МИФИ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации

(часть 1)

Москва 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации

(часть 1)

Москва 2008

УДК 519.2(07)
ББК 22.17я7
М 54

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА: Методические рекомендации (часть 1). В 4-х частях. М.: МИФИ, 2008. 60 с.

Предлагаемые методические рекомендации (в 4-х частях) представляют собой исправленное издание ранее опубликованных работ: Методические указания к решению задач по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика». В 4-х частях / Сост. Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин. М.: МИФИ, 1999 — 2000. В данной работе, являющейся исправленным изданием работы [3], предлагаются решения почти всех задач из § 1 и § 2 сборника задач [2] с добавлением задач по темам этих параграфов. Необходимые ссылки на теоретический материал (определения, теоремы и т.д.) приведены по учебнику: Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Агар, 2000.

Методические рекомендации предназначены для студентов, изучающих курс теории вероятностей и математической статистики в течение одного семестра, и посвящены разбору задач из книги: Полякова Е.И., Постникова Л.П. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: МИФИ, 2004. Указанные методические рекомендации будут полезны также преподавателям, ведущим практические занятия по теории вероятностей и математической статистике.

Составители: Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

1. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО. КЛАССИЧЕСКОЕ ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТИ

Согласно формуле (1.1) (см. [1], гл. 2, § 1) $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}=\frac{N(A)}{N}$. В дальнейшем будем использовать обозначение $N=|\Omega|$, $N(A)=$ $=|A|$.

Задача 1

Верно ли утверждение: "из $A+B=B$ следует $A=\varnothing$"?

а) Для любых A и B. б) Для несовместных A и B.

Ответ

а) Нет. Например, если $A \subset B$, то $A+B=B$, при этом A может быть и отлично от $\varnothing$. б) Да.

Задача 2

При каких условиях возможно равенство $AB=A+B$?

Ответ

$A=B$.

Задача 3

Прибор состоит из двух блоков первого типа и трех блоков второго типа. Событие A_i состоит в том, что исправен i-й блок первого типа ($i=1, 2$). Событие B_j — в том, что исправен j-й блок второго типа ($j=1, 2, 3$). Прибор работает, если исправен хотя бы один блок первого типа и хотя бы два блока второго типа. Событие D состоит в том, что прибор работает.

Выразить события D и $\overline{D}$ через события A_i, $\overline{A}_i$, B_j, $\overline{B}_j$.

Решение

1. Событие "исправен хотя бы один блок первого типа" есть сумма событий A_1 и A_2 (событие $A_1 + A_2$).

2. Событие "исправны хотя бы два блока второго типа" есть сумма следующих событий: 1) исправны 1-й и 2-й блоки второго типа; 2) исправны 1-й и 3-й блоки второго типа; 3) исправны 2-й и 3-й блоки второго типа. Каждое из этих событий есть соответственно произведение событий B_1B_2, B_1B_3 и B_2B_3, сумма которых равна

$$B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3.$$

Событие D есть произведение событий, найденных в пунктах 1 и 2, т.е.

$$D = (A_1 + A_2)(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3).$$

Рассмотрим событие $\overline{D}$. Согласно свойствам операций над событиями (см. [1], гл. 1, § 2):

$$\overline{D} = \overline{(A_1 + A_2)(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3)} =$$
$$= \overline{(A_1 + A_2)} + \overline{(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3)}.$$

Первое слагаемое есть событие "не работают оба блока первого типа", т.е. $\overline{(A_1 + A_2)} = \overline{A}_1\overline{A}_2$. Второе слагаемое — событис "не работают хотя бы два блока второго типа"

$$\overline{(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3)} = \overline{(B_1B_2)}\,\overline{(B_1B_3)}\,\overline{(B_2B_3)} =$$
$$= (\overline{B}_1 + \overline{B}_2)(\overline{B}_1 + \overline{B}_3)(\overline{B}_2 + \overline{B}_3) =$$
$$= \overline{B}_1\overline{B}_2 + \overline{B}_1\overline{B}_3 + \overline{B}_2\overline{B}_3,$$

так как $\overline{B}_i\overline{B}_i\overline{B}_j = \overline{B}_i\overline{B}_j$ для $i \neq j$, а $\overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3 \subset \overline{B}_i\overline{B}_j$, окончательно, $\overline{D} = \overline{A}_1\overline{A}_2 + \overline{B}_1\overline{B}_2 + \overline{B}_1\overline{B}_3 + \overline{B}_2\overline{B}_3$.

Ответ

$$D = (A_1 + A_2)(B_1B_2 + B_1B_3 + B_2B_3),$$
$$\overline{D} = \overline{A}_1\overline{A}_2 + \overline{B}_1\overline{B}_2 + \overline{B}_1\overline{B}_3 + \overline{B}_2\overline{B}_3.$$

Задача 4

Сколько раз нужно бросить пару игральных костей для того, чтобы появление хотя бы при одном бросании 12 очков имело вероятность, большую одной второй?

Решение

Пусть пара игральных костей брошена n раз,

$$\Omega = \left\{ \omega = \begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_n \\ b_1 b_2 \ldots b_n \end{pmatrix},\ a_i b_i = \overline{1,6},\ i = \overline{1,n} \right\},$$

где $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ выпадение числа очков, равное a_i и b_i при i-м бросании двух игральных костей. Согласно [2], с. 5, 1-й случай, имеем $N = (6^2)^n = 36^n$ (выбор с возвращением упорядоченный). Обозначим событие

$$A = \left\{ \begin{array}{l} \text{12 очков выпало хотя бы один раз при } n \\ \text{бросаниях двух игральных костей} \end{array} \right\} =$$

$= \{\omega\ldots$ хотя бы один столбец $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix},\ i = \overline{1,n}\}$. Очевидно, легче найти $N(\overline{A})$. Событие $\overline{A} = \{$12 очков не выпало ни разу$\}$ $= \left\{ \omega\ldots\forall i \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$. Столбец $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ можно выбрать $36 - 1 = 35$ способами, при этом $i = \overline{1,n}$, следовательно, $N(\overline{A}) = 35^n$ и $P(\overline{A}) = 35^n / 36^n = (35/36)^n$, и, так как $P(A) = 1 - P(\overline{A})$ (см. [1], гл. 1, § 3), $P(A) = 1 - (35/36)^n$. Далее n находим из условия $P(A) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{1}{2}$, $n > \frac{\ln 1/2}{\ln 35/36}$ и $n > 25$.

Ответ

$n > 25$.

Задача 5

На десяти карточках написаны буквы А, Г, И, Л, О, П, Р, Т, У, Я. Какова вероятность, расположив эти карточки в произвольном порядке, получить слово “Португалия”?

Решение

Пронумеруем карточки числами от 1 до 10, тогда a_i — номер карточки, стоящей на i-м месте,

$$\Omega = \{ \omega = (a_1, a_2, ..., a_{10}),\quad a_i = \overline{1,10},\ \ i = \overline{1,10},\ \text{при}\ \ i \neq j\quad a_i \neq a_j \}$$

(выбор без возвращения упорядоченный, так как все карточки располагаются в ряд и получающиеся "слова" зависят от порядка следования карточек). Согласно [2], с. 5, $N = 10!$. Событие A = {получившееся слово — слово "Португалия" } = {ω = (6, 5, 7, 8, 9, 2, 1, 4, 3, 10)}, $N(A) = 1$.

Ответ

$P(A) = 1/10!$

Задача 6

В урне m белых и n черных шаров. Из урны извлекают два шара: а) одновременно; б) последовательно с возвращением. Какова вероятность, что оба извлеченных шара окажутся белыми, черными, разных цветов?

Решение

Обозначим события: A = {оба шара белые}, B = {оба шара черные}, C = {шары разных цветов} = {один шар белый, один шар черный}.

Пронумеруем шары, причем шары с номерами от 1 до m условимся считать белыми, а шары с номерами от $m + 1$ до $m + n$ — черными.

В данной задаче речь идет о двух способах взятия шаров: последовательно и одновременно, поэтому для каждого из этих способов взятия шаров будет свое пространство элементарных событий.

а) Шары берутся одновременно:

$$\Omega = \{ \omega = (a_1, a_2),\quad a_i = \overline{1, m+n},\ \ i = 1,2,\quad a_1 \neq a_2 \},$$

выбор без возвращения упорядоченный, тогда $N = A_{m+n}^2 = (n + m)(n + m - 1)$, (см. [2], с. 5, случай 3)

$$A = \{ \omega = (a_1, a_2),\quad a_i = \overline{1, m},\ \ i = 1,2,\quad a_1 \neq a_2 \};$$

$$B = \{ \omega = (a_1, a_2),\quad a_i = \overline{m+1, m+n},\ \ a_1 \neq a_2 \};$$

$$C = \{\ \omega = (a_1, a_2), \quad a_1 = \overline{1, m}\ , \quad a_2 = \overline{m+1, m+n}$$
$$\text{или} \quad a_1 = \overline{m+1, m+n}\ , \quad a_2 = \overline{1, m}\ \};$$

Так как выбор без возвращения, то

$$N(A) = A_m^2 = m(m-1)\ , \quad N(B) = A_n^2 = n(n-1)\ ,$$
$$N(C) = mn + nm = 2mn$$

и

$$P(A) = \frac{m(m-1)}{(n+m)(n+m-1)}\ , \quad P(B) = \frac{n(n-1)}{(n+m)(n+m-1)}\ ,$$
$$P(C) = \frac{2mn}{(n+m)(n+m-1)}\ .$$

Примечание. Так как события A, B, C попарно несовместны и $A + B + C = = \Omega$, то $C = \overline{A + B}$ и $P(C)$ можно было найти из соотношения

$$P(C) = 1 - P(A) - P(B).$$

В событиях A, B и C порядок взятия шаров роли не играет, важно только что взято, поэтому можно выбор рассматривать неупорядоченным, тогда (согласно [2], с. 5, случай 4):

$$N = C_{n+m}^2\ , \quad N(A) = C_m^2\ ,$$
$$N(B) = C_n^2\ , \quad N(C) = nm = C_n^1 C_m^1\ .$$

Нетрудно убедиться, что в этом случае ответ тот же, что и в случае упорядоченного выбора.

б) Шары берутся последовательно с возвращением:

$$\Omega = \{\ \omega = (a_1, a_2), \quad a_i = \overline{1, n+m}\ , \quad i = 1,2\ \};$$
$$N = (n+m)^2\ , \quad N(A) = m^2\ , \quad N(B) = n^2\ ;$$
$$N(C) = 2mn \quad \text{и} \quad P(A) = \frac{m^2}{(n+m)^2}\ , \quad P(B) = \frac{n^2}{(n+m)^2}\ ;$$
$$P(C) = \frac{2mn}{(n+m)^2}\ .$$

Ответ

а) $P(A) = \dfrac{m(m-1)}{(m+n)(m+n-1)}$, $P(B) = \dfrac{n(n-1)}{(m+n)(m+n-1)}$, $P(C) =$
$= \dfrac{2mn}{(m+n)(m+n-1)}$.

б) $P(A) = \dfrac{m^2}{(m+n)^2}$, $P(B) = \dfrac{n^2}{(m+n)^2}$, $P(C) = \dfrac{2mn}{(m+n)^2}$.

Задача 7

В урне m белых и n черных шаров. Из урны вынимают все шары подряд. Какова вероятность того, что k-м будет извлсчсн белый шар?

Решение

Как и в задаче 6, пронумеруем шары числами 1, 2, ..., $m+n$, причем шары с номерами 1, 2, ..., m — белые, а с номерами $m+1$, ..., $m+n$ — черные. Пусть $1 \le k \le m+n$. Обозначим $A_k = = \{k$-й извлеченный шар белый$\}$.

Рассмотрим два способа решения данной задачи.

Способ 1

Взяли все шары. Тогда

$$\Omega = \{\, \omega = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_{n+m}),\ \ a_i = \overline{1, m+n},\ \ i = \overline{1, m+n},$$
$$\text{при}\ \ i \ne j\ \ \ a_i \ne a_j \,\}.$$

Выбор без возвращения упорядоченный, поэтому $N = A_{n+m}^{n+m} = = (n+m)!$ (см. [2], с. 5, случай 3), $A_k = \{\, \omega = (a_1, \dots, a_k, \dots, a_{n+m}), \dots, a_k = \overline{1, m}\,\}$. При определении $N(A_k)$ начинаем с ограничения: k-й извлеченный шар — белый; a_k можно взять m способами, оставшиеся числа $a_1, \dots, a_{k-1}, a_{k+1}, \dots, a_{m+n}$ выбираются произвольно по схеме выбора без возвращения упорядочено из множества, содержащего $m+n-1$ число, $(m+n-1)!$ способами. Используя основной принцип комбинаторики (правило умножения, см. [2], с. 3), получаем $N(A_k) = m(m+n-1)!$ и тогда

$$P(A_k) = \frac{m(n+m-1)!}{(n+m)!} = m/(n+m).$$

Способ 2

Так как нас интересует только то, что было взято при k-м извлечении, то в качестве всех возможных исходов можно рассматривать выбор только k-го числа. Тогда $\Omega = \{\omega = (a_k), \quad a_k = \overline{1, m+n}\}$, k — фиксированное число, $1 \le k \le m+n$ и $N = m + + n$, $N(A_k) = m$.

Ответ

$$P(A_k) = \frac{m}{n+m}.$$

Задача 8

Выписано три случайных цифры. Найти вероятности событий: $A = \{$все выписанные цифры одинаковы$\}$, $B = \{$все выписанные цифры различны$\}$, $C = \{$среди выписанных цифр ровно две совпадают$\}$.

Решение

Согласно [1], гл. 2, § 5, в этом случае

$$\Omega = \{\omega = (a_1, a_2, a_3), \quad a_i = \overline{0,9}, \quad i = \overline{1,3}\},$$

и $N = 10^3$ — выбор с возвращением упорядоченный

$$A = \{\omega = (a_1, a_1, a_1), \quad a_1 = \overline{0,9}\}, \; N(A) = 10$$

и $P(A) = 0,01$;

$$B = \{\omega = (a_1, a_2, a_3), \quad a_i = \overline{0,9}, \text{ при } \; i \ne j \quad a_i = a_j\} \text{ —}$$

выбор без возвращения (все числа различные!) и

$$N(B) = A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720, \quad P(B) = 0,72.$$

Так как $A + B = \overline{C}$ и $AB = \varnothing$, то $P(C) = 1 - P(A) - P(B) = 0,27$.

Ответ

$P(A) = 0,01$; $P(B) = 0,72$; $P(C) = 0,27$.

Задача 9

Найти вероятности того, что дни рождения 12 человек придутся на разные месяцы года.

Решение

Как и при решении предыдущих задач, пронумеруем 12 человек числами 1, 2, ..., 12. Тогда

$$\Omega = \{\, \omega = (a_1, \ldots, a_{12}),\;\; a_i = \overline{1,12},\;\; i = \overline{1,12}\, \},$$

где a_i — номер месяца в году, в котором родился i-й человек. Выбор с возвращением упорядоченный. Тогда $N = 12^{12}$. Обозначим $A = \{$дни рождения 12 человек пришлись на разные месяцы$\}$. Событие A осуществляется при выборе чисел $a_1, \ldots, a_{12}$ без возвращения и упорядочено, т.е.

$$N(A) = A_{12}^{12} = 12! \;\text{ и }\; P(A) = 12!/12^{12}.$$

Ответ

$P(A) = 12!/12^{12}$.

Задача 10

Сравнить вероятности событий: $A = \{$при одновременном подбрасывании 4-х костей хотя бы один раз выпала “1”$\}$, $B = \{$при подбрасывании двух костей 24 раза хотя бы один раз появились две “1”$\}$.

Решение

События A и B связаны с двумя разными пространствами элементарных событий: Ω_1 — множество всех исходов при бросании 4-х костей и Ω_2 — множество всех исходов при 24 бросаниях двух игральных костей.

$\Omega_1 = \{\, \omega = (a_1, \ldots, a_4),\; a_i = \overline{1,6},\; i = \overline{1,4}\, \}$, $N_1 = 6^4$. Найдем $N(A)$.

Фраза «“1” выпала хотя бы один раз» означает, что “1” выпала или только один раз, или только два раза, или только три раза, или только четыре раза. В событие A не вошел только один случай: когда “1” нс выпала ни разу. Событие A является дополнением к событию $\overline{A}$, состоящему в том, что “1” не выпала ни разу и

$$\overline{A} = \{\, \omega = (a_1, a_2, a_3, a_4),\ \ a_i = \overline{2,6}\,,\ \ i = \overline{1,4}\,\}.$$

Легче найти $N(\overline{A})$ и, тем самым, $P(\overline{A})$: $N(\overline{A}) = 5^4$ и $P(\overline{A}) = 5^4/6^4$. Тогда $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 \cong 0{,}5177.$

Перейдсм к

$$\Omega_2 = \left\{ \omega = \begin{pmatrix} a_1 a_2 \ldots a_{24} \\ b_1 b_2 \ldots b_{24} \end{pmatrix},\ a_i, b_i = \overline{1,6},\ i = \overline{1,24} \right\}.$$

Столбец $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ показывает, что выпало при i-м бросании двух костей, $i = \overline{1,24}$; $N_2 = 36^{24}$. Как и в предыдущем случае, проще найти вероятность события $\overline{B}$ = {при 24 бросаниях двух игральных костей две единицы одновременно не выпали ни разу} = $= \{\omega \ldots\ \forall\ i = \overline{1,24}\quad \begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}$. Столбец $\begin{pmatrix} a_i \\ b_i \end{pmatrix}$ можно выбрать 35 способами, ибо из всех возможных 36 способов исключается только один $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Аналогично первому случаю имеем $N(\overline{B}) = 35^{24}$ и

$$P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \cong 0{,}4914.$$

Ответ
$P(A) > P(B)$.

Задача 11
События A, B, C удовлетворяют условиям: $P(A) = P(B) = P(C) = P$; A, B, C — попарно независимые события (для любой пары из этих событий вероятность произведения событий равна произведению их вероятностей), $ABC = \varnothing$. Найти P, если: а) $P(A + B + C) = \dfrac{3}{4}$; б) $P(A + B + C) = 1$.

Решение

Используя формулу сложения (3.7) в [1], гл. 1, § 3, можно получить формулу для вероятности суммы трех событий: $P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC)$, так как $ABC = \varnothing$ и A, B, C попарно независимы, то $P(AB) = P(BC) = P(AC) = P^2$ и $P(A+B+C) = 3P - 3P^2$.

Теперь осталось рассмотреть случаи а) и б):

а) $3P - 3P^2 = \dfrac{3}{4}$, $P^2 - P + \dfrac{1}{4} = 0$, $\left(P - \dfrac{1}{2}\right)^2 = 0$, $P = \dfrac{1}{2}$;

б) $3P - 3P^2 = 1$, $3P^2 - 3P + 1 = 0$, $P_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-12}}{6} = \dfrac{3 \pm i\sqrt{3}}{6}$.

Но P — действительное число, следовательно, во втором случае такого соотношения между вероятностями событий с указанными свойствами быть не может.

Ответ

а) $P = 1/2$; б) невозможно.

Задача 12

В урне m белых и n черных шаров. Два игрока поочередно вынимают шар и каждый раз возвращают его обратно. Выигрывает тот, кто первым вынет белый шар. Какова вероятность того, что выиграет игрок, начавший игру? Справедливы ли условия игры?

Решение

Пространство элементарных событий соответствует опыту: шары вынимаются до первого появления белого шара, тогда

$$\Omega = \{\omega_1 = (\text{Б}),\ \omega_2 = (\text{ЧБ}),\ \ldots,\ \omega_k = (\underbrace{\text{ЧЧ}\ldots\text{Ч}}_{k-1}\ \text{Б}),\ \ldots\}$$

(нумерация элементарных исходов соответствует числу выниманий шаров до первого появления белого шара включительно). В данном случае пространство элементарных событий содержит счетное множество элементарных исходов, $\mathfrak{A}$ — система подмножеств множества Ω. Определим

$$p_k = P(\omega_k) = P(\underbrace{\text{ЧЧ...Ч}}_{k-1}\ \text{Б}) = \left(\frac{n}{n+m}\right)^{k-1} \frac{m}{n+m}, \ k = 1, 2, \ldots$$

Покажем, что $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$. Действительно,

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+m}\right)^{k-1} \frac{m}{n+m} = \frac{m}{n+m} \cdot \frac{1}{1 - n/(n+m)} = 1.$$

Таким образом, имеем дискретное вероятностное пространство (см. [1], гл. 2, § 2) и для $\forall A \in \mathfrak{A}$

$$P(A) = \sum_{\omega_k \in A} P(\omega_k) = \sum_{\omega_k \in A} p_k .$$

Пусть событие B обозначает выигрыш игрока, начавшего игру, это событие наступает при элементарных исходах ω_k с нечетными номерами

$$B = \{ \omega_1, \omega_3, \ldots, \omega_{2l-1}, \ldots \}$$

и

$$P(B) = \sum_{\omega_k \in B} P(\omega_k) = \sum_{l:\omega_{2l-1} \in B} p_{2l-1} = \sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+m}\right)^{2l-2} \frac{m}{n+m} =$$

$$= \frac{m}{n+m} \frac{1}{1 - \dfrac{m^2}{(n+m)^2}} = \frac{n+m}{m+2n}.$$

Так как событие “выиграл 2-й игрок” есть событие $\overline{B}$, то

$$P(\overline{B}) = 1 - P(B) = \frac{n}{m+2n}.$$

Очевидно, что задача (игра) имеет смысл, когда оба числа m и n натуральные (т.е. отличны от нуля), тем самым для любых m и n всегда $P(B) > P(\overline{B})$ и условия игры несправедливы.

Ответ

$P(B) = (n + m)/(m + 2n)$ и условия игры несправедливы.

Задача 13

На десяти карточках написаны буквы А, А, А, А, Г, Д, К, М, Р, С. Какова вероятность, расположив эти карточки в произвольном порядке, получить слово “МАДАГАСКАР”?

Решение

Как и при решении задачи 5, пронумеруем карточки (в том порядке букв, что указаны). Тогда, считая любое расположение букв в ряд словом из 10 букв, получим соответствие между расположением чисел от 1 до 10 в ряд и получившимся словом

$$\Omega = \{\, \omega = (a_1, \ldots, a_{10}),\ \ a_i = \overline{1,10},\ \ i = \overline{1,10},\ \text{при}\ \ i \neq j\ \ \ a_i \neq a_j \,\}.$$

Выбор упорядоченный и без возвращения, $N = 10!$

Обозначим $A = \{$получившееся слово есть слово “МАДАГАСКАР”$\}$. Буквы М, Д, Г, С, К и Р (т.е. шесть чисел 5, 6, 7, 8, 9, 10) выбираются единственным образом, а букву A (карточки с номерами 1, 2, 3, 4) можно расположить между собой $4! = 24$ способами (получившееся при этом число не изменится), следовательно, $N(A) = 4!$ и $P(A) = 4!/10!$.

Ответ

$P(A) = 4!/10!$.

Задача 14

Доказать, что для любых событий A, B и C $\quad A + B + C = A + B\overline{A} + \overline{A}\,\overline{B}\,C$. Выразить $P(A + B + C)$ через вероятности событий A, B и C.

Решение

Известно (см. [1], гл. 1, формула (3.7)), что $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1A_2)$. Пусть $A_1 = A$, $A_2 = B + C$. Тогда

$$P(A + (B + C)) = P(A) + P(B + C) - P(A(B + C)) = P(A) + P(B) +$$

$$+ P(C) - P(BC) - P(AB + AC).$$

К вероятности суммы событий AB и AC применим снова формулу (3.7) и, учитывая, что $AA = A$, получаем $(AB)(AC) = ABC$ и

$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) +$$
$$+ P(ABC).$$

Для получения соотношения $A + B + C = A + \overline{A}\,B + \overline{A}\,\overline{B}\,C$ мы должны показать, что имеют место следующие включения $A + B + C \subset A + \overline{A}\,B + \overline{A}\,\overline{B}\,C$ и $A + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B}C \subset A + B + C$, откуда и будет следовать равносильность рассматриваемых событий. Ниже будем использовать логические символы: "$\vee$" — или; "$\wedge$" — и.

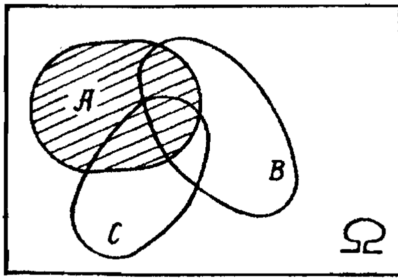

Рис. 1

Операции над событиями можно найти в [1], гл. 1, § 2. На рис. 1 приведен случай, когда события A, B, C — совместные, событие A выделено штрихами.

$$\{\omega \in A + B + C\} \Rightarrow \{\omega \in A \vee$$
$$\omega \in B \vee \omega \in C\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \omega\colon \left\{\omega \in A \Rightarrow \omega \in A + \overline{A}\,B + \overline{A}\,\overline{B}\,C\right\} \\ \left\{\omega \notin A \wedge \omega \in B \Rightarrow \omega \in \overline{A}\,B \Rightarrow \omega \in A + \overline{A}\,B + \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}\right\} \\ \left\{\omega \notin A \wedge \omega \notin B \wedge \omega \in C\right\} \Rightarrow \left\{\omega \in \overline{A}\,\overline{B}\,C\right\} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left\{\omega \in A + \overline{A}\,\overline{B}\,C + \overline{A}\,B\right\} \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underline{A + B + C \subset A + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{B}C}\,.$$

Аналогично можно получить

$$\left\{\omega \in A + \overline{A}\,B + \overline{A}\,\overline{B}\,C\right\} \Rightarrow \left\{\omega \in A + B + C\right\} \Rightarrow$$

$$\underline{\Rightarrow A + \overline{A}\,B + \overline{A}\,\overline{B}\,C \subset A + B + C}\,.$$

Из подчеркнутых соотношений следует равенство

$$A + B + C = A + \overline{A}\,B + \overline{A}\,\overline{B}\,C\,.$$

Задача 15

Судно имеет рулевое устройство, четырс котла и две турбины. Событие A означает исправность рулевого устройства, событие B_i — исправность i-го котла, $i=\overline{1,4}$; C_j — исправность j-й турбины, $j = 1, 2$. Событие, состоящее в том, что судно управляемо (событие D) имеет место в том случае, когда исправно рулевое устройство, хотя бы один котел и хотя бы одна турбина. Выразить события D и $\overline{D}$ через события A, B_i, C_j, $\overline{A}$, $\overline{B}_i$, $\overline{C}_j$.

Решение

Событие "исправен хотя бы один котел" есть сумма событий B_1, B_2, B_3, B_4: $B_1 + B_2 + B_3 + B_4$. Аналогично событие "исправна хотя бы одна турбина" есть сумма событий C_1 и C_2: $C_1 + C_2$. Тогда D есть произведение событий A, $(C_1 + C_2)$ и $(B_1 + B_2 + + B_3 + B_4)$:

$$D = A(B_1 + B_2 + B_3 + B_4)(C_1 + C_2).$$

Используя свойства операций над событиями (см. [1], гл. 1, § 2), находим

$$\overline{D} = \overline{A\left(\sum_{k=1}^{4} B_k\right)(C_1 + C_2)} = \overline{A} + \overline{\left(\sum_{k=1}^{4} B_k\right)} + \left(\overline{C_1 + C_2}\right) =$$

$$= \overline{A} + \overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{B}_4 + \overline{C}_1\overline{C}_2.$$

Ответ

$$D = A\left(\sum_{k=1}^{4} B_k\right)(C_1 + C_2), \quad \overline{D} = \overline{A} + \overline{B}_1\overline{B}_2\overline{B}_3\overline{B}_4 + \overline{C}_1\overline{C}_2.$$

Задача 16

На n креслах случайно рассаживаются n человек ($n \geq 3$). Какова вероятность того, что два заранее указанных лица окажутся рядом, если: а) кресла расположены в ряд; б) кресла расположены по кругу?

Решение

а) Кресла расположены в ряд.

Способ 1

Пронумеруем n человек числами от 1 до n и оговорим, что указанные лица имеют фиксированные номера, скажем 1 и 2, a_i — места, занимаемые i-м человеком (кресла тоже имеют номера от 1 до n). Тогда

$$\Omega = \{\, \omega = (a_1, ..., a_n),\ \ a_i = \overline{1,n},\ \ i = \overline{1,n},\ \text{при}\ \ i \neq j\ \ \ a_i \neq a_j \,\} —$$

выбор без возвращения и, согласно [2], с. 6, случай 3, $N = n!$

Мы рассматриваем случай, когда кресла расположены в ряд:

1	2	3		k		$n-2$	$n-1$	n

Обозначим $A = \{$1-й и 2-й сидят рядом$\}$.

Пусть 1-й сидит “с краю”, т.е. $a_1 = 1$ или $a_1 = n$, тогда для наступления события A второй должен быть на месте 2 или $n-1$, в этом случае пара чисел (a_1, a_2) выбирается <u>двумя способами</u>: (1, 2) и (n, $n-1$).

Пусть теперь 1-й сидит на месте с номером k, $2 \le k \le n-1$. Тогда для наступления события A второй должен сидеть на месте или с номером $k-1$ или с номером $k+1$, т.е. для фиксированного k (место 1-го) место для второго выбирается двумя способами.

Так как k можно выбрать $n-2$ способами, то в случае, когда первый сидит “не с краю”, два места для указанных лиц выбираются <u>$2(n-2)$ способами</u>, значит, два фиксированных лица могут выбрать для себя два места рядом <u>$2 + 2(n-2) = 2(n-1)$</u> способами. Оставшиеся $n-2$ мест заполняются остальными лицами произвольно $(n-2)!$ способами. Следовательно,

$$P(A) = \frac{(n-2)!2(n-1)}{n!} = \frac{2}{n}.$$

Способ 2

Так как выбор мест, занимаемых $n-2$ лицами, (не указанными) произволен, то можно рассматривать только места, занимаемые 1-м и 2-м. Тогда

$$\Omega = \{\, \omega = (a_1, a_2),\ \ a_i = \overline{1,n},\ \ i = 1, 2,\ \ a_1 \neq a_2 \,\},\ \ N = C_n^2$$

(или A_n^2, если рассматривать упорядоченный выбор). Тогда $N(A) = n - 1$ (или $2 + 2(n-2) = 2(n-1)$, если выбор упорядоченный) и

$$P(A) = \frac{n-1}{C_n^2} = \frac{2}{n} \quad \left(P(A) = \frac{2(n-1)}{A_n^2} = \frac{2}{n} \right).$$

б) Кресла расположены по кругу. В этом случае второе лицо для наступления события A может выбрать место для себя только двумя способами, где бы ни сидел первый. Как и в предыдущем случае, задачу можно решить двумя способами.

Способ 1

$$\Omega_1 = \{ \omega = (a_1 \dots a_n),\ a_i = \overline{1,n},\ i = \overline{1,n},\ \text{при}\ i \neq j\ \ a_i \neq a_j \}$$

выбор без возвращения $N = n!$ и $N(A) = 2n(n-2)!$. Тогда

$$P(A) = \frac{2n(n-2)!}{n!} = \frac{2}{n-1}.$$

Способ 2

$$\Omega_2 = \{ \omega = (a_1, a_2),\ a_i = \overline{1,n},\ i = 1,2;\ a_1 \neq a_2 \}.$$

Если выбор упорядоченный, то

$$N = A_n^2,\ N(A) = 2n \ \text{ и } \ P(A) = \frac{2n}{A_n^2} = \frac{2}{n-1}.$$

Если же выбор неупорядоченный, то

$$N = C_n^2,\ N(A) = n \ \text{ и } \ P(A) = \frac{n}{C_n^2} = \frac{2}{n-1}.$$

Ответ

а) $P(A) = \dfrac{2}{n}$; б) $P(A) = \dfrac{2}{n-1}$.

Задача 17

В секции гимнастов факультета занимаются по два человека от каждой из пяти групп первого и второго курса. В команду факультета случайным образом взяли пять человек. Какова вероятность, что все они с одного курса и разных групп?

Решение

В секции гимнастов факультета 20 человек, пронумеруем их числами от 1 до 20. Тогда

$$\Omega = \{\ \omega = (a_1, a_2, ..., a_5),\ \ a_i = \overline{1,20},\ \ i = \overline{1,5},\ \text{при}\ \ i \neq j \quad a_i \neq a_j\ \},$$

выбор без возвращения неупорядоченный и $N = |\Omega| = C_{20}^5$.

Обозначим через D событие, состоящее в том, что выбранные пять человек с одного курса и разных групп. Отметим, что все элементы a_i выбираются из множеств двух типов: A — студенты 1-го курса (10 элементов) и B — студенты 2-го курса (10 элементов). Опишем множества A и B. A: A_{11}, A_{12}, A_{21}, ..., A_{52}, A_{ij} — j-й студент из i-й группы первого курса. Аналогично B состоит из элементов B_{ij}, $i = \overline{1,5}$, $j = 1,2$ (B_{ij} — j-й студент из i-й группы второго курса).

Все элементы A_{ij} и B_{ij} различимы. Для подсчета $N(D) = |D|$ необходимо пересчитать все те элементарные события $\omega = (a_1, a_2, ..., a_5)$, где a_i выбираются <u>только из множества A</u> или <u>только из множества B</u>, но таким образом, чтобы выбор 5 элементов производился на множестве $A = \{A_{ij}\}$ ($B = \{B_{ij}\}$) и чтобы номер i (номер группы) <u>не повторялся</u>, т.е. (A_{12}, A_{21}, A_{31}, A_{42}, A_{52}) $\in A$ (но не A_{11}, A_{21}, A_{22}, A_{31}, A_{32}), так как в этот набор входят по два студента с первого курса из второй группы и третьей группы).

Элементарные исходы, ведущие к осуществлению события D, могут быть выбраны 2^5 способами только из множества A, аналогично 2^5 — число способов выбора элементов из B для осуществления события D. Таким образом,

$$N(D) = 2^5 + 2^5 = 2^6 \quad \text{и} \quad P(D) = 2^6 / C_{20}^5.$$

$P(D) = 2^6 / C_{20}^5$.

Задача 18

В урне 20 красных шаров, 9 зелсных и 1 синий шар. По схеме случайного выбора без возвращения взято пять шаров. Какова вероятность, что среди них 2 зеленых, 2 красных и 1 синий шар?

Решение

Имеем 30 шаров, из них пять шаров можно взять C_{30}^5 способами. Теперь определим, сколькими способами мы можем выбрать два красных (из 20), два зеленых (из 9) и один синий (из 1). Так как порядок следования элементов нас не интересуст, то красные шары выбираем C_{20}^2 способами, зеленые — C_9^2 способами, а синий — единственным образом. Используя правило умножения (выбираем три вида шаров), получим, что выбор двух зеленых, двух красных и одного синего шара можно осуществить $C_{20}^2\, C_9^2$ способами. Таким образом, искомая вероятность равна $C_{20}^2\, C_9^2 / C_{30}^5$.

Ответ

$C_{20}^2\, C_9^2 / C_{30}^5$.

Замечание. В [2] задача сформулирована для схемы выбора с возвращением. Прежде, чем рассматривать этот случай, запишем ответ задачи, полученный для выбора без возвращения в виде:

$$C_{20}^2 C_9^2 / C_{30}^5 = \frac{20!}{2!18!}\frac{9!}{2!7!}\left(\frac{30!}{5!25!}\right)^{-1} =$$

$$= \frac{20 \cdot 19 \cdot 9 \cdot 8}{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}\frac{5!}{2!2!1!} = PN_5(2,2,1),$$

где $P = \dfrac{20 \cdot 19 \cdot 9 \cdot 8}{30 \cdot 29 \cdot 28 \cdot 27 \cdot 26}$, $N_5(2,2,1) = \dfrac{5!}{2!2!1!}$.

Очевидно, что множитель P есть вероятность в случае выбора без возвращения взять из 30 шаров два красных, два синих и один зсленый в фиксированном порядке следования, а второй множитель — число таких “порядков следования”.

Рассмотрим схему случайного выбора с возвращением. В этом случае изменится только первый множитель, так как шары перед каждым последующим взятием возвращаются в урну. Следовательно, в случае выбора с возвращением ответ будет таким:

$$\frac{20^2 \cdot 9^2 \cdot 1}{30^5} \frac{5!}{2!2!1!} = 30\left(\frac{20}{30}\right)^2 \left(\frac{9}{30}\right)^2 \frac{1}{30} = 0{,}04 .$$

Задача 19

Для проведения очередного этапа чемпионата мира по футболу 36 сборных национальных команд разбиты на 6 групп по 6 команд в каждой группе. Найти вероятность того, что команды Литвы и Латвии окажутся в третьей группе, а команды Эстонии и России соответственно в первой и пятой группах (событие A).

Решение

Пространство элементарных событий

$$\Omega = \{\, \omega = (a_1, a_2, ..., a_{36}),\ \ a_i = \overline{1,6},\ \ i = \overline{1,36}\, \},$$

где a_i — номер группы, в которую попала i-я команда. Все элементарные события не отличаются друг от друга по составу, но различаются порядком следования элементов, т.е. все они могут быть получены перестановкой элементов a_i, a_j из элементарного события вида

$$(\underbrace{1, 1, 1, 1, 1, 1,}_{6}\ \underbrace{2, 2, 2, 2, 2, 2,}_{6}\ ...,\ \underbrace{6, 6, 6, 6, 6, 6}_{6})$$

Число перестановок 36 элементов при наличии групп из одинаковых элементов, от перестановки которых между собой ничего не меняется, $N = 36!/(6!)^6$ (или $C_{36}^6 C_{30}^6 C_{24}^6 C_{18}^6 C_{12}^6 C_6^6$). Это число возможных выборов мест последовательно для единиц (первая группа), для двоек (вторая группа), ..., для шестерок (шестая группа).

Подсчитаем, сколько в Ω элементарных исходов, таких, что команды Эстонии (a_1), Литвы, Латвии (a_2, a_3) и России (a_4) будут соответственно в первой, третьей и пятой группах. Для этого необходимо пересчитать все варианты вида $(1, 3, 3, 5, a_5, a_6, ..., a_{36})$, в которых первые четыре номера фиксированы, а остальные заполняются произвольно. Таких вариантов в Ω будет

$$\frac{32!}{5!4!5!6!6!6!} \text{ (или } C_{32}^{5}C_{27}^{4}C_{23}^{5}C_{18}^{6}C_{12}^{6}C_{6}^{6}\text{)}.$$

Таким образом,

$$P(A) = \frac{32!}{5!4!5!(6!)^3} \cdot \left(\frac{36!}{6!^6}\right)^{-1} = \frac{6^3 5}{36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33} = \frac{1}{7 \cdot 11 \cdot 17} \simeq 0{,}000764.$$

Ответ

0,000764.

Задача 20

В группе спортсменов, едущих на сборы, 4 гимнаста, 4 стрелка, 4 боксера и 4 пловца. Для них взяты билеты в 4 купе одного вагона, которые распределяются случайным образом. Найти вероятности событий: A — в каждом купе едут спортсмены, занимающиеся разными видами спорта; B — в каждом купе едут спортсмены, занимающиеся одним видом спорта.

Решение

Пронумеруем всех спортсменов числами от 1 до 16, причем 1-4 — номера для гимнастов, 5-8 — для стрелков, 9-12 — для боксеров и 13-16 — для пловцов. Пусть a_i — номер спортсмена, занимающего i-е место в вагоне (места в вагоне условимся тоже обозначать числами от 1 до 16, так как в 4-х купе 16 мест). Тогда

$$\Omega = \{\, \omega = (a_1, a_2, ..., a_{16}),\ \ a_i = \overline{1,16},\ \text{при}\ \ i \neq j \quad a_i \neq a_j \,\} \text{ —}$$

выбор без возвращения упорядоченный, $N = 16!$.

Найдем $N(A)$: на 1-е место можно посадить любого спортсмена (но один вид уже есть и для осуществления события A следующее место может быть отдано только одному из 12 спортсменов "других видов" спорта), на 2-е место выбираем любого из 12 спортсменов, тем самым зафиксированы уже два вида спорта, и третье место может быть отдано одному из 8, занимающихся другими видами спорта, из которых еще не выбрали спортсмена для первого купе, и последнее место в первом купе может быть отдано одному из 4 "последних" спортсменов. Итак, первое купе можно выбрать $16 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 4$ способами, аналогично второе купе $12 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3$, третье — $8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2$ и последнее $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ способами. Места в 4-х купе согласно правилу умножения выбираем

$$N(A) = (16 \cdot 12 \cdot 8 \cdot 4)(12 \cdot 9 \cdot 6 \cdot 3)(8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2)(4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1) = (4!)^8 = 24^8$$

способами. Итак,

$$P(A) = \frac{24^8}{16!} = \frac{2^{12} \cdot 3^2}{10^3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} \cong 10^{-3} \frac{36864}{7007} \cong 0{,}00526 .$$

Найдем число элементарных исходов для события B: первое место выбираем 16 способами, но тем самым мы зафиксировали вид спорта (т.е. команду из 4-х человек) и на оставшиеся 3 места в этом купе выбираем спортсменов 3! способами. Аналогично второе купе выбирается $12 \cdot 3!$ способами, третье — $8 \cdot 3!$ способами и наконец — последнее 4! способами. Итак,

$$N(B) = (16 \cdot 3!)(12 \cdot 3!)(8 \cdot 3!) \cdot 4! = 24^5$$

и

$$P(B) = \frac{24^5}{16!} = \frac{8}{10^3 \cdot 3 \cdot 7^2 \cdot 11 \cdot 13} = \frac{10^{-3} \cdot 8}{21021} \cong 10^{-6} \cdot 0{,}4 .$$

Ответ

$P(A) \cong 0{,}00526$, $P(B) \cong 10^{-6} \cdot 0{,}4$.

Примечание. Если рассматривать неупорядоченный выбор, то $N = 16!/(4!)^4$, $N(A) = (4!)^4$ и $N(B) = 4!$. Нетрудно убедиться, что ответ останется неизменным.

Задача 21

Размещение неразличимых шаров по ящикам. Доказать, что всего существует C_{n+m-1}^m различных способов размещения m неразличимых шаров по n ящикам.

Решение

Будем представлять ящики как промежутки между $n+1$ черточками, а шары условимся обозначать звездочками. Например, символ

$$|**|\,|\,|***|*|*|$$

означает, что $m = 7$ шаров размещены по $n = 6$ ящикам, причем эти ящики содержат последовательно 2, 0, 0, 3, 1, 1 шаров. Такие символы всегда начинаются и кончаются черточками, но оставшиеся между ними $n + m - 1$ черточек и звездочек можно разместить в произвольном порядке. Следовательно, число различимых размещений равно числу способов выбора m мест среди $n + m - 1$ мест, т.е. равно $C_{n+m-1}^{m} = C_{n+m-1}^{n-1}$.

Примечание. Эта задача связана с числом решений диофантова уравнения в целых числах $x_1 + x_2 + ... + x_n = m$, где $0 \le x_i \le m$, $i = \overline{1, n}$.

К решению такой задачи сводятся задачи, где выбор осуществляется с возвращением и неупорядоченно (см. [2], формула (1.3)), а также задачи атомной физики, связанные с моделью Бозе — Эйнштейна: распределение неразличимых частиц по энергетическим уровням (фотоны, пи-мезоны и др.).

2. ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ВЕРОЯТНОСТИ. УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ. НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ. ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ. ФОРМУЛА БАЙЕСА

Задача 1

На отрезок [0, 1] наудачу брошена точка. Предположим, что ее координата ξ равномерно распределена на [0, 1]. Найти $F(x) = P\{\xi < x\}$, $(-\infty < x < \infty)$.

Решение

Пространством элементарных событий является множество точек на отрезке [0, 1]: $\Omega = \{\omega = (\xi),\ \xi \in [0, 1]\}$. Рассмотрим систему $\mathfrak{A}$ подмножеств множества Ω, имеющих длину. Согласно [1], гл. 2, § 3, с. 34, формула (3.1), для любого $A \in \mathfrak{A}$

$$P\{\xi \in A\} = \frac{\mathrm{mes}A}{\mathrm{mes}\Omega},$$

в данном случае $\mathrm{mes}A$ и $\mathrm{mes}\Omega$ означают “длину” A и Ω и $\mathrm{mes}\Omega = 1$.

Обозначим через

$$A_x = \{\omega = (\xi),\ \xi \in [0, 1],\ \xi < x\} \ (-\infty < x < \infty).$$

Тогда

$$F(x) = P\{\xi < x\} = P\{\xi \in A_x\} = \mathrm{mes}A_x.$$

Если $x \le 0$, то $A_x = \varnothing$ и $\mathrm{mes}A_x = 0$. Если $0 < x \le 1$, то $\mathrm{mes}A_x = x$. Если $x > 1$, то $A_x = \Omega$ и $\mathrm{mes}A_x = \mathrm{mes}\Omega = 1$.

Ответ

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1. \end{cases}$$

Задача 2

На отрезок [0, 1] наудачу брошены две точки, разбившие его на три части. Какова вероятность того, что из этих отрезков можно построить треугольник? За множество Ω принять значения пары чисел (ξ_1, ξ_2), являющихся координатами точек на отрезке [0, 1]; предположить, что точка (ξ_1, ξ_2) равномерно распределена на квадрате Ω.

Решение

$$\Omega = \{\omega\colon \omega = (\xi_1, \xi_2),\ 0 \le \xi_i \le 1, i = 1, 2\},$$

$\operatorname{mes}\Omega$ в данном случае есть площадь и $\operatorname{mes}\Omega = 1$.

Обозначим через $B = \{$событие, состоящее в том, что из получившихся частей отрезка можно построить треугольник$\}$.

Рассмотрим два случая: $0 \le \xi_1 < \xi_2 \le 1$ и $0 \le \xi_2 < \xi_1 \le 1$.

1. Длины получившихся отрезков в этом случае равны соответственно

$$\xi_1,\ \xi_2 - \xi_1,\ 1 - \xi_2.$$

Для того чтобы из получившихся отрезков можно было построить треугольник, необходимо и достаточно, чтобы сумма длин двух любых отрезков была больше длины третьего отрезка. Таким образом, получаем следующие соотношения между ξ_1 и ξ_2:

$$\xi_1 + (\xi_2 - \xi_1) > 1 - \xi_2;\ \ \xi_1 + (1 - \xi_2) > \xi_2 - \xi_1;$$
$$(\xi_2 - \xi_1) + (1 - \xi_2) > \xi_1,$$

или

$$\left.\begin{aligned} &\xi_2 > \frac{1}{2},\ \xi_1 < \frac{1}{2},\\ &\xi_2 - \xi_1 < \frac{1}{2}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Обозначим множество чисел, удовлетворяющих условию (1) через A_1.

2. Аналогично для $\xi_1 > \xi_2$

$$A_2 = \{\omega\colon \omega = (\xi_1, \xi_2),\ \ \xi_1 > \frac{1}{2},\ \ \xi_2 < \frac{1}{2},\ \ \xi_1 - \xi_2 < \frac{1}{2}\}.$$

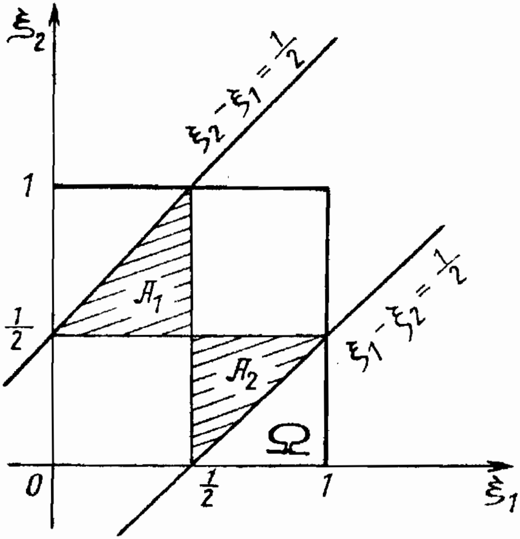

Рис. 2

Указанные области A_1 и A_2 выделены на рис. 2. Тогда

$$P(B) = P\{ (\xi_1, \xi_2) \in A_1 \ \text{ или } \ (\xi_1, \xi_2) \in A_2 \} =$$

$$= \text{mes} A_1 + \text{mes} A_2 = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Ответ

1/4.

Задача 3

Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что выпали две “3”, если известно, что сумма выпавших очков делится на 3?

Решение

$$\Omega = \{\omega\colon \ \omega = (a_1, a_2), \ \ a_i = \overline{1,6}, \ \ i = 1,2 \}, \ \ N = 36,$$

$$A = \{\text{сумма выпавших очков делится на } 3\} =$$

$$= \{\omega\colon \ \ \omega = (a_1, a_2), \ldots, \ \ a_1 + a_2 = 3,\ 6,\ 9,\ 12\}.$$

$$B = \{\text{выпало две “3”} \} = \{\omega = (3,\ 3)\}.$$

Согласно [1], гл. 3, § 1, формула (1.1), для $P(A) > 0$

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)}.$$

Так как $B \subset A$, то $AB = B$ и $P(B|A) = \dfrac{P(B)}{P(A)}$,

$$N(B) = 1, \ N(A) = 12, \ P(B) = \frac{1}{36}, \ P(A) = \frac{12}{36}.$$

Таким образом, $P(B|A) = \dfrac{1/36}{12/36} = \dfrac{1}{12}$.

Ответ

$P(B|A) = \dfrac{1}{12}$.

Задача 4

Брошено две игральные кости. Событие $A = \{$выпадение на первой кости "3"$\}$, $B = \{$выпадение на второй кости "6"$\}$, $C = \{$выпадение хотя бы одной "6"$\}$. Зависимы или нет события A и B; B и C?

Решение

$$\Omega = \{\omega\colon \ \omega = (a_1, a_2), \ \ a_i = \overline{1,6}, \ \ i = 1,2\},$$

где a_1 — число очков, выпавшее на первой кости; a_2 — число очков, выпавшее на второй кости, и $N = 36$.

$$A = \{\omega = (3, a_2), \ \ a_2 = \overline{1,6}\}, \ B = \{\omega = (a_1, 6), \ \ a_1 = \overline{1,6}\};$$

$$C = \{\omega = (a_1, 6), \ \ a_1 = \overline{1,6} \ \text{ или } \ \omega = (6, a_2), \ \ a_2 = \overline{1,5}\};$$

$$AB = \{\omega = (3,6)\}, \ N(A) = N(B) = 6, \ N(C) = 11, \ N(AB) = 1;$$

$$B \subset C \Rightarrow BC = B, \ N(BC) = 6;$$

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{6}, \ \ P(C) = \frac{11}{36}, \ \ P(AB) = \frac{1}{36}.$$

Так как $P(AB)=\dfrac{1}{36}=\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=P(A)P(B)$, то (см. [1], гл. 3, § 1, с. 42, формула (1.3)) получаем, что A и B независимы.

Для пары событий B и C имеем

$$P(BC)=\frac{6}{36}\neq\frac{1}{6}\cdot\frac{11}{36}=P(B)P(C),$$

следовательно, B и C зависимы.

Ответ

A и B независимы, B и C зависимы.

Примечание. Можно было рассматривать независимость событий, используя понятие условной вероятности (см. [1], гл. 3, § 1, с. 42, формула (1.2)). Так как

$$P(A|B)=\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{1}{6}=P(A),$$

то A и B независимы. Найдем

$$P(C|B)=\frac{P(BC)}{P(B)}=\frac{P(B)}{P(B)}=1\neq\frac{11}{36}=P(C).$$

B и C зависимы.

Задача 5

Упрощенная схема контроля изделий состоит из двух независимых проверок. В результате k-й проверки, $k = 1, 2$, изделие, удовлетворяющее стандарту, отбраковывается с вероятностью β_k, а бракованное изделие принимается с вероятностью α_k. Изделие принимается, если оно прошло обе проверки. Найти вероятности событий: 1) бракованное изделие будет принято; 2) изделие, удовлетворяющее стандарту, будет отбраковано.

Решение

Введем события: B = {изделие, взятое для проверки, бракованное}, S_k = {изделие прошло k-ю проверку}, $k = 1, 2$, A = {изделие принято}. Тогда $\overline{B}$ = {изделие, поступившее на проверку, стандартное}, $\overline{A}$ = {изделие не принято}.

В условии задачи даны следующие условные вероятности:

$$P(S_k|B)=\alpha_k,\quad P(\overline{S}_k|\overline{B})=\beta_k,\quad k=1,2.$$

Учитывая свойства условной вероятности (при фиксированном A, таком, что $P(A) > 0$) как функции события B, можем записать

$$P(\overline{S}_k|B) = 1 - P(S_k|B) = 1 - \alpha_k,$$

$$P(S_k|\overline{B}) = 1 - P(\overline{S}_k|\overline{B}) = 1 - \beta_k, \quad k = 1,2.$$

Так как $A = S_1S_2$, где S_1 и S_2 независимые события, то $P(A|B) = = P(S_1S_2|B) = P(S_1|B)P(S_2|B) = \alpha_1\alpha_2$. Аналогично

$$P(\overline{A}|\overline{B}) = 1 - P(A|\overline{B}) = 1 - P(S_1S_2|B) =$$

$$= 1 - P(S_1|\overline{B})P(S_2|\overline{B}) = 1 - (1 - \beta_1)(1 - \beta_2).$$

Ответ

$$P(A|B) = \alpha_1\alpha_2, \quad P(\overline{A}|\overline{B}) = 1 - (1 - \beta_1)(1 - \beta_2).$$

Задача 6

Изделия поступают на проверку, описанную в задаче 5, предполагается, что каждое изделие удовлетворяет стандарту с вероятностью p. Найти: 1) вероятность того, что поступившее на проверку изделие, не будет отбраковано; 2) вероятность того, что неотбракованное изделие удовлетворяет стандарту.

Решение

Сохраним обозначения задачи 5. Нам надо найти $P(A)$ и $P(\overline{B}|A)$. Дано $P(\overline{B}) = p$. Так как поступившее изделие может быть стандартным или бракованным, то для решения задачи воспользуемся формулой полной вероятности (см. [1], гл. 3, § 3, формула (3.1)) с $n = 2$ и двумя гипотезами: наступает или только B, или только $\overline{B}$. Соответствующие условные вероятности найдены в задаче 5. Итак,

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}) =$$

$$= (1 - p)\alpha_1\alpha_2 + p(1 - \beta_1)(1 - \beta_2).$$

Во втором вопросе есть информация: изделие, поступившее на проверку, принято (неотбраковано). Что при этом можно сказать о вероятности того, что изделие стандартное? Нас интересует

$P(\overline{B}|A)$. Применим формулу Байеса (см. [1], гл. 3, § 3, формула (3.2)):

$$P(\overline{B}|A)=\frac{P(\overline{B})P(A|\overline{B})}{P(\overline{B})P(A|\overline{B})+P(B)P(A|B)}=\frac{P(\overline{B}A)}{P(A)}=$$

$$=\frac{p(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{p(1-\beta_1)(1-\beta_2)+(1-p)\alpha_1\alpha_2}.$$

Ответ

$$P(A)=(1-p)\alpha_1\alpha_2+p(1-\beta_1)(1-\beta_2),$$

$$P(B|A)=\frac{p(1-\beta_1)(1-\beta_2)}{p(1-\beta_1)(1-\beta_2)+(1-p)\alpha_1\alpha_2}.$$

Задача 7

Вероятность поступления k вызовов на телефонную станцию за промежуток врсмени длительностью t равна $P_k(t)$. Считая события — поступления вызовов за любые неперекрывающиеся промсжутки времсни — независимыми, найти вероятность поступления s вызовов за промежуток времсни длительностью $2t$.

Решение

Пусть событие $A_k(t)$ состоит в том, что за промежуток времени длительностью t поступило k вызовов, из условия задачи $P(A_k(t)) = P_k(t)$. Промежуток времени длительностью $2t$ разобъем на два неперекрывающихся промежутка времени $(0, t]$ и $(t, 2t)$, каждый длитсльностью t. Пусть событие $A_s(2t)$ состоит в том, что за время $(0, 2t)$ поступило s вызовов. Применим формулу полной вероятности (см. [1], гл. 3, § 3, с. 46, формула (3.1)):

$$P(A_s(2t))=\sum_{k=0}^{s}P(A_k(t))\cdot P(A_s(2t)|A_k(t)).$$

Для наступлсния события $A_s(2t)$, если известно, что $A_k(t)$ наступило, за время $(t, 2t)$ должно поступить $s-k$ вызовов. Но интсрвалы времени $(0, t]$ и $(t, 2t)$ не пересекаются, следовательно, поступление любого числа вызовов на интервалах времени $(0, t]$ и $(t, 2t)$ — события независимые (см. [1], гл. 3, § 1, с. 42, формула (1.2)) и

$$P(A_s(2t) | A_k(t)) = P_{s-k}(t).$$

Итак, $P_s(2t) = \sum_{k=0}^{s} P_k(t) P_{s-k}(t)$.

Ответ

$$P_s(2t) = \sum_{k=0}^{s} P_k(t) P_{s-k}(t)$$

Задача 8

Известно, что 5 % всех мужчин и 0,25 % всех женщин дальтоники. Случайно выбранный представитель из группы, состоящей из N мужчин и M женщин, оказался дальтоником. Какова вероятность, что это мужчина?

Решение

Обозначим через D событие "случайно выбранный человек оказался дальтоником" и соответственно через M — "выбранный человек мужчина" и $\overline{M}$ — "выбранный человек — женщина". Легко получить, что $P(M) = \dfrac{N}{N+M}$, $P(\overline{M}) = \dfrac{M}{N+M}$, и из условия задачи $P(D|M) = 0{,}05$, $P(D|\overline{M}) = 0{,}0025$.

Используя формулу Байеса (см. [1], гл. 3, § 3, с. 46, формула (3.2)), получаем

$$P(M|D) = \frac{P(D|M)P(M)}{P(M)P(D|M) + P(\overline{M})P(D|\overline{M})} =$$

$$= \frac{N}{N+M} 0{,}05 \left[\frac{N}{N+M} 0{,}05 + \frac{M}{N+M} 0{,}0025 \right]^{-1} = \left(1 + 0{,}05 \frac{M}{N} \right)^{-1}.$$

Ответ

$$P(M|D) = \left(1 + 0{,}05 \frac{M}{N} \right)^{-1}.$$

Задача 9

Употребление стимуляторов роста S_1, S_2 и S_3 дает определенный биологический эффект соответственно с вероятностями p_1, p_2 и p_3 в каждом опыте. Поставлено n опытов, причем во всех был использован один и тот же стимулятор. Вероятности того, что был использован стимулятор S_1, S_2 и S_3 равны соответственно w_1, w_2 и w_3. Желаемый эффект имел место в m опытах. Какова вероятность, что был использован стимулятор S_1?

Решение

Обозначим через S_k событие, состоящее в том, что был использован стимулятор S_k, $k = 1, 2, 3$, через B — событие, состоящее в том, что желаемый эффект при n опытах имел место в m опытах:

$$P(B|S_k) = C_n^m p_k^m (1 - p_k)^{n-m}, \quad k = 1,2,3$$

(см. [1], гл. 4, § 2, с. 59, формула (2.6)). Осталось применить формулу Байсса (см. [1], гл. 3, § 3, с. 46, формула (3.2)):

$$P(S_1|B) = P(S_1)P(B|S_1)\left(\sum_{k=1}^{3} P(S_k)P(B|S_k)\right)^{-1} =$$

$$= C_n^m p_1^m (1 - p_1)^{n-m} w_1 \left(\sum_{k=1}^{3} C_n^m p_k^m (1 - p_k)^{n-m} w_k\right)^{-1} =$$

$$= \left[1 + \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^m \left(\frac{1 - p_2}{1 - p_1}\right)^{n-m} \frac{w_2}{w_1} + \left(\frac{p_3}{p_1}\right)^m \left(\frac{1 - p_3}{1 - p_1}\right)^{n-m} \frac{w_3}{w_1}\right]^{-1}.$$

Ответ

$$P(S_1|B) = \left[1 + \sum_{k=2}^{3} \left(\frac{p_k}{p_1}\right)^m \left(\frac{1 - p_k}{1 - p_1}\right)^{n-m} \frac{w_k}{w_1}\right]^{-1}.$$

Задача 10

Случайная точка A с координатами (ξ_1, ξ_2) равномерно распределена в квадрате

$$\Omega = \{\omega:\ \omega = (x_1, x_2),\ 0 \le x_i \le 1,\ i = 1, 2\}.$$

Найти функцию $F(x) = P\{\xi_1 + \xi_2 < x\}$, $F'(x)$, $-\infty < x < \infty$.

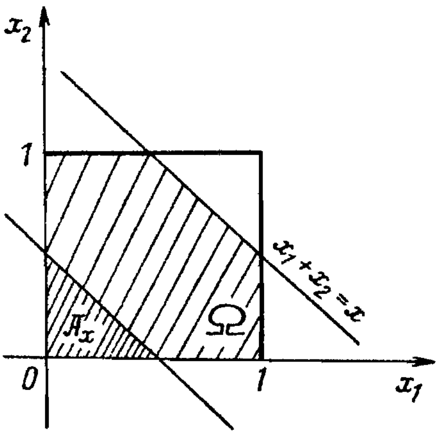

Рис. 3

Решение

Обозначим $A_x = \{\omega: x_1 + x_2 < x\}$. Если на плоскости x_1Ox_2 провести прямую $x_1 + x_2 = x$, то точки, сумма координат которых меньше x, лежат в полуплоскости под данной прямой (рис. 3). Осталось только учесть те точки, что при соответствующем x попадают в область Ω.

При $x \le 0$ $A_x = \varnothing$ и $F(x) = P(A_x)$[1] $= 0$.

При $x > 2$ $A_x = \Omega$ и $F(x) = P(A_x) = P(\Omega) = 1$.

При $0 \le x \le 1$ A_x — прямоугольный треугольник с катетами, лежащими на координатных осях и длины которых равны x. Следовательно, $F(x) = \dfrac{x^2}{2}$. При $1 < x \le 2$ проще найти $\overline{A}_x$, так как $\overline{A}_x$ есть треугольник, лежащий в правом верхнем углу единичного квадрата

---

[1] Согласно [1], гл. 2, § 3, с. 34, формула (3.1), $P\{(\xi_1, \xi_2) \in A_x\} = P(A_x) = \dfrac{\text{mes}A_x}{\text{mes}\,\Omega}$, mes — в данном случае площадь и $\text{mes}\Omega = 1$.

Ω, и длина его катетов равна $1-(x-1)= =2-x$. Тогда $\mathrm{mes}A_x=1-\dfrac{(2-x)^2}{2}$. Итак,

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2/2, & 0<x\le 1,\\ 1-\dfrac{(2-x)^2}{2}, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2;\end{cases}\qquad F'(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0,2),\\ x, & 0<x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2.\end{cases}$$

Ответ

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ x^2/2, & 0<x\le 1,\\ 1-\dfrac{(2-x)^2}{2}, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2;\end{cases}\qquad F'(x)=\begin{cases}0, & x\notin(0,2),\\ x, & 0<x\le 1,\\ 2-x, & 1<x\le 2.\end{cases}$$

Задача 11

Парадокс Бертрана. В круге радиуса R случайно проводится хорда. Обозначим ее длину ξ. Найти $P\{\xi>R\}$ — вероятность того, что длина хорды больше стороны правильного вписанного шестиугольника, если:

а) середина хорды равномерно распределена в круге;

б) направление хорды задано, а ее середина равномерно распределена на диаметре, перпендикулярном заданному направлению;

в) один конец хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности.

Решение

В зависимости от того, как понимать слово “случайно”, рассмотрим три способа решения. И, как и в задаче 10, будем использовать понятие геометрических вероятностей (см. [1], гл. 2, § 3, с. 34, формула (3.1)).

а) Середина хорды равномерно распределена в круге

$$\Omega = \{\omega\colon\ \omega = (x_1, x_2),\ \ x_1^2 + x_2^2 \le R^2\}.$$

Рассмотрим "предельный случай": длина хорды равна R, тогда расстояние от центра круга до середины хорды равно $R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

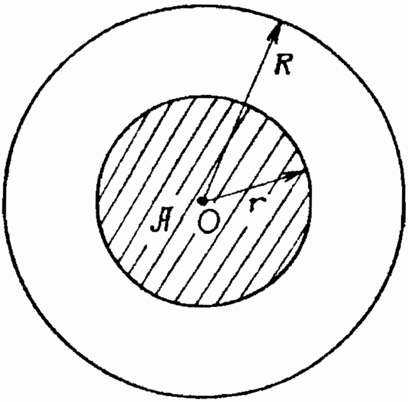

Рис. 4

Если в круге указано положение точки, являющейся серединой хорды, то тем самым и однозначно определена хорда (т.е. задана и ее длина). Чем ближе середина хорды к центру круга, тем длиннее хорда. Длина хорды будет больше R, если ее середина будет удалена от центра круга менее, чем на $r = R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, а такое геометрическое место точек есть множество точек, лежащих внутри окружности радиуса r с центром в точке O (рис. 4). Тогда $\mathrm{mes}\Omega = \pi R^2$ (площадь круга радиуса R), а $\mathrm{mes}A$ (A — множество точек, являющихся серединой хорды, длина которой больше R) равна $\pi r^2 = \dfrac{3}{4}\pi R^2$ и $P\{\xi > R\} = \dfrac{3/4\pi R^2}{\pi R^2} = \dfrac{3}{4}$.

б) Направление хорды задано, а середина хорды равномерно распределена на диаметре, перпендикулярном заданному направлению. В этом случае

$$\Omega = \{\omega\colon\ \omega = (x),\ -R \le x \le R\}$$

и $\mathrm{mes}\Omega = 2R$. Чтобы выполнялось соотношение $\{\xi > R\}$ середина хорды должна быть удалена от точки O на расстояние (по диаметру), не большее $R\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (рис. 5), т.е. A — множество точек — середин хорды, для которых $\xi > R$, и $\operatorname{mes} A = R\sqrt{3}$. Следовательно, $P\{\xi > R\} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

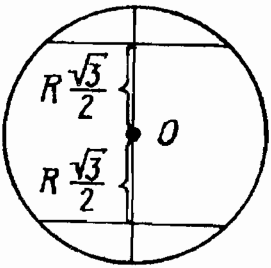

Рис. 5

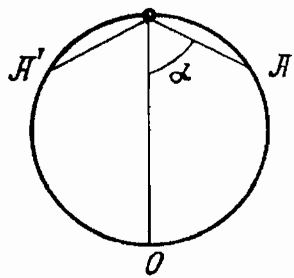

Рис. 6

в) Один конец хорды закреплен, а другой равномерно распределен на окружности

$$\Omega = \{\omega:\ \omega = (\alpha),\ -\pi \le \alpha \le \pi\} \text{ (рис. 6)},$$

длина окружности взята в радианах, угол α равен половине длины дуги OA. Если $\alpha < \pi/3$, то длина хорды больше R. Значит, благоприятными являются те положения точки на окружности (т.е. второго конца хорды), которые от закрепленного конца хорда удалены по окружности на расстояние, большее $2\pi/3$. Итак, в этом случае

$$P\{\xi > R\} = \frac{4\pi/3}{2\pi} = \frac{2}{3}.$$

Ответ

а) 3/4; б) $\sqrt{3}/2$; в) 2/3.

Задача 12

В коробке 12 новых теннисных мячей и 4 игранных. Из коробки наугад взяли 3 мяча. Какова вероятность того, что все эти мячи новые? После игры мячи возвращают в коробку, а через некоторое время снова берут наугад три мяча. Какова вероятность того, что все эти мячи новые?

Решение

Обозначим через H_k событие, состоящее в том, что для первой игры взяли k новых мячей. Для нахождения этой вероятности воспользуемся классическим определением вероятности. Из 16 мячей взять для игры три мяча можем C_{16}^3 способами (выбор без возвращения неупорядоченный, ибо важно, какие мячи взяли, а не в каком порядке). k новых мячей мы можем взять C_{12}^k способами, оставшиеся $3-k$ игранных мячей выбираем C_4^{3-k} способами. Итак, событие H_k можно осуществить $C_{12}^k C_4^{3-k}$ способами и $P(H_k) = C_{12}^k C_4^{3-k} / C_{16}^3$, $k = 0, 1, 2, 3$; и $P(H_0) = C_{12}^3 / C_{16}^3 = \dfrac{11}{28}$.

Пусть событие A означает, что мячи, взятые для второй игры, новые. Так как относительно мячей, взятых для первой игры, мы не имеем никакой информации, одни предположения: имело место событие H_k с вероятностью $P(H_k)$, $k = 0, 1, 2, 3$, то для нахождения $P(A)$ следует воспользоваться формулой полной вероятности (см. [1], гл. 3, § 3, с. 46, формула (3.1)). Найдем

$$P(A|H_k) = C_{12-k}^3 / C_{16}^3,$$

так как после первой игры число новых мячей, если наступило событие H_k, уменьшилось на k, $k = 0, 1, 2, 3$. Итак,

$$P(A) = \sum_{k=0}^{3} P(H_k) P(A|H_k) =$$

$$= (C_{16}^3)^{-2} \sum_{k=0}^{3} C_{12}^k C_4^{3-k} C_{12-k}^3 = \frac{1573}{7840}.$$

Ответ

11/28, 1573/7840.

Задача 13

Прибор может перегореть только в момент срабатывания. Если он сработал $k-1$ раз не перегорев, то условная вероятность перегореть при k срабатывании равна q_k, $k \geq 2$. Вероятность перегореть прибору при первом срабатывании равна q_1. Найти вероятности следующих событий: A_n — прибор выдержит не менее n срабатываний; B_n — прибор выдержит не более n срабатываний; C_n — прибор выдержит ровно n срабатываний.

Решение

Обозначим D_k — событие, состоящее в том, что прибор перегорел при k-м срабатывании. Тогда

$$A_n = \overline{D}_1 \overline{D}_2 \ldots \overline{D}_n.$$

Для нахождения $P(A_n)$ вероятности произведения n событий применим формулу (2.2) (см. [1], гл. 3, § 3) вероятности произведения n событий (обратить внимание на пример 1, разобранный в этом параграфе). Тогда

$$P(A_n) = P(\overline{D}_1) P(\overline{D}_2 | \overline{D}_1) \ldots P(\overline{D}_n | \overline{D}_1 \overline{D}_2 \ldots \overline{D}_{n-1}) =$$

$$= (1-q_1)(1-q_2)\ldots(1-q_n) = \prod_{k=1}^{n} (1-q_k),$$

$B_n = \overline{A}_{n+1}$. Следовательно,

$$P(B_n) = 1 - P(A_{n+1}) = 1 - \prod_{k=1}^{n+1} (1-q_k).$$

$$C_n = \overline{D}_1 \overline{D}_2 \ldots \overline{D}_n D_{n+1}.$$

Используя опять формулу для вероятности произведения $n+1$ события, получим

$$P(C_n) = q_{n+1} \prod_{k=1}^{n} (1-q_k).$$

Ответ

$$P(A_n)=\prod_{k=1}^{n}(1-q_k),$$

$$P(B_n)=1-\prod_{k=1}^{n+1}(1-q_k),$$

$$P(C_n)=q_{n+1}\prod_{k=1}^{n}(1-q_k).$$

Задача 14

Электрическая цепь состоит из элементов a_k, $k=1, 2, 3$. Элементы a_1 и a_2 соединены параллельно, a_3 присоединен к ним последовательно. При выходе из строя любого элемента цепь в месте его включения разрывается. Вероятность выхода из строя за данный период времени элемента a_k равна p_k, $k=1, 2, 3$. Предполагая, что элементы выходят или не выходят из строя независимо друг от друга, найти вероятность того, что за рассматриваемый период по цепи будет проходить ток.

Решение

Пусть события $A_k=$ {за рассматриваемый период элемент a_k не вышел из строя}, $k=1, 2, 3$; $B=$ {за рассматриваемый период по цепи проходит ток}. Тогда $B=(A_1+A_2)A_3$ и

$$P(B)=P(A_3(A_1+A_2))=P(A_3)P(A_1+A_2)$$

(события A_1, A_2, A_3 независимы и тем самым независимы события A_1+A_2 и A_3). Так как $A_1+A_2=\overline{\overline{A}_1\overline{A}_2}$, то $P(A_1+A_2)=$ $=1-P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)=1-p_1p_2$. Итак, $P(B)=(1-p_3)(1-p_1p_2)$.

Ответ

$$P(B)=(1-p_3)(1-p_1p_2).$$

Задача 15

Самолет-разведчик посылается в район противника с целью уточнить координаты объекта, который предполагается подвергнуть обстрелу ракетами. Для поражения объекта выделены три ракеты.

При уточненных координатах объекта вероятность его поражения каждой ракетой равна 0,9, при неуточненных — 0,8. Разведчик перед выходом в район объекта может быть сбит с вероятностью 0,5. Если он не сбит, то сообщает координаты объекта по радио, которые принимаются с вероятностью 0,8. Найти вероятность поражения объекта.

Решение

Обозначим через A = {самолет сбит}, B = {данные о координатах объекта не уточнены}, D = {цель поражена}.

Для нахождения $P(D)$ будем применять формулу полной вероятности (см. [1], гл. 3, § 3, с. 46, формула (3.1)) при гипотезах H_1 — данные о координатах объекта уточнены и H_2 — данные о координатах объекта не уточнены.

Первая гипотеза есть произведение событий $\overline{A}\,\overline{B}$, вторая гипотеза есть сумма событий A и $\overline{A}\,B$. Из условия задачи находим

$$P(H_1) = 0{,}5 \cdot 0{,}8 = 0{,}4\,;$$

$$P(H_2) = P(A + \overline{A}B) = 0{,}5 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}6\,.$$

Для поражения объекта надо, чтобы хотя бы одна из трех ракет попала в цель, противоположное событие — ни одна из трех ракет не попала в цель, и тогда

$$P(D|H_1) = 1 - 0{,}1^3 = 0{,}999\,;$$

$$P(D|H_2) = 1 - 0{,}2^3 = 0{,}992\,.$$

Окончательно, $P(D) = 0{,}4 \cdot 0{,}999 + 0{,}6 \cdot 0{,}992 = 0{,}9948$.

Ответ

0,9948.

Задача 16

Два орудия открыли стрельбу по наступающему танку. Стрельба ведется поочередно с интервалом 10 с. За каждые 10 с вероятность попадания для каждого орудия увеличивается на 0,05. Вероятность попадания в танк при открытии огня у первого орудия равна 0,3, а у второго 0,4. После пяти выстрелов обнаружено, что танк получил одну пробоину, но неизвестно при каком выстреле. Найти вероятность того, что первым открыло огонь второе орудие.

Решение

Обозначим H_k событие, состоящее в том, что первым открыло огонь k-е орудие, $k = 1$, 2. Положим $P(H_1) = P(H_2) = 1/2$; $A_l = \{$попадание при l-м выстреле$\}$, $l = \overline{1,5}$; $B = \{$при пяти выстрелах было только одно попадание$\}$.

Так как вероятности попадания с каждым выстрелом меняются, то составим соответствующую таблицу, где будут указаны вероятности попадания при каждом выстреле в двух предположениях H_1 и H_2:

l	1	2	3	4	5
$p(A_l \mid H_1)$	0,3	0,45	0,4	0,55	0,5
$p(A_l \mid H_2)$	0,4	0,35	0,5	0,45	0,6

Применяя формулу Байеса (см. [1], гл. 3, § 3, формула (3.2)), найдем

$$P(H_2 \mid B) = \frac{P(H_2)P(B \mid H_2)}{P(H_1)P(B \mid H_1) + P(H_2)P(B \mid H_2)},$$

каждое из пяти слагаемых есть вероятности произведения пяти событий: четыре промаха и одно попадание, соотвстственно на l-м выстреле

$$P(B \mid H_1) = 0{,}3 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}5 +$$
$$+ 0{,}7 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}5 + 0{,}7 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}5 +$$
$$+ 0{,}7 \cdot 0{,}55 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}5 \cong 0{,}21495.$$

Аналогично, $P(B|H_2) \cong 0{,}19405$. Следовательно,

$$P(H_2|B) = \frac{0{,}19405}{0{,}19405 + 0{,}21495} \cong 0{,}474.$$

Ответ

$P(H_2|B) \cong 0{,}474$.

В задачах 17-20 будем предполагать, что подходящее вероятностное пространство существует и что при каждом t вероятности вводимых событий (зависящих от t) определены и непрерывны по t.

Задача 17

Вероятность того, что молекула, испытавшая в момент $t = 0$ столкновение с другой молекулой и не имевшая других столкновений до момента t, испытает столкновение в промежутке времени $(t, t + h)$, равна $\lambda h + o(h)$, $h \to 0$. Найти вероятность того, что время свободного пробега будет больше t.

Решение

Обозначим: $A_t = \{$на интервале времени $(0, t]$ молекула не имела столкновений$\}$; $P(A_t) = P(t)$; $B(t, t + h) = \{$на временном промежутке $(t, t + h)$ молекула испытает столкновение$\}$.

Чтобы время свободного пробега было больше $t + h$ надо, чтобы на интервалах $(0, t]$ и $(t, t + h)$ не было столкновений, таким образом:

$$A_{t+h} = A_t \overline{B}(t, t + h).$$

Так как

$$P(\overline{B}(t, t + h)|A_t) = 1 - \lambda h + o(h),$$

то из формулы (2.1) (см. [1], гл. 3, § 2) следует

$$P(A_{t+h}) = P(A_t) P(\overline{B}(t, t + h)|A_t) = P(A_t)(1 - \lambda h + o(h))$$

или

$$P(t + h) = P(t)(1 - \lambda h + o(h)).$$

Отсюда

$$\frac{P(t+h)-P(t)}{h}=-\lambda P(t)+\frac{o(h)}{h}.$$

Переходя к пределу при $h \to 0$, получим

$$P'(t)=-\lambda P(t).$$

Полагая $P(0)=1$ (молекула испытала столкновение в момент $t=0$), находим $P(t)=Ce^{-\lambda t}$, и, так как $P(0)=1$, то $C=1$, $P(t)=e^{-\lambda t}$.

Ответ

$e^{-\lambda t}$.

Замечание. Фактически мы в задачс нашли левостороннюю производную. Заменив в рассуждениях t и $t+h$ на $t-h$ и t, получим правостороннюю производную, совпадающую с найденной.

В дальнейшем в задачах 18-20 будем поступать аналогично.

Задача 18

На одну телефонную линию могут поступать вызовы двух типов: срочные и простые. При поступлении срочного вызова разговор по-простому прекращается. Вероятности поступления за время $(t,\ t+h)$ срочного и простого вызова равны соответственно $\alpha_1 h + o(h)$ и $\alpha_2 h + o(h)$. Вероятность прекращения любого разговора за время $(t,\ t+h)$ равна $\beta h + o(h)$. Пусть $P_k(t)$, $k = 0, 1, 2$, всроятности того, что в момент t линия соответственно свободна, занята срочным вызовом, занята простым вызовом. Найти $P_k(t)$, $k = 0, 1, 2$, если $P_0(0) = 1$, $P_1(0) = P_2(0) = 0$.

Решение

Введем события: $A_t^{(0)} = \{$линия в момент t свободна$\}$, $A_t^{(1)} = \{$линия в момент t занята срочным вызовом$\}$, $A_t^{(2)} = \{$линия в момент t занята простым вызовом$\}$.

$P\left(A_t^{(k)}\right) = P_k(t)$, $k = 0, 1, 2$. События $\left\{A_t^{(k)}\right\}$, $k = 0, 1, 2$ образуют полную группу событий $A_t^{(0)} + A_t^{(1)} + A_t^{(2)} = \Omega$ и при $i \neq j$ $A_t^{(i)} A_t^{(j)} = \varnothing$. По формуле полной вероятности (см. [1], гл. 3, § 3, формула (3.1))

$$P\left(A_{t+h}^{(0)}\right) = P\left(A_t^{(0)}\right) P\left(A_{t+h}^{(0)} \middle| A_t^{(0)}\right) + P\left(A_t^{(1)}\right) P\left(A_{t+h}^{(0)} \middle| A_t^{(1)}\right) +$$
$$+ P\left(A_t^{(2)}\right) P\left(A_{t+h}^{(0)} \middle| A_t^{(2)}\right).$$

Свободная в момент t линия останется свободной в момент $t + h$, если за время $(t, t + h)$ не поступит ни одного вызова. Так как другие события, при которых линия останется свободной в момент $t + h$, имеют вероятность $o(h)$, то

$$P\left(A_{t+h}^{(0)} \middle| A_t^{(0)}\right) = (1 - \alpha_1 h + o(h))(1 - \alpha_2 h + o(h)) =$$
$$= 1 - (\alpha_1 + \alpha_2)h + o(h)).$$

Занятая в момент t срочным или простым вызовом линия будет свободная в момент $t + h$, если за время $(t, t + h)$ разговор окончится и вызова не поступит. Значит,

$$P\left(A_{t+h}^{(0)} \middle| A_t^{(1)}\right) = P\left(A_{t+h}^{(0)} \middle| A_t^{(2)}\right) =$$
$$= (\beta h + o(h))(1 - \alpha_1 h + o(h))(1 - \alpha_2 h + o(h)) = \beta h + o(h),$$

и получаем соотношение

$$P_0(t + h) = P_0(t)(1 - (\alpha_1 + \alpha_2)h + o(h)) +$$
$$+ P_1(t)(\beta h + o(h)) + P_2(t)(\beta h + o(h)).$$

Далее рассмотрим

$$\lim_{h \to 0} \frac{P_0(t + h) - P_0(t)}{h} = \lim_{h \to 0} \left[-(\alpha_1 + \alpha_2) P_0(t) + P_1(t)\beta + P_2(t)\beta + \frac{o(h)}{h} \right].$$

Откуда

$$P_0'(t) = -(\alpha_1 + \alpha_2) P_0(t) + \beta P_1(t) + \beta P_2(t)$$

(см. примечание к задаче 17).

Аналогично найдем условные вероятности события $A_{t+h}^{(1)}$ в предположениях $A_t^{(k)}$, $k = 0, 1, 2$. Занятая в момент t срочным вызовом линия будет занята в момент $t + h$ срочным вызовом, если за время $(t, t + h)$ разговор не прекратится:

$$P\left(A_{t+h}^{(1)} \middle| A_t^{(1)}\right) = 1 - \beta h + o(h).$$

Остальные события будут иметь вероятность $o(h)$, например разговор прекратился и поступил срочный вызов:

$$(\beta h + o(h))(\alpha_1 h + o(h)) = \alpha\beta h^2 + o(h) = o(h).$$

Наконец,

$$P\left(A_{t+h}^{(1)} \middle| A_t^{(2)}\right) = P\left(A_{t+h}^{(1)} \middle| A_t^{(0)}\right) = \alpha_1 h + o(h),$$

так как при поступлении срочного вызова разговор по простому прекращается. Итак,

$$P_1(t + h) = (\alpha_1 h + o(h))P_0(t) +$$

$$+ (1 - \beta h + o(h))P_1(t) + (\alpha_1 h + o(h))P_2(t);$$

$$\frac{P_1(t + h) - P_1(t)}{h} = \alpha_1 P_0(t) - \beta P_1(t) + \alpha_1 P_2(t) + \frac{o(h)}{h},$$

что после перехода к пределу при $h \to 0$ дает

$$P_1'(t) = \alpha_1 P_0(t) - \beta P_1(t) + \alpha_1 P_2(t).$$

При рассмотрении $A_{t+h}^{(2)}$ получаем

$$P\left(A_{t+h}^{(2)} \middle| A_t^{(0)}\right) = \alpha_2 h + o(h),$$

$$P\left(A_{t+h}^{(2)} \middle| A_t^{(1)}\right) = (\beta h + o(h))(\alpha_2 h + o(h)) = o(h),$$

$$P\left(A_{t+h}^{(2)} \middle| A_t^{(2)}\right) = (1 - \beta h + o(h)(1 - \alpha_1 h + o(h)) = 1 - (\alpha_1 + \beta)h + o(h),$$

т.е. разговор по простому вызову не кончится и срочный вызов не поступит.

После аналогичных преобразований получаем третье дифференциальное уравнение

$$P_2'(t)=\alpha_2 P_0(t)-(\alpha_1+\beta)P_2(t).$$

Итак, получена система дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} P_0'(t)=-(\alpha_1+\alpha_2)P_0(t)+\beta P_1(t)+\beta P_2(t); \\ P_1'(t)=\alpha_1 P_0(t)-\beta P_1(t)+\alpha_1 P_2(t); \\ P_2'(t)=\alpha_2 P_0(t)-(\beta+\alpha_1)P_2(t); \\ P_0(0)=1,\ P_1(0)=P_2(0)=0. \end{cases}$$

Собственные значения и соответствующие им собственные векторы матрицы из коэффициентов при неизвестных правой части полученной системы дифференциальных уравнений равны $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-(\alpha_1+\beta)$, $\lambda_3=-(\alpha_1+\alpha_2+\beta)$;

$$\vec{a}_1=\begin{pmatrix} \beta+\alpha_1 \\ \dfrac{\alpha_1}{\beta}(\alpha_1+\alpha_2+\beta) \\ \alpha_2 \end{pmatrix},\quad \vec{a}_2=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},\quad \vec{a}_3=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

используя условия $P_0(0)=1$, $P_1(0)=P_2(0)=0$, получим ответ.

Ответ

$$P_0(t)=\frac{\beta}{\alpha_1+\alpha_2+\beta}+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\beta}e^{-(\alpha_1+\alpha_2+\beta)t},$$

$$P_1(t)=\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta}-\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta}e^{-(\alpha_1+\beta)t},$$

$$P_2(t)=\frac{\alpha_2}{\alpha_1+\beta}\cdot\frac{\beta}{\alpha_1+\alpha_2+\beta}+\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\beta}e^{-(\alpha_1+\beta)t}-$$

$$-\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2+\beta}e^{-(\alpha_1+\alpha_2+\beta)t}.$$

Задача 19

На ЭВМ может решаться одна или две задачи одновременно. Вновь поступившая задача в момент решения двух задач не принимается. Вероятность поступления одной задачи за время $h\to 0$ равна $\lambda h + o(h)$, $1 - \lambda h + o(h)$ — вероятность непоступления ни одной задачи за время $h \to 0$. При решении одной задачи вероятность окончания ее решения за время $h \to 0$ равна $\mu h + o(h)$, при решении двух задач решение любой из них заканчивается с вероятностью $\mu h/2 + o(h)$ независимо от другой. Пусть $P_k(t)$ — вероятность того, что в момент t решается k задач $k = 0, 1, 2$. Найти $P_k(t)$, если $P_0(0) = 1$, $P_1(0) = P_2(0) = 0$.

Решение

Обозначим $A_t^{(k)} = \{$в момент t решается k задач$\}$, $k = 0, 1, 2$.

$$P\left(A_t^{(k)}\right) = P_k(t).$$

Как в задаче 18, будем применять формулу полной вероятности, рассматривая условные вероятности:

$$P\left(A_{t+h}^{(l)} \middle| A_t^{(k)}\right),\ k = 0, 1, 2;\ l = 0, 1, 2.$$

1. $P\left(A_{t+h}^{(0)} \middle| A_t^{(0)}\right) = 1 - \lambda h + o(h)$;

$P\left(A_{t+h}^{(0)} \middle| A_t^{(1)}\right) = \mu h + o(h)$;

$P\left(A_{t+h}^{(0)} \middle| A_t^{(2)}\right) = \left(\frac{\mu}{2} h + o(h)\right)^2 = o(h)$

(должны быть решены обе задачи), остальные события имеют вероятность $o(h)$. Тогда

$$P\left(A_{t+h}^{(0)}\right) = P\left(A_t^{(0)}\right)(1 - \lambda h + o(h)) + P\left(A_t^{(1)}\right)(\mu h + o(h)) + P\left(A_t^{(2)}\right)o(h)$$

или

$$P_0(t + h) = P_0(t)(1 - \lambda h + o(h)) +$$
$$+ P_1(t)(\mu h + o(h)) + P_2(t)o(h).$$

После вычитания $P_0(t)$ из обеих частей этого равенства и деления на h, перейдя к пределу при $h \to 0$, получим первое дифференциальное уравнение

$$P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t).$$

2. $P\left(A_{t+h}^{(1)} \middle| A_t^{(0)}\right) = \lambda h + o(h)$;

$$P\left(A_{t+h}^{(1)} \middle| A_t^{(1)}\right) = (1 - \lambda h + o(h))(1 - \mu h + o(h)) = 1 - (\lambda + \mu)h + o(h)$$

(не должна поступить еще задача — иначе решаться будут две, а решение задачи не должно окончиться). Остальные события имеют вероятность $o(h)$:

$$P\left(A_{t+h}^{(1)} \middle| A_t^{(2)}\right) = \left(\frac{\mu}{2}h + o(h)\right)2(1 - \lambda h + o(h)) = \mu h + o(h)$$

(должно окончиться решение одной из двух решаемых задач и задача не должна поступить). Итак, соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$P_1'(t) = \lambda P_0(t) - (\lambda + \mu)P_1(t) + \mu P_2(t).$$

3. $P\left(A_{t+h}^{(2)} \middle| A_t^{(0)}\right) = (\lambda h + o(h))^2 = o(h)$,

$$P\left(A_{t+h}^{(2)} \middle| A_t^{(1)}\right) = (1 - \mu h + o(h))(\lambda h + o(h)) = \lambda h + o(h),$$

$$P\left(A_{t+h}^{(2)} \middle| A_t^{(2)}\right) = \left(1 - \frac{\mu}{2}h + o(h)\right)^2 = 1 - \mu h + o(h).$$

(не должно окончиться решение каждой из двух задач). Остальные события имеют вероятность $o(h)$. Третье уравнение имеет вид

$$P_2'(t) = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t).$$

Итак, мы получили систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} P_0'(t) = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t); \\ P_1'(t) = \lambda P_0(t) - (\lambda + \mu)P_1(t) + \mu P_2(t); \\ P_2'(t) = \lambda P_1(t) - \mu P_2(t). \end{cases}$$

Собственные значения и собственные векторы матрицы

$$\begin{pmatrix} -\lambda & \mu & 0 \\ \lambda & -(\lambda + \mu) & \mu \\ 0 & \lambda & -\mu \end{pmatrix}$$

равны $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = -(\lambda + \mu - \sqrt{\lambda\mu})$, $\alpha_2 = -(\lambda + \mu + \sqrt{\lambda\mu})$;

$$\vec{a}_0 = \begin{pmatrix} \mu^2 \\ \lambda\mu \\ \lambda^2 \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu} \\ \sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu} \\ -\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}, \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\mu} \\ -\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu} \\ \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}.$$

Используя условие $P_0(0) = 1$, $P_2(0) = P_1(0) = 0$, находим окончательный ответ: обозначим $\lambda^2 + \mu^2 + \lambda\mu = c$.

$$P_0(t) = \frac{1}{c}\left[\mu^2 - \frac{\lambda}{2}\left(\alpha_2 e^{\alpha_1 t} + \alpha_1 e^{\alpha_2 t}\right)\right],$$

$$P_1(t) = \frac{1}{c}\left[\lambda\mu - \frac{\lambda}{2\sqrt{\mu}}\left(\alpha_2\left(\sqrt{\lambda} - \sqrt{\mu}\right)e^{\alpha_1 t} - \alpha_1\left(\sqrt{\lambda} + \sqrt{\mu}\right)e^{\alpha_2 t}\right)\right],$$

$$P_2(t) = \frac{1}{c}\left[\lambda^2 + \frac{\lambda\sqrt{\lambda}}{2\sqrt{\mu}}\left(\alpha_2 e^{\alpha_1 t} - \alpha_1 e^{\alpha_2 t}\right)\right].$$

Задача 20

На рис. 7 приведена схема распада радиоактивного ядра. Стрелками помечены возможные переходы, а рядом указаны их вероятности за время $h \to 0$. Пусть $P_k(t)$, $k = 0, 1, 2$, вероятность того, что в момент t ядро находилось на уровне k. Найти $P_k(t)$, если $P_1(0) = P_2(0) = 0$, $P_0(0) = 1$.

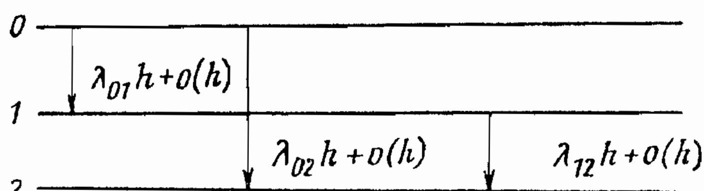

Рис. 7

Решение

Пусть событие A_t^k означает, что в момент t ядро находилось на k-м уровне, $k = 0, 1, 2$,

$$P\left(A_t^{(k)}\right) = P_k(t).$$

Рассмотрим событие $A_{t+h}^{(0)}$:

$$P\left(A_{t+h}^{(0)} \middle| A_t^{(0)}\right) = 1 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})h + o(h),$$

$$P\left(A_{t+h}^{(0)} \middle| A_t^{(1)}\right) = P\left(A_{t+h}^{(0)} \middle| A_t^{(2)}\right) = 0,$$

так как с 1-го и 2-го уровня "вверх" ядро не может подняться, а может только остаться на этом уровне или спуститься "вниз". Соответствующее дифференциальное уравнение имеет вид

$$P_0'(t) = -(\lambda_{01} + \lambda_{02})P_0(t).$$

Условные вероятности положения для ядра на 1-м уровне равны

$$P\left(A_{t+h}^{(1)} \middle| A_t^{(0)}\right) = \lambda_{01}h + o(h),$$

$$P\left(A_{t+h}^{(1)} \middle| A_t^{(1)}\right) = 1 - \lambda_{12}h + o(h),$$

$$P\left(A_{t+h}^{(1)} \middle| A_t^{(2)}\right) = 0.$$

Откуда (используя формулу полной вероятности) получаем

$$P_1'(t) = \lambda_{01}P_0(t) - \lambda_{12}P_1(t).$$

И наконец,

$$P\left(A_{t+h}^{(2)} \middle| A_t^{(0)}\right) = \lambda_{02}h + o(h);$$

$$P\left(A_{t+h}^{(2)} \middle| A_t^{(1)}\right) = \lambda_{12}h + o(h);$$

$$P\left(A_{t+h}^{(2)} \middle| A_t^{(2)}\right) = 1,$$

ибо, достигнув уровня 2, ядро там так и останется. Итак,

$$P_2'(t) = \lambda_{02}P_0(t) + \lambda_{12}P_1(t).$$

Для нахождения $P_k(t)$, $k = 0, 1, 2$ получили систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} P_0'(t) = -(\lambda_{01} + \lambda_{02})P_0(t); \\ P_1'(t) = \lambda_{01}P_0(t) - \lambda_{12}P_1(t); \\ P_2'(t) = \lambda_{02}P_0(t) + \lambda_{12}P_1(t); \\ P_0(0) = 1, \ P_1(0) = P_2(0) = 0. \end{cases}$$

Собственные значения матрицы

$$\begin{pmatrix} -(\lambda_{01} + \lambda_{02}) & 0 & 0 \\ \lambda_{01} & -\lambda_{12} & 0 \\ \lambda_{02} & \lambda_{12} & 0 \end{pmatrix}$$

и собственные векторы равны $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -(\lambda_{01} + \lambda_{02})$, $\alpha_3 = -\lambda_{12}$ $(\lambda_{12} \neq \lambda_{01} + \lambda_{02})$, $\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} -\lambda_{01} - \lambda_{02} + \lambda_{12} \\ \lambda_{01} \\ -\lambda_{12} + \lambda_{02} \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ответ

а) Если $\lambda_{12} \neq \lambda_{01} + \lambda_{02}$, то:

$$P_0(t) = e^{\alpha_2 t};$$

$$P_1(t) = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{01} + \lambda_{02} - \lambda_{12}}\left(e^{\alpha_3 t} - e^{\alpha_2 t}\right);$$

$$P_2(t) = 1 - \frac{1}{\lambda_{01} + \lambda_{02} - \lambda_{12}}\left(\lambda_{01}e^{\alpha_3 t} + (\lambda_{02} - \lambda_{12})e^{\alpha_2 t}\right).$$

б) Если $\lambda_{12} = \lambda_{01} + \lambda_{02}$, то:

$$P_0(t) = e^{-\lambda_{12}t};$$

$$P_1(t) = \lambda_{01}te^{-\lambda_{12}t};$$

$$P_2(t) = 1 - (\lambda_{01}t + 1)e^{-\lambda_{12}t}.$$

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Доказать, что события A, $\overline{A}\,B$ и $\overline{A+B}$ образуют полную группу событий.

2. При стрельбс была получена частота попадания 0,6. Сколько было сдслано выстрелов, если получено 12 промахов?

3. Брошсно двс игральные кости. Какова вероятность выпадения на двух костях в сумме нс менее 9 очков? Какова вероятность выпадения единицы по крайней мере на одной кости?

4. На шахматную доску из 64 клеток ставят наудачу две ладьи белого и черного цвета. С какой вероятностью они не будут “бить” друг друга?

5. A и B стоят в очсрсди. Опрсделить вероятность того, что A и B отделены друг от друга тремя лицами, если в очсрсди стоят еще восемь чсловск.

6. Шар $x^2+y^2+z^2=9$ помещен внутри эллипсоида $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{9}=1$. Найти вероятность того, что поставленная наудачу внутри эллипсоида точка окажется внутри шара.

7. Спутник земли движется по орбите, которая заключена между 60° северной и 60° южной широты. Считая падение спутника в любую точку поверхности между указанными параллслями равновозможными, найти вероятность того, что спутник упадет выше 30° северной широты.

8. Слой воздуха толщиной H содержит пылинки радиуса r в количестве λ штук в одной кубической единице. Найти вероятность того, что луч света, перпсндикулярный слою, не пересечст ни одной пылинки.

9. Доказать, что если A и B нсзависимые события с положительными вероятностями, то они совместны.

10. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность, что вынутые шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар?

11. Бросили монету и игральную кость. Определить, зависимы или независимы события: $A = \{$выпал герб$\}$, $B = \{$выпало четное число очков$\}$.

12. Пусть события A и B_1 независимы и независимы также события A и B_2, при этом $B_1B_2 = \varnothing$. Доказать, что события A и $B_1 + B_2$ независимы.

13. Монета бросается до первого появления "герба". Описать пространство элементарных событий. Найти вероятность того, что потребуется четное число бросаний.

14. Предположим, что для одной торпеды вероятность потопить корабль равна 1/2. Какова вероятность того, что 4 торпеды потопят корабль, если для этого достаточно одного попадания торпеды в цель?

15. Два охотника стреляют в волка, причем каждый делает по одному выстрелу. Для первого охотника вероятность попадания в цель 0,7, для второго — 0,8. Какова всроятность попадания в волка (хотя бы при одном выстреле)? Как изменится результат, ссли охотники сделали по два выстрела?

16. (Задача о совпадениях.) Элементы a_1, a_2, ..., a_n случайным образом переставляются (все $n!$ персстановок равновероятны). Какова вероятность P_n того, что хотя бы один элемент окажется на своем месте? Найти $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

17. Гардеробщица выдала одновременно номерки четырем лицам, сдавшим в гардероб свои шляпы. После этого она перепутала все шляпы и повесила их наугад. Найти вероятности следующих событий: $A = \{$каждому из четырех лиц гардеробщица выдает его собственную шляпу$\}$; $B = \{$ровно три лица получат свои шляпы$\}$; $C = \{$ровно два лица получат свои шляпы$\}$; $D = \{$ровно одно лицо получит свою шляпу$\}$; $E = \{$ни одно лицо из четырех не получит своей шляпы$\}$.

18. Вероятность распада радиоактивного ядра атома за время Δt равна $\lambda\Delta t$. Вероятность распада атома не зависит от того, как долго атом уже существует, не распадаясь, поэтому λ не зависит от времени. Какова вероятность распада атома за время t? Найти зависимость между коэффициентом λ и временем полураспада T.

19. В цехе работает 20 станков. Из них 10 марки A, 6 марки B и 4 марки C. Вероятности того, что качество детали окажется отличным, для этих станков соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,7. Какой процент отличных деталей выпускает цех в целом?

20. На рис. 8 изображена схема дорог. Туристы вышли из пункта O, выбирая наугад на разветвлении дороги один из возможных путей. Какова вероятность того, что они попадут в пункт A?

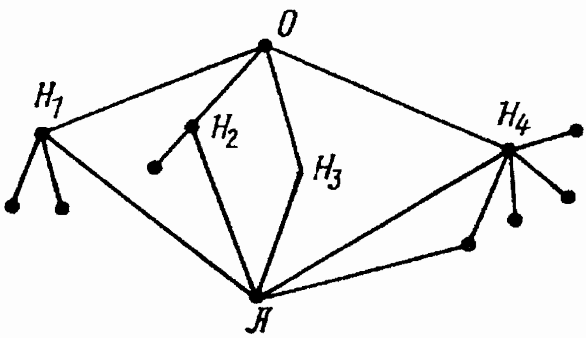

Рис.8

21. Студент знает не все экзаменационные билеты. В каком случае вероятность вытащить неизвестный билет будет для него наименьшей? Когда он тащит билет первым или последним?

22. Два стрелка, независимо один от другого, стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,8, для второго — 0,4. После стрельбы в мишени обнаружена одна пробоина. Найти вероятность того, что в мишень попал первый стрелок.

23. На фабрике, изготавливающей болты, первая машина производит 25 %, вторая 35 %, третья 40 % всех изделий. В продукции брак составляет соответственно 5, 4 и 2%. а) Какова вероятность того, что случайно выбранный болт дефектный? б) Случайно выбранный из продукции болт оказался дефектным. Какова вероятность того, что он был произведен первой, второй, третьей машиной?

24. Три дороги соединяют города A и B, две дороги соединяют города B и C. Сколькими способами можно совершить поездку из A в C через B?

25. Студенту необходимо сдать три экзамена на протяжении семи дней. Сколькими способами это можно сделать, если известно, что последний экзамен будет сдаваться на седьмой день? Предполагается, что в один день сдается не более одного экзамена.

26. r элементарных частиц регистрируются n счетчиками, причем каждая из частиц может с одинаковой вероятностью попасть в любой из счетчиков. Найти вероятность того, что все частицы разместятся по одной в этих счетчиках ($r \le n$).

27. Монету бросают до тех пор, пока не появится подряд два “герба” или две “решки”. Найти вероятность события $A = \{$понадобится не более трех бросаний$\}$.

28. Охотник выстрелил три раза по убегающему зайцу. Вероятность попадания в цель в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. Найти вероятности событий: $A = \{$охотник промахнулся три раза$\}$; $B = \{$охотник попадает хотя бы один раз$\}$; $C = \{$охотник попадает три раза$\}$.

29. Три письма раскладываются случайно по трем конвертам. Найти вероятность того, что хотя бы одно письмо попадет в свой конверт.

30. Выбирают наудачу один член разложения определителя n-го порядка. Какова вероятность P_n того, что он не содержит элементов главной диагонали? Найти $\lim\limits_{n\to\infty} P_n$.

31. Доказать формулу

$$P_C(A+B) = P_C(A) + P_C(B) - P_C(AB).$$

32. Некоторое изделие выпускается двумя заводами. При этом объем продукции второго завода в k раз превосходит объем продукции первого. Доля брака у 1-го завода p_1, у 2-го p_2. Изделия, выпущенные заводами за одинаковый промежуток времени, пустили в продажу. Какова вероятность того, что некто приобрел изделие 2-го завода, если оно оказалось бракованным?

33. На кондитерской фабрике для комплектования подарков для детей взято шесть сортов конфет и для каждого набора берется случайным образом 12 конфет. Получено множество наборов, в котором нет одинаковых подарков и содержатся все возможные наборы конфет шести сортов по 12 штук в каждом наборе. Предположим, что все наборы имеют одинаковые вероятности быть взятыми при случайном выборе подарка. Найти вероятность того, что случайно взятый подарок содержит: а) ровно три сорта конфет; б) все сорта конфет.

34. В технической библиотеке имеются книги по математике, физике, химии и так далее, всего по 16 разделам науки. Поступили очередные 4 заказа на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равновероятен, найти вероятности следующих событий: $A = \{$заказаны книги из различных разделов науки$\}$, $B = \{$заказаны книги из одного и того же раздела науки$\}$.

ОТВЕТЫ К ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

2. 30. **3.** 5/18, 11/36. **4.** 7/9. **5.** $12 \cdot 8!/10! = 2/15$. **6.** 9/20.

7. $\left(3-\sqrt{5}\right)/\sqrt{6} \cong 0{,}2113$. **8.** $\mathrm{e}^{-\pi r^2}\lambda H$.

10. 48/95. **11.** Независимы.

13. $\Omega = \{\,\omega_1 = \text{Г},\ \omega_2 = \text{РГ},\ \ldots,\ \omega_n = \underbrace{\text{Р}\ldots\text{Р}}_{n-1}\text{Г}\ldots\},\ \dfrac{1}{3}$.

14. $15/16 = 0{,}9375$. **15.** 0,94; 0,9964.

16. $P_n = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$; $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = 1 - \mathrm{e}^{-1} = 0{,}6321$.

17. $P(A) = \dfrac{1}{24}$, $P(B) = 0$, $P(C) = \dfrac{1}{4}$, $P(D) = \dfrac{1}{3}$, $P(E) = \dfrac{3}{8}$.

18. $1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$, $\lambda = \ln 2 / T$ $(\ln 2 = 0{,}693147)$.

19. 83%. **20.** 67/120. **21.** Безразлично. **22.** 6/7.

23. а) 0,0345; б) 125/345, 140/345, 80/345. **24.** 6.

25. 90. **26.** $r!C_n^r / n^r$. **27.** $\dfrac{3}{4}$.

28. $P(A) = 0{,}024$; $P(B) = 0{,}976$; $P(C) = 0{,}452$. **29.** 2/3.

30. $P_n = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k / k!$; $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \mathrm{e}^{-1} = 0{,}3679$.

32. $\dfrac{kp_2}{p_1 + kp_2}$. **33.** $C_6^3 C_{11}^2 / C_{17}^5 = \dfrac{275}{1547}$; $C_{11}^5 / C_{17}^5 = \dfrac{33}{442}$.

34. $P(A) = C_{16}^4 / C_{19}^4$, $P(B) = 16 / C_{19}^4$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. М.: Агар, 2000.

2. *Полякова Е.И., Постникова Л.П.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: МИФИ, 2004.

3. Методические указания к решению задач по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» (часть 1). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин.* М.: МИФИ, 1999.

СОДЕРЖАНИЕ

Редактор *М.В. Макарова*
Оригинал-макет изготовлен *М.В. Макаровой*

Подписано в печать 20.02.2008. Формат 60x84 1/16.
Печ.л. 3,75. Уч.-изд.л. 3,75. Тираж 100 экз.
Изд. № 002-1. Заказ № 27

Московский инженерно-физический институт
(государственный университет).
Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31