МИФИ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации

(часть 2)

Москва 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации

(часть 2)

Москва 2008

УДК 519.2(07)
ББК 22.17я7
М 54

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА: Методические рекомендации (часть 2). В 4-х частях. М.: МИФИ, 2008. 68 с.

Данная, 2-я часть методических рекомендаций продолжает исправленное издание (часть 1) [7] ранее опубликованных работ [3 — 6]. Настоящая работа является исправленным изданием работы [4] и содержит решения задач из § 3 и § 4 сборника задач [2]. Необходимые ссылки на теоретический материал (определения, теоремы и т.д.) приведены по учебнику: Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Агар, 2000.

Методические рекомендации предназначены для студентов, изучающих курс теории вероятностей и математической статистики в течение одного семестра, и посвящены разбору задач из книги: Полякова Е.И., Постникова Л.П. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: МИФИ, 2004. Указанные методические рекомендации будут полезны также преподавателям, ведущим практические занятия по теории вероятностей и математической статистике.

Составители: Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

3. ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНОЙ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. БИНОМИАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ (СХЕМА БЕРНУЛЛИ), РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПУАССОНА, ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ, ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ПРОИЗВОДЯЩАЯ ФУНКЦИЯ

Определение случайной величины, функции распределения, закон распределения дискретной случайной величины и примеры (см. [1], гл. 5, §§ 1, 2, 3), числовые характеристики случайной величины и их свойства (см. [1], гл. 6, §§ 1, 2, 3), производящая функция целочисленной случайной величины (см. [1], гл. 7, § 1). Необходимые сведения изложены в [2] в начале § 3 и в случае необходимости указаны в тексте решения задачи.

Задача 1

Монета бросается пять раз, $\mu_5(\omega)$ — число выпадений герба. Найти закон распределения случайной величины $\mu_5(\omega)$, функцию распределения, производящую функцию, среднее значение и дисперсию.

Решение

В данной задаче имеем 5 испытаний схемы Бернулли (испытание — бросание одной монеты), элементарные исходы — цепочки длины 5, состоящие из 1 и 0 (соответственно выпадение герба или решки). Тогда

$$\Omega = \left\{\omega : \omega = (a_1, a_2, \ldots, a_5),\ a_i = 0, 1;\ i = \overline{1,5}\right\}.$$

Для любого ω $\quad P(\omega)=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32}$ Определим $\mu_5(\omega)=\sum_{i=1}^{5} a_i$ — число выпадений герба при пяти бросаниях монеты. Согласно ([1], гл. 4, § 2, теорема 2.2) закон распределения дискретной случайной величины $\mu_5(\omega)$ с $p=q=\frac{1}{2}$ такой:

$$P\{\mu_5(\omega)=m\}=C_5^m\left(\frac{1}{2}\right)^m\left(\frac{1}{2}\right)^{5-m}=C_5^m\frac{1}{32}, \quad m=\overline{0,5}.$$

Найдем функцию распределения $F_{\mu_5}(x)=P\{\omega:\mu_5(\omega)<x\}$. Обозначим $A_x=\{\omega:\mu_5(\omega)<x\}$ тогда $F_{\mu_5}(x)=P(A_x)$

Разобьем все значения x $(-\infty<x<+\infty)$ на семь непересекающихся классов:

$$(-\infty,0],\quad (0,1],\quad (1,2],\quad (2,3],\quad (3,4],\quad (4,5],\quad (5,+\infty).$$

Функция распределения $F_{\mu_5}(x)$ меняется при переходе аргумента x из одного класса в другой, так как граничная справа точка является значением случайной величины $\mu_5(\omega)$. Тогда:

1) при $x\le 0$

$$A_x=\{\omega:\mu_5(\omega)<x\}=\varnothing \quad \text{и} \quad F_{\mu_5}(x)=P(\varnothing)=0;$$

2) при $0<x\le 1$

$$A_x=\{\omega:\mu_5(\omega)<x\}=\{\omega:\mu_5(\omega)<0\}\cup\{\omega:0\le\mu_5(\omega)<1\}=$$
$$=\{\varnothing\}\cup\{\omega=(0,0,0,0,0)\},$$

$$P\{\mu_5(\omega)=0\}=\frac{1}{32} \quad \text{и} \quad F_{\mu_5}(x)=P\{\mu_5(\omega)=0\}=\frac{1}{32};$$

3) при $1<x\le 2$

$$A_x=\{\omega:\mu_5(\omega)<x\}=\{\omega:\mu_5(\omega)<0\}\cup\{\omega:0\le\mu_5(\omega)<1\}\cup$$
$$\cup\{\omega:1\le\mu_5(\omega)<2\}=\{\varnothing\}\cup\left\{\omega:\sum_{i=1}^{5}a_i=0\right\}\cup\left\{\omega:\sum_{i=1}^{5}a_i=1\right\},$$

$$F_{\mu_5}(x)=P\{\mu_5(\omega)=0\}+P\{\mu_5(\omega)=1\}=\frac{1}{32}+\frac{5}{32}=\frac{3}{16};$$

4) при $2 < x \le 3$

$$A_x = \left\{ \omega : \sum_{i=1}^{5} a_i = 0, 1, 2 \right\},$$

$$F_{\mu_5}(x) = \sum_{m=0}^{2} P\{\mu_5(\omega) = m\} = \frac{3}{16} + \frac{10}{32} = \frac{1}{2};$$

5) при $3 < x \le 4$

$$A_x = \left\{ \omega : \sum_{i=1}^{5} a_i = 0, 1, 2, 3 \right\},$$

$$F_{\mu_5}(x) = \sum_{m=0}^{3} P\{\mu_5(\omega) = m\} = \frac{1}{2} + \frac{5}{16} = \frac{13}{16};$$

6) при $4 < x \le 5$

$$A_x = \left\{ \omega : \sum_{i=1}^{5} a_i = 0, 1, 2, 3, 4 \right\},$$

$$F_{\mu_5}(x) = \sum_{m=0}^{4} P\{\mu_5(\omega) = m\} = \frac{13}{16} + \frac{5}{32} = \frac{31}{32};$$

7) при $x > 5$

$$A_x = \{\omega : \mu_5(\omega) < x\} = \Omega \quad \text{и} \quad F_\mu(x) = P(\Omega) = 1.$$

Итак,

$$F_{\mu_5}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 1/32, & \text{если } 0 < x \le 1; \\ 3/16, & \text{если } 1 < x \le 2; \\ 1/2, & \text{если } 2 < x \le 3; \\ 13/16, & \text{если } 3 < x \le 4; \\ 31/32, & \text{если } 4 < x \le 5; \\ 1, & \text{если } x > 5. \end{cases}$$

График функции $F_{\mu_5}(x)$ приведен на рис. 1.

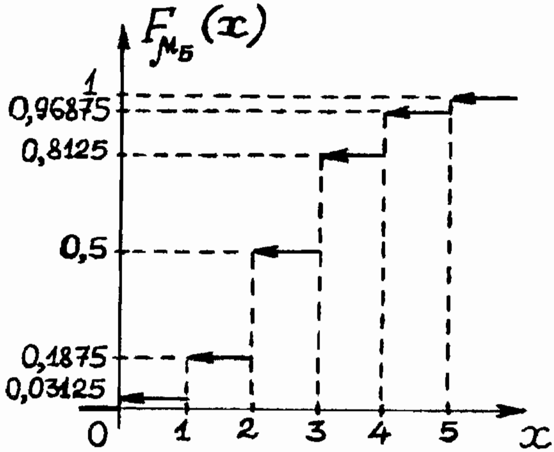


Рис. 1

Производящая функция

$$\varphi_{\mu_5}(z) = \sum_{m=0}^{5} z^m P\{\mu_5 = m\} = \sum_{m=0}^{5} z^m C_5^m \frac{1}{32} = \frac{1}{32}(z+1)^5 .$$

Математическое ожидание (среднее значение) и дисперсию μ_5 находим, используя производящую функцию $\varphi_{\mu_5}(z)$:

$$M\mu_5 = \sum_{m=0}^{5} mP\{\mu_5 = m\} = \sum_{m=0}^{5} mC_5^m \frac{1}{2^m}\frac{1}{2^{5-m}} = \varphi'_{\mu_5}(1) ,$$

$$D\mu_5 = M(\mu_5 - M\mu_5)^2 = \sum_{m=0}^{5} (m - \varphi'_{\mu_5}(1))^2 P\{\mu_5 = m\} =$$

$$= \varphi''_{\mu_5}(1) + \varphi'_{\mu_5}(1) - [\varphi'_{\mu_5}(1)]^2 .$$

Так как $\varphi'_{\mu_5}(z) = \frac{5}{32}(z+1)^4$ и $\varphi''_{\mu_5}(z) = \frac{5}{8}(z+1)^3$ то

$$M\mu_5 = \frac{5}{2}, \quad D\mu_5 = \frac{5}{4} .$$

Ответ

$$P\{\mu_5 = m\} = C_5^m \frac{1}{32}, \quad m = \overline{0,5};$$

$$\varphi_{\mu_5}(z) = \frac{1}{32}(z+1)^5, \quad M\mu_5 = \frac{5}{2}, \quad D\mu_5 = \frac{5}{4};$$

$$F_{\mu_5}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 0{,}03125, & \text{если } 0 < x \le 1; \\ 0{,}1875, & \text{если } 1 < x \le 2; \\ 0{,}5, & \text{если } 2 < x \le 3; \\ 0{,}8125, & \text{если } 3 < x \le 4; \\ 0{,}96875, & \text{если } 4 < x \le 5; \\ 1, & \text{если } x > 5. \end{cases}$$

Задача 2

Из урны, содержащей 5 белых и 5 черных шаров, извлекают наудачу n шаров. Найти наименьшее n, такое, что вероятность извлечь хотя бы один белый шар больше, чем 0,8.

Решение

Обозначим через ξ_n число белых шаров среди n взятых. Случайная величина ξ_n имеет гипергеометрическое распределение $G(N, M, n)$ с параметрами $N = 10$, $M = 5$. Тогда (см. [1], пример 1, с. 30)

$$P\{\xi_n = m\} = \frac{C_5^m C_5^{n-m}}{C_{10}^n}, \quad m = m_0, m_0 + 1, \ldots, m_1,$$

$$m_0 = \max(0{,}5 - 10 + n), \quad m_1 = \min(5, n).$$

Надо найти наименьшее натуральное число n, такое, что

$$P\{\xi_n \ge 1\} > 0{,}8.$$

Очевидно, что при $n > 5$ $P\{\xi_n \ge 1\} = 1$ (черных шаров в урне пять); поэтому будем рассматривать $n \le 5$ Событие $\{\xi_n = 0\}$ есть событие, противоположное событию $\{\xi_n \geq 1\}$, и поэтому можно искать наименьшее n, для которого $P\{\xi_n = 0\} < 0{,}2$. Событие $\{\xi_n = 0\}$ есть событие: «все взятые шары черные», и $P\{\xi_n = 0\} = C_5^n / C_{10}^n$.

При $n = 1$

$$P\{\xi_1 = 0\} = 5/10 = 1/2 > 0{,}2 .$$

При $n = 2$

$$P\{\xi_2 = 0\} = \frac{5 \cdot 4}{10 \cdot 9} = \frac{2}{9} > 0{,}2 .$$

При $n = 3$

$$P\{\xi_3 = 0\} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{10 \cdot 9 \cdot 8} = \frac{1}{12} < 0{,}2 .$$

Ответ

$n_{\min} = 3$.

Задача 3

В каждом разряде лотереи $N = 5000$ билетов, $M = 500$ выигрышей. Какое наименьшее число билетов n надо купить, чтобы вероятность хотя бы одного выигрыша была больше, чем 0,9? Сравнить результаты биномиального и пуассоновского распределений.

Решение

Обозначим ξ_n — число выигрышных билетов среди n взятых.

Пусть билеты берутся из разных разрядов лотереи, тогда вероятность успеха (взять выигрышный билет) каждый раз равна $\frac{M}{N}$, а невыигрышный — $(1 - M/N)$. Следовательно, в этом случае ξ_n имеет биномиальное распределение с $p = M/N$ и $q = 1 - M/N$, $P\{\xi_n = m\} = C_n^m p^m q^{n-m}$, $m = \overline{0, n}$. Как и в предыдущей задаче 2, надо найти $n_{\min}$ из условия, что $P\{\xi_n \geq 1\} > 0{,}9$. Перейдем к противоположному событию $\{\xi_n = 0\}$. Тогда $P\{\xi_n = 0\} = \left(1 - \frac{M}{N}\right)^n < 0{,}1$

откуда $n\ln\left(1-\frac{M}{N}\right)<\ln 0{,}1$ и $n=\left[-\ln 10/\ln\left(1-\frac{M}{N}\right)\right]+1$ ($[\alpha]$ — целая часть числа α).

При $N=5000$, $M=500$ получаем $n_{\min}=22$.

Если же M «мало» по сравнению с N и $n\frac{M}{N}$ «малое число», то распределение ξ_n можно заменить пуассоновским распределением (см. [1], гл. 4, § 3, теорема 3.1) с $\lambda=n\frac{M}{N}$ и тогда

$$P\{\xi_n=m\}\cong \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!},\quad m=0,\,1,\,\ldots;$$

n находим из неравенства $1-\mathrm{e}^{-n\frac{M}{N}}>0{,}9$, т.е. $\mathrm{e}^{-n\frac{M}{N}}<0{,}1$ и $n=\left[\frac{\ln 10}{M/N}\right]+1=24$.

Пусть теперь билеты берутся из одного разряда лотереи, тогда

$$P\{\xi_n=0\}=C_{N-M}^n/C_N^n=\frac{(N-M)(N-M-1)\ldots(N-M-n+1)}{N\quad\ (N-1)\quad\ldots\quad(N-n+1)}=$$

$$=\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{M}{N-1}\right)\ldots\left(1-\frac{M}{N-n+1}\right).$$

Так как для любого целого $k\geq 0$ $\quad 1-\frac{M}{N-k}\leq 1-\frac{M}{N}$, то n, найденное ранее (т.е. в случае биномиального распределения), удовлетворяет неравенству:

$$P\{\xi_n\geq 1\}>0{,}9.$$

Более того, при любом способе взятия билетов справедливо неравенство:

$$\left(1-\frac{M}{N}\right)\left(1-\frac{M}{N-1}\right)\ldots\left(1-\frac{M}{N-n+1}\right)\leq P\{\xi_n=0\}\leq\left(1-\frac{M}{N}\right)^n$$

и тем самым при $n\geq 22$ $\quad P\{\xi_n\geq 1\}>0{,}9$.

Ответ
а) $n = 22$; б) $n = 24$.

Задача 4
Автоматическая линия при нормальной настройке может выпускать бракованное изделие с вероятностью p. Сразу после появления брака производится переналадка линии. Найти среднее число хороших изделий, выпущенных между двумя последовательными переналадками линии.

Решение
Рассмотрим дискретное вероятностное пространство с

$$\Omega = \{\omega_1 = (B), \omega_2 = (HB), \ldots, \omega_n = (\underbrace{H \ldots HB}_{n}), \ldots\},$$

где Ω — пространство элементарных событий, соответствует опыту: автоматическая линия прекращает работу после появления первого бракованного изделия, символом B обозначили выпуск бракованного изделия, H означает выпуск хорошего изделия (не бракованного), введем

$$p_n = P(\omega_n) = (1-p)^{n-1} p, \quad n = 1, 2, \ldots$$

(см. [1], гл. 2, § 2). Пусть случайная величина ξ есть число хороших изделий, выпущенных между двумя переналадками линии, определим ξ как функцию ω:

$$\xi(\omega_n) = n - 1, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

закон распределения ξ такой:

$$P\{\xi = n\} = P(\omega_{n+1}) = (1-p)^n p, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Найдем производящую функцию

$$\varphi_\xi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n p(1-p)^n = \frac{p}{1 - z(1-p)}, \quad |z| < \frac{1}{1-p}:$$

$$\varphi'_\xi(z) = \frac{p(1-p)}{[1-(1-p)z]^2} \quad \text{и} \quad M\xi = \frac{p(1-p)}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p} - 1 .$$

Ответ

$P\{\xi=n\}=(1-p)^n p$, $n=0, 1, 2, \ldots$,

$M\xi=\dfrac{1}{p}-1$.

Задача 5

Число проведенных опытов $\nu(\omega)$ может изменяться от 0 до $+\infty$, причем $P\{\nu(\omega)=n\}=\dfrac{a^n}{n!}e^{-a}$ Каждый опыт может оказаться успешным с вероятностью p. Найти закон распределения $\eta(\omega)$ — числа успешных опытов и математическое ожидание $M\eta$.

Решение

Число проведенных опытов распределено по закону Пуассона с параметром a. При фиксированном числе опытов $\nu=n$ число успешных опытов распределено по биномиальному закону: $C_n^m p^m (1-p)^{n-m}$, $m=\overline{0,n}$, где n — число проведенных опытов. Но так как число проведенных опытов случайная величина, то можно ввести гипотезы: $H_n=\{$число проведенных опытов ν равно $n\}$, $n=0, 1, 2, \ldots$ и для нахождения вероятности $P\{\eta=m\}$ применить формулу полной вероятности:

$$P\{\eta=m\}=\sum_{n=0}^{\infty} P(H_n) P_{H_n}\{\eta=m\},$$

где $P_{H_n}\{\eta=m\}=\begin{cases}0, \text{ если } n<m;\\ C_n^m p^m (1-p)^{n-m}, \text{ если } n\ge m.\end{cases}$ Тогда $P\{\eta=m\}=$

$$=\sum_{n=m}^{\infty} e^{-a}\frac{a^n}{n!}C_n^m p^m (1-p)^{n-m}=\sum_{n=m}^{\infty} e^{-a}\frac{a^n}{n!}\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m(1-p)^{n-m}=$$

$$=e^{-a}\frac{(ap)^m}{m!}\sum_{n=m}^{\infty}\frac{[a(1-p)]^{n-m}}{(n-m)!}=e^{-a}\frac{(ap)^m}{m!}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{[a(1-p)]^r}{r!}=$$

$$= e^{-a} e^{a(1-p)} \frac{(ap)^m}{m!} = e^{-ap} \frac{(ap)^m}{m!}.$$

Итак, $P\{\eta = m\} = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^m}{m!}$, $m = 0, 1, \ldots$, $\lambda = ap$.

Значит, случайная величина η также распределена по закону Пуассона с параметром $\lambda = ap$. Найдем $M\eta$ двумя способами.

1. $M\eta = \sum\limits_{m=0}^{\infty} mP\{\eta = m\} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} m e^{-ap} \dfrac{(ap)^m}{m!} = e^{-ap} \sum\limits_{m=1}^{\infty} m \dfrac{(ap)^m}{m!} =$

$$= e^{-ap} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(ap)^m}{(m-1)!} = e^{-ap} ape^{ap} = ap.$$

2. Найдем производящую функцию

$$\varphi_\eta(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m e^{-ap} (ap)^m \frac{1}{m!} = e^{-ap} e^{apz} = e^{ap(z-1)},$$

$$\varphi'_\eta(z) = ape^{ap(z-1)}, \quad \varphi'_\eta(1) = ap.$$

Следовательно, $M\eta = \varphi'_\eta(1) = ap$.

Ответ

$$P\{\eta = m\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad M\eta = \lambda; \quad \lambda = ap.$$

Замечание. Забегая несколько вперед, найдем закон распределения случайной величины η с помощью производящих функций.

Введем случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k, \ldots$,

$$\xi_k = \begin{cases} 1, & \text{если } k\text{-й проведенный опыт оказался успешным;} \\ 0, & \text{если } k\text{-й проведенный опыт оказался неуспешным,} \end{cases}$$

тогда случайная величина $\eta = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_\nu$ есть сумма случайного числа (число слагаемых есть случайная величина) случайных слагаемых, причем ξ_1, ξ_2, …, ξ_k, … — независимые случайные величины (см. [1], гл. 7, § 3).

Известно, что $\varphi_\eta(z) = \varphi_\nu(\varphi_{\xi_k}(z))$ (см. [1], гл. 7, § 1, теорема 1.4, формула (1.11)), где $\varphi_\nu(z)$ производящая функция числа проведенных опытов:

$$\varphi_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} z^m P\{\nu = m\} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m e^{-a} \frac{a^m}{m!} = e^{a(z-1)},$$

а производящая функция каждого из слагаемых:

$$\varphi_{\xi_k}(z) = zP\{\xi_k = 1\} + z^0 P\{\xi_k = 0\} = pz + 1 - p\ , \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Таким образом,

$$\varphi_\eta(z) = \mathrm{e}^{a(\varphi_{\xi_k}(z)-1)} = \mathrm{e}^{a(pz+1-p-1)} = \mathrm{e}^{ap(z-1)} .$$

Производящая функция однозначно определяет закон распределения случайной величины η:

$$P\{\eta = m\} = \frac{\varphi^{(m)}(0)}{m!}, \quad m = 0, 1, \ldots .$$

Так как $\dfrac{d^m \mathrm{e}^{ap(z-1)}}{dz^m} = (ap)^m \mathrm{e}^{ap(z-1)}$, то $P\{\eta = m\} = \mathrm{e}^{-ap}\dfrac{(ap)^m}{m!}$.

Задача 6

В лотерее N билетов. Разыгрываются m_i выигрышей стоимостью k_i рублей, $i = 1, 2, \ldots, n$. Сколько должен стоить билет, чтобы среднее значение выигрыша равнялось половине стоимости билета?

Решение

Пусть случайная величина ξ — размер выигрыша для лица, купившего один билет. Закон распределения ξ такой:

$$P\{\xi = k_i\} = \frac{m_i}{N}, \quad i = \overline{1, n} .$$

Среднее значение выигрыша

$$M\xi = \sum_{i=1}^{n} k_i \frac{m_i}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} k_i m_i .$$

Пусть a — стоимость одного билета. Из условия задачи

$$\frac{a}{2} = M\xi = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} k_i m_i .$$

Ответ

$$a = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{n} k_i m_i .$$

Задача 7

Случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ независимы и распределены по закону Пуассона с параметрами, равными соответственно λ_1 и λ_2. Найти закон распределения величины $\eta = \xi_1 + \xi_2$.

Решение

ξ_1 и ξ_2 принимают все целые неотрицательные значения, причем для каждой из ξ_i, $i = 1, 2$, известен закон распределения:

$$P\{\xi_i = m\} = \mathrm{e}^{-\lambda_i}\,\frac{\lambda_i^m}{m!}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, \quad i = 1, 2.$$

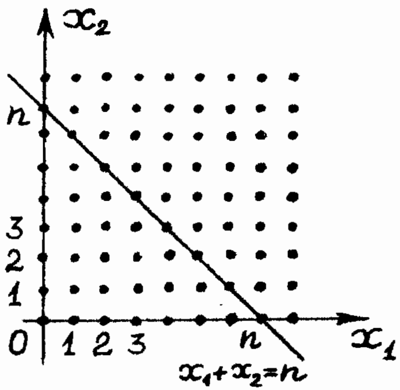


Рис. 2

Независимость ξ_1 и ξ_2 означает, что для любой пары целых неотрицательных чисел n, k (значений, которые принимают соответственно ξ_1 и ξ_2) события $\{\xi_1 = n\}$ и $\{\xi_2 = k\}$ независимы. Точки с координатами (ξ_1, ξ_2) образуют «решетку» в первом координатном углу. Сумма $\xi_1 + \xi_2$ есть снова дискретная случайная величина, принимающая целые неотрицательные значения. Чтобы найти закон распределения $\eta = \xi_1 + \xi_2$, надо для любого неотрицательного n найти $P\{\eta = n\} = P\{\xi_1 + \xi_2 = n\}$. Точки с координатами (ξ_1, ξ_2), такие, что $\xi_1 + \xi_2 = n$, лежат на прямой $x_1 + x_2 = n$ (рис. 2). Если зафиксируем одно слагаемое, скажем $\xi_1 = k$, то второе определяется однозначно $\xi_2 = n - k$. Теперь осталось только «пройти» по всем возможным значениям k: 0, 1, 2, …, n.

Итак,

$$P\{\xi_1 + \xi_2 = n\} = P\{(\xi_1, \xi_2) = (k, n-k),\ k = 0, 1, \ldots, n\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P\{\xi_1 = k,\ \xi_2 = n-k\}.$$

Но ξ_1 и ξ_2 независимы, следовательно, независимы и события $\{\xi_1 = k\}$ и $\{\xi_2 = n-k\}$ и тогда

$$P\{\xi_1 = k,\ \xi_2 = n-k\} = P\{\xi_1 = k\} P\{\xi_2 = n-k\}.$$

Далее,

$$P\{\eta = \xi_1 + \xi_2 = n\} = \sum_{k=0}^{n} P\{\xi_1 = k\} P\{\xi_2 = n-k\} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{c}^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} \mathrm{e}^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^{n-k}}{(n-k)!} \frac{n!}{n!} = \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} C_n^k \lambda_1^k \lambda_2^{n-k} =$$

$$= \mathrm{e}^{-(\lambda_1+\lambda_2)} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)^n}{n!} = \mathrm{e}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2$.

Таким образом, сумма независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона, есть снова случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром, равным сумме параметров слагаемых.

Значит, закон Пуассона обладает свойством устойчивости при суммировании независимых слагаемых.

Ответ

$$P\{\eta = n\} = \mathrm{c}^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots, \quad \lambda = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Задача 8

Двое бросают монету n раз каждый. Найти вероятность того, что у них выпадет одинаковое число гербов.

Решение

Пусть ξ_k $(k = 1, 2)$ — число гербов, выпавшее у k-го игрока. Надо найти

$$P\{\xi_1 = \xi_2\}.$$

События $\{\xi_1 = m\}$ и $\{\xi_2 = k\}$ независимы для любых значений m и k, так как каждый игрок бросает n раз одну монету. Случайные величины ξ_1 и ξ_2 распределены по биномиальному закону:

$$P\{\xi_1 = m\} = P\{\xi_2 = m\} = C_n^m \frac{1}{2^n}, \quad p = q = 1/2, \quad m = 0, 1, \ldots, n.$$

Обращаем внимание на независимость событий $\{\xi_1 = m\}$ и $\{\xi_2 = m\}$, тогда

$$P\{\xi_1 = \xi_2\} = \sum_{m=0}^{n} P\{\xi_1 = m, \xi_2 = m\} = \sum_{m=0}^{n} P\{\xi_1 = m\} P\{\xi_2 = m\} =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} C_n^m 2^{-n} C_n^m 2^{-n} = 2^{-2n} \sum_{m=0}^{n} C_n^m C_n^m = 2^{-2n} \sum_{m=0}^{n} C_n^m C_n^{n-m},$$

так как $C_n^m = C_n^{n-m}$.

Рассмотрим случайную величину η, имеющую гипергеометрическое распределение $G(N, M, n)$ с параметрами $N = 2n$, $M = N - M = n$, $P\{\eta = l\} = C_n^l C_n^{n-l} / C_{2n}^n$, $l = \overline{0, n}$ (см. [1], гл. 5, § 3), значит, $\sum_{l=0}^{n} \frac{C_n^l C_n^{n-l}}{C_{2n}^n} = 1$, таким образом, $\sum_{l=0}^{n} C_n^l C_n^{n-l} = C_{2n}^n$ и $P\{\xi_1 = \xi_2\} = \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}}$.

Ответ

$P\{\xi_1 = \xi_2\} = C_{2n}^n 2^{-2n}$.

Задача 9

Последовательно испытывают пять блоков. Вероятность выдержать испытание для каждого блока равна 0,9. Испытания прекращаются после первой неудачи. Найти закон распределения и функцию распределения количества испытаний, среднее значение и дисперсию количества испытаний.

Решение

Рассмотрим пространство элементарных событий, где символ «Y» на k-м месте означает, что k-й блок выдержал испытание и соответственно «H» — блок не выдержал испытание.

$$\Omega = \{\omega_1 = (H),\ \omega_2 = (YH),\ \omega_3 = (YYH),\ \omega_4 = (YYYH),$$
$$\omega_5 = (YYYYH),\ \omega_6 = (YYYYY)\}.$$

Введем $P(\omega_k)$:

$$P(\omega_k) = 0{,}9^{k-1} \cdot 0{,}1, \quad k = \overline{1,5}; \quad P(\omega_6) = 0{,}9^5 = 0{,}59049.$$

Обозначим через $\xi(\omega)$ число проведенных испытаний, $\xi(\omega)$ — функция на Ω, определим эту функцию:

$$\xi(\omega_k) = k, \quad k = \overline{1,5}, \quad \xi(\omega_6) = 5.$$

Закон распределения ξ:

$$P\{\xi = k\} = P(\omega_k) = 0{,}9^{k-1} \cdot 0{,}1, \quad k = \overline{1,4};$$

$$P\{\xi = 5\} = P\{\omega_5, \omega_6\} = P(\omega_5) + P(\omega_6) = 0{,}9^5 + 0{,}9^4 \cdot 0{,}1 = 0{,}6561.$$

Ряд распределения случайной величины приведен в табл. 1.

Таблица 1

k	1	2	3	4	5
$P\{\xi = k\}$	0,1	0,09	0,081	0,0729	0,6561

Найдем $F_\xi(x)$. По определению $F_\xi(x) = P\{\xi < x\}$, $-\infty < x < +\infty$, и $F_\xi(x) = \sum\limits_{k<x} P\{\xi = k\}$. Рассмотрим следующие интервалы (на каждый попадает только одно значение ξ, или не попадает ни одного значения ξ):

1) $x \le 1$

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = 0\,;$$

2) $1 < x \le 2$

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi = 1\} = 0{,}1\,;$$

3) $2 < x \le 3$

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{k=1}^{2} P\{\xi = k\} = 0{,}1 + 0{,}09 = 0{,}19\,;$$

4) $3 < x \le 4$

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{k=1}^{3} P\{\xi = k\} = 0{,}271\,;$$

5) $4 < x \le 5$

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{k=1}^{4} P\{\xi = k\} = 0{,}3439\,;$$

6) $x > 5$

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = \sum_{k=1}^{5} P\{\xi = k\} = 1\,.$$

Таким образом,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1; \\ 0{,}1, & \text{если } 1 < x \le 2; \\ 0{,}19, & \text{если } 2 < x \le 3; \\ 0{,}271, & \text{если } 3 < x \le 4; \\ 0{,}3439, & \text{если } 4 < x \le 5; \\ 1, & \text{если } x > 5. \end{cases}$$

Построим график $F_\xi(x)$ (рис. 3).

$M\xi$ и $B\xi$ найдем непосредственно:

$$M\xi = \sum_{k=1}^{5} kP\{\xi = k\} = 4{,}0951\,;$$

$$D\xi = \sum_{k=1}^{5} (k - 4{,}0951)^2 P\{\xi = k\} = \sum_{k=1}^{5} k^2 P\{\xi = k\} - (4{,}0951)^2 \cong 1{,}98806\,.$$

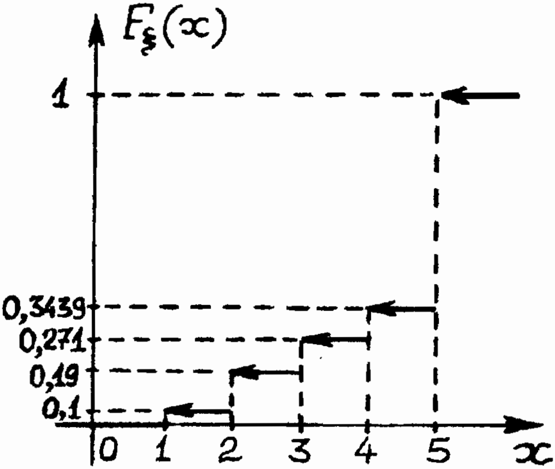


Рис. 3

Ответ

$P\{\xi = k\} = 0{,}9^{k-1} \cdot 0{,}1$; $\quad k = \overline{1, 4}$;

$P\{\xi = 5\} = 0{,}6561$; $\quad M\xi = 4{,}0951$; $\quad D\xi = 1{,}98806$;

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 1; \\ 0{,}1, & \text{если } 1 < x \le 2; \\ 0{,}19, & \text{если } 2 < x \le 3; \\ 0{,}271, & \text{если } 3 < x \le 4; \\ 0{,}3439, & \text{если } 4 < x \le 5; \\ 1, & \text{если } x > 5. \end{cases}$$

Задача 10

Из 36 карт взято шесть карт случайным образом. Найти закон распределения и среднее значение числа вынутых тузов.

Решение

Обозначим через $\xi(\omega)$ число тузов среди взятых шести карт. Случайная величина $\xi(\omega)$ имеет гипергеометрическое распределение $G(N, M, n)$ (с параметрами $N = 36$, $M = 4$, $n = 6$):

$$P\{\xi = m\} = C_4^m C_{32}^{6-m} / C_{36}^6, \quad m = \overline{0, 4}.$$

Составим таблицу (ряд распределения), где первая строка — значения, принимаемые случайной величиной ξ, а вторая — вероятности, с которыми эти значения принимаются (табл. 2).

Таблица 2

m	0	1	2	3	4
$P\{\xi = m\}$	$\frac{87}{187}$	$\frac{232}{561}$	$\frac{145}{1309}$	$\frac{40}{3927}$	$\frac{1}{3927}$

$M\xi$ находим как в задаче 9.

Ответ

$P\{\xi = m\} = C_4^m C_{32}^{6-m} / C_{36}^6, \quad m = \overline{0, 4}, \quad M\xi = 2/3$.

Задача 11

В урне лежит N шаров, из них M белых и $N - M$ черных. Два игрока поочередно вынимают по одному шару. Если шары разноцветные, то выигрывает игрок, доставший белый шар; если шары одноцветные, то их кладут обратно в урну и повторяют розыгрыш до тех пор, пока победитель не определится. Пусть $\xi(\omega)$ — количество розыгрышей, потребовавшихся для определения победителя. Найти закон распределения $\xi(\omega)$ и $M\xi$.

Решение

Пусть два игрока взяли по одному шару каждый. Пусть события $A = \{$взятые шары разных цветов$\}$, $B = \{$взятые шары одного цвета$\}$. Очевидно, что

$$P(A) = \frac{2M(N - M)}{N(N - 1)} = p_1, \quad P(B) = 1 - \frac{2M(N - M)}{N(N - 1)} = p_2.$$

Если наступило событие A, то победитель определился, и игра прекращена; если же наступило B, то ничья, и игра продолжается. Рассмотрим теперь пространство элементарных событий

$$\Omega = \{\omega_1 = (A),\ \omega_2 = (B, A),\ \omega_3 = (B, B, A), \ldots,$$
$$\omega_n = \underbrace{(B, B, \ldots, B, A)}_{n}, \ldots\}.$$

Определим $P(\omega_n)$: $P(\omega_n) = (P(B))^{n-1} P(A) = p_2^{n-1} p_1$, $n = 1, 2, \ldots$. Зададим на Ω случайную величину $\xi(\omega)$:

$$\xi(\omega_n) = n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

и тогда $P\{\xi = n\} = p_2^{n-1} p_1$, $n = 1, 2, \ldots$, — закон распределения случайной величины ξ.

$$M\xi = \sum_{n=1}^{\infty} n p_2^{n-1} p_1 .$$

Найдем производящую функцию случайной величины ξ:

$$\varphi_\xi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} z^n p_2^{n-1} p_1 = z p_1 / (1 - p_2 z)$$

(при $|z| < 1/p_2$) и так как $\varphi'_\xi(z) = p_1/(1 - p_2 z)^2$, то

$$M\xi = \varphi'_\xi(1) = \frac{p_1}{(1 - p_2)^2} = \frac{1}{p_1} = \frac{N(N-1)}{2M(N-M)}.$$

Ответ

$P\{\xi = n\} = (1 - p_1)^{n-1} p_1$, $n = 1, 2, \ldots$,

$M\xi = \dfrac{1}{p_1}$, $p_1 = \dfrac{2M(N-M)}{N(N-1)}$.

Задача 12

Вероятность успеха в одном испытании $p = 0{,}001$. Какова вероятность добиться по крайней мере два успеха при $n = 5000$ независимых испытаниях? (Сравнить точную формулу с пуассоновским приближением.)

Решение

Так как испытания независимы и вероятность успеха (и неуспеха) при каждом испытании одна и та же, то это — схема Бернулли, и случайная величина μ_n — число успехов в n испытаниях схемы Бернулли, имеет биномиальное распределение:

$$P\{\mu_n = m\} = C_n^m (0{,}001)^m (0{,}999)^{n-m}, \quad m = \overline{0, n}, \quad n = 5000.$$

Пусть событие $A = \{$произошло по крайней мере два успеха$\}$. Очевидно, что $\overline{A} = \{\mu_{5000} = 0{,}1\}$ и тогда

$$P(A) = 1 - P\{\mu_{5000} = 0{,}1\} = 1 - P\{\mu_{5000} = 0\} - P\{\mu_{5000} = 1\} =$$

$$= 1 - 0{,}999^{5000} - 5000 \cdot 0{,}999^{4999} \cdot 0{,}001.$$

Непосредственным вычислением находим $P(A) = 0{,}957481$. Так как число испытаний $n = 5000$ достаточно велико, а произведение $np = 5$ «мало», то биномиальное распределение можно приблизить пуассоновским с $\lambda = np = 5$ (см. [1], гл. 4, § 3, теорема 3.1) и с помощью таблицы значений $\mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda k}{k!}$ с параметрами $\lambda = 5$ и $k = 0{,}1$ (см. [1], с. 235) находим

$$P(A) = 1 - \sum_{k=0}^{1} \mathrm{e}^{-5} \frac{5^k}{k!} = 1 - 0{,}040428 = 0{,}959572.$$

Ответ

0,957481; 0,959572.

Задача 13

В начале игры игрок A уплачивает игроку B S рублей. Затем бросают монету до первого появления герба. Если герб выпадает при k-м бросании, то B платит A k рублей. Каким должно быть S, чтобы игра была справедливой?

Решение

Рассмотрим пространство элементарных событий

$$\Omega = \{\omega_1 = (\Gamma), \omega_2 = (P\Gamma), ..., \omega_k = \underbrace{(P...P\Gamma)}_{k}, ...\}.$$

Для любого k определим $P(\omega_k)$ следующим образом:

$$P(\omega_k) = \frac{1}{2^k}.$$

Обозначим через $\xi(\omega)$ сумму, полученную игроком A от B, тогда $\xi(\omega_k) = k$ и

$$P\{\xi = k\} = \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Игра справедлива, если «в среднем» A получит столько, сколько отдал игроку B перед началом игры. Найдем

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} kP\{\xi = k\} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2^k}.$$

Так как $\varphi_\xi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \frac{1}{2^k} = \frac{1}{1 - z/2}$, $|z| < 2$ и $\varphi'_\xi(z) = \frac{2}{(2-z)^2}$, то $\varphi'_\xi(1) = M\xi = 2$.

S находим из условия $S = M\xi = 2$.

Ответ

$S = 2$.

Задача 14

Дискретная случайная величина $\xi(\omega)$ принимает значения $x_k = 2^{k/2}$ с вероятностями $p_k = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots$. Найти $M\xi$ и $D\xi$.

Решение

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^k = \frac{1/\sqrt{2}}{1 - 1/\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

$D\xi$ будем находить по формуле $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$, где $M\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty}(2^{k/2})^2 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1$.

Ряд $\sum_{k=1}^{\infty} 1$ расходится, следовательно, $M\xi^2$ не существует, тем самым не существует и $D\xi$.

Ответ

$M\xi = \left(\sqrt{2} - 1\right)^{-1}$, $D\xi$ не существует.

Задача 15

Случайная величина $\xi(\omega)$ принимает значения $x_k = (-1)^k k$ с вероятностями $p_k = C / k!$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Вычислить C, $M\xi$ и $D\xi$.

Решение

C находим из условия нормировки:

$$1 = \sum_{k=0}^{\infty} p_k = C \sum_{k=0}^{\infty} 1/k! = C\mathrm{e},$$

откуда $C = \mathrm{e}^{-1}$.

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k k \frac{\mathrm{e}^{-1}}{k!} = \mathrm{e}^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k-1)!} =$$

$$= -\mathrm{e}^{-1} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} = -\mathrm{e}^{-1}\mathrm{e}^{-1} = -\mathrm{e}^{-2}.$$

Найдем

$$M\xi^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathrm{e}^{-1} \frac{1}{k!} = \mathrm{e}^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} [k(k-1) + k] \frac{1}{k!} =$$

$$= \mathrm{e}^{-1} \left[\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(k-1)!} \right] = \mathrm{e}^{-1}(\mathrm{e} + \mathrm{e}) = 2.$$

Итак, $D\xi = 2 - e^{-4}$.

Ответ

$C = \mathrm{e}^{-1}$, $M\xi = -\mathrm{e}^{-2}$, $D\xi = 2 - \mathrm{e}^{-4}$.

Задача 16

Прибор, состоящий из трех блоков A, B_1 и B_2, работает, если исправен блок A и хотя бы один из блоков B_1 и B_2. Космическая частица, попавшая в прибор, выводит из строя один из его блоков с вероятностями $p_A = 0{,}5$, $p_{B_1} = p_{B_2} = 0{,}25$.

Предположим, что частицы попадают в прибор последовательно, и пусть $\nu(\omega)$ — номер частицы, которая выводит его из строя. Найти закон распределения $\nu(\omega)$.

Решение

Введем следующие события: A = {частица, попавшая в прибор, вывела из строя блок A}, B_k = {частица, попавшая в прибор, вывела из строя блок B_k}, $k = 1, 2$. Тогда пространство элементарных событий, отвечающее опыту: попадание в прибор частиц до тех пор, пока он не выйдет из строя, можно записать так:

$$\Omega = \{\omega_1^1 = (A), \omega_2^1 = (B_1 A), \omega_2^2 = (B_1 B_2), \omega_2^3 = (B_2 A), \omega_2^4 = (B_2 B_1), \ldots,$$

$$\omega_n^1 = (\underbrace{B_1 B_1 \ldots B_1 A}_{n}), \omega_n^2 = (\underbrace{B_1 B_1 \ldots B_1 B_2}_{n}),$$

$$\omega_n^3 = (\underbrace{B_2 B_2 \ldots B_2 A}_{n}), \omega_n^4 = (\underbrace{B_2 B_2 \ldots B_2 B_1}_{n}), \ldots\}.$$

Определим $P(\omega_n^k)$:

$$P(\omega_1^1) = 1/2, \quad P(\omega_n^2) = P(\omega_n^4) = \left(\frac{1}{4}\right)^n;$$

$$P(\omega_n^1) = P(\omega_n^3) = \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} \frac{1}{2}, \quad n = 2, 3, 4, \ldots .$$

Пусть $\nu(\omega)$ — номер частицы, которая вывела прибор из строя, тогда $\nu(\omega_1^1)=1$, $\nu(\omega_n^1)=\nu(\omega_n^2)=\nu(\omega_n^3)=\nu(\omega_n^4)=n$, $n=2,\ 3, \ldots$. Закон распределения случайной величины $\nu(\omega)$ будет таким:

$$P\{\nu=1\}=\frac{1}{2};$$

$$P\{\nu=n\}=\sum_{k=1}^{4}P(\omega_n^k)=2(0{,}5+0{,}25)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1};\quad n=2, 3, \ldots .$$

Ответ

$$P\{\nu=1\}=\frac{1}{2};\quad P\{\nu=n\}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1},\quad n=2, 3, \ldots .$$

Задача 17

A имеет две монеты, B — три монеты одного и того же достоинства. Каждый подбрасывает свои монеты. Выигрывает и забирает все монеты тот, у кого выпадает бóльшее число гербов. В случае равенства числа выпавших гербов бросание повторяется до выявления победителя.

Пусть $\xi(\omega)$ — выигрыш игрока A, $\eta(\omega)$ — выигрыш игрока B, $\nu(\omega)$ — число бросаний, потребовавшихся для выявления победителя. Найти законы распределения и средние значения введенных случайных величин.

Решение

Пусть каждый бросил свои монеты один раз. Определим события: $A=\{\text{выиграл игрок } A\}$, $B=\{\text{выиграл игрок } B\}$, $C=\{\text{ничья}\}$. Найдем вероятности этих событий. A выиграет, если у него выпадет один герб, а у B ни одного, или у A выпало два герба, а у B ни одного герба, или один герб. Вероятность суммы таких исходов

$$P(A)=\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\right)=\frac{2+4}{32}=\frac{3}{16}.$$

Ничья означает, что у каждого из них либо не выпало ни одного герба, либо выпало по одному гербу, либо по два герба. Вероятность ничьей равна сумме вероятностей таких исходов и равна

$$P(C)=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{8}+\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{8}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{8}=\frac{10}{32}=\frac{5}{16}.$$

Так как события A, B, C (при одном бросании монет) несовместны, а их сумма есть событие достоверное, то

$$P(B)=1-P(A)-P(C)=1/2.$$

Построим теперь Ω, причем за «элементарные исходы» возьмем события A, B и C:

$$\Omega=\{\omega_1=(A),\omega_2=(B),\omega_3=(CA),\omega_4=(CB),...,$$
$$\omega_{2n+1}=(\underbrace{C\,...\,CA}_{n+1}),\omega_{2n+2}=(\underbrace{C\,...\,CB}_{n+1}),...\}.$$

Положим

$$P(\omega_{2n+1})=(P(C))^n P(A)=\left(\frac{5}{16}\right)^n\frac{3}{16};$$

$$P(\omega_{2n+2})=(P(C))^n P(B)=\left(\frac{5}{16}\right)^n\frac{1}{2};\quad n=0,1,2,\dots.$$

Введем случайные величины:

1) $\xi(\omega_{2n+2})=-2$, $\quad\xi(\omega_{2n+1})=3$;

2) $\eta(\omega_{2n+2})=2$, $\quad\eta(\omega_{2n+1})=-3$;

3) $\nu(\omega_{2n+2})=\nu(\omega_{2n+1})=n+1$; $\quad n=0,1,2,\dots$.

Найдем законы распределения введенных случайных величин и их средние значения.

1. $$P\{\xi=-2\}=\sum_{n=0}^{\infty}P(\omega_{2n+2})=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{5}{16}\right)^n\frac{1}{2}=\frac{8}{11};$$

$$P\{\xi=3\}=\sum_{n=0}^{\infty}P(\omega_{2n+1})=1-P\{\xi=-2\}=\frac{3}{11};$$

$$M\xi=3\cdot\frac{3}{11}+(-2)\frac{8}{11}=-7/11.$$

2. Так как η — выигрыш игрока B есть $-\xi$ — проигрыш игро A, то

$$P\{\eta=-3\}=P\{\xi=3\}=\frac{3}{11}; \quad P\{\eta=2\}=P\{\xi=-2\}=\frac{8}{11};$$

$$M\eta=-M\xi=\frac{7}{11}.$$

3. $P\{\nu=m\}=P(\omega_{2m-1})+P(\omega_{2m})=\left(\frac{5}{16}\right)^{m-1}\left(\frac{3}{16}+\frac{1}{12}\right)=$

$=\left(\frac{5}{16}\right)^{m-1}\frac{11}{16},\quad m=1,2,\ldots .$

Случайная величина ν имеет геометрическое распределение

$$P\{\nu=m\}=\left(\frac{5}{16}\right)^{m-1}\frac{11}{16},\quad m=1,2,\ldots,$$

производящая функция случайной величины ν

$$\varphi_\nu(z)=\sum_{m=1}^{\infty}z^m\left(\frac{5}{16}\right)^{m-1}\frac{11}{16}=\frac{11}{16}z\left(1-\frac{5}{16}z\right)^{-1}$$

$(|z|<\frac{16}{5})$ и

$$\varphi'_\nu(z)=\frac{11}{16}\left(1-\frac{5}{16}z\right)^{-2}; \quad M\nu=\sum_{m=1}^{\infty}m\left(\frac{5}{16}\right)^{m-1}\frac{11}{16}=\varphi'_\nu(1)=\frac{16}{11}.$$

Ответ

$$P\{\xi=3\}=P\{\eta=-3\}=\frac{3}{11}; \quad P\{\xi=-2\}=P\{\eta=2\}=\frac{8}{11};$$

$$P\{\nu=m\}=\left(\frac{5}{16}\right)^{m-1}\frac{11}{16}; \quad m=1,2,\ldots;$$

$$M\xi=-M\eta=-\frac{7}{11}; \quad M\nu=\frac{16}{11}.$$

Задача 18

Игральная кость бросается до выпадения пяти шестерок (необязательно рядом). Найти закон распределения, среднее значение и дисперсию случайной величины $\xi(\omega)$ — числа бросаний игральной кости.

Решение

Рассмотрим группу исходов, удовлетворяющих требованию «игральная кость бросается до тех пор, пока не появится пятая шестерка»:

$$\omega_n = (\underbrace{\overline{6}\ \overset{1}{6}\ \overline{6} \ldots \overline{6}\ \overset{2}{6} \ldots \overset{3}{6} \ldots \overset{4}{6}\ \overline{6}\ \overset{5}{6}}_{n}),$$

индекс у ω_n определяет число бросаний кости. Если «6» появилось пять раз, причем обязательно пятый раз — на последнем бросании, то «не 6» $n-5$ раз (и «не 6» — это любой из пяти исходов: 1, 2, 3, 4, 5), $\xi(\omega_n) = n$.

Таким образом,

$$P(\omega_n) = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} \left(\frac{1}{6}\right)^5.$$

Но в данном ω_n мы зафиксировали порядок появления первых четырех шестерок: 2-е место, ..., $(n-2)$-е место. Следовательно, число различных исходов ω_n равно числу способов выбора четырех мест для четырех шестерок из возможных $n-1$ мест (а это можно осуществить C_{n-1}^4 способами). Значит, закон распределения ξ такой:

$$P\{\xi = n\} = C_{n-1}^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} \left(\frac{1}{6}\right)^5, \quad n = 5, 6, \ldots .$$

Найдем производящую функцию

$$\varphi_\xi(z) = \sum_{n=5}^{\infty} z^n C_{n-1}^4 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-5} \frac{1}{6^5} = \left(\frac{z}{6}\right)^5 \frac{1}{4!} \sum_{n=5}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n-5)!} \left(\frac{5}{6} z\right)^{n-5} =$$

$$=\left(\frac{z}{6}\right)^5 \frac{1}{4!}\sum_{n=5}^{\infty}(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\left(\frac{5}{6}z\right)^{n-5} =$$

$$=\frac{1}{4!}\left(\frac{z}{6}\right)^5\left[\sum_{n=1}^{\infty}t^{n-1}\right]^{(4)}_{t=\frac{5}{6}z} = \left(\frac{z}{6}\right)^5\left(1-\frac{5}{6}z\right)^{-5} =$$

$$= z^5(6-5z)^{-5}, \quad |z|<\frac{6}{5}.$$

Итак,

$$\varphi_\xi(z) = z^5(6-5z)^{-5}; \quad \varphi'_\xi(z) = 30z^4(6-5z)^{-6};$$

$$\varphi''_\xi(z) = 60z^3(12+5z)(6-5z)^{-7};$$

откуда

$$M\xi = \varphi'_\xi(1) = 30, \quad D\xi = \varphi''_\xi(1) + \varphi'_\xi(1) - [\varphi'_\xi(1)]^2 = 150.$$

Ответ

$$P\{\xi = n\} = C^4_{n-1}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-5}\left(\frac{1}{6}\right)^5, \quad n = 5, 6, \ldots,$$

$M\xi = 30, \quad D\xi = 150.$

Задача 19

В коробке лежит N стержней для шариковых ручек, из них 1/6 красные, 1/2 черные и 1/3 синие. Случайным образом последовательно взято по одному из n стержней по схеме выбора без возвращения. Найти закон распределения случайной величины $\nu(\omega)$ — числа стержней, взятых до появления первого синего стержня (полагаем ν равным n, если среди выбранных нет синего стержня).

Построить график функции распределения случайной величины $\nu(\omega)$:

а) при $N = 60$, $n = 5$;

б) при $N = 12$, $n = 10$.

Решение

В данной задаче выбор стержней производится без возвращения и упорядочено. Рассмотрим два случая: $n \le \frac{2}{3}N$ и $n > \frac{2}{3}N$.

1. Пусть $0 < n \le \frac{2}{3}N$, тогда $P\{\nu(\omega)=0\}=1/3$ — взяли первым синий стержснь, $P\{\nu(\omega)=m\}=\dfrac{\frac{2}{3}N\left(\frac{2}{3}N-1\right)\ldots\left(\frac{2}{3}N-m+1\right)\frac{N}{3}}{N(N-1)\ldots(N-m)}$, $m=1,\,2,\,\ldots,\,n-1$, $P\{\nu(\omega)=n\}=\dfrac{\frac{2}{3}N\left(\frac{2}{3}N-1\right)\ldots\left(\frac{2}{3}N-n+1\right)}{N(N-1)\ldots(N-n+1)}$, $m=n$ (событие $\{\nu=n\}$ и есть случай, когда все взятые стержни не синие).

2. Если $n > \frac{2}{3}N$, то мы обязательно возьмем синий стержень, но не далее, чем на $\left(\frac{2}{3}N+1\right)$-м взятии, тем самым максимальное значение $\nu(\omega)$ в этом случае будет $\frac{2}{3}N$.

$$P\{\nu(\omega)=0\}=\frac{1}{3};$$

$$P\{\nu(\omega)=m\}=\frac{\frac{2}{3}N\left(\frac{2}{3}N-1\right)\ldots\left(\frac{2}{3}N-m+1\right)\frac{1}{3}N}{N(N-1)\ldots(N-m)};\quad m=1,2,\ldots,\frac{2}{3}N.$$

Очевидно, что $P\{\nu(\omega)=m\}=0$, $\quad m>\frac{2}{3}N$.

Законы распределения $\nu(\omega)$ и функции распределения даются в ответе задачи для частных случаев:

а) $N=60$, $\quad n=5$;

б) $N=12$, $\quad n=10$.

Ответ

а) $N=60$, $\quad n=5$ (табл. 3);

Таблица 3

m	0	1	2	3	4	5
$P\{\nu(\omega)=m\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{40}{177}$	$\frac{260}{1711}$	$\frac{520}{5133}$	$\frac{2405}{35931}$	$\frac{1443}{11977}$

$$F_{\nu}(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\le 0;\\ 0{,}3333, & \text{если } 0<x\le 1;\\ 0{,}5593, & \text{если } 1<x\le 2;\\ 0{,}7156, & \text{если } 2<x\le 3;\\ 0{,}8126, & \text{если } 3<x\le 4;\\ 0{,}8795, & \text{если } 4<x\le 5;\\ 1, & \text{если } x>5; \end{cases}$$

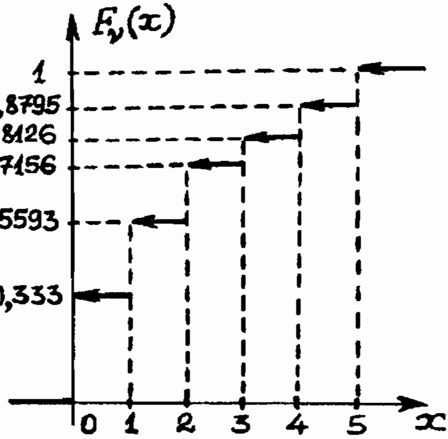
б) $N = 12,\quad n = 10$ (табл. 4);

Таблица 4

m	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$P\{\nu(\omega)=m\}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{33}$	$\frac{28}{105}$	$\frac{56}{495}$	$\frac{7}{99}$	$\frac{4}{99}$	$\frac{2}{99}$	$\frac{4}{495}$	$\frac{1}{495}$

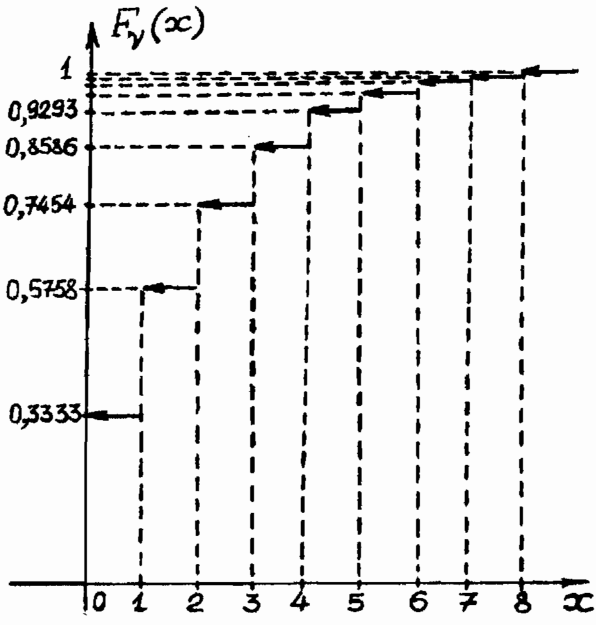
$$F_{\nu}(x)=\begin{cases} 0, & \text{если } x\le 0;\\ 0{,}3333, & \text{если } 0<x\le 1;\\ 0{,}5758, & \text{если } 1<x\le 2;\\ 0{,}7454, & \text{если } 2<x\le 3;\\ 0{,}8586, & \text{если } 3<x\le 4;\\ 0{,}9293, & \text{если } 4<x\le 5;\\ 0{,}9697, & \text{если } 5<x\le 6;\\ 0{,}9899, & \text{если } 6<x\le 7;\\ 0{,}9978, & \text{если } 7<x\le 8;\\ 1, & \text{если } x>8. \end{cases}$$

Графики функций распределения приведены соответственно на рис. 4 и 5.



$F_\gamma(x)$
1
0,8795
0,8126
0,7156
0,5593
0,333
0
1
2
3
4
5
x

Рис. 4



$F_\gamma(x)$
1
0,9293
0,8586
0,7454
0,5758
0,3333
0
1
2
3
4
5
6
7
8
x

Рис. 5

4. ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ. НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. НОРМАЛЬНОЕ, РАВНОМЕРНОЕ, ПОКАЗАТЕЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. ЧИСЛОВЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ. ФУНКЦИЯ ОТ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ

Нужные определения и свойства даны в книге [1] (гл. 5 — 7) и сборнике задач [2] (начало § 4), в случае необходимости соответствующие ссылки приведены в тексте.

Задача 1

Точка равномерно распределена в круге радиусом R. Найти функцию распределения и плотность распределения расстояния от точки до центра круга.

Решение

$\Omega = \{\omega = (x_1, x_2),\ 0 \le x_1^2 + x_2^2 \le R^2\}$.

Так как точка (x_1, x_2) равномерно распределена в круге $0 \le x^2 + y^2 \le R^2$, то для любого события A

$$P(A) = \frac{\text{mes}\, A}{\text{mes}\, \Omega},$$

где $\text{mes}\, \Omega = \pi R^2$ (см. [1], гл. 2, § 3, с. 34).

Введем случайную величину $\xi(\omega) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Тогда

$$F_\xi(x) = P\{\omega : \xi(\omega) < x\} = P\{\omega : \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < x\} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 0; \\ x^2 / R^2, \text{ если } 0 < x \le R; \\ 1, \text{ если } x > R; \end{cases} \quad p_\xi(x) = F'_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \notin [0, R]; \\ \dfrac{2x}{R^2}, \text{ если } x \in [0, R]. \end{cases}$$

Ответ

$F_\xi(x) = 0$, если $x \le 0$; $F_\xi(x) = x^2 / R^2$, если $0 < x \le R$;

$F_\xi(x) = 1$, если $x > R$; $p_\xi(x) = 0$, если $x \notin [0, R]$;

$p_\xi(x) = 2x / R^2$, если $x \in [0, R]$.

Задача 2

Время $\tau(\omega)$ безотказной работы прибора имеет функцию распределения

$$F_\tau(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0; \\ 1 - \mathrm{e}^{-t/T}, & t > 0, \end{cases}$$

$T > 0$ — постоянная. Найти вероятность того, что: а) $\tau(\omega) \ge T$; б) $\tau(\omega) \ge 2T$; в) $T \le \tau(\omega) < 2T$ и среднее время безотказной работы прибора. Какой смысл постоянной T?

Решение

Так как при $t > 0$ $F_\tau(t) = P\{\tau < t\} = 1 - \mathrm{e}^{-t/T}$, то:

а) $P\{\tau(\omega) \ge T\} = 1 - F_\tau(T) = \mathrm{e}^{-1}$;

б) $P\{\tau(\omega) \ge 2T\} = 1 - F_\tau(2T) = \mathrm{e}^{-2}$;

в) $P\{T \le \tau(\omega) < 2T\} = F_\tau(2T) - F_\tau(T) = \mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}$.

Известно, что в точках непрерывности $F_\tau(t)$ $p_\tau(t) = F'_\tau(t)$ (см. [1], гл. 5, § 3).

Значит,

$$p_\tau(t) = 0 \quad \text{при} \quad t \le 0 \quad \text{и} \quad p_\tau(t) = \frac{1}{T}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}} \quad \text{при} \quad t > 0;$$

$$M\tau = \int_{-\infty}^{\infty} t p_\tau(t) dt = \int_0^{\infty} \frac{t}{T} \mathrm{e}^{-t/T} dt = T.$$

Ответ

а) e^{-1}; б) e^{-2}; в) $\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^{-2}$;

$M\tau(\omega) = T$.

Задача 3

Плотность распределения вероятностей случайной величины $\xi(\omega)$, определенной в интервале $-a < x < a$, обратно пропорциональна $\sqrt{a^2 - x^2}$. Вычислить $M\xi$, $D\xi$.

Решение

Так как $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_\xi(x)dx = 1$, а $\int\limits_{-a}^{a} \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \pi$, то $C = \frac{1}{\pi}$. Согласно определению (см. [1], гл. 6, § 1 и § 3) $M\xi$ и $D\xi$:

$$M\xi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a} \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 0;$$

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-a}^{a} \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = \frac{a^2}{2}.$$

Ответ

$M\xi = 0$, $D\xi = a^2 / 2$.

Задача 4

Случайная величина $\xi(\omega)$ имеет нормальное распределение с $M\xi = 0$ и $D\xi = 1$. Найти $M\xi^k$, $k = 1, 2, \ldots$.

Решение

$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$, $-\infty < x < +\infty$ (см. [1], гл. 5, § 3), тогда, применяя теорему 1.2 (при $r = 1$) из гл. 6, § 1, получаем

$$M\xi^k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x^k \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx.$$

Рассмотрим два случая: 1) k — нечетное число; 2) k — четное число.

В первом случае, очевидно, что $M\xi^k = 0$.

Во втором случае положим $k = 2n$ и после интегрирования n раз по частям получаем

$$M\xi^{2n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-1} \left(x e^{-\frac{x^2}{2}} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[-x^{2n-1} e^{-\frac{x^2}{2}} \right] \Bigg|_{-\infty}^{\infty} + \frac{2n-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2(n-1)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= \frac{2n-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2(n-1)} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \ldots = \frac{(2n-1)(2n-3)\ldots 3 \cdot 1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx =$$

$$= (2n-1)!!.$$

Ответ

$M\xi^{2n-1} = 0$, $\quad M\xi^{2n} = (2n-1)!!$, $\quad n = 1, 2, \ldots$.

Задача 5

Контроль шариков для подшипников производится так: если шарик не проходит через отверстие диаметра d_1, но проходит через отверстие диаметра d_2, то размер его считается приемлемым $(d_2 > d_1)$; если хотя бы одно из этих условий не выполнено, то шарик бракуется. Определить вероятность брака в предположении, что диаметр шарика подчиняется нормальному закону с параметрами $a = \frac{1}{2}(d_2 + d_1)$; $\sigma = \frac{1}{4}(d_2 - d_1)$.

Решение

Обозначим через $\xi(\omega)$ случайную величину — диаметр шарика. Так как $\xi(\omega)$ подчиняется нормальному закону с параметрами a и σ, то

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-a)^2 \right], \quad -\infty < x < \infty .$$

(см. [1], гл. 5, § 3). Пусть событие A состоит в том, что шарик бракуется. Тогда $\overline{A} = \{d_1 < \xi < d_2\}$ и

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - P\{d_1 < \xi < d_2\} = 1 - \int_{d_1}^{d_2} p_\xi(x)dx =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{d_1}^{d_2} \exp\left[-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right]dx .$$

Сделаем стандартную в таких случаях замену переменных $t = \dfrac{x-a}{\sigma} = \dfrac{x - 0{,}5(d_2 + d_1)}{0{,}25(d_2 - d_1)}$, и $t = -2$ при $x = d_1$, $t = 2$ при $x = d_2$, что дает возможность воспользоваться таблицами значений функции $\Phi_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-x^2/2}dx$ или $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^x e^{-x^2/2}dx$, связанной со стандартным нормальным (гауссовым) распределением с $a = 0$ и $\sigma = 1$. Итак, получаем

$$P(A) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-2}^{2} e^{-t^2/2}dt = 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^2 e^{-\frac{t^2}{2}}dt = 1 - 2\Phi_0(2)$$

и по таблице значений функции $\Phi_0(x)$ (см. [1], с. 236) находим $\Phi_0(2) = 0{,}4772$. Окончательно $P(A) = 1 - 2 \cdot 0{,}4772 = 0{,}0456$.

Ответ
0,0456.

Задача 6
Значения случайной величины $\xi(\omega)$ заключены на отрезке $-h \le x \le h$, $h > 0$. Доказать, что $|M\xi| \le h$, $|D\xi| \le h^2$. Возможно ли в этих условиях равенство: $D\xi = h^2$?

Решение

Пусть $\xi(\omega)$ — непрерывная случайная величина и $p_\xi(x)$ — плотность распределения случайной величины $\xi(\omega)$. Тогда $\int_{-h}^{h} p_\xi(x)dx = 1$ и первое неравенство очевидно, так как

$$|M\xi| = \left|\int_{-h}^{h} x p_\xi(x)dx\right| \le \int_{-h}^{h} |x| p_\xi(x)dx \le h \int_{-h}^{h} p_\xi(x)dx = h .$$

Аналогично,

$$M\xi^2 = \int_{-h}^{h} x^2 p_\xi(x)dx \le h^2 \int_{-h}^{h} p_\xi(x)dx = h^2 .$$

Далее $D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2$ и $D\xi \le M\xi^2 \le h^2$.

Если $\xi(\omega)$ — дискретная случайная величина, то, заменив в рассуждениях интеграл на сумму, получим аналогичные утверждения.

Равенство $D\xi^2 = h^2$ достигается лишь для дискретной случайной величины ξ, такой, что $P\{\xi = h\} = P\{\xi = -h\} = 1/2$.

Ответ

Равенство имеет место для ξ:

$$P\{\xi = h\} = P\{\xi = -h\} = 1/2 .$$

Задача 7

Точка P равномерно распределена на единичном квадрате $ABCD$. Найти плотность распределения площади прямоугольника $AB'PD'$, где B' и D' — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на стороны AB и AD соответственно.

Решение

Пусть точка $A(0,0)$, одна из вершин квадрата, есть начало координат, и стороны AB и AD лежат на координатных осях. Точка P имеет координаты (x, y),

$$\Omega = \{\omega:\ \omega = (x, y),\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1\}.$$

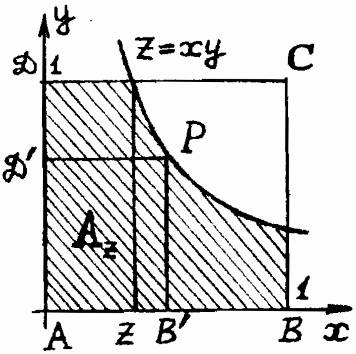


Рис. 6

Введем случайную величину $\xi(\omega)$ — площадь прямоугольника $AB'PD'$,

$$\xi(\omega) = xy.$$

Тогда

$$F_\xi(z) = P\{\omega:\ \xi(\omega) < z\}.$$

Обозначим

$$A_z = \{\omega:\ \xi(\omega) < z\}.$$

Используя схему геометрических вероятностей (см. [1], гл. 2, § 3), имеем

$$P\{(x, y) \in A_z\} = \text{mes}\, A_z \,/\, \text{mes}\, \Omega$$

(рис. 6), в данном случае $\text{mes}\,\Omega = 1$. Если $z \le 0$, то $A_z = \varnothing$ и $\text{mes}\, A_z = 0$; если $0 < z \le 1$, то

$$\text{mes}\, A_z = z + z\int_z^1 \frac{dx}{x} = z + z\ln x\Big|_{x=z}^{1} = z(1 - \ln z);$$

если $z > 1$, то $A_z = \Omega$ и $\text{mes}\, A_z = 1$.

Итак,

$$F_\xi(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0; \\ z(1 - \ln z), & 0 < z \le 1; \\ 1, & z > 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad p_\xi(z) = \begin{cases} -\ln z, & z \in (0, 1]; \\ 0, & z \notin (0, 1]. \end{cases}$$

Ответ

$p_\xi(z) = -\ln z, \quad z \in (0,1], \quad p_\xi(z) = 0, \quad z \notin (0,1].$

Задача 8

Плотность распределения $\xi(\omega)$ задана формулами:

$$p_\xi(x) = \begin{cases} C/x^4, & x > 1; \\ 0, & x \le 1. \end{cases}$$

Найти постоянную C, плотность распределения $\eta(\omega) = \ln \xi(\omega)$; $P\{\omega:\ 0{,}5 < \eta(\omega) \le 0{,}75\}$.

Решение

Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)dx = 1$, то $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{C}{x^4}\,dx = \frac{C}{3} = 1$ и $C = 3$.

Функцию распределения $F_\eta(y)$ найдем двумя способами.

1. Найдем функцию распределения $F_\eta(y)$, рассматривая равносильные события:

$$F_\eta(y) = P\{\eta(\omega) < y\} = P\{\ln \xi(\omega) < y\} = P\{\xi(\omega) < \mathrm{e}^y\} =$$

$$= F_\xi(\mathrm{e}^y) = \int\limits_{-\infty}^{\mathrm{e}^y} p_\xi(x)dx = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ 1 - \mathrm{e}^{-3y}, & y > 0, \end{cases}$$

откуда

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ 3\mathrm{e}^{-3y}, & y > 0 \end{cases}$$

и

$$P\{\omega:\ 0{,}5 < \eta(\omega) \le 0{,}75\} = F_\eta(0{,}75) - F_\eta(0{,}5) =$$

$$= 1 - \mathrm{e}^{-2{,}25} - (1 - \mathrm{e}^{-1{,}5}) = \mathrm{e}^{-1{,}5} - \mathrm{e}^{-2{,}25}.$$

2. Так как функция $y = \ln x$ (рассматриваем ее при $x > 1$) — непрерывная и монотонная, то существует обратная функция $x = \mathrm{e}^y$ тоже непрерывная и монотонная (в данном случае обе функции

монотонно возрастают). Так как отображение $y = \ln x$ взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо и отлично от нуля при $x > 1$, то $p_\eta(y) = p_\xi(\mathrm{e}^y)/\mathrm{e}^{-y} = 3\mathrm{e}^{-3y}$ (см. [1], гл. 6, § 6, теорема 1.2, $r = 1$).

Ответ

$C = 3$, $P\{\omega: 0{,}5 < \eta(\omega) \le 0{,}75\} = \mathrm{e}^{-1{,}5} - \mathrm{e}^{-2{,}25}$,

$p_\eta(y) = 3\mathrm{e}^{-3y}$, $y > 0$, $p_\eta(y) = 0$, $y \le 0$.

Задача 9

Предположим, что абсолютная величина $\xi(\omega) = |\overline{\mathrm{v}}|$ скорости молекулы газа распределена по закону Максвелла, т.е. имеет плотность распределения

$$p_\xi(\mathrm{v}) = \begin{cases} 0, \ \mathrm{v} \le 0; \\ \dfrac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \mathrm{v}^2 \mathrm{e}^{-h^2\mathrm{v}^2}, \ \mathrm{v} > 0. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание $M\xi$, дисперсию $D\xi$ и среднеквадратическую скорость $\left(\sqrt{M\xi^2}\right)$.

Решение

Воспользуемся определениями $M\xi$ и $M\xi^2$ (см. [1], гл. 6, § 1, теорема 6.2, $r = 1$):

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{v} p_\xi(\mathrm{v})\, d\mathrm{v} = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} \mathrm{v}^3 \mathrm{e}^{-\mathrm{v}^2 h^2}\, d\mathrm{v} =$$

$$= \frac{4}{h\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} t^3 \mathrm{e}^{-t^2}\, dt = \frac{2}{h\sqrt{\pi}} \left[-t^2 \mathrm{e}^{-t^2} \Big|_0^{\infty} + 2\int_0^{\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\, dt \right] =$$

$$= \frac{2}{h\sqrt{\pi}}\left(-e^{-t^2}\right)\Big|_0^{\infty} = \frac{2}{h\sqrt{\pi}};$$

$$M\xi^2 = \int_0^{\infty} v^2 p_{\xi}(v)\,dv = \frac{4h^3}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} v^4 e^{-h^2v^2}\,dv =$$

$$= \frac{4}{h^2\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} t^4 e^{-t^2}\,dt = \frac{2}{h^2\sqrt{\pi}}\left[-t^3e^{-t^2}\Big|_0^{\infty} + 3\int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2}\,dt\right] =$$

$$= \frac{3}{h^2\sqrt{\pi}}\left[-te^{-t^2}\Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} e^{-t^2}\,dt\right] = \frac{3}{h^2\sqrt{\pi}}\sqrt{\pi} = \frac{3}{2h^2};$$

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right)\frac{1}{h^2}.$$

Ответ

$$M\xi = \frac{2}{h\sqrt{\pi}}, \quad D\xi = \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right)\frac{1}{h^2}, \quad \sqrt{M\xi^2} = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{3}{2}}.$$

Задача 10

Найти $M\xi$, $D\xi$, если плотность распределения случайной величины $\xi(\omega)$ имеет вид

$$p_{\xi}(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in (-\infty, \infty).$$

Решение

$$M\xi = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-|x|}\,dx = 0; \quad D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\xi^2 = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-|x|}\,dx =$$

$$= \int_0^{\infty} x^2 e^{-x}\,dx = \left[-x^2e^{-x} - 2xe^{-x} - 2e^{-x}\right]_0^{\infty} = 2.$$

Ответ

$M\xi = 0$, $D\xi = 2$.

Задача 11

Точка равномерно распределена в шаре радиуса R. Найти функцию распределения и плотность распределения расстояния от точки до центра шара.

Решение

В данной задаче опять используем схему геометрических вероятностей (см. [1], гл. 2, § 3):

$$\Omega = \{\omega: \ \omega = (x, y, z), \ 0 \le x^2 + y^2 + z^2 \le R^2\}.$$

Введем случайную величину $\xi(\omega)$ — расстояние от точки (x, y, z) до центра шара (до точки $(0, 0, 0)$): $\xi(\omega) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Тогда

$$F_\xi(t) = P\{\omega: \ \xi(\omega) < t\} = \begin{cases} 0, \text{ если } t \le 0; \\ t^3 / R^3, \text{ если } 0 < t \le R; \\ 1, \text{ если } t > R \end{cases}$$

и

$$p_\xi(t) = F'_\xi(t) = \begin{cases} 3t^2 / R^3, \text{ если } t \in [0, R]; \\ 0, \text{ если } t \notin [0, R]. \end{cases}$$

Ответ

$F_\xi(t) = 0$, если $t \le 0$; $F_\xi(t) = t^3 / R^3$, если $0 < t \le R$; $F_\xi(t) = 1$, если $t > R$. $p_\xi(t) = 3t^2 / R^3$, если $t \in [0, R]$, $p_\xi(t) = 0$, если $t \notin [0, R]$.

Задача 12

Случайная величина $\xi(\omega)$ нормально распределена с параметрами $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$. Найти функцию распределения случайной величины $\eta(\omega) = \xi(\omega) + |\xi(\omega)|$.

Решение

Напомним обозначение $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt$.

Если значения случайной величины $\xi(\omega) \le 0$, то

$$\xi(\omega) + |\xi(\omega)| = \xi(\omega) - \xi(\omega) = 0.$$

Тогда при $x \le 0$ $F_\eta(x) = P\{\eta < x\} = 0$. Пусть в этом случае

$$\{\eta(\omega) < x\} = \{\eta(\omega) = 0\} \cup \{0 < \eta(\omega) < x\} =$$

$$= \{\xi(\omega) \le 0\} \cup \left\{0 < \xi(\omega) < \frac{x}{2}\right\} = \{\xi(\omega) < x/2\}$$

и

$$F_\eta(x) = P\{\xi < x/2\} = \Phi\{x/2\} = \frac{1}{2} + \Phi_0\left(\frac{x}{2}\right).$$

Ответ

$F_\eta(x) = 0$, если $x \le 0$ и $F_\eta(x) = \frac{1}{2} + \Phi_0(x/2)$, если $x > 0$.

Задача 13

Электронная лампа включается в момент $t = 0$. Условная вероятность выхода из строя этой лампы в промежуток времени $(t, t + \Delta t)$ при условии, что в момент t лампа еще работала, равна $\alpha \Delta t + o(\Delta t)$, где $\alpha > 0$ — постоянная, не зависящая от t. Найти функцию распределения времени безотказной работы $\tau(\omega)$ и $M\tau$.

Решение

Задача 17 (см. [3], разд. 2) является аналогичной, при ее решении получено $P\{\tau \ge t\} = e^{-\alpha t}$ при $t > 0$. Значит, при $t > 0$

$$F_\tau(t) = P\{\tau < t\} = 1 - P\{\tau \ge t\} = 1 - e^{-\alpha t}$$

и

$$p_\tau(t)=\begin{cases}0, & t\le 0;\\ \alpha e^{-\alpha t}, & t>0.\end{cases}$$

Тогда $M\tau=\int\limits_0^\infty t\alpha e^{-\alpha t}dt=\frac{1}{\alpha}$.

Ответ

$F_\tau(t)=0$, если $t\le 0$; $F_\tau(t)=1-e^{-\alpha t}$, если $t>0$, $M\tau=1/\alpha$.

Задача 14

Вычислить $M\xi$ и $D\xi$, если плотность распределения $\xi(\omega)$:

$$p_\xi(x)=\begin{cases}x^m e^{-x}/m!, & \text{если } x>0;\\ 0, & \text{если } x\le 0.\end{cases}$$

Решение

$$M\xi=\int\limits_0^\infty xe^{-x}\frac{x^m}{m!}dx=\Gamma(m+2)/m!=m+1;$$

$$M\xi^2=\int\limits_0^\infty x^2x^m\frac{e^{-x}}{m!}dx=\Gamma(m+3)/m!=(m+2)(m+1);$$

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2=m+1.$$

Ответ

$M\xi=D\xi=m+1$.

Задача 15

Функция распределения случайной величины $\xi(\omega)$ равна

$$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ e^{-1/x^\alpha}, & \text{если } x>0,\end{cases}$$

где $\alpha>0$ — постоянная. Найти функцию распределения величины $\eta(\omega)=-1/\xi(\omega)$.

Решение

Так как $F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{-1/\xi < y\} = F_\xi\left(-\frac{1}{y}\right)$, то

$$F_\eta(y) = \begin{cases} e^{-|y|^\alpha}, \text{ если } y \le 0; \\ 1, \text{ если } y > 0. \end{cases}$$

Ответ

$F_\eta(y) = e^{-|y|^\alpha}$, если $y < 0$; $F_\eta(y) = 1$, если $y \ge 0$.

Задача 16

Функция распределения $F_\xi(x)$ величины $\xi(\omega)$ строго монотонна и непрерывна. Найти закон распределения величины $\eta(\omega) = F_\xi(\xi(\omega))$.

Решение

Так как $y = F_\xi(x)$ строго монотонна и непрерывна на $(-\infty, \infty)$, то существует обратная функция $F_\xi^{-1}(y)$, которая тоже монотонна (в данном случае возрастает, так как $F_\xi(x)$ возрастает) и непрерывна на интервале $(0, 1)$. Тогда

$$F_\eta(y) = P\{\eta(\omega) < y\} = P\{\omega:\ F_\xi(\xi(\omega)) < y\} =$$

$$= P\left\{\omega:\ \xi < F_\xi^{-1}(y)\right\} = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ F_\xi(F_\xi^{-1}(y)) = y, & 0 < y \le 1; \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

Ответ

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0; \\ y, & 0 < y \le 1; \\ 1, & y > 1. \end{cases}$$

Задача 17

Диаметр шарика, изготавливаемого цехом, можно считать нормально распределенной случайной величиной со средним значением 2 см и дисперсией 0,0004 см^2. В каких границах можно практически гарантировать диаметр шарика, если за вероятность практической достоверности взять 0,9974?

Решение

Обозначим через $\xi(\omega)$ диаметр шарика, плотность распределения случайной величины $\xi(\omega)$ равна

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,0{,}02}\exp\{-(x-2)^2/(2\cdot 0{,}0004)\}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Надо найти интервал (C_1, C_2), такой, что

$$P\{C_1 < \xi(\omega) < C_2\} = 0{,}9974,$$

и из всех таких интервалов (C_1, C_2) выбрать тот, который имеет наименьшую длину. Очевидно, что это интервал, симметричный относительно значения $x = 2 = M\xi$, где плотность распределения $p_\xi(x)$ максимальная. Таким образом, получаем уравнение:

$$P\{2-\Delta < \xi < 2+\Delta\} = 0{,}9974 \quad (C_1 = 2-\Delta, \ \ C_2 = 2+\Delta).$$

Тогда

$$P\{|\xi - 2| < \Delta\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,0{,}02}\int\limits_{|x-2|<\Delta} \mathrm{e}^{-\frac{(x-2)^2}{2\cdot 0{,}0004}}dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\Delta/0{,}02}^{\Delta/0{,}02}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\Delta/0{,}02}\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}dt = 2\Phi_0\left(\frac{\Delta}{0{,}02}\right) = 2\cdot 0{,}4987.$$

По табл. 2 (см. [1], с. 236) по значению функции $\Phi_0(x) = 0{,}4987$ находим значение аргумента $x = 3$. Тогда $\frac{\Delta}{0{,}02} = 3$ и $\Delta = 0{,}06$,

$$P\{|\xi - 2| < 0{,}06\} = 0{,}9974.$$

Ответ

$P\{1{,}94 < \xi < 2{,}06\} = 0{,}9974$.

Задача 18

Случайная величина $\xi(\omega)$ имеет нормальное распределение с математичесским ожиданием 0 и дисперсией σ^2. Найти $M\xi^k$, $k = 1, 2, \dots$.

Решение

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}, \quad -\infty < x < +\infty,$$

и

$$M\xi^k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k p_\xi(x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx.$$

После замены $\frac{x}{\sigma} = t$, $\frac{dx}{\sigma} = dt$ получаем $M\xi^k = \frac{\sigma^k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2/2} dt$ и (см. задачу 4 разд. 4 данных методических указаний)

$$M\xi^k = \begin{cases} 0, \text{ если } k = 2n-1; \\ (2n-1)!!\sigma^{2n}, \text{ если } k = 2n, \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots .$$

Ответ

$M\xi^{2n-1} = 0$, $M\xi^{2n} = (2n-1)!!\sigma^{2n}$, $n = 1, 2, \dots$.

Задача 19

Случайная величина $\xi(\omega)$ имеет стандартное нормальное распределение. Найти $M\cos\xi$, $M\sin\xi$, $D\cos\xi$, $D\sin\xi$.

Решение

Прежде, чем перейти к решению задачи, найдем интеграл:

$$J(b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \cos bx e^{-x^2/2} dx.$$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} x \sin bx \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx$ сходится равномерно по b, $-\infty < b < +\infty$ (см. § 54, теорема 8 книги: Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т.2. М., 1981), то справедливо равенство:

$$\frac{dJ(b)}{db} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \sin bx \mathrm{e}^{-x^2/2} dx .$$

После интегрирования по частям получаем

$$\frac{dJ(b)}{db} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sin bx \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \Bigg|_{x=-\infty}^{\infty} - \frac{b}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos bx \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = -bJ(b) .$$

Таким образом, функция $J(b)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{dJ(b)}{db} = -bJ(b)$$

с условием $J(0) = 1$. Отсюда $J(b) = \mathrm{e}^{-b^2/2}$. Перейдем к решению задачи. Согласно теореме 1.2 (см. [1], гл. 6, § 1)

$$M \cos\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos x \mathrm{e}^{-x^2/2} dx = \mathrm{e}^{-1/2}, \quad b = 1;$$

$$D \cos\xi = M \cos^2 \xi - \mathrm{e}^{-1};$$

$$M \cos^2 \xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \cos 2x}{2} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2}, \quad b = 2;$$

и тогда $D\cos\xi = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-2}) - \mathrm{e}^{-1} = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{e}^{-1})^2$;

$$M \sin\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin x \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0;$$

$$D\sin\xi = M\sin^2\xi = M\frac{1-\cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2} = \frac{1}{2}(1-e^{-2}), \quad b = 2.$$

Ответ

$$M\cos\xi = e^{-1/2}, \quad D\cos\xi = \frac{1}{2}(1-e^{-1})^2;$$

$$M\sin\xi = 0, \quad D\sin\xi = \frac{1}{2}(1-e^{-2}).$$

Задача 20

Доказать, что если $F(x)$ — функция распределения, то при любом $h \neq 0$ функции

$$\Phi(x) = \frac{1}{h}\int\limits_{x}^{x+h} F(u)\,du \quad \text{и} \quad \Psi(x) = \frac{1}{2h}\int\limits_{x-h}^{x+h} F(u)\,du$$

также являются функциями распределения некоторых случайных величин.

Решение

Известно (см. [1], гл. 5, § 5, с. 80), что любая функция $G(x)$, удовлстворяющая свойствам:

1) если $x_1 \le x_2$, то $G(x_1) \le G(x_2)$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = G(-\infty) = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = G(+\infty) = 1$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0-0} G(x) = G(x_0)$

(или $\lim\limits_{x\to x_0+0} G(x) = G(x_0)$ если за определение функции распределения $F_\xi(x)$ принять следующее $F_\xi(x) = P\{\xi \le x\}$) является функцией распределения некоторой случайной величины.

Так как $F(u)$ — функция распределения некоторой случайной величины, то, используя свойства 1 — 3, можно показать, что и функции $\Phi(x)$ и $\Psi(x)$ тоже удовлетворяют свойствам 1 — 3 и значит являются также функциями распределения.

Задача 21

Случайная величина $\xi(\omega)$ имеет плотность распределения $p_\xi(x) = C\cos x$ при $x \in [-\pi/2, \pi/2]$ и $p_\xi(x) = 0$ вне этого интервала. Найти C, функцию распределения $F_\xi(x)$, $M\xi^3$. Построить график функции распределения.

Решение

Постоянную C находим из условия нормировки: $\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} C\cos x\,dx = 1$.

Следоватсльно, $C = 1/2$, тогда $M\xi^3 = \frac{1}{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} x^3 \cos x\,dx = 0$,

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le -\pi/2; \\ \frac{1}{2}(1+\sin x), \text{ если } -\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{2}; \\ 1, \text{ если } x > \pi/2. \end{cases}$$

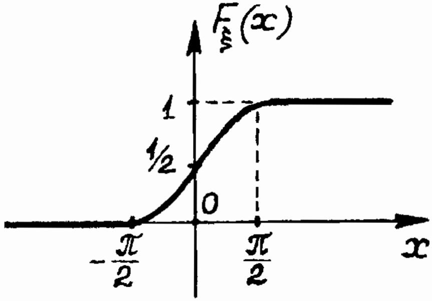


Рис. 7

График функции $F_\xi(x)$ приведен на рис. 7.

Ответ

$C = 1/2$; $F_\xi(x) = 0$, если $x \le -\pi/2$;

$F_\xi(x) = (1+\sin x)/2$, если $-\pi/2 < x \le \pi/2$;

$F_\xi(x) = 1$, если $x > \pi/2$; $M\xi^3 = 0$.

Задача 22

Случайная величина $\xi(\omega)$ нормально распределена с параметрами $N(a, \sigma^2)$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta(\omega) = \alpha\xi(\omega) + \beta$, где $\alpha \ne 0$ и β — константы.

Решение

Согласно теореме 6.2 (см. [1], гл. 5, § 6) с $r = 1$, $g(x) = \alpha x + \beta$ и $g^{-1}(y) = (y - \beta)/\alpha$, получаем $p_\eta(y)$.

Ответ

$$p_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma|\alpha|} \exp\left\{-\frac{(y - \alpha a - \beta)^2}{2\sigma^2\alpha^2}\right\}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

Замечание. Можно было воспользоваться и теоремой 6.3 (см. [1], гл. 5, § 6), где было показано, что линейная функция от нормально распределенной случайной величины снова нормально распределенная случайная величина с параметрами a_1 и σ_1, где $a_1 = a\alpha + \beta$, $\sigma_1 = \sigma\,|\,\alpha\,|$.

Задача 23

Решить задачу 22, если $\xi(\omega)$ равномерно распределена на отрезке $[a, b]$.

Решение

В данном случае

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x \notin [a, b]; \\ \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b]. \end{cases}$$

Решим задачу непосредственно: пусть $\eta = \alpha\xi + \beta$, $\alpha \ne 0$ и β — константы.

А. При $\alpha > 0$

$$F_\eta(y) = P\{\eta < y\} = P\{\alpha\xi + \beta < y\} = P\left\{\xi < \frac{y-\beta}{\alpha}\right\} =$$

$$= \begin{cases} 0, \text{ если } \dfrac{y-\beta}{\alpha} \le a; \\ \left(\dfrac{y-\beta}{\alpha} - a\right)/(b-a), \text{ если } a < \dfrac{y-\beta}{\alpha} \le b; \\ 1, \text{ если } \dfrac{y-\beta}{\alpha} > b; \end{cases}$$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} 0, \text{ если } \dfrac{y-\beta}{\alpha} \notin [a,b]; \\ \dfrac{y}{\alpha(b-a)}, \text{ если } \dfrac{y-\beta}{\alpha} \in [a,b]. \end{cases}$$

Б. Пусть $\alpha < 0$, тогда

$$F_\eta(y) = 1 - P\left\{\xi < \frac{y-\beta}{\alpha}\right\} = 1 - \begin{cases} 0, \text{ если } \dfrac{y-\beta}{\alpha} \le a; \\ \left(\dfrac{y-\beta}{\alpha} - a\right)/(b-a), \text{ если } a < \dfrac{y-\beta}{\alpha} \le b; \\ 1, \text{ если } \dfrac{y-b}{\alpha} > b. \end{cases}$$

<u>**Ответ**</u>

Если $\alpha > 0$, то $p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{\alpha(b-a)}, \text{ если } y \in [\alpha a + \beta, b\alpha + \beta]; \\ 0, \text{ если } y \notin [\alpha a + \beta, \alpha b + \beta]. \end{cases}$

Если $\alpha < 0$, то $p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{y}{|\alpha|(b-a)}, \text{ если } y \in [\alpha b + \beta, a\alpha + \beta]; \\ 0, \text{ если } y \notin [\alpha b + \beta, a\alpha + \beta]. \end{cases}$

Задача 24

Случайная величина $\xi(\omega)$ имеет экспоненциальное распределение с параметром $\lambda > 0$. Доказать, что при линейном преобразовании случайной величины $\xi(\omega)$ закон распределения не сохраняется.

Решение

Применим теорему 6.2 (см. [1], гл. 5, § 6) с $r = 1$ и $g = g(x) = \alpha x + \beta$, $g^{-1}(y) = \dfrac{y-\beta}{\alpha}$. Тогда (при $\alpha > 0$)

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\alpha} e^{-\lambda \frac{y-\beta}{\alpha}}, & \text{если } y > \beta; \\ 0, & \text{если } y \le \beta. \end{cases}$$

Ответ

При $\alpha > 0$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{\alpha} e^{-\lambda \frac{y-\beta}{\alpha}}, & \text{если } y > \beta; \\ 0, & \text{если } y \le \beta; \end{cases}$$

при $\alpha < 0$

$$p_\eta(y) = \begin{cases} \dfrac{\lambda}{|\alpha|} e^{-\lambda \frac{y-\beta}{\alpha}}, & \text{если } y < \beta; \\ 0, & \text{если } y \ge \beta. \end{cases}$$

Замечание. В задачах 22 и 23 мы видели, что вид функциональной зависимости от x в плотности распределения случайной величины $\eta = \alpha\xi + \beta$ сохранился, изменились «линейно» только параметры распределения, т.е. равномерный и нормальный законы распределения обладают устойчивостью по отношению к линейным преобразованиям.

В данной задаче (при экспоненциально распределенной случайной величине) устойчивости не наблюдается.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Найти функцию распределения $F_{\chi_A}(x)$ индикатора события A, вероятность которого равна 0,3. Найти также $M\chi_A$, $D\chi_A$.

2. Из партии в 20 деталей, среди которых 4 бракованных, выбрали случайным образом 3 изделия для проверки их качества. Найти закон распределения случайной величины ξ — числа бракованных изделий среди взятых.

3. Закон распределения случайной величины ξ задан табл. 5.

Таблица 5

x	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$P\{\xi = x\}$	1/6	1/3	1/2

Найти закон распределения случайной величины $\eta_1 = \cos\xi$, $M\eta_2$ и $D\eta_2$, где $\eta_2 = \sin^2\xi$.

4. Закон распределения случайной величины ξ задан табл. 6.

Таблица 6

x	$-\pi/2$	$-\pi/4$	0	$\pi/4$	$\pi/2$
$P\{\xi = x\}$	1/35	3/35	6/35	10/35	15/35

Найти закон распределения случайной величины $\eta_1 = \cos\xi$, функцию распределения $F_{\eta_1}(y)$, $M\eta_2$ и $D\eta_2$, где $\eta_2 = \cos^2\xi$.

5. Найти математическое ожидание и дисперсию ξ — числа изделий, изготавливаемых на поточной линии при нормальной настройке за период между двумя переналадками, если при нормальной настройке вероятность изготовления бракованного изделия равна p, а переналадка производится после изготовления k-го бракованного изделия.

6. Станки расположены по кругу, расстояние между соседними станками равно a, число станков равно n. Рабочий обслуживает станки в порядке возникновения отказов, двигаясь по часовой стрелке по кругу. Вероятность возникновения требования на обслуживание на каждом станке одна и та же и равна $1/n$. Найти среднюю длину перехода, который должен сделать рабочий при поступлении одного требования на обслуживание. В начальный момент рабочий находился у станка с номером 0.

7. Дискретная случайная величина ξ имеет ряд распределения (табл. 7).

Таблица 7

m	–2	–1	0	1	2
$P\{\xi = m\}$	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Построить ряды распределения случайных величин $\eta_1 = \xi^2 + 1$ и $\eta_2 = |\xi|$.

8. Мишень состоит из круга *1* и двух колец *2* и *3*. Попадание в круг дает 10 очков, в кольцо *2* пять очков, в кольцо 3 минус одно очко. Вероятности попадания в круг *1* и кольца *2* и *3* соответственно равны: 0,5; 0,3 и 0,2. Найти ряд распределения для случайной величины ξ — суммы выбитых очков в результате трех попаданий.

9. При игре в городки остался невыбитым один городок, а у игрока осталось n бит. Найти закон распределения случайной величины ξ — числа неиспользованных бит, которые остаются у игрока после того, как последний городок будет выбит, если вероятность выбить городок одним броском равна p.

10. В условиях задачи 9 найти закон распределения случайной величины η — числа использованных бит.

11. Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадет. Найти закон распределения случайной величины ξ_k — числа бросков, производимых k-м баскетболистом ($k = 1, 2$), если вероятность попадания для первого баскетболиста (начавшего бросания) равна 0,4, а для второго — 0,6. Найти $M\xi_k$, $D\xi_k$, $\varphi_{\xi_k}(z)$, $k = 1, 2$.

12. В результате испытаний двух приборов А и Б установлена вероятность наблюдения помех, оцениваемых по трехбалльной системе (табл. 8).

Таблица 8

Уровень помех	1	2	3
Вероятность наблюдения помех данного уровня:			
прибор *А*	0,20	0,06	0,04
прибор *Б*	0,08	0,03	0,10

По приведенным данным выбрать лучший прибор, если лучшим считается тот, который в среднем имеет меньший уровень помех. В случае равенства средних выбирается тот, у которого меньше среднеквадратическое отклонение σ.

13. В партии однородных деталей каждое изделие может быть бракованным с вероятностью 0,1. На проверку взято 10 деталей, которые проверяются последовательно до получения второй бракованной детали. Партия бракуется, если число бракованных деталей в партии больше или равно двум. Найти закон распределения случайной величины ξ — числа проверенных деталей.

14. Двое поочередно бросают монету до тех пор, пока у обоих не выпадет одинаковое число гербов. Вероятность того, что после $2n$ бросаний у обоих будет одинаковое число гербов равна $p_n = \dfrac{(2n-2)!}{2^{2n-1} n!(n-1)!}$. Найти среднее значение случайной величины ξ — числа проведенных бросаний.

15. Функция распределения случайной величины ξ равна

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le 2; \\ (x-2)^2, \text{ если } 2 < x \le 3; \\ 1, \text{ если } x > 3. \end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения случайной величины ξ; б) вероятность попадания ξ в интервалы (1; 2,5), (2,5; 3,5).

16. Плотность случайной величины ξ равна

$$p_{\xi}(x) = A(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x})^{-1}, \quad -\infty < x < \infty .$$

Найти: а) коэффициент A; б) вероятность того, что в двух независимых наблюдениях ξ примет значение, меньшее единицы.

17. Случайная величина ξ имеет распределение:

$$F_{\xi}(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x^2/2\sigma^2}, \quad x \geq 0; \quad F_{\xi}(x) = 0, \quad x < 0.$$

Найти: а) плотность распределения случайной величины $p_{\xi}(x)$; б) ее моду (значение x, при котором плотность распределения максимальна); в) медиану M_0 (значение, при котором $P\{\xi > M_0\} = P\{\xi < M_0\} = 0{,}5$).

18. Предположим, что артиллерийское орудие расположено на единичном расстоянии от сколь угодно длинной стены. Лафет орудия вращается с постоянной скоростью. При каждом обороте в случайный момент времени из орудия производят выстрел. Как при этом распределены попадания по стене?

19. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-1, 2]$. Найти плотность распределения случайной величины $\eta = \xi^2$, $M\xi$, $D\xi$.

20. Случайная величина ξ имеет нормальное распределение с параметрами $a = 2$, $\sigma^2 = 4$. Найти: а) распределение величин $\eta_1 = 3\xi + 2$, $\eta_2 = -\xi + 5$; б) $P\{-4 \leq \eta_1 \leq 11\}$, $P\{|\eta_2| < 7\}$.

21. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[-3, 3]$. Найти: а) $M\xi$, $D\xi$; б) распределение случайных величин $\eta_1 = 2\xi - 5$ и $\eta_2 = -3\xi + 1$; в) $P\{|\eta_1| < 5\}$, $P\{\eta_2 \in (2, 12)\}$.

22. Коробки с шоколадом упаковываются автоматически; их средняя масса равна 1,06 кг. Найти стандартное отклонение, если 5 % коробок имеют массу меньше 1 кг. Предполагается, что масса коробок распределена по нормальному закону.

23. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины ξ, имеющей распределение Лапласа:

$$p_\xi(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-|x|\lambda}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad \lambda > 0 \text{ — постоянная.}$$

24. Найти среднее значение длины хорды, соединяющей заданную точку окружности радиусом R с произвольной точкой этой окружности.

25. Найти начальные моменты m_k случайной величины τ_n, имеющей распределение Стьюдента с n степенями свободы:

$$p_{\tau_n}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \frac{\Gamma((n+1)/2)}{\Gamma(n/2)} \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad k < n.$$

26. Случайная величина ξ нормально распределена с параметрами $a = 0$ и $\sigma^2 = 1$. Найти: а) распределение случайной величины

$$\eta = \begin{cases} \xi, \text{ если } |\xi| \le 1; \\ -\xi, \text{ если } |\xi| > 1; \end{cases}$$

б) имеет ли величина $\xi + \eta$ нормальное распределение.

27. Плотность вероятности случайных амплитуд бортовой качки корабля

$$p_\xi(x) = \frac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}, \quad x \ge 0, \quad p_\xi(x) = 0, \quad x < 0.$$

Найти $M\xi$, $D\xi$, среднеквадратичное отклонение σ_ξ, центральные моменты 3-го и 4-го порядков (μ_3 и μ_4).

28. На отрезке длиной l произвольно выбраны две точки M_1 и M_2. Найти среднее значение длины отрезка $M_1 M_2$.

ОТВЕТЫ К ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

1. $F_{\chi_k}(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x\le 0;\\ 0{,}3, & \text{если } 0<x\le 1;\\ 1, & \text{если } x>1;\end{cases}$ $M\chi_A=0{,}3;$ $D\chi_A=0{,}21.$

2. $P\{\xi=m\}=C_4^m C_{16}^{3-m}/C_{20}^3,\quad m=\overline{0,3}.$

3. $P\{\eta_1=0\}=\dfrac{1}{2},\quad P\left\{\eta_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}=\dfrac{1}{3},\quad P\{\eta_1=1\}=\dfrac{1}{6},$

$M\eta_2=\dfrac{2}{3},\quad D\eta_2=5/36.$

4. $P\{\eta_1=0\}=\dfrac{16}{35},\quad P\left\{\eta_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}=\dfrac{13}{35},\quad P\{\eta_1=1\}=\dfrac{6}{35},$

$$F_{\eta_1}(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y\le 0;\\ \dfrac{16}{35}, & \text{если } 0<y\le\dfrac{\sqrt{2}}{2};\\ \dfrac{29}{35}, & \text{если } \dfrac{\sqrt{2}}{2}<y\le 1;\\ 1, & \text{если } y>1,\end{cases}$$

$M\eta_2=\dfrac{5}{14},\quad D\eta_2=\dfrac{67}{490}.$

5. $M\xi=\dfrac{k}{p},\quad D\xi=\dfrac{k(1-p)}{p}.$

6. $M\xi=\dfrac{a}{2}(n-1).$

7.

m	1	2	5
$P\{\eta_1 = m\}$	0,3	0,5	0,2

m	0	1	2
$P\{\eta_2 = m\}$	0,3	0,5	0,2

8.

m	–3	3	8	9	14	15	19	20	25	30
$P\{\xi = m\}$	0,008	0,036	0,06	0,054	0,18	0,027	0,15	0,135	0,225	0,125

9. $P\{\xi = m\} = \begin{cases} q^{n-1}, \text{ если } m = 0; \\ q^{n-m-1}p, \text{ если } 1 \le m \le n-1. \end{cases}$

10. $P\{\eta = m\} = pq^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1;$

$P\{\eta = n\} = q^{m-1}.$

11. $P\{\xi_1 = m\} = 0{,}76 \cdot 0{,}24^{m-1}, \quad m = 1, 2, \ldots;$

$P\{\xi_2 = 0\} = 0{,}4; \quad P\{\xi_2 = n\} = 0{,}76 \cdot 0{,}24^{n-1} \cdot 0{,}6, \quad n = 1, 2, \ldots;$

$$\varphi_{\xi_1}(z) = \frac{0{,}76z}{1 - 0{,}24z}, \quad |z| < \frac{25}{6};$$

$$\varphi_{\xi_2}(z) = 0{,}4 + \frac{0{,}6 \cdot 0{,}76z}{1 - 0{,}24z}, \quad |z| < \frac{25}{6};$$

$$M\xi_1 = \frac{25}{19}, \quad D\xi_1 = \frac{150}{361}, \quad M\xi_2 = \frac{15}{19}, \quad D\xi_2 = \frac{240}{361}.$$

12. $M\xi_A = 0{,}44$ (балла), $M\xi_B = 0{,}44$ (балла),

$\sigma_A = \sqrt{D\xi_A} = \sqrt{0{,}80 - 0{,}442} = 0{,}78$ (балла),

$\sigma_B = \sqrt{D\xi_B} = 0{,}97$ (балла).

13. $P\{\xi = m\} = C_{m-1}^1 \cdot 0{,}1^2 \cdot 0{,}9^{m-2}$, $\quad m = \overline{2{,}9}$,

$P\{\xi = 10\} = 2 \cdot 0{,}9^9$.

14. $M\xi$ не существует.

15. $p_\xi(x) = 2(x-2)$, если $x \in (2, 3]$; $p_\xi(x) = 0$, если $x \notin (2, 3]$;

1) 0,25; 2) 0,75.

16. $A = \dfrac{2}{\pi}$, $\left(\dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} e\right)^2$.

17. $p_\xi(x) = 0$, если $x < 0$; $p_\xi(x) = \dfrac{x}{\sigma^2} e^{-x^2/2\sigma^2}$, если $x \geq 0$;

$\max\limits_{0 \leq x < \infty} p_\xi(x) = \dfrac{1}{\sigma} e^{-1/2}$; $M_0 = \sigma\sqrt{2\ln 2}$.

18. $p_\xi(x) = \dfrac{1}{\pi} \cdot \dfrac{1}{1+x^2}$, $\quad -\infty < x < +\infty$.

19. $p_\eta(y) = 0$, если $y \leq 0$ и $y > 4$; $p_\eta(y) = \dfrac{1}{3\sqrt{y}}$, если $0 < y \leq 1$;

$p_\eta(y) = \dfrac{1}{6\sqrt{y}}$, если $1 < y \leq 4$; $M\xi = \dfrac{1}{2}$, $D\xi = \dfrac{3}{4}$.

20. $p_{\eta_1}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, 6} e^{-\frac{(x-8)^2}{72}}$;

$p_{\eta_2}(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, 2} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}$, $\quad -\infty < x < +\infty$;

$P\{-4 \leq \eta_1 \leq 11\} = 0{,}66871$; $P\{|\eta_2| < 7\} = 0{,}97725$.

21. а) $M\xi = 0$, $D\xi = 3$;

б) $p_{\eta_1}(x) = \dfrac{1}{12}$, если $x \in [-11, 1]$; $p_{\eta_1}(x) = 0$, если $x \notin [-11, 1]$;

$p_{\eta_2}(x) = \frac{1}{18}$, если $x \in [-8, 10]$; $p_{\eta_2}(x) = 0$, если $x \notin [-8, 10]$;

в) $P\{|\eta_1| < 5\} = 0{,}5$; $P\{\eta_2 \in (2, 12)\} = 4/9$.

22. $\sigma = 0{,}0365$ кг.

23. $M\xi = 0$, $D\xi = 2/\lambda^2$.

24. $M\xi = 4R/\pi$.

25. $m_{2l} = \frac{(2l-1)(2l-3)\ldots 3 \cdot 1}{(n-2)(n-4)\ldots(n-2l)} n^l$; $m_{2l-1} = 0$, если $2l < n$.

26. а) $\eta \sim N(0, 1)$; б) нет.

27. $M\xi = \sigma\sqrt{\pi/2}$, $D\xi = \sigma^2(2 - \pi./2)$, $\sigma_\xi = \sigma\sqrt{2 - \pi/2}$,

$\mu_3 = \sigma^3(\pi - 3)\sqrt{\frac{\pi}{2}}$, $\mu_4 = \sigma^4(8 - 3\pi^2/4)$.

28. $l/3$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. М.: Агар, 2000.

2. *Полякова Е.И., Постникова Л.П.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: МИФИ, 2004.

3. Методические указания к решению задач по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» (часть 1). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин*. М.: МИФИ, 1999.

4. Методические указания к решению задач по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» (часть 2). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин*. М.: МИФИ, 1999.

5. Методические указания к решению задач по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» (часть 3). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин*. М.: МИФИ, 1999.

6. Методические указания к решению задач по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» (часть 4). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин*. М.: МИФИ, 2000.

7. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические рекомендации (часть 1). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин*. М.: МИФИ, 2008.

СОДЕРЖАНИЕ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации

(часть 2)

Составители: Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин

Редактор и технический редактор М.В. Макарова
Оригинал-макет изготовлен М.В. Макаровой

Подписано в печать 05.03.2008. Формат 60x84 1/16.
Печ.л. 4,25. Уч.-изд.л. 4,25. Тираж 100 экз.
Изд. № 003-1. Заказ № 59

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет).
Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31