

$$=\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}+\beta(\Delta x)\right]\Delta x^n, \tag{6.1}$$

где $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\beta(\Delta x)=0$. Следовательно, существует δ, $0<\delta<\delta_1$, такое, что $|\beta(\Delta x)|<\frac{1}{2}\frac{|f^{(n)}(x_0)|}{n!}$, $|\Delta x|<\delta$, и выражение в квадратных скобках в (6.1) имеет знак $f^{(n)}(x_0)$ при $|\Delta x|<\delta$. При $0<|\Delta x|<\delta$ из (6.1) имеем, что $\Delta y\neq 0$ и знак Δy совпадает со знаком произведения $f^{(n)}(x_0)\,\Delta x^n$, $\operatorname{sgn}\Delta y=\operatorname{sgn}[f^{(n)}(x_0)\times$ $\times\Delta x^n]$. Если $n=2m$, то $\Delta x^n>0$ и $\operatorname{sgn}\Delta y=\operatorname{sgn}f^{(n)}(x_0)$; если при этом $f^{(n)}(x_0)<0$, то x_0 — точка строгого максимума, если $f^{(n)}(x_0)>0$, то x_0 — точка строгого минимума. В случае $n=$ $=2m-1$ имеем $\operatorname{sgn}\Delta x^n=\operatorname{sgn}\Delta x$; если при этом $f^{(n)}(x_0)<0$, то $\operatorname{sgn}\Delta y=-\operatorname{sgn}\Delta x$ и x_0 — точка убывания; если $f^{(n)}(x_0)>0$, то $\operatorname{sgn}\Delta y=\operatorname{sgn}\Delta x$ и x_0 — точка возрастания. #

Следствие (достаточное условие строгого экстремума по производной второго порядка). Если в условиях теоремы 6.5 $n=2$, $f'(x_0)=0$ и $f''(x_0)<0$, то x_0 — точка строгого максимума; если $f''(x_0)>0$, то x_0 — точка строгого минимума.

Пусть функция $y=f(x)\in C[a,b]$ имеет производную $f'(x)$ хотя бы при $x\in(a,b)$. Тогда по теореме Вейерштрасса 18.2 из ТЛКМА-1 существуют наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$. Отыскание этих значений можно производить по следующей схеме: 1) находим стационарные точки функции $f(x)$ на интервале (a,b) и значения $f(x)$ в этих точках; 2) вычисляем значения функции на концах $f(a)$ и $f(b)$; 3) сравнивая полученные значения, выбираем из них наибольшее и наименьшее. Пример: $y=\sin x+\cos x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, $y'=\cos x-\sin x$. Стационарная точка $x_0=\pi/4$, $f(\pi/4)=\sqrt{2}$, $f(0)=1$, $f(\pi)=-1$. Наибольшее значение $f(\pi/4)=\sqrt{2}$, наименьшее — $f(\pi)=-1$.

При исследовании функций, графиками которых являются неограниченные кривые, и построении таких кривых важную роль играют асимптоты графиков функций, т. е. такие прямые, к которым точки кривой при неограниченном удалении вдоль кривой сколь угодно тесно приближаются. Точнее, пусть функция $y=f(x)$ задана, например, при $a\leqslant x<+\infty$. Прямая L называется *асимптотой графика* Г *функции* $y=f(x)$, если

$$\lim_{|OM|\to\infty}\rho(M,L)=0, \tag{6.2}$$

где $M=(x,y)$ — точка графика, $|OM|=\sqrt{x^2+y^2}$ — расстояние точки M от начала координат, $\rho(M,L)$ — расстояние точки M до прямой L (рис. 6.2).

Рассмотрим сначала случай *наклонной асимптоты* L, уравнение которой можно записать в виде $y=kx+b$, $k=\operatorname{tg}\alpha\neq0$.

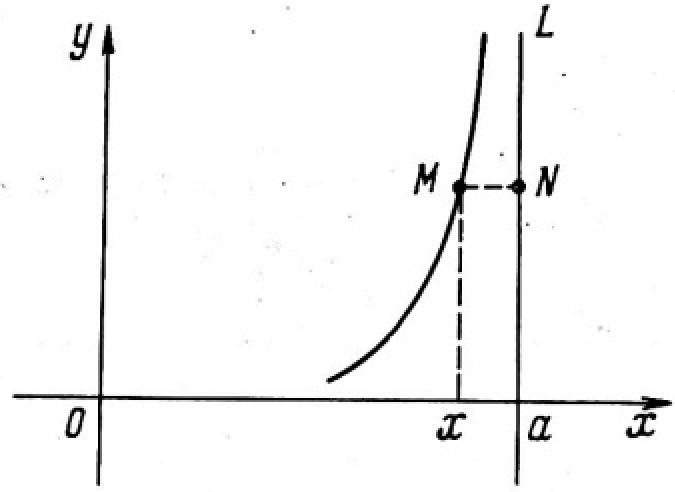


Рис. 6.2

Тогда $\rho(M\,L)=|M\,N|=|M\,P|\cos\alpha$, $0<|\cos\alpha|$, и $|O\,M|\geqslant x$, $|M\,N|\to 0\Leftrightarrow|M\,P|\to 0$, а значит, из условия (6.2) вытекает, что должно выполняться соотношение

$$\lim_{x\to+\infty}|f(x)-k\,x-b|=0. \tag{6.3}$$

Отсюда следует существование пределов:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \tag{6.4}$$

и

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-k\,x]=b. \tag{6.5}$$

Обратно, если существуют конечные пределы (6.4) и (6.5), то выполняется (6.3) и (6.2), т. е. существование конечных пределов (6.4) и (6.5) есть необходимое и достаточное условие существования наклонной асимптоты при $x\to+\infty$. Аналогичные условия получаются и при $x\to-\infty$.

В частности, если существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=b, \tag{6.6}$$

то это означает, что существует *горизонтальная* (т. е. параллельная оси абсцисс) *асимптота* $L:y=b$ при $x\to+\infty$; условия (6.4) и (6.5) в этом случае сводятся к одному условию (6.6).

Рассмотрим теперь случай *вертикальной асимптоты* $L:x=a$, т. е. асимптоты, параллельной оси ординат (рис. 6.3). В этом

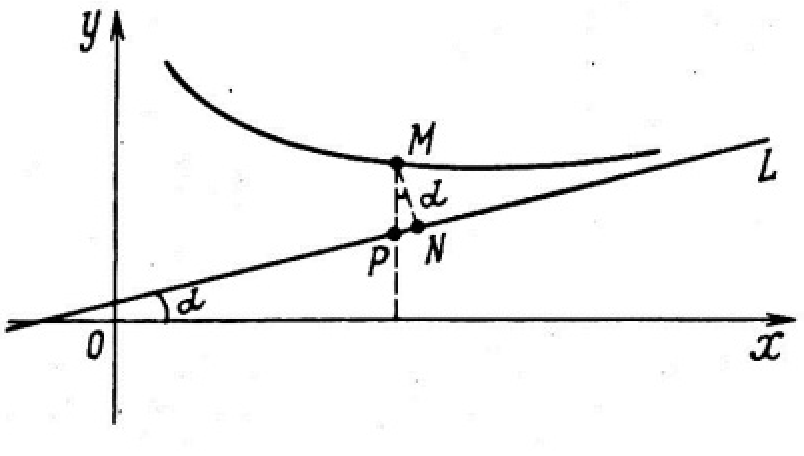


Рис. 6.3

случае $\rho(M, L)=|MN|=|x-a|\to 0$ и, следовательно, $|OM|\to \to+\infty$ только при условии $y\to\infty$, т. е. для функции $y=f(x)$ точка $x=a$ необходимо должна быть точкой бесконечного разрыва; это условие, очевидно, и достаточно для существования асимптоты $L: x=a$.

П р и м е р. Пусть дана рациональная функция

$$y=f(x)=\frac{(x+1)^3}{(x+1)^2}, \quad x\neq 1.$$

Имеем $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=+\infty$, а это означает, что прямая $x=1$ является (двусторонней) вертикальной асимптотой. Далее,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+1)^3}{x(x-1)^2}=1, \quad \lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x+1)^3}{(x-1)^2}-x\right]=5,$$

т.е. прямая $y=x+5$ является наклонной асимптотой при $x\to\pm\infty$.

Для нахождения точек экстремума выпишем производную

$$y'=\frac{(x+1)^2(x-5)}{(x-1)^3}.$$

Следовательно, стационарные точки $x_1=-1$ и $x_2=5$.

Остается наиболее трудный шаг — синтез полученной информации, результатом которого должен быть график функции. Для этой цели полезно полученные сведения свести в небольшую таблицу, разбив всю область определения $(-\infty, 1)\cup(1, +\infty)$ на интервалы монотонности.

x	y'	y
$-\infty<x<-1$	$+$	возрастает
$x=-1$	0	0 — точка возрастания
$-1<x<1$	$+$	возрастает
$x=1$		$+\infty$ — вертикальная асимптота
$1<x<5$	$-$	убывает
$x=5$	0	$27/2$ — точка минимума
$5<x<+\infty$	$+$	возрастает

График этой функции представлен на рис. 6.4.

Асимптоты, стационарные и критические точки дают основную информацию об общем характере поведения функции. Однако на рис. 6.4, строго говоря, остается нерешенным вопрос

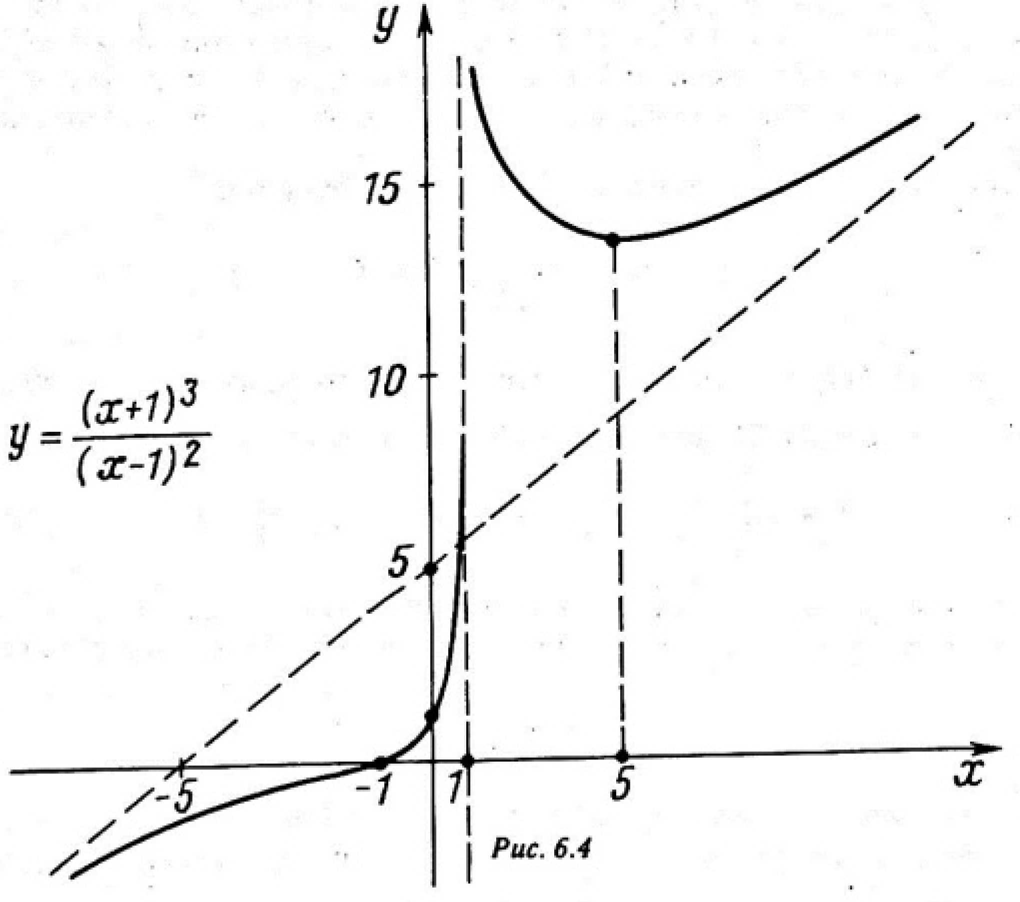


Рис. 6.4

о том, пересекает или нет график функции асимптоту. Для уточнения поведения функции и ее графика полезно еще определить интервалы выпуклости и вогнутости, а также точки перегиба.

Функция $y=f(x)$ называется *выпуклой* (или *выпуклой вниз*) на отрезке $a\leqslant x\leqslant b$, если для любых x_1 и x_2, $a\leqslant x_1<x_2\leqslant b$, ее график на интервале (x_1, x_2) расположен не выше хорды, проведенной через точки $M_1=(x_1, f(x_1))$ и $M_2=(x_2, f(x_2))$, т. е. если выполняется неравенство

$$\forall\, x \in [x_1, x_2] : f(x) \leqslant l(x), \tag{6.7}$$

где

$$l(x)=\frac{f(x_1)(x_2-x)+f(x_2)(x-x_1)}{x_2-x_1}. \tag{6.8}$$

Функция $y=f(x)$ называется *вогнутой* (или *выпуклой вверх*), если в приведенной формулировке заменяется только условие (6.7) на

$$\forall\, x \in [x_1, x_2] : f(x) \geqslant l(x). \tag{6.9}$$

Функция $y=f(x)$ называется *строго выпуклой*, если в приведенной формулировке заменяется только условие (6.7) на

$$\forall\, x \in (x_1, x_2): f(x) < l(x); \tag{6.10}$$

аналогично определяется *строгая вогнутость*.

Отрезки, на которых $f(x)$ выпукла, строго выпукла и т. д., называются соответственно отрезками выпуклости, строгой выпуклости и т. д.

Точка x_0, $a<x_0<b$, называется *точкой перегиба* функции $f(x)$, если $f(x)$ непрерывна в x_0, существует $f'(x_0)$ и x_0 является одновременно концевой точкой для отрезка строгой выпуклости и отрезка строгой вогнутости.

Теорема 6.6 (достаточное условие строгой выпуклости). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна при $a \leqslant x \leqslant b$ и имеет производную второго порядка $f''(x)$ хотя бы при $a<x<b$. Тогда если $f''(x)>0$, $a<x<b$, то $[a, b]$ — отрезок строгой выпуклости, если $f''(x)<0$, $a<x<b$, то $[a, b]$ — отрезок строгой вогнутости.

\# Пусть $a \leqslant x_1 < x < x_2 \leqslant b$, $\forall\, x \in (a, b): f''(x)>0$. Разность $l(x)-f(x)$ можно представить в виде

$$l(x)-f(x)=\frac{[f(x_2)-f(x)](x-x_1)-[f(x)-f(x_1)](x_2-x)}{x_2-x_1}.$$

По теореме Лагранжа 3.3 существуют точки α и β, $x_1<\alpha<x<<\beta<x_2$, такие, что

$$l(x)-f(x)=\frac{f'(\beta)(x_2-x)(x-x_1)-f'(\alpha)(x-x_1)(x_2-x)}{x_2-x_1}=$$

$$=\frac{[f'(\beta)-f'(\alpha)](x_2-x)(x-x_1)}{x_2-x_1}.$$

Применяя еще раз теорему Лагранжа к производной, находим, что существует точка γ, $\alpha<\gamma<\beta$, такая, что

$$l(x)-f'(x)=\frac{f''(\gamma)(\beta-\alpha)(x_2-x)(x-x_1)}{x_2-x_1}.$$

Так как по условию $f''(\gamma)>0$, то $l(x)-f(x)>0$. Случай $f''(x)<0$ рассматривается аналогично. \#

Пример. Функция $y=e^x$ строго выпукла при $-\infty<x<<+\infty$. Функция $y=\ln x$ строго вогнута при $0<x<+\infty$.

Замечание. Условие $y''>0$ достаточно, но не необходимо для строгой выпуклости. Пример: функция $y=f(x)=x^4$ строго выпукла при $-\infty<x<+\infty$ (докажите!), но $f''(0)=0$.

Теорема 6.7 (необходимое условие точки перегиба). Пусть в окрестности $|x-x_0|<\delta_1$, $\delta_1>0$, точки x_0 функция $y=f(x)$ имеет непрерывную производную второго порядка $f''(x)$. Тогда если x_0 — точка перегиба, то $f''(x_0)=0$.

Если $f''(x_0)>0$, то найдется δ, $0<\delta<\delta_1$, такое, что $f''(x)>0$ на отрезке $x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta$, который, следовательно, является отрезком строгой выпуклости. Если $f''(x_0)<0$, то точно так же заключаем, что $x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0+\delta$ — отрезок строгой вогнутости. Так как эти случаи исключены, то остается единственная возможность $f''(x_0)=0$.

Замечание. Кроме того, точки перегиба x_0 могут быть среди тех точек, где $f''(x)$ не существует (точки перегиба с вертикальной касательной, а также угловые точки кривых).

Пример: $y=f(x)=\sqrt[3]{x}$, $x_0=0$.

Теорема 6.8 (достаточное условие точки перегиба). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна в окрестности $|x-x_0|<\delta_1$, $\delta_1>0$, точки x_0 и имеет производную второго порядка $f''(x)$ хотя бы при $0<|x-x_0|<\delta_1$, причем $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку x_0. Тогда x_0 — точка перегиба.

Пусть, например, $f''(x)<0$ при $x_0-\delta<x<x_0$ и $f''(x)>0$ при $x_0<x<x_0+\delta$, $0<\delta<\delta_1$. По теореме 6.6 $f(x)$ строго вогнута на отрезке $x_0-\delta\leqslant x\leqslant x_0$ и строго выпукла на отрезке $x_0\leqslant\leqslant x\leqslant x_0+\delta$, а следовательно, x_0 — точка перегиба.

Пример. Возвращаясь к примеру рис. 6.4, находим после преобразований:

$$y''=\frac{24(x+1)}{(x-1)^4}.$$

Таким образом, единственная точка перегиба $x_0=-1$ совпадает со стационарной точкой возрастания, $(-\infty,-1)$ — интервал строгой вогнутости, $(-1,1)$ и $(1,+\infty)$ — интервалы строгой выпуклости, а следовательно, график на рис. 6.4 построен вполне правильно, он не может пересекать асимптоту.

Теорема 6.9 (достаточное условие точки перегиба по производным высших порядков). Пусть в окрестности $|x-x_0|<\delta_1$, $\delta_1>0$, точки x_0 функция $y=f(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $n\geqslant 3$ включительно, причем $f''(x_0)=\ldots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, а $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Тогда, если $n=2k+1$ — число нечетное, то x_0 — точка перегиба. Если же $n=2k$ — число четное и $f^{(n)}(x_0)>0$ или $f^{(n)}(x_0)<0$, то на некотором отрезке $|x-x_0|\leqslant\delta$, $0<\delta<\delta_1$, функция $y=f(x)$ соответственно строго выпуклая или строго вогнутая.

В условиях теоремы производную $f''(x)$ можно записать в некоторой окрестности x_0 по формуле Тейлора:

$$f''(x)=\frac{f^{(n)}[x_0+\Theta(x-x_0)]}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}, \tag{6.11}$$

причем в силу непрерывности $f^{(n)}[x_0+\Theta(x-x_0)]$ имеет тот же знак, что и $f^{(n)}(x_0)$. Из формулы (6.11) видно, что если $n=2k+1$ — число нечетное, то $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0, а следовательно, по теореме 6.8 x_0 — точка перегиба. Если же $n=2k$ — число четное, то $f''(x)$ сохраняет знак $f^{(n)}(x_0)$ и, следовательно, по теореме 6.6 функция $y=f(x)$ в окрестности x_0 либо строго выпуклая, либо строго вогнутая. #

Пример. Для функции $y=f(x)=x^4$ в точке $x_0=0$ имеем $f''(0)=0$, $f'''(0)=0$, $f^{IV}(0)=24>0$. Значит в окрестности x_0 эта функция выпуклая.

Общую схему исследования функций и построения графиков можно рекомендовать в следующем виде:

уточняем область определения функции и область значений. Выясняем, является ли она периодической, четной, нечетной;

находим асимптоты, наклонные, горизонтальные и вертикальные, а также находим односторонние пределы в тех точках, которые являются концами интервалов определения функции (например, для функции $y=x^x$ находим $\lim\limits_{x\to 0+} x^x=1$);

находим производную, стационарные и критические точки;

составляем таблицу поведения функции и производной;

вычерчиваем график;

если возникает необходимость, находим производную второго порядка и уточняем ход графика, учитывая точки перегиба, интервалы выпуклости и вогнутости.

§ 7. Принцип сжимающих отображений

Цель этого параграфа — познакомить читателя в простейшей ситуации с принципом сжимающих отображений, играющим важную роль в современном анализе. Слово «отображение» несколько удобнее в данном случае; оно употребляется как синоним слова «функция».

Пусть отображение $y=\varphi(x)$ задано на множестве $B\subset R$ и действует из B в B. Точка $x^*\in B$ называется *неподвижной точкой отображения* φ, если

$$x^*=\varphi(x^*). \tag{7.1}$$

Иначе говоря, неподвижная точка есть решение уравнения $x=\varphi(x)$.

Для отыскания решений уравнения $x=\varphi(x)$ часто с успехом применяется метод итераций, или метод последовательных приближений. Последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ называется *итерационной*, если

$$x_n=\varphi(x_{n-1}),\ n=1,2,\ldots,\ x_0\in B. \tag{7.2}$$

Лемма 7.1 Пусть B — компакт на R, или $B=R$. Если отображение $y=\varphi(x)$ непрерывно на B, и итерационная последовательность $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ сходится в R, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$, то $x^*\in B$, и x^* — неподвижная точка для φ.

Так как B — компакт и $x_n\to x^*$, то $x^*\in B$. В силу непрерывности $\varphi(x)$ на B имеем $\varphi(x_n)\to\varphi(x^*)$, а следовательно, переходя к пределу в (7.2), получаем (7.1).

Замечание. Итерационная последовательность для непрерывного отображения $y=\varphi(x)$ может расходиться. Рассмотрим, например, случай $\varphi(x)=x^2$ на R. Здесь имеются две неподвижные точки $\dot{x}_1=0$ и $\dot{x}_2=1$ (рис. 7.1).

Если $B=[0,\alpha]$, $0<\alpha<1$, то итерационная последовательность при любом $x_0\in B$ сходится к $\dot{x}_1=0$, и на рис. 7.1 указан геометрический смысл итераций. Если же $B=[0,\alpha]$, $\alpha>1$, $x_0>1$, то итерационная последовательность расходится, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

Принцип сжимающих отображений дает достаточное условие сходимости итерационных последовательностей, а стало быть, в силу леммы 7.1 и достаточное условие существования неподвижной точки. Отображение $y=\varphi(x)$ называется *сжимающим на* B (или просто *сжатием*), если существует такое число q, $0<q<1$, что

$$|\varphi(x'')-\varphi(x')|\leqslant q\,|x''-x'|\ \forall\, x',x''\in B, \tag{7.3}$$

причем q не зависит от x', x''. Число q в (7.3) называется *коэффициентом сжатия*.

Лемма 7.2. Если $y=\varphi(x)$ — сжатие на B, то $\varphi(x)$ непрерывно на B.

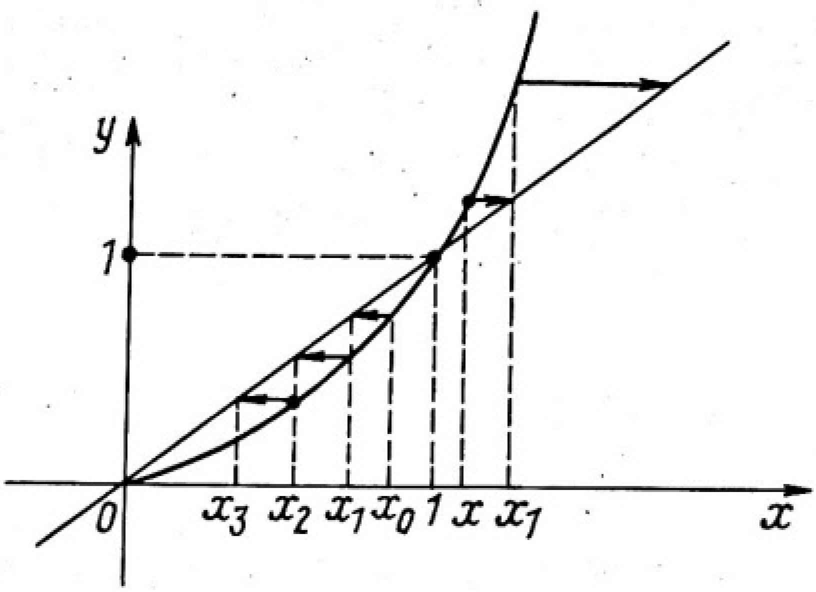


Рис. 7.1

\# В самом деле, при $x_n \to x$ имеем $|\varphi(x_n)-\varphi(x)| \leqslant q\,|x_n - x|$, а значит, и $\varphi(x_n) \to \varphi(x)$ \#.

Говорят, что $y=\varphi(x)$ отображает множество B *в себя,* если $\forall\, x \in B \Rightarrow \varphi(x) \in B$, т. е. иначе говоря, если образ $\varphi(B)$ принадлежит B, $\varphi(B) \subset B$.

Теорема 7.3 (принцип сжимающих отображений на R). Пусть B — компакт на R или $B=R$. Если $y=\varphi(x)$ — сжимающее отображение множества B в себя с коэффициентом сжатия q, $0<q<1$, то: 1) существует единственная неподвижная точка $x^* \in B$ для φ; 2) при любом $x_0 \in B$ итерационная последовательность 7.2 сходится к x^*; 3) справедлива оценка погрешности (или оценка скорости сходимости)

$$|x_n - x^*| \leqslant \frac{q^n}{1-q}\,|\varphi(x_0)-x_0|. \tag{7.4}$$

\# Докажем сначала утверждения 1) и 2). Пусть $x_0 \in B$, $x_n=\varphi(x_{n-1})$. Так как $\varphi(B) \subset B$, то $x_1=\varphi(x_0) \in B$, $x_2=\varphi(x_1) \in B, \ldots, x_n=\varphi(x_{n-1}) \in B$, $n=1,2,\ldots$ Обозначим $M=|x_1-x_0| = |\varphi(x_0)-x_0|$. Тогда $|x_2-x_1|=|\varphi(x_1)-\varphi(x_0)| \leqslant q\,|x_1-x_0| = Mq$, $|x_3-x_2|=|\varphi(x_2)-\varphi(x_1)| \leqslant q\,|x_2-x_1| = Mq^2$, и по индукции получаем

$$|x_{n+1}-x_n| \leqslant Mq^n, \quad n=0,1,\ldots \tag{7.5}$$

Докажем теперь, что $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность в R. Применяя неравенство треугольника и формулу суммы геометрической прогрессии, получаем из (7.5):

$$|x_{n+p}-x_n| \leqslant |x_{n+p}-x_{n+p-1}| + \dots + |x_{n+1}-x_n| \leqslant$$
$$\leqslant Mq^{n+p-1} + \dots + Mq^n = Mq^n(1+q+\dots+q^{p-1}) <$$
$$< \frac{Mq^n}{1-q}, \qquad (7.6)$$

т. е.

$$|x_{n+p}-x_n| < \frac{q^n}{1-q}|\varphi(x_0)-x_0|, \quad n, p \in N.$$

Так как $0<q<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$ и, следовательно, $\{x_n\}$ — фундаментальная последовательность. Согласно критерию Коши 9.2 из ТЛКМА-1 существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x^* \in R$. Если B — компакт, то $x^* \in B$.

Согласно лемме 7.2 $y=\varphi(x)$ непрерывна на B. Поэтому в (7.2) можно перейти к пределу, а это доказывает, что x^* — неподвижная точка для φ.

Докажем единственность. Пусть $\overset{\bullet}{x}_1$ и $\overset{\bullet}{x}_2$ — неподвижные точки для φ. Тогда

$$|\overset{\bullet}{x}_2-\overset{\bullet}{x}_1| = |\varphi(\overset{\bullet}{x}_2)-\varphi(\overset{\bullet}{x}_1)| \leqslant q\,|\overset{\bullet}{x}_2-\overset{\bullet}{x}_1|,$$

откуда следует, что $(1-q)|\overset{\bullet}{x}_2-\overset{\bullet}{x}_1|=0$. Так как $1-q\neq 0$, то $\overset{\bullet}{x}_2=\overset{\bullet}{x}_1$.

Остается доказать оценку (7.3). Так как $\lim\limits_{p\to\infty} x_{n+p}=x^*$, то она получается в пределе при $p\to\infty$ из (7.6). #

З а м е ч а н и е. Если B — отрезок, $B=\{x \in R : |x-c| \leqslant \delta\}$, $\delta>0$, то условие теоремы 7.3 о том, что φ — отображение B в себя, можно записать в виде $|\varphi(x)-c| \leqslant \delta \ \forall\, x \in B$.

С л е д с т в и е (г е о м е т р и ч е с к а я т р а к т о в к а т е о р е м ы 7.3). Пусть $a<b$, $B=[a,b]=[a_0,b_0]$ — отрезок, отображение $y=\varphi(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 7.3. Тогда последовательность образов отрезка $[a,b]$

$$[a_1,b_1]=\varphi([a_0,b_0]), \dots, [a_n,b_n]=\varphi([a_{n-1},b_{n-1}]), \dots$$

является последовательностью вложенных отрезков, длины которых стремятся к нулю, и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x^*$.

По лемме 7.2 $\varphi(x)$ непрерывно и, следовательно, образ отрезка $[a_{n-1}, b_{n-1}]$ есть отрезок $[a_n, b_n]$, $x_0 \in [a_0, b_0]$, $x_n \in [a_n, b_n]$, $[a_n, b_n] \subset [a_{n-1}, b_{n-1}]$. Далее, $a_n = \min\{\varphi(x) : a_{n-1} \leqslant x \leqslant b_{n-1}\}$, $b_n = \max[\varphi(x) : a_{n-1} \leqslant x \leqslant b_{n-1}\}$ и, следовательно $\exists x', x'' \in \in [a_{n-1}, b_{n-1}] : a_n = \varphi(x'), b_n = \varphi(x'')$. Но тогда

$$0 \leqslant b_n - a_n = |\varphi(x'') - \varphi(x')| \leqslant q\,|x'' - x'| \leqslant q(b_{n-1} - a_{n-1})$$

и

$$0 \leqslant b_n - a_n \leqslant q^n (b_0 - a_0) \to 0,$$

т. е. доказано, что последовательность $\{[a_n, b_n]\}$ имеет требуемые свойства. Так как $x_n \in [a_n, b_n]$ и $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x^*$, то и $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} b_n = x^*$. #

Говорят, что функция $y = f(x)$ удовлетворяет на B *условию Липшица с константой* $L > 0$, если

$$|\varphi(x'') - \varphi(x')| \leqslant L\,|x'' - x'|, \quad x', x'' \in B, \tag{7.7}$$

причем предполагается, что L зависит только от B и φ, но не от выбора точек x', x'' на B.

Лемма 7.4. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и дифференцируема хотя бы на интервале (a, b), причем производная $\varphi'(x)$ ограничена на (a, b), $\exists L > 0$: $|\varphi'(x)| \leqslant L \ \forall\, x \in (a, b)$. Тогда $y = \varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица на $[a, b]$ с константой L.

По теореме Лагранжа 3.3 для любых $x', x'' \in [a, b]$ существует точка $\xi \in (a, b)$ такая, что $\varphi(x'') - \varphi(x') = \varphi'(\xi)(x'' - x')$. Так как $|\varphi'(\xi)| \leqslant L$, то отсюда получаем (7.7).

Теорема 7.5. Пусть $B = R$ или $B = [a, b]$, функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет условию Липшица на B с константой L, $0 < L < 1$, и $\varphi(B) \subset B$. Тогда реализуемое ею отображение φ есть сжатие B в себя с коэффициентом сжатия L.

Это следует из неравенства Липшица (7.7).

Теорема 7.6. Пусть $B = R$ или $B = [a, b]$. Пусть функция $y = \varphi(x)$ непрерывна на B и дифференцируема хотя бы всюду внутри B, причем $|\varphi'(x)| \leqslant q$, $0 < q < 1$, и пусть в случае отрезка $\gamma = (a + b)/2$ выполнено неравенство $|\varphi(\gamma) - \gamma| \leqslant \frac{(1-q)(b-a)}{2}$. Тогда отображение φ есть сжатие B в себя с коэффициентом сжатия q.

Докажем, что $\varphi(B) \subset B$. В случае $B = R$ это очевидно. Если $B = [a, b]$, то образ $\varphi(B) = [\alpha, \beta]$ есть отрезок, причем

$$\alpha=\min\{\varphi(x): a\leqslant x\leqslant b\};\quad \beta=\max\{\varphi(x): a\leqslant x\leqslant b\}$$

и

$$\exists x', x''\in[a,b]: \varphi(x')=\alpha,\ \varphi(x'')=\beta.$$

Имеем

$$|\beta-\gamma|=|\varphi(x'')-\varphi(\gamma)+\varphi(\gamma)-\gamma|\leqslant|\varphi(x'')-\varphi(\gamma)|+|\varphi(\gamma)-\gamma|.$$

Применяя теорему Лагранжа, получаем

$$|\varphi(x'')-\varphi(\gamma)|=|\varphi'(\xi)(x''-\gamma)|\leqslant q\frac{b-a}{2}$$

и, следовательно,

$$|\beta-\gamma|\leqslant q\frac{b-a}{2}+(1-q)\frac{b-a}{2}=\frac{b-a}{2}.$$

Значит $\beta\in[a,b]$. Точно так же доказывается, что $\alpha\in[a,b]$. Применив теперь лемму 7.4 и теорему 7.5, закончим доказательство. #

Замечание. Последнее условие в этой теореме относительно $\varphi(\gamma)$ выполняется, в частности, тогда, когда заранее постулируется существование неподвижной точки γ, $\varphi(\gamma)=\gamma$, $\gamma=(a+b)/2$.

§ 8. Приближенное решение уравнений

Простейшие применения принцип сжимающих отображений находит при приближенном решении уравнений.

Пусть задана функция $f(x)$. Число c называется *корнем уравнения*

$$f(x)=0, \tag{8.1}$$

если при подстановке его в левую часть (8.1) получается численное тождество; иначе, всякое такое c называется *нулем* или *корнем функции* $f(x)$. Задача отыскания корней уравнений является с древних времен одной из основных в математике.

Уравнение (8.1) называется *алгебраическим*, если его левая часть есть многочлен:

$$f(x)=P_n(x)=a_0x^n+\ldots+a_{n-1}x+a_n=0,\quad a_0\neq 0. \tag{8.2}$$

При $n=1$ и $n=2$ хорошо известны формулы, выражающие все корни уравнения (8.2) через коэффициенты многочлена $P_n(x)$. При $n=3,4$ пользование такими формулами становится затруднительным, а при $n\geqslant 5$ доказано, что таких формул, пригодных для общего случая и использующих только алгебраические средства, просто не существует. Поэтому даже в случае алгебраического уравнения весьма важной является задача *приближенного нахождения корней,* или задача *численного решения уравнений с любой наперед заданной точностью.*

Число c называется *корнем кратности* r алгебраического уравнения (8.2), если многочлен $P_n(x)$ записывается в виде:

$$P_n(x)=(x-c)^r Q_{n-r}(x),$$

где $Q_{n-r}(c)\neq 0$; при $r=1$ корень c называется *простым.* Корень c имеет кратность $r\geqslant 1$ тогда и только тогда, если $P_n(c)=0$, $P'_n(c)=0, \ldots, P_n^{(r-1)}(c)=0$ и $P_n^{(r)}(c)\neq 0$. В самом деле,

$$P'_n(x)=(x-c)^{r-1}[r\,Q_{n-r}(x)+(x-c)\,Q'_{n-r}(x)]=(x-c)^{r-1}S_{n-r}(x),$$

где $S_{n-r}(c)=r\,Q_{n-r}(c)\neq 0$, и, следовательно, при каждом дифференцировании кратность корня уменьшается на единицу.

Число c называется *изолированным корнем* уравнения (8.1), если существует такое $\delta>0$, что $\forall\ x: 0<|x-c|<\delta \Rightarrow f(x)\neq 0$. Алгебраическое уравнение может иметь только изолированные корни.

Ниже будут описаны некоторые наиболее важные методы приближенного отыскания изолированных корней. Для неалгебраических уравнений корень c обычно называется *простым,* если $f(c)=0$, но $f'(c)\neq 0$. Во многих методах рассматриваются только простые корни.

Начальной стадией при численном решении уравнений является *отделение,* или *уединение корней,* т. е. отыскание таких отрезков $[a, b]$, на которых имеется один единственный (изолированный) корень c. Для функций $f(x)$ класса C^1 эта вспомогательная задача может быть решена методами §6 как задача выделения таких отрезков $[a, b]$, для которых $f(a)f(b)<0$ и производная $f'(x)>0$ или $f'(x)<0$ на (a, b), поскольку при этих условиях $f(x)$ имеет на (a, b) в точности один корень.

Для дальнейшего предпочтительно, чтобы отрезок уединения $[a, b]$ был возможно более коротким. Такое уточнение длины отрезка может быть выполнено *методом половинного деления,* или *методом вилки.* Пусть непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет единственный корень c, $a<c<b$, $f(a)f(b)<0$. Разделим отрезок $[a, b]$ пополам точкой $\gamma=(a+b)/2$. Если $f(\gamma)=0$, то $\gamma=c$, и процесс окончен. Если же $f(\gamma)\neq 0$, то в качестве отрезка половинной длины $[a_1, b_1]$ выбираем ту половину отрезка $[a, b]$, для которой $f(a_1)\,f(b_1)<0$ и, следовательно, $a_1<c<b_1$. Получаем последовательность вложенных отрезков $\{[a_n, b_n]\}$,

длины которых $b_n - a_n = (b-a)/2^n \to 0$, а так как все время $a_n < c < b_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$.

Замечание. Метод половинного деления можно рассматривать и как метод приближенного решения уравнения (8.1). За приближенное значение корня x_n можно, например, принять $x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$. Тогда погрешность на n-м шаге оценивается по формуле

$$|x_n - c| < \frac{b-a}{2^{n-1}}.$$

Для применения метода итераций в простейшей его форме необходимо уравнение (8.1) привести к виду, удобному для итераций,

$$x = \varphi(x), \tag{8.3}$$

положив, например, $\varphi(x) = f(x) + x$.

Теорема 8.1 (о методе простых итераций). Пусть c — единственный корень уравнения (8.3) на отрезке $B = [a, b]$, $a < c < b$, функция $\varphi(x)$ непрерывна на B и дифференцируема на (a, b), причем $|\varphi'(x)| \leqslant q$, $0 < q < 1$ $\forall\ x \in (a, b)$, $\varphi(B) \subset B$. Тогда итерационная последовательность $x_n = \varphi(x_{n-1})$, $n = 1, 2, \ldots$, $x_0 \in B$, сходится к c, $x_n \to c$, причем погрешность на n-м шаге оценивается по формуле

$$|x_n - c| \leqslant |\varphi(x_0) - x_0| \frac{q^n}{1-q}.$$

Согласно теореме 7.5 φ есть сжатие B в себя с коэффициентом сжатия q. Применяя теперь принцип сжимающих отображений (теорема 7.3), причем в силу единственности корня $x^* = c$, получаем все утверждения теоремы.

Широкое применение находят также различные варианты *метода Ньютона*, или *метода касательных*. Поясним этот метод геометрически (рис. 8.1). Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $B = [a, b]$, $f(a)\,f(b) < 0$, производные $f'(x)$, $f''(x)$ непрерывны на B и не обращаются в нуль, например, $f'(x) > 0$ и $f''(x) > 0$ $\forall\ x \in B$. Пусть $x_0 = b$ и $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение касательной в точке $[x_0, f(x_0)]$. В качестве x_1 принимаем точку пересечения касательной с осью Ox, тогда

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \tag{8.4}$$

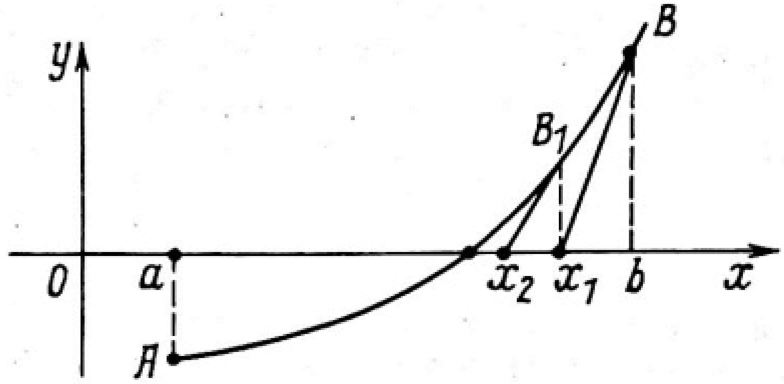


Рис. 8.1

Итерационную последовательность теперь строим по формуле ньютоновских итераций

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \tag{8.5}$$

т. е. принимаем

$$\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Уравнения $f(x)=0$ и $\varphi(x)=x$ эквивалентны.

Обозначим

$$m = \min\{|f(x)| : a \leqslant x \leqslant b\}, \quad M = \max\{|f(x)| : a \leqslant x \leqslant b\},$$

$$m_k = \min\{|f^{(k)}(x)| : a \leqslant x \leqslant b\}, \quad M_k = \max\{|f^{(k)}(x)| : a \leqslant x \leqslant b\}.$$

Теорема 8.2 (о методе Ньютона). Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $B=[a,b]$, $f(a)f(b)<0$, производные $f'(x)$, $f''(x)$ непрерывны на B, $f'(x)>0$, $f''(x)>0$ $\forall\, x \in B$. Тогда последовательность ньютоновских итераций (8.5), монотонно убывая, сходится к единственному корню c уравнения $f(x)=0$ на B. Далее, для любого q, $0<q<1$, существует такое $\delta>0$, что при $b-a<\delta$ отображение φ есть сжатие B в себя с коэффициентом сжатия q.

В условиях теоремы существует единственный корень c, $a<c<b$, уравнения $f(x)=0$ на B. Из формулы (8.4) видно, что $x_1 < x_0 = b$. Докажем, что $c < x_1$. Разложение по формуле Тейлора с центром x_0 для промежутка $a < x \leqslant x_0 = b$ применимо (см. теорему 5.3), и оно дает

$$0 = f(c) = f(x_0) + f'(x_0)(c - x_0) + \frac{f''(\gamma)}{2}(c - x_0)^2, \quad c < \gamma < x_0.$$

Так как последнее слагаемое справа положительно, то

$$f(x_0)+f'(x_0)(c-x_0)<0,$$

т. е.

$$c-x_0<-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}=x_1-x_0<0.$$

Таким образом, $a<c<x_1<x_0=b$ и, следовательно, имеет смысл вторая итерация, а с ней и все дальнейшие, и для всех справедливы неравенства:

$$a<c<x_n<x_{n-1}<x_0=b.$$

Убывающая последовательность $\{x_n\}$ ограничена снизу и поэтому сходится, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x^*$. По лемме 7.1, $x^*=c$.

Так как

$$\varphi'(x)=\frac{f''(x)}{[f'(x)]^2}f(x)$$

и по условию $m_1>0$, то

$$|\varphi'(x)|\leqslant\frac{M_2}{m_1^2}f(b).$$

При уменьшении отрезка B величина M_2 не возрастает, m_1 не убывает и, следовательно, дробь M_2/m_1^2 не возрастает. С другой стороны, $\lim\limits_{b-a\to 0} f(b)=0$, так как $f(c)=0$, $a<c<b$, и функция $f(x)$ непрерывна. Таким образом, для любого q, $0<q<1$, найдется такое $\delta>0$, что при $b-a<\delta$ будет $f(b)<q\dfrac{m_1^2}{M_2}$ и $|\varphi'(x)|\leqslant$ $\leqslant q$. Далее применяем теорему 7.6. #

Замечания. 1. В теореме 8.2 рассмотрен случай $f'>0$, $f''>0$ и при этом следует брать $x_0=b$, т. е. $f(x_0)f''(x_0)>0$. Такое же правило выбора точки x_0 остается в силе и для трех остальных возможных случаев: $f'>0, f''<0$; $f'<0, f''>0$; $f'<0, f''<0$.

2. Говорят, что метод Ньютона дает *приближения корня по избытку,* так как $x_n>c$.

В заключение рассмотрим геометрически *метод хорд,* или *метод пропорционального деления* (рис. 8.2). В условиях теоремы 8.2 пусть $z_0=a$ и

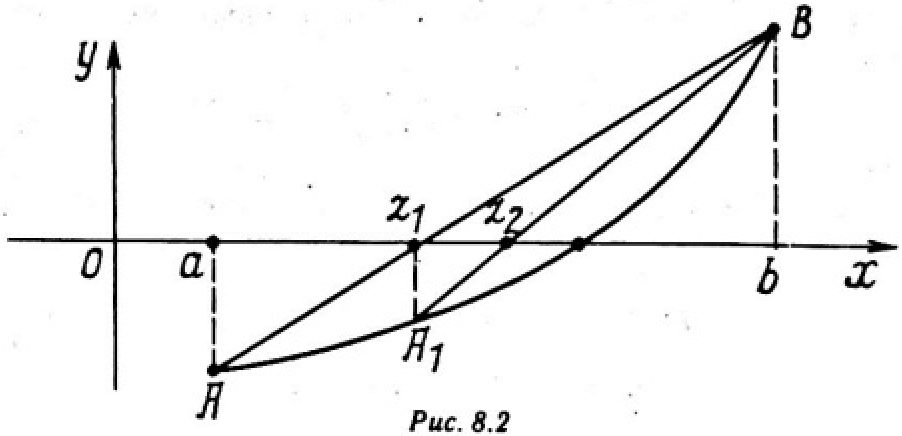


Рис. 8.2

$$\frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}=\frac{x-a}{b-a} -$$

уравнение хорды AB. В качестве z_1 принимаем точку пересечения хорды с осью Ox, тогда

$$z_1=z_0-\frac{b-z_0}{f(b)-f(z_0)}f(z_0). \tag{8.6}$$

Итерационную последовательность теперь строим по формуле

$$z_n=z_{n-1}-\frac{b-z_{n-1}}{f(b)-f(z_{n-1})}f(z_{n-1}), \tag{8.7}$$

т. е. принимаем $\varphi(x)=x-\frac{b-x}{f(b)-f(x)}f(x)$. Уравнения $f(x)=0$ и $\varphi(x)=x$ эквивалентны.

Теорема 8.3 (о методе хорд). Пусть выполнены условия теоремы 8.2. Тогда последовательность итераций (8.7), монотонно возрастая, сходится к единственному корню c уравнения $f(x)=0$ на B. Далее, для любого q, $0<q<1$, существует такое $\delta>0$, что при $b-a<\delta$ отображение φ есть сжатие B в себя с коэффициентом сжатия q.

\# Как и в теореме 8.2, число c — единственный корень уравнения $f(x)=0$ на B. Из формулы (8.6) видно, что $a=z_0<z_1$. Так как $f''(x)>0$, то $f(x)$ — выпуклая функция и, следовательно, $f(z_1)<0$, а значит, $z_1<c$. Таким образом, $a=z_0<z_1<c<b$ и имеет смысл вторая итерация, а с ней и все дальнейшие, причем $a=z_0<z_{n-1}<z_n<c<b$. Возрастающая последовательность $\{z_n\}$ ограничена сверху и, следовательно, сходится, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = x^*$. По лемме 7.1 $x^*=c$.

Вычисляя производную, после некоторых преобразований находим

$$\varphi'(x)=\frac{f(b)\,[f(b)-f(x)-f'(x)(b-x)]}{[f(b)-f(x)]^2}.$$

По формуле Тейлора существуют точки ξ и η, $x<\xi$, $\eta<b$, такие, что

$$f(b)-f(x)-f'(x)(b-x)=\frac{1}{2}f''(\xi)(b-x)^2,$$

$$f(b)-f(x)=f'(\eta)(b-x),$$

а следовательно,

$$\varphi'(x)=\frac{1}{2}\frac{f''(\xi)}{[f'(\eta)]^2}f(b)$$

и

$$|\varphi'(x)|\leqslant\frac{1}{2}\frac{M_2}{m_1^2}f(b).$$

Доказательство заканчивается как в теореме 8.2. #

Замечания. 1. Правило выбора точки z_0 в методе хорд состоит в том, что должно быть $f(z_0)\cdot f''(z_0)<0$.

2. Метод хорд дает приближения корня z_n *по недостатку*, т. е. $z_n<c$.

3. Иногда удобным оказывается *комбинированный метод хорд и касательных* (рис. 8.3), когда вычисления производятся

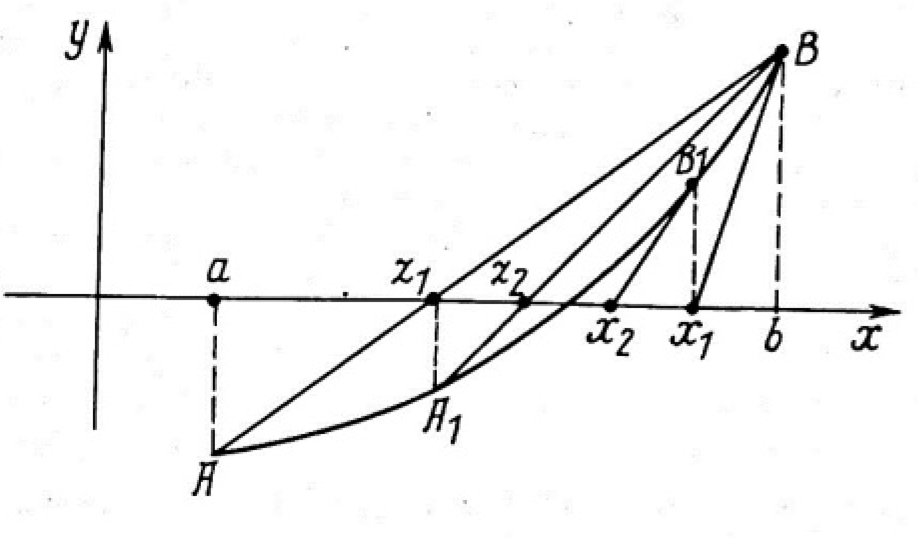


Рис. 8.3

параллельно по формулам (8.5) и

$$z_n = z_{n-1} - \frac{x_{n-1} - z_{n-1}}{f(x_{n-1}) - f(z_{n-1})} f(z_{n-1}). \tag{8.8}$$

При этом формула (8.8) получается применением формулы (8.7) к отрезку $[z_{n-1}, x_{n-1}]$.

Комбинированный метод дает двусторонние приближения z_n и x_n, $z_n < c < x_n$. Если принять в качестве приближенного значения корня число $\tilde{c}_n = \frac{z_n + x_n}{2}$,

то сразу получаем оценку погрешности

$$|\tilde{c}_n - c| \leqslant \frac{x_n - z_n}{2}.$$

§ 9. Дифференцирование вектор-функций

В механике и физике широко применяются вектор-функции вида:

$$\bar{r} = \bar{r}(t) : R \to R^3,$$

областью определения $\mathbf{D}(\bar{r})$ которых является некоторое множество действительных чисел $\mathbf{D}(\bar{r}) \subset R$, например отрезок $\mathbf{D}(\bar{r}) = \{t \in R : \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, а значениями являются (свободные) трехмерные (или двумерные) векторы $\bar{a} \in R^3$, (или $\bar{a} \in R^2$). Пользуясь прямоугольной системой координат $Oxyz$ с ортами осей $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, вектор $\bar{a}$ можно записать в виде:

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k},$$

где числа a_x, a_y, a_z суть координаты вектора $\bar{a}$.

Из векторной алгебры известны линейные действия над векторами: умножение вектора на число, сложение и вычитание векторов; известны скалярное $\bar{a} \cdot \bar{b}$ и векторное $\bar{a} \times \bar{b}$ произведения двух векторов, а также смешанное $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ и двойное векторное $\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c})$ произведения трех векторов. Метрика в евклидовом векторном пространстве R^3 вводится при помощи понятия *нормы*, или *длины вектора* $\bar{a}$

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}, \tag{9.1}$$

которая имеет три характерных свойства нормы (ср. § 3 из ТЛКМА-1):

а) $\|\bar{a}\| \geqslant 0$, причем $\|\bar{a}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$ — положительная определенность нормы;

б) $\|\lambda\bar{a}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{a}\|$, $\lambda \in R$ — однородность;

в) $\|\bar{a}+\bar{b}\| \leqslant \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|$ — неравенство треугольника.

Важное значение имеют также неравенства Коши-Буняковского:

$$|\bar{a}\cdot\bar{b}| \leqslant \|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|, \quad \|\bar{a}\times\bar{b}\| \leqslant \|\bar{a}\|\cdot\|\bar{b}\|.$$

Свойства a—b вытекают непосредственно из (9.1), а неравенства Коши-Буняковского — из определений скалярного и векторного произведений. *Метрика,* или *расстояние между двумя векторами,* вводится по формуле:

$$\rho(\bar{a}, \bar{b}) = \|\bar{a} - \bar{b}\|.$$

Таким образом, пространство R^3 трехмерных векторов, пространство R^2 двумерных векторов и пространство R^1 одномерных векторов на прямой являются простейшими примерами *нормированных векторных* (или линейных) пространств (НЛП). При этом каждый вектор $\bar{a} \in R^3$ можно отождествить с упорядоченной тройкой чисел (его координат) $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, каждый вектор $\bar{a} \in R^2$ — с двойкой чисел $\bar{a} = (a_x, a_y)$, а каждый вектор $\bar{a} \in R^1$ — с его единственной координатой a_x. Поэтому R^1 отождествляется с уже известным нам числовым нормированным пространством (ЧНП) $R^1 = R$, R^2 является двумерным НЛП, а R^3 — трехмерным НЛП.

Точные определения многомерных НЛП будут даны позднее.

Всякую вектор-функцию можно записать в виде линейной комбинации трех базисных векторов $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, коэффициентами которой служат три числовые, или скалярные, функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$:

$$\bar{r}(t) = x(t)\,\bar{i} + y(t)\,\bar{j} + z(t)\,\bar{k}, \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta. \tag{9.2}$$

В механике обычно в качестве параметра t фигурирует время, но с математической точки зрения это вовсе не обязательно. Наглядное представление о поведении вектор-функции (9.2) можно получить, изображая $\bar{r}(t)$ для различных значений t как радиус-вектор, приложенный всегда в начале координат. При этом конец вектора $\bar{r}(t)$ опишет в пространстве некоторую линию, называемую *годографом вектор-функции* $\bar{r}(t)$ (рис. 9.1). Если, скажем, $\forall\, t \in [\alpha, \beta]: z(t) = 0$, то $\bar{r}(t)$ — плоская вектор-функция, ее годограф — плоская кривая, расположенная в плоскости Oxy.

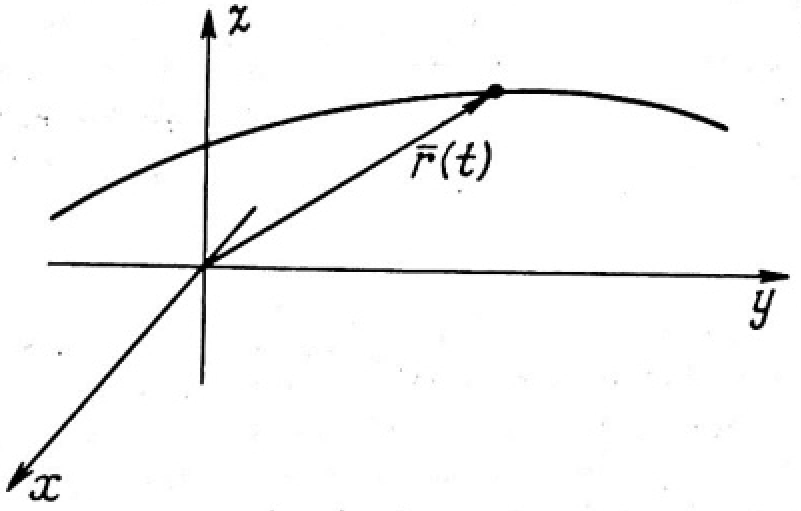


Рис. 9.1

Задача данного параграфа — распространить на вектор-функции операции и основные теоремы дифференциального исчисления.

Последовательность векторов $\{\bar r_k\}_{k=1}^{\infty}$ — это вектор-функция, областью определения которой является весь натуральный ряд чисел $k \in \mathbf{N}$. Задание последовательности векторов эквивалентно заданию трех (или двух — в плоском случае) координатных последовательностей $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\bar r_k = x_k\bar i + y_k\bar j + z_k\bar k$. Вектор $\bar a$ называется пределом последовательности векторов $\{\bar r_k\}$

$$\lim_{k\to\infty} \bar r_k = \bar a, \tag{9.3}$$

если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такой номер n_0, что при всех $k > n_0$ выполняется неравенство для нормы $\|\bar r_k - \bar a\| < \varepsilon$. Из определения нормы вытекает, что

$$|x_k - a_x| \leqslant \|\bar r_k - \bar a\|,\ |y_k - a_y| \leqslant \|\bar r_k - \bar a\|,\ |z_k - a_z| \leqslant \|\bar r_k - \bar a\|,$$

и вместе с тем

$$\|\bar r_k - \bar a\| \leqslant \sqrt{3}\max\{|x_k - a_x|,\ |y_k - a_y|,\ |z_k - a_z|\}.$$

В силу этих неравенств одно векторное равенство (9.3) эквивалентно трем скалярным:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = a_x, \ \lim_{k\to\infty} y_k = a_y, \ \lim_{k\to\infty} z_k = a_z.$$

Пусть вектор-функция $\bar{r} = \bar{r}(t)$ определена на отрезке $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, $\alpha < t_0 < \beta$. Вектор $\bar{a}$ называется пределом вектор-функции $\bar{r}(t)$ при $t \to t_0$

$$\lim_{t\to t_0} \bar{r}(t) = \bar{a}, \tag{9.4}$$

если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при $0 < |t - t_0| < \delta$ выполняется неравенство для нормы $\|\bar{r}(t) - \bar{a}\| < \varepsilon$. Если вектор-функция $\bar{r}(t)$ определена при помощи трех координатных функций в виде $\bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k}$, то одно векторное равенство (9.4) эквивалентно трем скалярным:

$$\lim_{t\to t_0} x(t) = a_x, \ \lim_{t\to t_0} y(t) = a_y, \ \lim_{t\to t_0} z(t) = a_z;$$

это доказывается точно так же, как для последовательности векторов. Вектор-функция $r(t)$ называется непрерывной в точке t_0, $\alpha \leqslant t_0 \leqslant \beta$, если

$$\lim_{t\to t_0} \bar{r}(t) = \bar{r}(t_0).$$

При этом в случаях $t_0 = \alpha$ и $t_0 = \beta$ подразумеваются односторонние пределы. Непрерывность на отрезке определяется как и для скалярных функций.

С необходимыми изменениями свойства пределов и непрерывных скалярных функций переносятся на вектор-функции. Это следует из того, что при их выводе мы опираемся только на три свойства нормы, а эти свойства в НЛП R^3 те же, что и в ЧНП R. В частности, если

$$\lim_{t\to t_0} \bar{r}(t) = \bar{a}, \quad \lim_{t\to t_0} \bar{s}(t) = \bar{b},$$

то

$$\lim_{t\to t_0} \bar{r}(t)\bar{s}(t) = \bar{a}\bar{b}, \ \lim_{t\to t_0} \bar{r}(t)\times\bar{s}(t) = \bar{a}\times\bar{b}, \ \lim_{t\to t_0} \|\bar{r}(t)\| = \|\bar{a}\|,$$

т. е. если существуют пределы векторов $\bar{r}(t)$ и $\bar{s}(t)$, то можно переходить к пределу в скалярном и векторном произведениях этих векторов, а также под знаком нормы.

Докажем первое из этих равенств. Вектор-функции, имеющие предел, ограничены $\|\bar r(t)\| \leqslant A$, $\|\bar s(t)\| \leqslant B$, $A>0$, $B>0$, и следовательно, по неравенствам треугольника и Коши-Буняковского

$$|\bar r\cdot\bar s-\bar a\cdot\bar b| = |(\bar r-\bar a)\bar s+\bar a(\bar s-\bar b)| \leqslant \|\bar r-\bar a\|\cdot\|\bar s\| +$$
$$+\|\bar a\|\cdot\|\bar s-\bar b\| \leqslant B\,\|\bar r-\bar a\|+A\,\|\bar s-\bar b\|.$$

Теперь по данному $\varepsilon>0$ найдем такое $\delta>0$, что $\|\bar r-\bar a\|<\frac{\varepsilon}{2B}$ и $\|\bar s-\bar b\|<\frac{\varepsilon}{2A}$ при $0<\|t-t_0\|<\delta$. Тогда $|\bar r\cdot\bar s-\bar a\cdot\bar b|<\varepsilon$, и первое равенство доказано. Второе доказывается аналогично. Третье следует из первого, так как $\|\bar r\|=\sqrt{\bar r\bar r}$. #

Следовательно, скалярное и векторное произведения двух непрерывных вектор — функций являются непрерывными функциями, причем первое — скалярной, а второе — векторной.

Приращению $\Delta t=t-t_0$ параметра t соответствует приращение вектор-функции

$$\Delta\bar r(t_0)=\bar r(t_0+\Delta t)-\bar r(t_0),$$

являющееся вектором и направленное параллельно хорде (или секущей) годографа. Если существует предел

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\bar r(t_0)}{\Delta t}=\bar r'(t_0)=\frac{d\bar r}{dt}, \qquad (9.5)$$

то он называется *производной вектор-функции в точке* t_0 (рис. 9.2). Так как

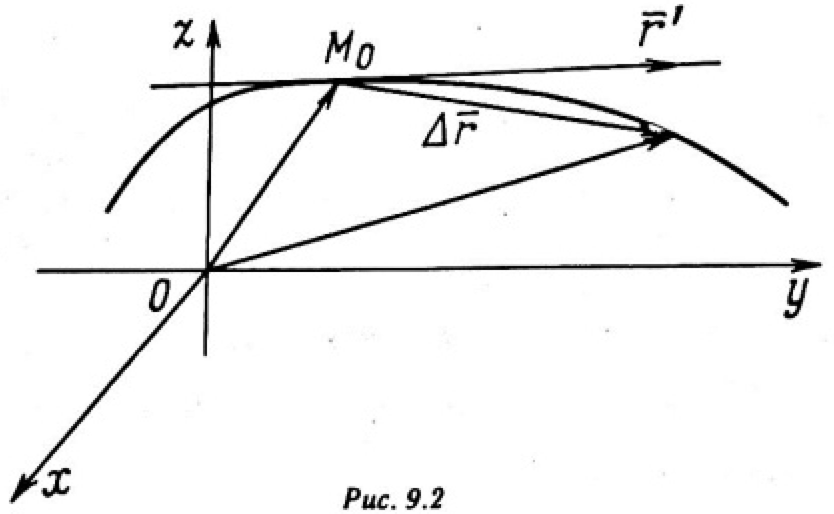


Рис. 9.2

$$\Delta \bar r(t_0)=\Delta x(t_0)\bar i+\Delta y(t_0)\bar j+\Delta z(t_0)\bar k,$$

то после перехода к пределу получаем

$$\frac{d\bar r(t_0)}{dt}=\frac{dx(t_0)}{dt}\bar i+\frac{dy(t_0)}{dt}\bar j+\frac{dz(t_0)}{dt}\bar k, \tag{9.6}$$

т. е. для нормы вектора $\bar r(t_0)$ имеем формулу

$$\left\|\frac{d\bar r(t_0)}{dt}\right\|=\sqrt{\left(\frac{dx(t_0)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy(t_0)}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz(t_0)}{dt}\right)^2}. \tag{9.7}$$

В §2 было дано определение касательной к кривой как предельного положения хорды, или секущей. Сохраняя это определение и для пространственной кривой или годографа, видим из формул (9.5) — (9.7), что вполне определенная касательная к годографу вектор-функции $\bar r(t)$ в точке $M_0=\bar r(t_0)$ существует всякий раз, когда существует отличная от нуля производная $\bar r(t_0)\neq 0$, т. е. если выполняется условие

$$[x'(t_0)]^2+[y'(t_0)]^2+[z'(t_0)]^2>0. \tag{9.8}$$

Годограф вектор-функции называется *гладким*, если в каждой точке существует непрерывная производная $\bar r(t)\neq 0$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. Из формул (9.6) и (9.7) видно также, что если параметр t есть время, то производная $\bar r'(t)=\bar v(t)$ является вектором скорости движения точки $\bar r(t)$ *вдоль* годографа.

Вектор-функция $\bar r(t)$ называется *дифференцируемой в точке* t_0, если ее приращение при достаточно малых Δt можно представить в виде суммы

$$\Delta \bar r(t_0)=\bar a\Delta t+\bar o(\Delta t)=\bar a\Delta t+\bar\alpha(\Delta t)|\Delta t|,\quad |\Delta t|<\delta, \tag{9.9}$$

векторной линейной формы $\bar a\Delta t$ от Δt и б. м. высшего порядка $\bar o(\Delta t)=\bar\alpha(\Delta t)|\Delta t|$ при $\Delta t\to 0$. При этом векторные символы $\bar o$ и $\bar O$ определяются как и для скалярных функций, но с привлечением нормы вместо абсолютной величины. Например, символ $\bar o(\Delta t)$, $\Delta t\to 0$ означает, что существует б. м. вектор-функция $\bar\alpha(\Delta t)$, $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\bar\alpha(\Delta t)=\bar o$, такая, что $\bar o(\Delta t)=\bar\alpha(\Delta t)|\Delta t|$, $\Delta t\to 0$; $\bar O(\Delta t)$, $\Delta t\to 0$, означает, что $\exists M>0,\ \delta>0:\|\bar O(\Delta t)\|\leqslant\leqslant M|\Delta t|,\ |\Delta t|<\delta$.

Линейная по Δt векторная форма

$$d\bar{r}=\bar{a}\Delta t=(a_x\bar{i}+a_y\bar{j}+a_z\bar{k})\Delta t=a_x\Delta t\bar{i}+$$
$$+a_y\Delta t\bar{j}+a_z\Delta t\bar{k} \qquad (9.10)$$

называется *дифференциалом вектор-функции* $\bar{r}(t)$ *в точке* t_0. Необходимое условие дифференцируемости состоит в том, что вектор-функция $\bar{r}(t)$ должна быть непрерывной в точке t_0; это следует из (9.9). Вектор-функция $\bar{r}(t)$ дифференцируема в точке t_0 тогда и только тогда, если существует производная $\bar{r}'(t_0)$, причем $\bar{a}=\bar{r}'(t_0)$.

Полагая в (9.10) $\Delta t=dt$, получаем равенства

$$d\bar{r}=\bar{a}\,dt,\quad \frac{d\bar{r}}{dt}=\bar{a}=\bar{r}'(t_0),$$

из которых видно, что дифференциал вектор-функции в точке t_0 есть вектор, направленный так же, как и производная $\bar{a}$, по касательной к годографу в точке $M_0=\bar{r}(t_0)$, причем норма дифференциала пропорциональна $|dt|$.

Правила дифференцирования распространяются на вектор-функции с необходимыми изменениями. В частности,

1) $(\bar{r}_1+\bar{r}_2)'=\bar{r}_1'+\bar{r}_2'$;

2) $(f\bar{r})'=f'\bar{r}+f\bar{r}'$;

3) $(\bar{r}_1\cdot\bar{r}_2)'=\bar{r}_1'\cdot\bar{r}_2+\bar{r}_1\cdot\bar{r}_2'$;

4) $(\bar{r}_1\times\bar{r}_2)'=\bar{r}_1'\times\bar{r}_2+\bar{r}_1\times\bar{r}_2'$.

\# Для доказательства, например 2, заметим, что

$$\Delta(f\bar{r})=f(t_0+\Delta t)\,\bar{r}(t_0+\Delta t)-f(t_0)\,\bar{r}(t_0)=$$
$$=\Delta f(t_0)\cdot\bar{r}(t_0+\Delta t)+f(t_0)\,\Delta\bar{r}(t_0).$$

Разделив на Δt и переходя к пределу с учетом непрерывности $\bar{r}(t)$, получим 2. #

Поскольку комплексные числа $z\in C$ также являются векторами на комплексной плоскости C, комплексные функции действительного переменного вида

$$f: R\to C$$

можно рассматривать как вектор-функции. Они имеют действительную и мнимую части:

$$f(t)=u(t)+i\,v(t). \qquad (9.11)$$

Годограф функции (9.11) — это кривая на плоскости C комплексного переменного $z=x+iy$, задаваемая двумя действительными координатными функциями $x=u(t)$, $y=v(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

Число $a+ib\in C$ называется пределом функции (9.11) при $t\to t_0$

$$\lim_{t\to t_0} f(t)=a+ib, \tag{9.12}$$

если $\forall\,\varepsilon>0\ \exists\delta>0: 0<|t-t_0|<\delta \Rightarrow |f(t)-a-ib|<\varepsilon$. Нормой здесь является модуль комплексного числа. Непрерывность в точке t_0 означает, что

$$\lim_{t\to t_0} f(t)=f(t_0)=u(t_0)+iv(t_0). \tag{9.13}$$

Одно комплексное равенство (9.12) или (9.13) эквивалентно двум действительным:

$$\lim_{t\to t_0} u(t)=a,\quad \lim_{t\to t_0} v(t)=b.$$

Производная комплексной функции определяется как предел отношения

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f(t_0)}{\Delta t}=f'(t_0)=u'(t_0)+iv'(t_0).$$

Функция $f(t)$ дифференцируема в точке t_0, если приращение при достаточно малых Δt можно представить в виде суммы:

$$\Delta f(t_0)=(a+ib)\Delta t+0(\Delta t)=(a+ib)\Delta t+$$
$$+\alpha(\Delta t)|\Delta t|,\quad \Delta t\to 0$$

комплексной линейной формы $df=(a+ib)\Delta t$ и б.м. высшего порядка $o(\Delta t)=\alpha(\Delta t)|\Delta t|$, $\Delta t\to 0$. При этом $f'(t_0)=a+ib$ — производная в точке t_0.

В частности, в §5 (формула (5.6) из ТЛКМА-1) показательная функция $e^{i\omega t}$, $\omega\in R$, была определена формулой Эйлера

$$e^{i\omega t}=\cos\omega t+i\sin\omega t.$$

Дифференцируя правую часть, получаем отсюда

$$(e^{i\omega t})'=-\omega\sin\omega t+i\omega\cos\omega t=$$
$$=i\omega(\cos\omega t+i\sin\omega t)=i\omega e^{i\omega t},$$

т. е. правило дифференцирования для комплексной показательной функции остается тем же самым, как и для действительной. Аналогично обстоит дело и для других комплексных функций действительного переменного.

Пример. Докажите формулы:

$$\operatorname{sh}(i\,\omega\,t)=i\sin\omega\,t,\quad \operatorname{ch}(i\,\omega\,t)=\cos\omega\,t;$$

$$[\operatorname{sh}(i\,\omega\,t)]'=i\,\omega\operatorname{ch}(i\,\omega\,t),\quad [\operatorname{ch}(i\,\omega\,t)]'=i\,\omega\operatorname{sh}(i\,\omega\,t).$$

§ 10. Элементы теории кривых

Под словом *кривая,* или *линия* (или еще *путь*) мы будем подразумевать совокупность трех действительных функций:

$$\Gamma: x=\varphi(t),\quad y=\Psi(t),\quad z=\varsigma(t),\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta, \tag{10.1}$$

заданных на отрезке $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$. Иначе говоря, мы отождествляем кривую с вектор-функцией:

$$\Gamma: \bar{r}(t)=\varphi(t)\bar{i}+\Psi(t)\bar{j}+\varsigma(t)\bar{k},\quad \alpha\leqslant t\leqslant\beta, \tag{10.2}$$

отображающей отрезок $[\alpha,\beta]$ на некоторое множество в пространстве R^3, называемое *носителем кривой* (иногда под словом кривая подразумевают носитель кривой). Запись (10.1) называется *параметрическим заданием кривой,* запись (10.2) — *векторным заданием кривой.* В случае плоской кривой $\forall\, t\in[\alpha,\beta]$: $:\varsigma(t)=0$ так называемое *явное задание плоской кривой* в виде функции $y=f(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, означает просто, что $x=t$, $y=f(t)$, $z=0$, $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$.

Строго говоря, следует еще условиться, в каких случаях две вектор-функции $\bar{r}(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ и $\bar{\rho}(\tau)$, $a\leqslant\tau\leqslant b$, следует считать за одну и ту же кривую. Можно, например, принять, что если замена переменного $t=g(\tau)$, $g(a)=\alpha$, $g(b)=\beta$ осуществляется при помощи строго монотонной функции $g(\tau)$ класса C^1 (допустимая замена), то оба эти пути представляют одну и ту же кривую.

Кривая (10.2) (или (10.1)) называется *простой,* если на интервале (α,β) она не имеет точек самопересечения, т. е. если из неравенств $\alpha<t_1<t_2<\beta$ следует, что $\bar{r}(t_1)\neq\bar{r}(t_2)$. Кривая называется *замкнутой,* если $\bar{r}(\alpha)=\bar{r}(\beta)$; просто кривую, не являющуюся замкнутой, часто называют *дугой.* Если $\bar{r}(t)\in C[\alpha,\beta]$, то кривая Γ называется *непрерывной;* если $\bar{r}(t)\in C^1[\alpha,\beta]$, то получаем *кривую класса* C^1, $\Gamma\in C^1$.

Кроме точек самопересечения, кривые класса C^1 могут иметь особые точки и другого характера. В §9 было показано, что кривая (10.2) имеет определенную касательную в точке $M_0=$ $=(\varphi(t_0),\ \Psi(t_0),\ \varsigma(t_0))$, $\alpha<t_0<\beta$, если выполнено условие

$$[\varphi'(t_0)]^2+[\Psi'(t_0)]^2+[\varsigma'(t_0)]^2>0, \tag{10.3}$$

причем уравнение касательной в этом случае записывается в виде:

$$\frac{x-\varphi(t_0)}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-\Psi(t_0)}{\Psi'(t_0)}=\frac{z-\varsigma(t_0)}{\varsigma'(t_0)}. \tag{10.4}$$

Такие точки на кривой, где $\varphi'(t_0)=\Psi'(t_0)=\varsigma'(t_0)=0$ и запись (10.4) становится непригодной, причисляются к числу особых точек. Простая кривая Γ называется *гладкой*, если она принадлежит классу C^1 и для нее всюду выполняется условие (10.3). Простая непрерывная кривая Γ называется *кусочно-гладкой*, если ее можно представить как объединение конечного числа гладких дуг, последовательно соединяющихся в концевых точках.

Пусть заданы две гладкие плоские кривые в явном виде:

$$\Gamma_1: y=f(x), \quad a\leqslant x\leqslant b;$$

$$\Gamma_2: y=g(x), \quad a\leqslant x\leqslant b.$$

Если $y_0=f(x_0)=g(x_0)$, то в точке $M_0=(x_0, f(x_0))$ имеет место *пересечение кривых*. Если же, кроме того, $y_0'=f'(x_0)=g'(x_0)$, то имеет место соприкосновение кривых. Точнее, если $(x_0)=$ $=g(x_0)$, $f'(x_0)=g'(x_0), \ldots, f^{(n)}(x_0)=g^{(n)}(x_0)$, а $f^{(n+1)}(x_0)\neq$ $\neq g^{(n+1)}(x_0)$, то имеет место *соприкосновение порядка* n, т. е. разность $f(x)-g(x)$ есть б. м. порядка $n+1$ при $x\to x_0$.

Прямая линия может иметь, вообще говоря, с кривой $y=f(x)$ соприкосновение не выше порядка 1. Найдем сейчас *соприкасающуюся окружность* $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$, имеющую с заданной кривой $y=f(x)$ соприкосновение порядка 2. Так как для окружности при дифференцировании получаем:

$$2(x-\alpha)+2(y-\beta)y'=0;$$

$$1+(y')^2+(y-\beta)y''=0,$$

то для определения величин α, β, R имеем систему уравнений:

$$(x_0-\alpha)^2+(y_0-\beta)^2=R^2;$$

$$(x_0-\alpha)+(y_0-\beta)y_0'=0;$$

$$1+(y_0')^2+(y_0-\beta)y_0''=0,$$

где положено $y_0=f(x_0)$, $y_0'=f'(x_0)$, $y_0''=f''(x_0)$. Решая эту систему, находим:

$$\alpha=x_0-\frac{1+(y_0')^2}{y_0''}y_0';$$

$$\beta=y_0+\frac{1+(y_0')^2}{y_0''};$$

$$R=\frac{\left[1+(y_0')^2\right]^{3/2}}{|y_0''|}. \qquad (10.5)$$

Центр соприкасающейся окружности (α, β) называется еще *центром кривизны*, а радиус R — *радиусом кривизны*.

Если кривая задана параметрически в виде $x=\varphi(t)$, $y=\Psi(t)$, то, подставляя выражения для $y_0'=\Psi'/\varphi'$ и $y_0''=\dfrac{\Psi''\varphi'-\Psi'\varphi''}{(\varphi')^3}$, получаем:

$$\alpha=x_0-\frac{(\varphi')^2+(\Psi')^2}{\Psi''\varphi'-\Psi'\varphi''}\Psi'';$$

$$\beta=y_0+\frac{(\varphi')^2+(\Psi')^2}{\Psi''\varphi'-\Psi'\varphi''}\varphi';$$

$$R=\frac{\left[(\varphi')^2+(\Psi')^2\right]^{3/2}}{|\Psi''\varphi'-\Psi'\varphi''|}, \qquad (10.6)$$

где все производные берутся в точке t_0.

Пусть для кривой (10.2) $M=\bar r(\alpha)$ — начальная и $N=\bar r(\beta)$ — концевая точки,

$$\tau=\{t_j\}_{j=0}^{n}=\{\alpha=t_0<t_1<\ldots<t_n=\beta\} —$$

некоторое разбиение отрезка $[\alpha, \beta]$ на части длины $\Delta t_j=t_j-t_{j-1}$. Тогда сумма

$$\sigma(\tau)=\sum_{j=1}^{n}\left\|\bar r(t_j)-\bar r(t_{j-1})\right\|$$

представляет собой длину ломаной линии с вершинами $M_j=\bar r(t_j)$, вписанной в кривую $\Gamma=MN$. Точная верхняя грань $s(\Gamma)=$

$=\sup\sigma(\tau)$, взятая по всем возможным разбиениям τ, называется *длиной дуги* Γ. Всегда $0<s(\Gamma)\leqslant+\infty$. Если $s(\Gamma)<+\infty$, то кривая Γ называется *спрямляемой*.

Лемма 10.1. Если $\Gamma=MN$ — гладкая кривая, то выполняются неравенства:

$$\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}(\beta-\alpha)\leqslant s(\Gamma)\leqslant\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}(\beta-\alpha), \quad (10.7)$$

где m_1, m_2, m_3 и M_1, M_2, M_3 — соответственно наименьшие и наибольшие значения $|\varphi'(t)|$, $|\Psi'(t)|$, $|\varsigma'(t)|$ на отрезке $[\alpha,\beta]$.

В самом деле, из теоремы Лагранжа имеем:

$$\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})=\varphi'(\xi_j)(t_j-t_{j-1}),\ t_{j-1}<\xi_j<t_j,$$

и, следовательно,

$$m_1(t_j-t_{j-1})\leqslant|\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})|\leqslant M_1(t_j-t_{j-1}). \quad (10.8)$$

Так как

$$|\bar{r}(t_j)-\bar{r}(t_{j-1})|=$$

$$=\sqrt{[\varphi(t_j)-\varphi(t_{j-1})]^2+[\Psi(t_j)-\Psi(t_{j-1})]^2+[\varsigma(t_j)-\varsigma(t_{j-1})]^2},$$

то из неравенств (10.8) и аналогичных неравенств для функций Ψ и ς получаем (10.7). #

Следствие. Гладкая или кусочно-гладкая кривая спрямляема.

Лемма 10.2 (аддитивность длины дуги). Пусть $\Gamma=\Gamma_1+\ldots+\Gamma_k$ — простая кусочно-гладкая кривая, $\Gamma_1,\ldots,\Gamma_k$ — гладкие кривые, последовательно примыкающие в концевых точках, на которые разбивается Γ. Тогда $s(\Gamma)=\sum\limits_{j=1}^{k}s(\Gamma_j)$.

При доказательстве ограничимся случаем $k=2$, $\Gamma_1=MN$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, $\Gamma_2=NP$, $\beta\leqslant t\leqslant\delta$ (рис. 10.1). Пусть τ_1 и τ_2 — произвольные разбиения Γ_1 и Γ_2 соответственно. Тогда $\tau=\tau_1\cup\tau_2$ — разбиение Γ, $\alpha\leqslant t\leqslant\delta$, а следовательно,

$$\sigma(\tau_1)+\sigma(\tau_2)\leqslant s(\Gamma),$$

откуда следует, что

$$s(\Gamma_1)+s(\Gamma_2)\leqslant s(\Gamma). \quad (10.9)$$

С другой стороны, для любого $\varepsilon>0$ существует, по определению точной верхней грани, разбиение τ отрезка $[\alpha,\delta]$, для

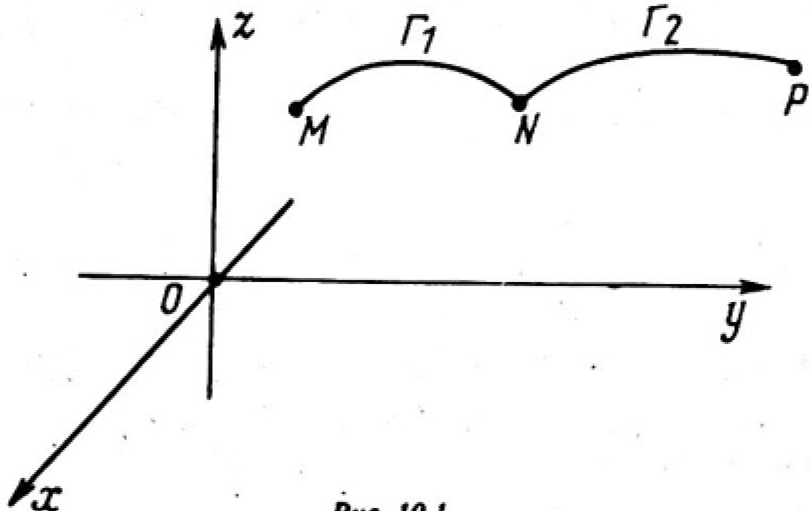


Рис. 10.1

которого $\sigma(\tau)>s(\Gamma)-\varepsilon$. Добавляя в разбиение τ, если нужно, еще точку N, получаем разбиения τ_1 и τ_2 для кривых Γ_1 и Γ_2 соответственно. При этом

$$\sigma(\tau_1)+\sigma(\tau_2)\geqslant\sigma(\tau)>s(\Gamma)-\varepsilon.$$

Отсюда следует, что

$$s(\Gamma_1)+s(\Gamma_2)>s(\Gamma)-\varepsilon,$$

а значит

$$s(\Gamma_1)+s(\Gamma_2)\geqslant s(\Gamma). \tag{10.10}$$

Сопоставляя неравенства (10.9) и (10.10), получаем $s(\Gamma_1)+ +s(\Gamma_2)=s(\Gamma)$. В общем случае $k\geqslant 1$ рассуждения аналогичны. #

Пусть на гладкой кривой $\Gamma=AB:\bar r=\bar r(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, $A= =\bar r(\alpha)$, $B=\bar r(\beta)$, отмечена промежуточная точка $M=\bar r(t)$. Полагая $s(t)$ равной длине дуги AM, получаем длину дуги AM как неотрицательную функцию от t, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$.

Теорема 10.3. Для гладкой кривой Γ длина дуги $s=s(t)$ есть строго возрастающая функция от t, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$, класса $C^1[\alpha,\beta]$ с производной

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\psi'(t)]^2+[\chi'(t)]^2}. \tag{10.11}$$

Пусть $\alpha\leqslant t_0<t_0+\Delta t\leqslant\beta$. В силу леммы 10.2, приращение $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$ есть длина дуги $\Gamma[t_0,t_0+\Delta t]$,

а значит, $\Delta s>0$, и возрастание доказано. Далее, применяя оценки типа (10.7), получаем:

$$\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}\Delta t\leqslant\Delta s\leqslant\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2}\Delta t$$

или

$$\sqrt{m_1^2+m_2^2+m_3^2}\leqslant\frac{\Delta s}{\Delta t}\leqslant\sqrt{M_1^2+M_2^2+M_3^2},\quad |\Delta t|<\delta. \qquad (10.12)$$

Так как при $\Delta t\to 0$ имеем $\lim\limits_{\Delta t\to 0} m_1=\lim\limits_{\Delta t\to 0} M_1=|\varphi'(t_0)|$ и аналогичные равенства для $|\Psi'(t_0)|$ и $|s'(t_0)|$, то из (10.12) в пределе получаем (10.11). #

Замечания. 1. Выражение

$$ds=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\Psi(t)]^2+[\xi'(t)]^2}\,dt \qquad (10.13)$$

часто называют *элементом длины дуги*, или *дифференциалом длины дуги*; его можно записать в виде:

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2+dz^2}. \qquad (10.14)$$

Сравнивая формулы (10.14) и (9.6), видим, что

$$\frac{ds}{dt}=\left\|\frac{d\bar r}{dt}\right\|,\quad ds=\|d\bar r\|, \qquad (10.15)$$

т. е. норма дифференциала вектор-функции $\bar r(t)$ есть дифференциал длины дуги ее годографа.

2. В случае плоской кривой из (10.13) и (10.14) получаем

$$ds=\sqrt{dx^2+dy^2}=\sqrt{[\varphi'(t)]^2+[\Psi'(t)]^2}\,dt. \qquad (10.16)$$

В случае явного задания кривой $\Gamma: y=f(x)$ это выражение дает

$$ds=\sqrt{1+[f'(x)]^2}\,dx. \qquad (10.17)$$

Для теоретических целей особенно удобен выбор в качестве параметра длины дуги $t=s$. В этом случае получаем $\bar r=\bar r(s)$ — *естественное задание кривой*. Вектор

$$\frac{d\bar r}{ds}=\bar\tau \qquad (10.18)$$

теперь единичный (см. (10.15)), $\bar{\tau}^2=1$, и он называется *единичным вектором касательной.* Применяя правила дифференцирования, получаем

$$\bar{\tau}\frac{d\bar{\tau}}{ds}=0,\ \frac{d\bar{r}}{dt}=\frac{ds}{dt}\bar{\tau},\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\frac{d^2s}{dt^2}\bar{\tau}+\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\bar{\tau}}{ds}. \tag{10.19}$$

Умножая и применяя первое равенство (10.19), получаем

$$\bar{\tau}\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}=\frac{d^2s}{dt^2}. \tag{10.20}$$

Далее, из последнего равенства (10.19) имеем

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2\frac{d\bar{\tau}}{ds}=\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}-\frac{d^2s}{dt^2}\bar{\tau}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^4\left(\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right)^2=\left(\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)^2-\bar{\tau}\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}. \tag{10.21}$$

Применяя теперь известное из векторной алгебры тождество

$$(\bar{a}\times\bar{b})^2=\bar{a}^2\cdot\bar{b}^2-(\bar{a}\cdot\bar{b})^2,$$

из (10.21) получаем при $\bar{a}=\bar{\tau}=\frac{d\bar{r}}{dt}:\frac{ds}{dt},\ \bar{b}=\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}$

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^4\left(\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right)^2=\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)^2:\left(\frac{ds}{dt}\right)^2,$$

откуда находим

$$\left|\frac{d\bar{\tau}}{ds}\right|=K=\left|\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right|:\left|\frac{ds}{dt}\right|^3. \tag{10.22}$$

Вектор $d\bar{\tau}/ds$ ортогонален вектору $\bar{\tau}$, он определяет направление главной нормали к кривой, причем

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds}=K\bar{\nu}, \tag{10.23}$$

где $\bar{\nu}$ — *единичный вектор главной нормали,* $\bar{\nu}^2=1$, а величина $K=|d\bar{\tau}/ds|$ называется *кривизной кривой.* Для случая плоской кривой формула (10.22) дает

$$K=\frac{|\Psi''\varphi'-\varphi''\Psi'|}{\left[(\varphi')^2+(\Psi')^2\right]^{3/2}}=\frac{1}{R},$$

т. е. кривизна равна обратной величине радиуса кривизны, введенного в формуле (10.5) или (10.6). Кривизна характеризует степень отклонения кривой от касательной в окрестности фиксированной точки касания. Для окружности $K=1/R$, где R — радиус окружности.

Два вектора $\bar{\tau}$ и $\bar{\nu}$ определяют *соприкасающуюся плоскость*. В случае плоской кривой, расположенной в плоскости Oxy, соприкасающаяся плоскость совпадает с Oxy. Обозначим через

$$\bar{\beta}=\bar{\tau}\times\bar{\nu} \tag{10.24}$$

единичный вектор бинормали. Дифференцируя (10.24), получаем

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds}=\bar{\tau}\times\frac{d\bar{\nu}}{ds},$$

откуда следует, что $d\bar{\beta}/ds$ можно записать в виде

$$\frac{d\bar{\beta}}{ds}=-\chi\bar{\nu}, \tag{10.25}$$

причем величина χ называется *кручением кривой*, она характеризует степень отклонения кривой от соприкасающейся плоскости в окрестности фиксированной точки. Для плоской кривой $\chi=0$ во всех ее точках. Для произвольной кривой кручение выражается формулой

$$\chi=\left(\frac{d\bar{r}}{dt},\ \frac{d^2\bar{r}}{dt^2},\ \frac{d^3\bar{r}}{dt^3}\right):\left(\frac{d\bar{r}}{dt}\times\frac{d^2\bar{r}}{dt^2}\right)^2, \tag{10.26}$$

в числителе которой стоит смешанное произведение трех векторов (вывод формулы мы здесь опустим). Согласно формуле для кривизны (10.22) K всегда положительна, но знак кручения, определяемый формулой (10.26), имеет вполне определенный смысл: если $\chi>0$, то кривая закручивается как правая винтовая резьба, при $\chi<0$ — как левая.

Три единичных вектора $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$, $\bar{\beta}$ образуют *сопровождающий трехгранник кривой*, причем $\bar{\beta}=\bar{\tau}\times\bar{\nu}$, $\bar{\tau}=\bar{\nu}\times\bar{\beta}$, $\bar{\nu}=\bar{\beta}\times\bar{\tau}$.

Учитывая формулы (10.23), (10.25) и

$$\frac{d\bar{\nu}}{ds}=\frac{d\bar{\beta}}{ds}\times\bar{\tau}+\bar{\beta}\times\frac{d\bar{\tau}}{ds},$$

для производных трех векторов $\bar{\tau}$, $\bar{\nu}$ и $\bar{\beta}$ получаем *формулы Френе-Серре:*

$$\frac{d\bar{\tau}}{ds}=K\bar{\nu};\quad \frac{d\bar{\nu}}{ds}=\chi\bar{\beta}-K\bar{\tau};\quad \frac{d\bar{\beta}}{ds}=-\chi\bar{\nu}. \tag{10.27}$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава 1. Производные и дифференциалы 3

§1. Производная, дифференцируемость и дифференциал 3

§2. Производные и дифференциалы высших порядков 16

Глава 2. Основные теоремы 21

§3. Свойства дифференцируемых функций 21

§4. Раскрытие неопределенностей 26

§5. Формула Тейлора 32

Глава 3. Некоторые применения 41

§6. Исследование функций при помощи производных и построение графиков 41

§7. Принцип сжимающих отображений 51

§8. Приближенное решение уравнений 56

§9. Дифференцирование вектор-функций 63

§10. Элементы теории кривых 71