МИФИ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации

(часть 3)

Москва 2008

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Методические рекомендации

(часть 3)

Москва 2008

УДК 519.2(07)
ББК 22.17я7
М 54

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА: Методические рекомендации (часть 3). В 4-х частях. М.: МИФИ, 2008. 68 с.

Данная, 3-я часть методических рекомендаций продолжает исправленные издания (части 1, 2) [7, 8] ранее опубликованных работ [3 — 6]. Настоящая работа является исправленным изданием работы [5] и содержит решения задач из и § 5 сборника задач [2]. Необходимые ссылки на теоретический материал (определения, теоремы и т.д.) приведены по учебнику: Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Агар, 2000.

Методические рекомендации предназначены для студентов, изучающих курс теории вероятностей и математической статистики в течение одного семестра, и посвящены разбору задач из книги: Полякова Е.И., Постникова Л.П. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: МИФИ, 2004. Указанные методические рекомендации будут полезны также преподавателям, ведущим практические занятия по теории вероятностей и математической статистике.

Составители: Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин

Рекомендовано к изданию редсоветом МИФИ

Редактор и технический редактор М.В. Макарова
Оригинал-макет изготовлен М.В. Макаровой

Подписано в печать 30.06.2008. Формат 60x84 1/16.
Печ.л. 4,25. Уч.-изд.л. 4,25. Тираж 100 экз.
Изд. № 004-1 Заказ № 216

Московский инженерно-физический институт (государственный университет).
Типография МИФИ.
115409, Москва, Каширское ш., 31

5. СОВМЕСТНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. ПОЛИНОМИАЛЬНОЕ И НОРМАЛЬНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН. КОВАРИАЦИЯ И КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ

Задача 1

Совместное распределение величин $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ является равномерным в круге $\{(x_1, x_2):\ 0 \le x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$. Найти вероятность $P\{|\xi_1| < 1/\sqrt{2}, |\xi_2| < 1/\sqrt{2}\}$. Являются ли величины $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ независимыми?

Решение

Совместная плотность распределения величин $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ равна

$$p_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 1/\pi, & \text{если } x_1^2 + x_2^2 \le 1; \\ 0, & \text{если } x_1^2 + x_2^2 > 1. \end{cases}$$

Известно (см. [1], гл. 5, § 4), что

$$P\{(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega)) \in B\} = \iint\limits_{(x_1, x_2) \in B} p_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 .$$

Пусть $B = \{|x_1| < 1/2, |x_2| < 1/2\}$. Тогда

$$P\{|\xi_1| < 1/\sqrt{2}, |\xi_2| < 1/\sqrt{2}\} = \int\limits_{|x_1| < 1/\sqrt{2}} \ \int\limits_{|x_2| < 1/\sqrt{2}} \frac{1}{\pi} dx_1 dx_2 = \frac{2}{\pi}.$$

Для исследования вопроса о независимости величин $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ применим следующее определение независимости случайных величин (см. [1], гл. 5, § 5): $\xi_1(\omega)$ и $\xi_1(\omega)$ независимы, если для любых событий $\{\xi_k \in B_k\}$, $k = 1, 2$, где B_k — подмножества числовой прямой, имеет место равенство:

$$P\{\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2\} = P\{\xi_1 \in B_1\} P\{\xi_2 \in B_2\}.$$

Положим $B_k = [1/\sqrt{2}, \infty)$, $k = 1, 2$. Так как

$$P\{\xi_k \in B_k\} = P\left\{\xi_k \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)\frac{1}{4},$$

а

$$P\{\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2\} = P\left\{\xi_1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \xi_2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = 0,$$

то

$$P\{\xi_1 \in B_1, \xi_2 \in B_2\} \neq P\{\xi_1 \in B_1\} P\{\xi_2 \in B_2\},$$

и случайные величины ξ_1 и ξ_2 зависимы.

Ответ

$2/\pi$, ξ_1 и ξ_2 зависимы.

Задача 2

Координаты вектора $\vec{v}$ независимы и нормально распределены с параметрами (0, 1). Найти плотность распределения квадрата абсолютной величины v^2: а) на плоскости (распределение Рэлея); б) в пространстве (распределение Максвелла); в) в n-мерном пространстве (распределение χ_n^2).

Решение

а) Найдем плотность распределения Рэлея. Так как $\vec{v} = (\xi_1, \xi_2)$, то $v^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$, где ξ_1 и ξ_2 — независимые и нормально распределенные с параметрами (0, 1) случайные величины. Следовательно, совместная плотность распределения (ξ_1, ξ_2) равна

$$p_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}, \quad -\infty < x_i < +\infty, \quad i = 1, 2.$$

Найдем $F_{\nu^2}(y) = P\{\xi_1^2 + \xi_2^2 < y\}$.

Если $y \le 0$, то очевидно, что $F_{\nu^2}(y) = 0$.

Если $y > 0$, то (см. [1], гл. 5, § 4, формула (4.3))

$$F_{\nu^2}(y) = P\{\xi_1^2 + \xi_2^2 < y\} = \iint\limits_{x_1^2 + x_2^2 < y} p_{\xi_1\xi_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{x_1^2 + x_2^2 < y} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)}\, dx_1 dx_2 .$$

После перехода к полярным координатам $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, $0 \le r < \sqrt{y}$, получаем

$$F_{\nu^2}(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\sqrt{y}} r\mathrm{e}^{-r^2/2} dr = -\,\mathrm{e}^{-r^2/2}\Big|_0^{\sqrt{y}} = 1 - \mathrm{e}^{-y/2} .$$

Откуда

$$p_{\nu^2}(y) = F'_{\nu^2}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ y \le 0; \\ \dfrac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-y/2}, & \text{если } \ y > 0. \end{cases}$$

б) Найдем плотность распределения Максвелла. В этом случае $\nu^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ и совместная плотность распределения случайных величин ξ_1, ξ_2, ξ_3 равна

$$p_{\xi_1\xi_2\xi_3}(x_1, x_2, x_3) = (\sqrt{2\pi})^{-3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)}, \; -\infty < x_i < +\infty,\; i = 1, 2, 3.$$

Так как $\nu^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$, то $F_{\nu^2}(y) = 0$, если $y \le 0$; и при $y > 0$

$$F_{\nu^2}(y) = P\{\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 < y\} = \iiint\limits_{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < y} p_{\xi_1\xi_2\xi_3}(x_1, x_2, x_3)\, dx_1 dx_2 dx_3 =$$

$$= (\sqrt{2\pi})^{-3} \iiint\limits_{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < y} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{3} x_k^2}\, dx_1 dx_2 dx_3 .$$

Перейдем к сферическим координатам $x_1 = r\cos\varphi_2\cos\varphi_1$, $x_2 = r\cos\varphi_2\sin\varphi_1$, $x_3 = r\sin\varphi_2$, $0 \le r < \sqrt{y}$, $0 \le \varphi_1 \le 2\pi$, $-\frac{\pi}{2} \le \varphi_2 \le \frac{\pi}{2}$, с якобианом преобразования $\frac{D(x_1, x_2, x_3)}{D(r, \varphi_1, \varphi_2)} = r^2\cos\varphi_2$. Тогда

$$F_{\mathrm{v}^2}(y) = (\sqrt{2\pi})^{-3}\int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\varphi_2\, d\varphi_2 \int_0^{\sqrt{y}} r^2 \mathrm{e}^{-r^2/2} dr =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\sin\varphi_2\Big|_{-\pi/2}^{\pi/2}\right]\int_0^{\sqrt{y}} r^2 \mathrm{e}^{-r^2/2} dr = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\sqrt{y}} r^2 \mathrm{e}^{-r^2/2} dr .$$

Так как $F'_{\mathrm{v}^2}(y) = p_{\mathrm{v}^2}(y)$, то

$$p_{\mathrm{v}^2}(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } y \le 0; \\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{y}\,\mathrm{e}^{-y/2}, & \text{если } y > 0. \end{cases}$$

в) Найдем плотность распределения случайной величины $\mathrm{v}^2 = \chi_n^2 = \sum_{k=1}^{n}\xi_k^2$. Совместная плотность распределения случайных величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n (каждая из которых есть нормальная случайная величина с параметрами 0 и 1) имеет вид

$$p_{\xi_1\xi_2\ldots\xi_3}(x_1, x_2, ..., x_n) = (\sqrt{2\pi})^{-n}\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right\},$$

$$-\infty < x_k < +\infty, \quad k = \overline{1, n}$$

(ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n — независимые случайные величины).

Функция распределения $F_{\mathrm{v}^2}(y)$ определится из соотношения:

$$F_{\chi_n^2}(y) = P\{\chi_n^2 < y\} = P\left\{\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2 < y\right\}.$$

Пусть $y \le 0$, тогда $F_{\chi_n^2}(y) = 0$.

Пусть $y > 0$, тогда

$$F_{\chi_n^2}(y) = \int\limits_{x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2<y} \ldots \int (\sqrt{2\pi})^{-n} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} x_k^2\right\} dx_1 \ldots dx_n .$$

Перейдем к сферическим координатам (см. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. Т. 2. М., 1981. С. 223 — 224) в n-мерном пространстве r, φ_1, φ_2, …, φ_{n-1}:

$$x_1 = r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\ldots\cos\varphi_2\cos\varphi_1;$$

$$x_2 = r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\ldots\cos\varphi_2\sin\varphi_1;$$

$$x_3 = r\cos\varphi_{n-1}\cos\varphi_{n-2}\ldots\cos\varphi_3\sin\varphi_2;$$

…

$$x_i = r\cos\varphi_{n-1}\ldots\cos\varphi_i\sin\varphi_{i-1};$$

…

$$x_n = r\sin\varphi_{n-1};$$

$$0 \le r < \sqrt{y}, \quad 0 \le \varphi_i \le 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \le \varphi_i \le \frac{\pi}{2}, \quad i = 2, 3, \ldots, n-1,$$

с якобианом преобразования, равным

$$\frac{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)}{D(r, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})} = r^{n-1}\cos\varphi_2\cos^2\varphi_3\ldots\cos^{n-2}\varphi_{n-1}.$$

Обозначим $\cos\varphi_2\cos^2\varphi_3\ldots\cos^{n-2}\varphi_{n-1} = C(\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1})$. Тогда

$$F_{\chi_n^2}(y) =$$

$$= (\sqrt{2\pi})^{-n}\int_0^{2\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\ldots\int_{-\pi/2}^{\pi/2} C(\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1})\int_0^{\sqrt{y}} r^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\,dr\,d\varphi_{n-1}\ldots d\varphi_1 =$$

$$= C_n\int_0^{\sqrt{y}} r^{n-1}\mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2}}\,dr,$$

где

$$C_n = (\sqrt{2\pi})^{-n} \int_0^{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \dots \int_{-\pi/2}^{\pi/2} C(\varphi_2, \dots, \varphi_{n-1})\, d\varphi_{n-1}\, d\varphi_{n-2} \dots d\varphi_1 .$$

C_n найдем из условия нормировки:

$$F_{\chi_n^2}(+\infty) = 1 = C_n \int_0^{+\infty} r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2}} dr .$$

Сделаем замену переменных $r^2 = 2t$, $r\,dr = dt$:

$$1 = C_n 2^{\frac{n}{2}-1} \int_0^{\infty} t^{\frac{n}{2}-1} e^{-t} dt = C_n 2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Следовательно, $C_n = \left[2^{\frac{n}{2}-1} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\right]^{-1}$ и при $y > 0$

$$F_{\chi_n^2}(y) = \frac{2^{-\frac{n}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int_0^{\sqrt{y}} r^{n-1} e^{-\frac{r^2}{2}} dr .$$

Так как $F'_{\chi_n^2}(y) = p_{\chi_n^2}(y)$, то при $y > 0$

$$p_{\chi_n^2}(y) = y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} 2^{-\frac{n}{2}} / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right).$$

Ответ

$$p_{\chi_n^2}(y) = y^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{y}{2}} 2^{-\frac{n}{2}} / \Gamma\left(\frac{n}{2}\right), \quad y > 0, \quad n = 2, 3, \dots .$$

Задача 3

Случайные величины ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n независимы и одинаково распределены: функции распределения равны $F(x)$. Найти функции распределения случайных величин

$$\eta(\omega)=\max_{1\le i\le n}\ \xi_i \quad \text{и} \quad \theta(\omega)=\min_{1\le i\le n}\ \xi_i .$$

Предположив дополнительно, что существует плотность $p(x)=F'(x)$, вычислить плотности $p_\eta(x)$ и $p_\theta(x)$.

Решение

Согласно определению:

$$F_\eta(x)=P\{\eta(\omega)<x\}=P\left\{\left(\max_{1\le i\le n}\ \xi_i\right)<x\right\}.$$

Событие $\left\{\left(\max_{1\le i\le n}\ \xi_i\right)<x\right\}$, означающее, что максимальная из n случайных величин ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n меньше x, наступает только в том случае, если <u>каждая из величин</u> ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n <u>меньше</u> x. Следовательно,

$$F_\eta(x)=P\{\xi_1<x,\xi_2<x,...,\xi_n<x\}=\prod_{i=1}^{n}P\{\xi_i<x\},$$

так как ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n — независимые случайные величины.

По условию задачи $P\{\xi_i<x\}=F(x)$, значит, $F_\eta(x)=[F(x)]^n$ и $p_\eta(x)=F'_\eta(x)=n[F(x)]^{n-1}p(x)$.

Найдем распределение случайной величины $\theta(\omega)=\min\limits_{1\le i\le n}\ \xi_i$. При нахождении распределения $\eta(\omega)=\max\limits_{1\le i\le n}\ \xi_i$ «игра» была на том, что «максимальная из n случайных величин меньше x» — это позволило перейти к событию «каждая из n величин меньше x», во втором же случае перейдем к противоположному событию

$$F_\theta(x)=P\{\theta<x\}=1-P\{\theta\ge x\}=1-P\left\{\left(\min_{1\le i\le n}\ \xi_i\right)\ge x\right\}.$$

Событие $\left\{\left(\min_{1\le i\le n}\ \xi_i\right)\ge x\right\}$ имеет место только в том случае, если <u>каждая из n случайных величин</u> ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n не <u>меньше</u> x, т.е.

$$P\left\{\left(\min_{1\le i\le n}\ \xi_i\right)\ge x\right\}=P\{\xi_1\ge x,\xi_2\ge x,...,\xi_n\ge x\}=\prod_{i=1}^{n}P\{\xi_i\ge x\}.$$

Итак,

$$F_\theta(x) = 1 - \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i \geq x\} = 1 - [1 - F(x)]^n,$$

и

$$p_\theta(x) = F'_\theta(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} p(x).$$

Ответ

$F_\eta(x) = [F(x)]^n, \quad p_\eta(x) = n[F(x)]^{n-1} p(x),$

$F_\theta(x) = 1 - [1 - F(x)]^n, \quad p_\theta(x) = n[1 - F(x)]^{n-1} p(x).$

Задача 4

На окружности радиусом R фиксирована точка, вторая точка равномерно распределена на окружности. Найти функцию распределения и математическое ожидание длины хорды, соединяющей эти точки.

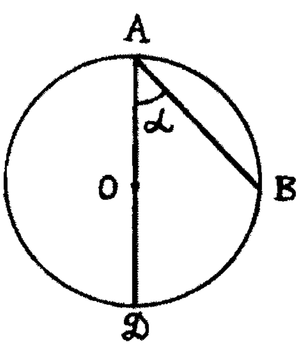

Рис. 1

Решение

Пусть A — фиксированная точка на окружности радиусом R (рис. 1). Вторая точка хорды — точка B выбирается случайным образом. Обозначим длину хорды AB через ξ, длину дуги DB обозначим через 2α, α — случайная величина, равномерно распределенная на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Выразим случайную величину ξ через α:

$$\xi = 2R\cos\alpha.$$

Очевидно, что $F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = 0$, если $x \leq 0$, и $F_\xi(x) = 1$ при $x > 2R$.

Пусть $0 < x \le 2R$. Тогда

$$F_\xi(x) = P\{\xi < x\} = P\{2R\cos\alpha < x\} =$$

$$= P\left\{\arccos\frac{x}{2R} < |\alpha| \le \frac{\pi}{2}\right\} = 1 - P\left\{|\alpha| \le \arccos\frac{x}{2R}\right\}.$$

Так как случайная величина α равномерно распределена на $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, то при $0 < t < \frac{\pi}{2}$ $\quad P\{|\alpha| \le t\} = P\{-t \le \alpha \le t\} = \frac{2t}{\pi}$. Следовательно, $F_\xi(x) = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos\frac{x}{2R}$. Тогда

$$p_\xi(x) = F'_\xi(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \notin (0, 2R); \\ \dfrac{2}{\pi}\dfrac{1}{\sqrt{4R^2 - x^2}}, & \text{если } x \in (0, 2R). \end{cases}$$

Найдем среднее значение ξ:

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} x p_\xi(x)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{2R}\frac{x\,dx}{\sqrt{4R^2 - x^2}} = -\frac{2}{\pi}\sqrt{4R^2 - x}\,\Bigg|_0^{2R} = \frac{4R}{\pi}.$$

Ответ

$F_\xi(x) = 0, \quad x \le 0; \quad F_\xi(x) = 1 - \dfrac{2}{\pi}\arccos\dfrac{x}{2R}, \quad 0 < x < 2R;$

$F_\xi(x) = 1, \quad x \ge 2R; \quad M\xi = \dfrac{4R}{\pi}.$

Задача 5

Случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ независимы, неотрицательны и их плотности распределения при $0 \le x < +\infty$ пропорциональны

$$x^\alpha e^{-kx} \quad (\alpha > 0, \quad k > 0) \quad \text{и} \quad x^\beta e^{-kx} \quad (\beta > 0, \quad k > 0).$$

Найти плотность распределения суммы $\xi(\omega) + \eta(\omega)$.

Решение

Плотности распределения случайных величин $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ равны соответственно $C_1 x^{\alpha} e^{-kx}$ и $C_2 x^{\beta} e^{-kx}$, $0 < x < +\infty$. Константы C_1 и C_2 найдем из условия нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} p_{\xi}(x)\,dx = 1$:

$$C_1 \int\limits_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-kx} dx = C_1 \int\limits_0^{\infty} \frac{t^{\alpha}}{k^{\alpha}} e^{-t} \frac{dt}{k} =$$

$$= C_1 k^{-(\alpha+1)} \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha} e^{-t}\, dt = C_1 k^{-(\alpha+1)} \Gamma(\alpha+1) = 1,$$

где $\Gamma(\alpha) = \int\limits_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t}\, dt$ — гамма-функция, $\alpha > 0$. Следовательно, $C_1 = \dfrac{k^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}$ и аналогично $C_2 = \dfrac{k^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)}$. Значит, при $0 < x < +\infty$

$$p_{\xi}(x) = \frac{k^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-kx}, \quad p_{\eta}(x) = \frac{k^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} x^{\beta} e^{-kx}.$$

Для нахождения распределения суммы $\xi(\omega) + \eta(\omega)$ воспользуемся формулой (6.7) из [1] гл. 5, § 6:

$$p_{\xi+\eta}(y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi}(x) p_{\eta}(y-x)\, dx.$$

Учитывая, что в задаче $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ неотрицательны, получаем при $y > 0$

$$p_{\xi+\eta}(y) = \int\limits_0^{y} \frac{k^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{-kx} \frac{k^{\beta+1}}{\Gamma(\beta+1)} (y-x)^{\beta} e^{-k(y-x)} dx =$$

$$= \frac{k^{\alpha+\beta+2} e^{-ky}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \int\limits_0^{y} x^{\alpha} (y-x)^{\beta}\, dx =$$

$$= \frac{k^{\alpha+\beta+2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} e^{-ky} y^{\alpha+\beta+1} \int\limits_0^{1} t^{\alpha} (1-t)^{\beta}\, dt.$$

Используя связь бета-функции $B(a,b)=\int\limits_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,dt$, $a>0$, $b>0$, и гамма-функций $B(a,b)=\Gamma(a)\Gamma(b)/\Gamma(a+b)$, найдем плотность распределения суммы:

$$p_{\xi+\eta}(y)=\frac{k^{\alpha+\beta+2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\,\mathrm{e}^{-ky}y^{\alpha+\beta+1}B(\alpha+1,\beta+1)=$$

$$=\frac{k^{\alpha+\beta+2}}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\,y^{\alpha+\beta+1}\mathrm{e}^{-ky}\,\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}=$$

$$=\frac{k^{\alpha+\beta+2}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\,y^{\alpha+\beta+1}\mathrm{e}^{-ky}.$$

Ответ

$$p_{\xi+\eta}(y)=\frac{k^{\alpha+\beta+2}}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}\,y^{\alpha+\beta+1}\mathrm{e}^{-ky},\quad y>0.$$

Задача 6

Совместное распределение величин $\xi_1(\omega)$, $\xi_2(\omega)$ определяется формулами:

$$P\{\xi_1=0,\xi_2=1\}=P\{\xi_1=0,\xi_2=-1\}=P\{\xi_1=-1,\xi_2=0\}=$$

$$=P\{\xi_1=1,\xi_2=0\}=\frac{1}{4}.$$

Найти коэффициент корреляции $\rho(\xi_1,\xi_2)$. Зависимы или нет $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$?

Решение

Согласно определению ([1], гл. 6, § 4) $\rho(\xi_1,\xi_2)=\dfrac{\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)}{\sqrt{D\xi_1}\sqrt{D\xi_2}}$,

где

$$\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=M[(\xi_1-M\xi_1)(\xi_2-M\xi_2)]=M(\xi_1\xi_2)-(M\xi_1)(M\xi_2).$$

Найдем законы распределения случайных величин $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$. Запишем данные задачи в виде табл. 1, где на пересечении i-й строки и j-го столбца стоят вероятности событий

$$P\{\xi_1 = i, \xi_2 = j\} = p_{ij}, \quad i = -1, 0, 1; \quad j = -1, 0, 1.$$

Таблица 1

ξ_1	ξ_2		
	–1	0	1
–1	0	1/4	0
0	1/4	0	1/4
1	0	1/4	0

Так как (см. [1], гл. 5, § 4, формулы (4.6) и (4.7))

$$P\{\xi_1 = i\} = p_i = \sum_{j=-1}^{1} p_{ij} \quad \text{и} \quad P\{\xi_2 = j\} = p_j = \sum_{i=-1}^{1} p_{ij},$$

то

$$P\{\xi_1 = 0\} = \frac{1}{2}, \quad P\{\xi_1 = -1\} = P\{\xi_1 = 1\} = \frac{1}{4}$$

и

$$P\{\xi_2 = 0\} = \frac{1}{2}, \quad P\{\xi_2 = -1\} = P\{\xi_2 = 1\} = \frac{1}{4}.$$

Откуда $M\xi_1 = \sum_{i=-1}^{1} ip_i = 0$, $M\xi_2 = \sum_{j=-1}^{1} jp_j = 0$. Согласно теореме 1.1 из книги [1], гл. 6, § 1 ($r = 2$, $g(\xi_1, \xi_2) = \xi_1\xi_2$)

$$M(\xi_1\xi_2) = \sum_{i=-1}^{1} \sum_{j=-1}^{1} ijp_{ij} = 0$$

и, следовательно, $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 0$ и $\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$.

Если для любых значений i и j выполняется равенство:

$$P\{\xi_1 = i, \xi_2 = j\} = P\{\xi_1 = i\}P\{\xi_2 = j\},$$

то случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы (см. [1], гл. 5, теорема 5.2).

Пусть $i = 1$, $j = 1$. По условию задачи $P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\} = p_{11} = 0$. Выше было найдено, что $P\{\xi_1 = 1\} = P\{\xi_2 = 1\} = 0{,}25 \neq 0$. Следовательно,

$$P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1\} \neq P\{\xi_1 = 1\}P\{\xi_2 = 1\}$$

и случайные величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ зависимы.

Ответ

$\rho(\xi_1, \xi_2) = 0$, $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ зависимы.

Задача 7

Пусть $\xi(\omega)$ — число комбинаций HY в $n + 1$ испытаниях схемы Бернулли. Найти $M\xi$ и $D\xi$.

Решение

Испытания Бернулли являются частным случаем полиномиальной схемы (см. [1], гл. 4, § 2). Два исхода каждого испытания схемы Бернулли будем обозначать буквами Y и H и называть «успехом» и «неуспехом», а соответствующие им вероятности в каждом испытании обозначим буквами p и $q = 1 - p$.

Для $n + 1$ испытания схемы Бернулли элементарные события удобно обозначать цепочками длины $n + 1$, составленными из букв Y и H: $\omega = (YHHYY...HH)$. Для данного ω построим последовательность пар исходов k и $k + 1$ испытаний ($k = 1, 2, \ldots, n$):

$$(YH), (HH), (HY), (YY), ..., (HH). \qquad (1)$$

Обозначим через $\xi = \xi(\omega) = \xi(YHHYY...HH)$ случайную величину, равную числу пар (HY) в последовательности (1).

Так, например, при $n = 5$ и $\omega = (HHYYYH)$ соответствующая последовательность пар исходов такая:

$$(HH),\quad (HY),\quad (YY),\quad (YY),\quad (YH) \tag{2}$$

и $\xi(HHYYYH) = 1$ (пара (YH) не считается, так как порядок следования символов не тот!).

Ясно, что распределение ξ найти непросто, но и не поставлена такая задача: надо найти только $M\xi$ и $D\xi$.

Введем события A_k, $k = 1, 2, \ldots, n$: A_k = {при испытаниях с номерами k и $k+1$ появилась пара HY}. Рассмотрим систему индикаторов событий A_1, A_2, …, A_n (см. [1], гл. 5, § 5; гл. 6, § 2, пример 3 и § 3, пример 5):

$$\chi_k(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A_k; \\ 0, & \text{если } \omega \in \overline{A}_k. \end{cases}$$

Для последовательности (2)

$$\chi_1(\omega) = \chi_3(\omega) = \chi_4(\omega) = \chi_5(\omega) = 0, \quad \chi_2(\omega) = 1.$$

Очевидно, что $\xi(\omega) = \sum\limits_{k=1}^{n} \chi_k(\omega)$. Напомним, что

$$P(B) = \sum_{\omega \in B} P(\omega)$$

и

$$P(\omega) = P(YHHYY\ldots HH) =$$

$$= P(Y)P(H)P(H)P(Y)P(Y)\ldots P(H)P(H) = pqqpp\ldots qq$$

(см. [1], гл. 4, § 1 и 2, соответственно формулы (1.6) и (2.1)). Тогда

$$P\{\chi_k(\omega) = 1\} = P(A_k) = \sum_{\omega \in A_k} P(\omega) = \sum_{\omega \in A_k} P\Bigl(\ldots \underset{k}{H}\ \underset{k+1}{Y} \ldots\Bigr) =$$

$$= \underset{1}{(p+q)}\underset{\cdots}{\ldots}\underset{k-1}{(p+q)}\,\underset{k}{q}\ \underset{k+1}{p}\ \underset{k+2}{(p+q)}\underset{\cdots}{\ldots}\underset{n+1}{(p+q)} = qp$$

(так как $p + q = 1$ и исходами испытаний с номерами $l \neq k$, $k+1$ могут быть и успехи, и неуспехи).

Тогда

$$P\{\chi_k = 0\} = 1 - qp \quad \text{и} \quad M\chi_k = 1 \cdot qp + 0 \cdot (1 - qp) = qp,$$

$$M\xi = M\left(\sum_{k=1}^{n} \chi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} M\chi_k = \sum_{k=1}^{n} qp = nqp$$

(см. [1], гл. 6, § 2, равенство (2.1)). Так как

$$P\{\chi_k = 1, \chi_{k+1} = 1\} = 0 \neq (qp)^2 = P\{\chi_k = 1\} P\{\chi_{k+1} = 1\},$$

то по теореме 5.2 (см. [1], гл. 5, § 5) случайные величины χ_1, χ_2, …, χ_n зависимы и дисперсия их суммы может быть и не равной сумме дисперсий этих величин. Для нахождения $D\xi$ воспользуемся равенством (3.2) ([1], гл. 6, § 3):

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2,$$

где

$$M\xi^2 = M\left(\sum_{k=1}^{n} \chi_k\right)^2 = M\left(\sum_{k=1}^{n} \chi_k^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{n} \sum_{l=1}^{n} \chi_k \chi_l\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M\chi_k^2 + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq l}}^{n} \sum_{l=1}^{n} M(\chi_k \chi_l)$$

(использовали упомянутое выше равенство (2.1): $M\left(\sum_{k=1}^{n} C_k \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{n} C_k M\xi_k$).

$$M\chi_k^2 = 1^2 P\{\chi_k = 1\} + 0^2 P\{\chi_k = 0\} = qp$$

(теорема 1.1 из книги [1], гл. 6, § 1; $r = 1$; $g(x) = x^2$) и при $k \neq l$

$$M(\chi_k \chi_l) = \sum_{i=0}^{1} \sum_{j=0}^{1} ij P\{\chi_k = i, \chi_i = j\} = P\{\chi_k = 1, \chi_l = 1\}$$

(теорема 1.1 из книги [1], гл. 6, § 1; $r = 2$; $g(x_1, x_2) = x_1 x_2$).

Если $|k-l|=1$ то события A_k и A_l несовместны, и

$$P\{\chi_k=1, \chi_l=1\}=0,$$

тем самым $M(\chi_k\chi_l)=0$.

Если же $|k-l|\geq 2$, то события A_k и A_l независимы (как события, зависящие в последовательности независимых испытаний от исходов испытаний с непересекающимися номерами испытаний — теорема 2.1 из книги [1], гл. 4, § 2) и

$$P\{\chi_k=1, \chi_l=1\}=P\{\chi_k=1\}P\{\chi_l=1\}=(qp)^2.$$

Следовательно,

$$M(\chi_k\chi_l)=\begin{cases} 0, & \text{если } |k-l|=1; \\ q^2p^2, & \text{если } |k-l|\geq 2 \end{cases}$$

и $M\xi^2=npq+(n^2-n-2(n-1))q^2p^2$. Тогда

$$D\xi=npq+(n^2-3n+2)p^2q^2-(npq)^2=npq-(3n-2)q^2p^2=$$

$$=npq(1-3pq)+2q^2p^2=nqp(q^3+p^3)+2p^2q^2,$$

где $1-3pq=(p+q)^3-3pq=q^3+p^3$.

Ответ

$M\xi=npq$, $\quad D\xi=npq(p^3+q^3)+2p^2q^2$.

Задача 8

Кусок проволоки длиной $2l$ изогнут под прямым углом в случайной (равномерно распределенной) точке. Концы куска соединены прямой. Найти функцию распределения площади полученного треугольника.

Решение

Обозначим через $\xi(\omega)$ длину одного из получившихся отрезков (являющихся катетами полученного прямоугольного треугольника). Случайная величина $\xi(\omega)$ равномерно распределена на отрезке

$[0, 2l]$ и ее функция распределения $F_\xi(x) = 0$ при $x \le 0$; $F_\xi(x) = \dfrac{x}{2l}$ при $0 < x \le 2l$; $F_\xi(x) = 1$ при $x > 2l$.

Длина второго катета равна $2l - \xi(\omega)$. Обозначим площадь получившегося треугольника через $\eta(\omega)$, $\eta(\omega)$ — случайная величина — функция от $\xi(\omega)$:

$$\eta(\omega) = \frac{1}{2}\xi(\omega)[2l - \xi(\omega)].$$

Так как $\max\limits_{0 \le x \le 2l} \dfrac{x(2l - x)}{2} = \dfrac{l^2}{2}$, то при $y \le 0$ $F_\eta(y) = 0$ и при $y > \dfrac{l^2}{2}$ $F_\eta(y) = 1$.

Пусть $0 < y \le l^2/2$

$$F_\eta(y) = P\{\eta(\omega) < y\} = P\left\{\frac{1}{2}\xi(2l - \xi) < y\right\} = P\{\xi^2 - 2\xi l + 2y > 0\} =$$

$$= 1 - P\{\xi^2 - 2\xi l + 2y \le 0\} = 1 - P\{x_1 \le \xi \le x_2\},$$

где $x_{1,2} = l \mp \sqrt{l^2 - 2y}$ — решения уравнения $x^2 - 2lx + 2y = 0$.

Следовательно, при $0 < y \le \dfrac{l^2}{2}$

$$F_\eta(y) = 1 - (F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1)) = 1 - \frac{2\sqrt{l^2 - 2y}}{2l} = 1 - \sqrt{1 - \frac{2y}{l^2}}.$$

Ответ

$$F_\eta(y) = 0, \quad y \le 0; \quad F_\eta(y) = 1 - \sqrt{1 - \frac{2y}{l^2}}, \quad 0 < y \le \frac{l^2}{2};$$

$$F_\eta(y) = 1, \quad y > l^2/2.$$

Задача 9

Случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ независимы и одинаково распределены $P\{\xi(\omega) = k\} = P\{\eta(\omega) = k\} = 2^{-k}$ при $k = 1, 2, \ldots$. Найти закон распределения их суммы.

Решение

Сумма случайных величин $\xi(\omega)+\eta(\omega)$ есть дискретная случайная величина, принимающая значения $n = 2, 3, \ldots$. Обозначим

$$A_k = \{\omega : \xi(\omega) = k, \eta(\omega) = n - k\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Событие $\{\omega : \xi(\omega)+\eta(\omega) = n\}$ есть сумма событий:

$$\{\omega : \xi(\omega)+\eta(\omega) = n\} = \{\omega : \omega \in A_1\} \bigcup \{\omega : \omega \in A_2\} \bigcup \ldots \bigcup \{\omega : \omega \in A_{n-1}\}.$$

Так как события A_1, A_2, …, A_{n-1} несовместны, то

$$P\{\xi+\eta = n\} = P\left\{\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k\right\} = \sum_{k=1}^{n-1} P(A_k),$$

и в силу независимости случайных величин $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ окончательно получаем

$$P\{\xi+\eta = n\} = \sum_{k=1}^{n-1} P\{\xi = k, \eta = n-k\} = \sum_{k=1}^{n-1} P\{\xi = k\}\, P\{\eta = n-k\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} 2^{-k} 2^{-(n-k)} = 2^{-n} \sum_{k=1}^{n-1} 1 = (n-1)2^{-n}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Ответ

$$P\{\xi(\omega)+\eta(\omega) = n\} = (n-1)2^{-n}, \quad n = 2, 3, \ldots .$$

Задача 10

Рассмотрим независимые случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$, где $\xi(\omega)$ дискретна с распределением $P\{\xi(\omega) = x_k\} = p_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, а $\eta(\omega)$ непрерывна с плотностью распределения $p(x)$. Доказать, что сумма $\xi+\eta$ непрерывна и найти ее плотность распределения.

Решение

Так как случайная величина $\eta(\omega)$ непрерывна, то ее функция распределения — непрерывная, функция $y(x) = x + x_k$ (x_k — фиксировано) — непрерывная, то и случайная величина $\xi(\omega) + \eta(\omega)$ — непрерывная. Для любого фиксированного y событие $\{\xi(\omega) + \eta(\omega) < y\}$ есть сумма несовместных событий

$$\{\omega : \xi(\omega) = x_k, \eta(\omega) < y - x_k\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно,

$$F_{\xi+\eta}(y) = P\{\xi(\omega) + \eta(\omega) < y\} = \sum_{k=1}^{n} P\{\xi(\omega) = x_k, \eta(\omega) < y - x_k\}$$

и в силу независимости случайных величин $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$

$$F_{\xi+\eta}(y) = \sum_{k=1}^{n} p_k P\{\eta < y - x_k\} = \sum_{k=1}^{n} p_k F_{\eta}(y - x_k) \qquad (3)$$

и

$$p_{\xi+\eta}(y) = \sum_{k=1}^{n} p_k p(y - x_k).$$

Ответ

$$p_{\xi+\eta}(y) = \sum_{k=1}^{n} p_k p(y - x_k).$$

Замечание. Пусть $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ — независимые случайные величины. $\xi(\omega)$ — дискретная случайная величина с распределением

$$P\{\xi = -2\} = P\{\xi = 0\} = P\{\xi = 2\} = \frac{1}{3}$$

$\eta(\omega)$ равномерно распределена на отрезке $[a, b]$.

Найти функцию распределения суммы случайных величин $\xi + \eta$ и построить график функции распределения в случае, если: а) $a = 0$, $b = 1$; б) $a = 0$, $b = 3$.

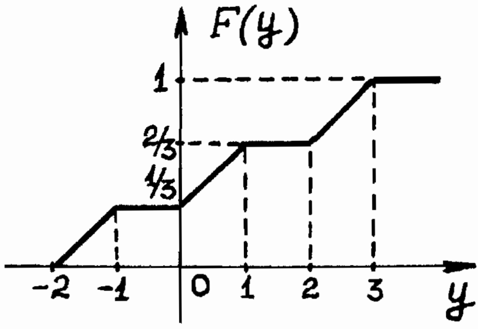

Рис. 2

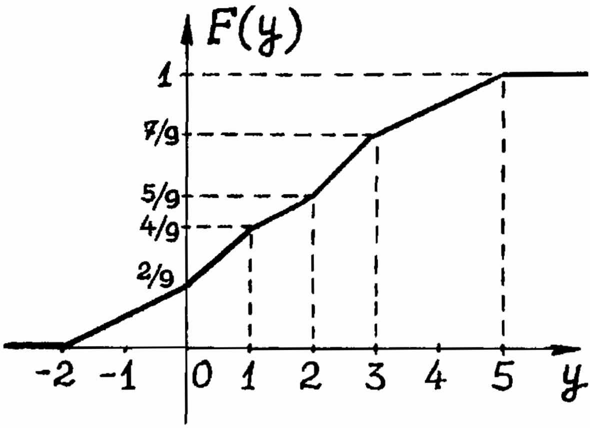

Рис. 3

Решение. Используя соотношение (3) и учитывая, что

$$F_\eta(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \ y \le a; \\ \dfrac{y-a}{b-a}, & \text{если } \ a < y \le b; \\ 1, & \text{если } \ y > b, \end{cases}$$

найдем функции распределения суммы случайных величин $\xi + \eta$

$$F(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y\le -2;\\ \dfrac{y+2}{3}, & \text{если } -2<y\le -1;\\ \dfrac{1}{3}, & \text{если } -1<y\le 0;\\ \dfrac{1}{3}+\dfrac{y}{3}, & \text{если } 0<y\le 1;\\ \dfrac{2}{3}, & \text{если } 1<y\le 2;\\ \dfrac{y}{3}, & \text{если } 2<y\le 3;\\ 1, & \text{если } y>3;\end{cases}\qquad F(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y\le -2;\\ \dfrac{y+2}{9}, & \text{если } -2<y\le 0;\\ \dfrac{2}{9}+\dfrac{2y}{9}, & \text{если } 0<y\le 1;\\ \dfrac{3}{9}+\dfrac{y}{9}, & \text{если } 1<y\le 2;\\ \dfrac{1}{9}+\dfrac{2y}{9}, & \text{если } 2<y\le 3;\\ \dfrac{4}{9}+\dfrac{y}{9}, & \text{если } 3<y\le 5;\\ 1, & \text{если } y>5.\end{cases}$$

Графики функций распределения приведены соответственно на рис. 2 и 3.

Задача 11

Плотность распределения трехмерной случайной точки θ с декартовыми координатами (ξ, η, ζ) равна

$$p_{\xi\eta\zeta}(x,y,z)=\begin{cases}C(1+x+y+z)^{-4}, & \text{если } x\ge 0, y\ge 0, z\ge 0;\\ 0, & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Найти C, плотность распределения $p_\xi(x)$ координаты $\xi(\omega)$, а также плотность распределения суммы координат $\xi+\eta+\zeta$.

Решение

Из условия нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi\eta\zeta}(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=1$$

находим $C=6$. Согласно свойствам многомерной функции распределения (см. [1], гл. 5, § 4)

$$p_\xi(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}p_{\xi\eta\zeta}(x,y,z)\,dy\,dz=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{6\,dy\,dz}{(1+x+y+z)^4}=(1+x)^{-2},$$

если $x > 0$; $p_\xi(x) = 0$, если $x \le 0$. Обозначим $\tau = \xi + \eta + \zeta$. При $t \le 0$ $F_\tau(t) = 0$. Пусть $t > 0$, тогда (рис. 4)

$$F_\tau(t) = P\{\xi + \eta + \zeta < t\} = \iiint\limits_{x+y+z<t} p_{\xi\eta\zeta}(x, y, z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_0^t \left(\int_0^{t-z} \left(\int_0^{t-x-y} \frac{6\, dz}{(1 + x + y + z)^4} \right) dy \right) dx = 1 - \frac{1}{1+t} - \frac{t}{(1+t)^2} - \frac{t^2}{(1+t)^3} =$$

$$= \frac{t^3}{(1+t)^3}$$

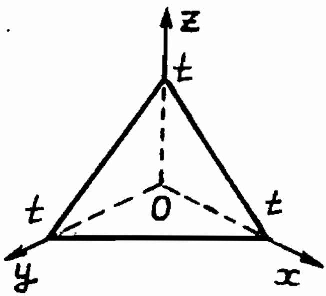

Рис. 4

и $p_\tau(t) = 3t^3(1+t)^{-4}$ при $t > 0$, $p_\tau(t) = 0$ при $t \le 0$.

Ответ

$C = 6$, $p_\xi(x) = (1 + x)^{-2}$, $x > 0$;

$p_{\xi+\eta+\zeta}(t) = 3t^2(1+t)^{-4}$, $t > 0$.

Задача 12

Случайные величины ξ_1, ξ_2, …, ξ_{10} попарно некоррелированы, $M\xi_k = 0$, $D\xi_k = \sigma^2$, $k = 1, 2, \ldots, 10$. Найти коэффициент корреляции сумм $\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_7$ и $\xi_4 + \xi_5 + \ldots + \xi_{10}$.

Решение

Обозначим $\eta_1 = \sum\limits_{k=1}^{7} \xi_k$, $\eta_2 = \sum\limits_{l=4}^{10} \xi_l$. Коэффициент корреляции случайных величин η_1 и η_2 равен

$$\rho(\eta_1, \eta_2) = \frac{\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2)}{\sqrt{D\eta_1}\sqrt{D\eta_2}}$$

(см. [1], гл. 6, § 4), где

$$\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = M[(\eta_1 - M\eta_1)(\eta_2 - M\eta_2)] = M(\eta_1\eta_2),$$

так как

$$M\eta_1 = M\left(\sum_{k=1}^{7}\xi_k\right) = \sum_{k=1}^{7} M\xi_k = 0 \quad \text{и} \quad M\eta_2 = 0.$$

Используя свойства математического ожидания и дисперсии и учитывая некоррелированность случайных величин ξ_1, ξ_2, …, ξ_{10} (см. [1], гл. 6, § 2, 3), получаем

$$M(\xi_k\xi_l) = \begin{cases} 0, & k \neq l; \\ \sigma^2, & k = l \end{cases}$$

и

$$D\eta_1 = D\left(\sum_{k=1}^{7}\xi_k\right) = \sum_{k=1}^{7} D\xi_k = 7\sigma^2, \quad D\eta_2 = 7\sigma^2;$$

$$\operatorname{cov}(\eta_1, \eta_2) = M\left(\sum_{k=1}^{7}\sum_{l=4}^{10}\xi_k\xi_l\right) = \sum_{k=1}^{7}\sum_{\substack{l=4 \\ k\neq l}}^{10} M(\xi_k\xi_l) = \sum_{k=4}^{7} M\xi_k^2 = 4\sigma^2;$$

$$\rho(\eta_1, \eta_2) = \frac{4\sigma^2}{\sqrt{\sigma^2 7}\sqrt{7\sigma^2}} = \frac{4}{7}.$$

Ответ

$\rho(\eta_1, \eta_2) = \dfrac{4}{7}$.

Задача 13

Случайным образом n частиц размещают по N ячейкам. Обозначим через $\mu_0(\omega)$ число пустых ячеек. Найти $M\mu_0$ и $D\mu_0$.

Указание. Ввести

$$\chi_k(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{ячейка с номером } k \text{ пуста;} \\ 0, & \text{ячейка с номером } k \text{ непуста.} \end{cases}$$

Найти асимптотические формулы при $N \to \infty$ и $\dfrac{n}{N} \to \alpha = \text{const}$.

__Решение__

Как и при решении задачи 7 случайную величину $\mu_0(\omega)$ можно представить как сумму случайных величин $\chi_k(\omega)$, $k = 1, 2, \ldots, N$, введенных в указании к задаче. $P\{\chi_k = 1\} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$, так как каждая из n частиц (независимо от других) попадает в любую из $N-1$ ячеек, кроме ячейки с номером k (иначе эта ячейка уже не будет пустой),

$$P\{\chi_k = 0\} = 1 - \left(\frac{N-1}{N}\right)^n \quad \text{и} \quad \mu_0(\omega) = \sum_{k=1}^{N} \chi_k(\omega).$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны приведенным при решении задачи 7.

Так как $M\chi_k = P\{\chi_k = 1\} = \left(\frac{N-1}{N}\right)^n$, то ввиду равенства (2.1) (см. [1], гл. 6, § 2)

$$M\mu_0 = M\left(\sum_{k=1}^{N} \chi_k\right) = \sum_{k=1}^{N} M\chi_k = N\left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-1}$$

и

$$M\mu_0^2 = M\left(\sum_{k=1}^{N} \chi_k\right)^2 = \sum_{k=1}^{N} M\chi_k^2 + 2\sum_{1 \le k <} \sum_{l \le N} M(\chi_k \chi_l).$$

Так как

$$M(\chi_k \chi_l) = P\{\chi_k = 1, \chi_l = 1\} = \begin{cases} \left(\frac{N-1}{N}\right)^n, & \text{если } k = l; \\ \left(\frac{N-2}{N}\right)^n, & \text{если } k \ne l, \end{cases}$$

то

$$D\mu_0 = M\mu_0^2 - (M\mu_0)^2 = \sum_{k=1}^{N} M\chi_k^2 + 2\sum_{1 \le k <} \sum_{l \le M} M(\chi_k \chi_l) - N^2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2n} =$$

$$= N\left(\frac{N-1}{N}\right)^n + N(N-1)\left(1 - \frac{2}{N}\right)^n - N^2\left(1 - \frac{1}{N}\right)^{2n}.$$

Если при $N \to \infty$, $n \to \infty$ и $\dfrac{n}{N} \to \alpha = \mathrm{const}$, то справедливы асимптотические формулы:

$$M\mu_0 \sim N\mathrm{e}^{-\alpha} \quad \text{и} \quad D\mu_0 \sim N\mathrm{e}^{-\alpha}[1-(1+\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha}].$$

Ответ

$$M\mu_0 = N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n \sim N\mathrm{e}^{-\alpha};$$

$$D\mu_0 = N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n + N(N-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^2 - N^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n} \sim$$

$$\sim N\mathrm{e}^{-\alpha}[1-(1+\alpha)\mathrm{e}^{-\alpha}].$$

Задача 14

В стопке 50 тетрадей, положенных случайным образом, среди них 15 тетрадей в клеточку, 25 тетрадей в линейку и 10 тетрадей для первого класса. Обозначим $\xi_1(n)$ — число тетрадей в клеточку, среди n первых тетрадей, лежащих сверху; $\xi_2(n)$ — число тетрадей в линейку среди n первых тетрадей, лежащих сверху; $\xi_3(n)$ — число тетрадей для первого класса среди n первых тетрадей, лежащих сверху. Найти:

а) $P\{\xi_1(n)=m\}$, $m = 0, 1, \ldots, n$;

б) $P\{\xi_1(n)=m_1,\ \xi_2(n)=m_2,\ \xi_3(n)=m_3\}$;

в) $M\xi_1(n)$, $D\xi_1(n)$, $\mathrm{cov}\,(\xi_1(n), \xi_2(n))$.

Решение

а) Случайная величина $\xi_1(n)$ имеет гипергеометрическое распределение $G(N, M, n)$ с параметрами $N = 50$, $M = 15$ (см. [1], гл. 2, пример 1):

$$P\{\xi_1(n)=m\} = C_{15}^m C_{35}^{n-m} / C_{50}^n, \quad m = m_0, m_0+1, \ldots, m_1,$$

где

$$m_0 = \max(0, M-N+n) = \max(0, n-35);$$

$$m_1 = \min(M, n) = \min(15, n).$$

б)

$$P\{\xi_1(n)=m_1,\, \xi_2(n)=m_2,\, \xi_3(n)=m_3\}=$$

$$=\begin{cases} C_{15}^{m_1} C_{25}^{m_2} C_{10}^{m_3} \,/\, C_{50}^{n}, & \text{если } m_k \ge 0 \text{ и } m_1 \le 15, m_2 \le 25, m_3 \le 10, \sum\limits_{k=1}^{3} m_k = n; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

в) Введем события $A_k = \{k$-я лежащая сверху тетрадь — тетрадь в клеточку$\}$ и $B_l = \{l$-я лежащая сверху тетрадь — тетрадь в линейку$\}$. Для нахождения $M\xi_1(n)$ и $D\xi_1(n)$ введем индикаторы событий A_k:

$$\chi_k^{(1)}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A_k; \\ 0, & \text{если } \omega \in \overline{A}_k, \end{cases} \quad k = \overline{1, n}.$$

Очевидно, что

$$P\{\chi_k^{(1)}(\omega)=1\} = \frac{15}{50} = \frac{3}{10}, \quad \xi_1(n) = \sum_{k=1}^{n} \chi_k^{(1)}$$

и

$$M\xi_1(n) = M\left(\sum_{k=1}^{n} \chi_k^{(1)}\right) = \sum_{k=1}^{n} M\chi_k^{(1)} = n \cdot 0{,}3\,.$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, что были проведены в задачах 7 и 13. Так как

$$P\{\chi_k^{(1)}=1, \chi_l^{(1)}=1\} = \begin{cases} 0{,}3, & \text{если } k=l; \\ \dfrac{15}{50}\cdot\dfrac{14}{49}, & \text{если } k \ne l, \end{cases}$$

то случайные величины $\chi_1^{(1)}$, $\chi_2^{(1)}$, …, $\chi_n^{(1)}$ зависимы и $D\xi_1(n)$ будем находить, используя формулу:

$$D\xi_1(n) = M[\xi_1(n)]^2 - [M\xi_1(n)]^2,$$

$$M[\xi_1(n)]^2 = M\left(\sum_{k=1}^{n} \chi_k^{(1)}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} M\,(\chi_k^{(1)})^2 + 2\sum_{1 \le k < l \le n} M\,(\chi_k^{(1)}\chi_l^{(1)}) =$$

$$= 0{,}3n + \frac{3}{35}(n^2 - n),$$

$$D\xi_1(n) = 0{,}3n + \frac{3}{35}(n^2 - n) - (0{,}3n)^2 = \frac{3n\,(50 - n)}{700}.$$

Для нахождения $\operatorname{cov}(\xi_1(n), \xi_2(n))$ введем индикаторы событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$:

$$\chi_l^{(2)}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in B_l; \\ 0, & \text{если } \omega \in \overline{B}_l. \end{cases}$$

Тогда $P\{\chi_l^{(2)}(\omega) = 1\} = \dfrac{1}{2}$ и $M\xi_2(n) = \sum\limits_{l=1}^{n} M\chi_l^{(2)} = \dfrac{n}{2}$. Учитывая, что

$$M(\chi_k^{(1)}\chi_l^{(2)}) = P\{\chi_k^{(1)} = 1, \chi_l^{(2)} = 1\} = \begin{cases} 0, & \text{если } k = l; \\ \dfrac{15}{98}, & \text{если } k \neq l, \end{cases}$$

получим

$$M(\xi_1(n)\xi_2(n)) = \sum_{k=1}^{n} M(\chi_k^{(1)}\chi_k^{(2)}) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1 \\ k\neq l}}^{n} M(\chi_k^{(1)}\chi_l^{(2)}) = \frac{15}{98}n\,(n-1).$$

Окончательно

$$\operatorname{cov}(\xi_1(n), \xi_2(n)) = \frac{15}{98}n\,(n-1) - n^2\,\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10} = \frac{3n\,(n-50)}{980}.$$

Ответ

а) $C_{15}^{m}C_{35}^{n-m} / C_{50}^{n}; \quad m = m_0,\ m_0 + 1,\ \ldots,\ m_1;$

$m_0 = \max(0, n - 35); \quad m_1 = \min(15, n);$

б) $C_{15}^{m_1}C_{25}^{m_2}C_{10}^{m_3} / C_{50}^{n}; \quad m_k \geq 0;$

$m_1 \leq 15, \quad m_2 \leq 25, \quad m_3 \leq 10; \quad \sum\limits_{k=1}^{3} m_k = n;$

в) $M\xi_1(n) = 0{,}3n$; $D\xi_1(n) = \dfrac{n(50-n)}{7} 0{,}03$;

$\operatorname{cov}(\xi_1(n), \xi_2(n)) = \dfrac{3n(n-50)}{980}$.

Задача 15

На десяти станках одновременно началась обработка 10 деталей. Предполагая, что времена обработки деталей независимы и имеют показательное распределение с параметром 0,1; найти распределение времени: а) до получения первой обработанной детали; б) до окончания обработки всех деталей.

Решение

Пусть ξ_i — время обработки i-й детали, $i = \overline{1,10}$. Случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{10}$ независимы и одинаково распределены, плотность распределения равна

$$p(x) = 0{,}1\mathrm{e}^{-0{,}1x},\ x > 0,\quad \text{и} \quad p(x) = 0,\ x \le 0.$$

Функция распределения каждой из них равна $F(x) = 0$ при $x \le 0$ и $F(x) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}1x}$ при $x > 0$. Время, затраченное на обработку первой детали есть $\theta = \min\limits_{1 \le i \le n} \xi_i$. В задаче 3 было получено $p_\theta(x) = n(1 - F(x))^{n-1} p(x)$, значит, $p_\theta(x) = 10\mathrm{e}^{-9 \cdot 0{,}1x} 0{,}1\mathrm{e}^{-0{,}1} = \mathrm{e}^{-x}$, $x > 0$. Время до окончания обработки всех деталей есть $\eta = \max\limits_{1 \le i \le n} \xi_i$. В задаче 3 было получено $F_\eta(x) = n(F(x))^{n-1} p(x)$. Следовательно, $p_\eta(x) = (1 - \mathrm{e}^{-0{,}1x})^9 \mathrm{e}^{-0{,}1x}$, $x > 0$.

Ответ

а) e^{-x}, $x > 0$;

б) $(1 - \mathrm{e}^{-0{,}1x})^9 \mathrm{e}^{-0{,}1x}$, $x > 0$.

Задача 16

Производится n независимых испытаний, каждое из которых состоит в случайном выборе двузначного числа (от 00 до 99). Рассмотрим следующие величины: β_n — количество чисел, делящихся на 5; γ_n — количество чисел, содержащих только цифры 1, 2, 3, 4 и 9. Найти $M\beta_n$, $D\beta_n$, $M\gamma_n$, $D\gamma_n$, $\operatorname{cov}(\beta_n, \gamma_n)$.

Решение

Согласно [1], гл. 4, § 2 случайные величины β_n и γ_n имеют биномиальное распределение

$$P\{\beta_n = m\} = C_n^m (0{,}2)^m (0{,}8)^{n-m}, \quad m = \overline{0, n};$$

$$P\{\gamma_n = m\} = C_n^m (0{,}25)^m (0{,}75)^{n-m}, \quad m = \overline{0, n}$$

и согласно рассмотренному в книге [1], гл. 6, § 3, примеру 4

$$M\beta_n = 0{,}2n; \quad D\beta_n = 0{,}16n;$$

$$M\gamma_n = 0{,}25n; \quad D\gamma_n = 0{,}1875n.$$

Так как $P\{\beta_n = n, \gamma_n = n\} = 0 \neq P\{\beta_n = n\} P\{\gamma_n = n\} > 0$, то (см. [1], гл. 6, § 5, теорема 5.2) случайные величины β_n и γ_n зависимы (поэтому нельзя утверждать, что $\operatorname{cov}(\beta_n, \gamma_n) = 0$).

Рассмотрим два способа нахождения $M(\beta_n \gamma_n)$.

1. Как и в задаче 15, найдем $M(\beta_n \gamma_n)$, используя соответствующие системы индикаторов. Рассмотрим события: $B_k = \{k$-е случайно выбранное двузначное число делится на $5\}$, $\Gamma_l = \{l$-е случайно выбранное двузначное число состоит только из цифр 1, 2, 3, 4, $9\}$, $k = \overline{1, n}$, $l = \overline{1, n}$. Введем случайные величины — индикаторы событий B_k и Γ_l:

$$\chi_k^{(1)}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in B_k; \\ 0, & \text{если } \omega \in \overline{B}_k; \end{cases} \quad \chi_l^{(2)}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in \Gamma_l; \\ 0, & \text{если } \omega \in \overline{\Gamma}_l. \end{cases}$$

Очевидно,

$$P\{\chi_k^{(1)}(\omega) = 1\} = 0{,}2; \quad \beta_n = \sum_{k=1}^{n} \chi_k^{(1)}$$

и

$$P\{\chi_l^{(2)}(\omega) = 1\} = 0{,}25, \quad \gamma_n = \sum_{l=1}^{n} \chi_l^{(2)}.$$

Тогда

$$M\{\chi_k^{(1)}\chi_l^{(2)}\} = P\{\chi_k^{(1)} = 1, \chi_l^{(2)} = 1\} = \begin{cases} 0, & \text{если } k = l; \\ 0{,}05, & \text{если } k \neq l, \end{cases}$$

так как при $k \neq l$ случайные величины $\chi_k^{(1)}$ и $\chi_l^{(2)}$ независимы (связаны с испытаниями, номера которых не пересекаются, см. [1], гл. 4, теорема 2.1 и гл. 5, § 5, теорема 5.2) и

$$M(\beta_n \gamma_n) = M\left(\sum_{k=1}^{n} \chi_k^{(1)} \sum_{l=1}^{n} \chi_l^{(2)}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} M(\chi_k^{(1)}\chi_k^{(2)}) + \sum_{k \neq l}\sum M(\chi_k^{(1)}\chi_l^{(2)}) = n(n-1)0{,}05 .$$

Следовательно,

$$\operatorname{cov}(\beta_n, \gamma_n) = n(n-1)\frac{1}{20} - n^2\frac{1}{20} = -0{,}05n .$$

2. Пусть случайная величина δ_n есть число чисел среди n взятых, не делящихся на пять и не содержащих цифры 1, 2, 3, 4 и 9. Случайный вектор $\vec{\xi} = (\beta_n, \gamma_n, \delta_n)$ имеет полиномиальное распределение с параметрами (n, p_1, p_2, p_3), где $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}25$ и $p_3 = 0{,}55$ (см. [1], гл. 4, § 2, формула (2.7)).

Известно, что

$$P_n(x_1, x_2, x_3) = (0{,}2x_1 + 0{,}25x_2 + 0{,}55x_3)^n =$$

$$= \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_1+m_2+m_3=n}}^{n} \sum_{m_2=0}^{n} \sum_{m_3=0}^{n} P\{\beta_n = m_1, \gamma_n = m_2, \delta_n = m_3\} x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \text{ —}$$

производящая функция случайной величины $\xi = (\beta_n, \gamma_n, \delta_n)$ (см. [1], гл. 7, § 2, с.149, формула (2.16)) и

$$M\beta_n\gamma_n = \sum_{\substack{m_1=0 \\ m_1+m_2+m_3=n}}^{n} \sum_{m_2=0}^{n} \sum_{m_3=0}^{n} m_1 m_2 P\{\beta_n = m_1, \gamma_n = m_2, \delta_n = m_3\} =$$

$$= \left.\frac{\partial^2 P_n(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_1 \partial x_2}\right|_{x_1=x_2=x_3=1} = 0{,}05(n-1)n .$$

Итак, окончательно получаем

$$\operatorname{cov}(\beta_n, \gamma_n) = n(n-1)0{,}05 - n^2 0{,}05 = -0{,}05n.$$

Ответ

$M\beta_n = 0{,}2n$; $M\gamma_n = 0{,}25n$;

$D\beta_n = 0{,}16n$; $D\gamma_n = 0{,}1875n$; $\operatorname{cov}(\beta_n - \gamma_n) = -0{,}05n$.

Задача 17

Плотность совместного распределения величин $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ определена формулой:

$$p_{\xi_1\xi_2}(x, y) = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi^2 - 8}[1 - \sin(x + y)], & \text{если } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2},\ 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Найти:

1) одномерные распределения $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ (зависимы ли величины $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$?);

2) $M\xi_i$, $D\xi_i$, $i = 1, 2$;

3) $M\eta_1$, $D\eta_1$, если $\eta_1 = \cos(\xi_1 + \xi_2)$;

4) $M\eta_2$, $D\eta_2$, если $\eta_2 = \sin \xi_1$;

5) плотность распределения $\eta_3 = \xi_1 + \xi_2$.

Решение

1. Известно, что $p_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1\xi_2}(x, y)\, dy$ (см. [1], гл. 5, § 4). Тогда $p_{\xi_1}(x) = 0$, если $x \notin \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ и

$$p_{\xi_1}(x) = \frac{4}{\pi^2 - 8} \int\limits_0^{\pi/2} [1 - \sin(x + y)]\, dy = \frac{4}{\pi^2 - 8}\left(\frac{\pi}{2} - \sin x - \cos x\right),$$

если $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Аналогично $p_{\xi_2}(y)=\dfrac{4}{\pi^2-8}\left(\dfrac{\pi}{2}-\sin y-\cos y\right)$, если $y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, и $p_{\xi_2}(y)=0$, если $y\notin\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

Так как при $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ и $y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$

$$p_{\xi_1\xi_2}(x, y)\neq p_{\xi_1}(x)p_{\xi_2}(y),$$

то ξ_1 и ξ_2 зависимы (см. [1], гл. 5, § 5, теорема 5.3).

2. Так как ξ_1 и ξ_2 одинаково распределены, то

$$M\xi_1=M\xi_2=\frac{4}{\pi^2-8}\int\limits_0^{\pi/2}x\left(\frac{\pi}{2}-\sin x-\cos x\right)dx=$$

$$=\frac{4}{\pi^2-8}\left[\frac{\pi}{2}\frac{x^2}{2}-(x\sin x+\cos x)+(x\cos x-\sin x)\right]\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4}$$

и

$$M\xi_1^2=M\xi_2^2=\frac{4}{\pi^2-8}\int\limits_0^{\pi/2}x^2\left(\frac{\pi}{2}-\sin x-\cos x\right)dx=\frac{4}{\pi^2-8}\times$$

$$\times\left[\frac{\pi}{2}\frac{x^3}{3}-(x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x)+(x^2\cos x-2x\sin x-2\cos x\right]\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=$$

$$=\frac{4}{\pi^2-8}\left(\frac{\pi^4}{48}-\frac{\pi^2}{4}-\pi+4\right).$$

Следовательно,

$$D\xi_1=D\xi_2=M\xi_1^2-(M\xi_1)^2=\frac{4}{\pi^2-8}\left(\frac{\pi^2}{192}-\frac{\pi^2}{8}-\pi+4\right).$$

3. Для нахождения $M\eta_1$ и $D\eta_2$ будем использовать теорему 1.2 (см. [1], гл. 6, § 1): пусть $\vec{\xi}=(\xi_1,\xi_2,...,\xi_r)$ — абсолютно непрерывный случайный вектор с плотностью распределения $p_{\vec{\xi}}(x_1,x_2,...,x_r)$. Если интеграл

$$\int\limits_{R^r}\!\!\dots\!\int |g(x_1,\dots,x_r)|\, p_\xi(x_1,\dots,x_r)\,dx_1\dots dx_r$$

сходится, то математическое ожидание случайной величины $\eta = g(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r)$ существует и равно

$$M\eta = \int\limits_{R^r}\!\!\dots\!\int g(x_1,\dots,x_r)\, p_\xi(x_1,\dots,x_r)\,dx_1\dots dx_r .$$

В нашей задаче $r = 2$, полагая $g(x, y) = \cos(x + y)$, получаем

$$M\eta_1 = M(\cos(\xi_1 + \xi_2)) = \frac{4}{\pi^2 - 8}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos(x+y)[1-\sin(x+y)]\,dxdy = 0 \cdot$$

а при $g(x, y) = \cos^2(x + y)$

$$D\eta_1 = M\eta_1^2 - (M\eta_1)^2 = \frac{4}{\pi^2 - 8}\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2}\cos^2(x+y)[1-\sin(x+y)]\,dydx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 - 8}\int_0^{\pi/2}\left[\left(\frac{y}{2} + \frac{\sin 2(x+y)}{4} + \frac{\cos^3(x+y)}{3}\right)\Bigg|_{y=0}^{\pi/2}\right]dx =$$

$$= \frac{4}{\pi^2 - 8}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin 2x}{2} - \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\cos^3 x}{3}\right)dx = \frac{9\pi^2 - 68}{(\pi^2 - 8)18}.$$

4. В приведенной выше теореме 1.2 (см. п. 3) при $r = 1$ полагаем $g(x) = \sin x$ и далее $g(x) = \sin^2 x$, тогда соответственно получаем

$$M\eta_2 = M\sin\xi_1 = \frac{4}{\pi^2 - 8}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{\pi}{2} - \sin x - \cos x\right]\sin x\,dx = \frac{\pi - 2}{\pi^2 - 8};$$

$$M\eta_2^2 = M\sin^2\xi_1 = \frac{4}{\pi^2 - 8}\int_0^{\pi/2}\sin^2 x\left[\frac{\pi}{2} - \sin x - \cos x\right]dx = \frac{1}{2};$$

$$D\eta_2 = M\eta_2^2 - (M\eta_2)^2 = \frac{\pi^4 - 18\pi^2 + 8\pi + 56}{2(\pi^2 - 8)^2}.$$

5. Докажем следующее утверждение: пусть ξ_1 и ξ_2 — непрерывные случайные величины и $p_{\xi_1\xi_2}(x, y)$ — плотность совместного распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2. Тогда сумма $\xi_1 + \xi_2$ также непрерывна и ее плотность распределения определяется по формуле:

$$p_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1\xi_2}(x, z - x)\, dx \tag{4}$$

(доказательство аналогично доказательству теоремы 6.4 в книге [1], гл. 5, § 6, где рассматривались независимые случайные величины ξ_1, ξ_2):

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = P\{\omega : \xi_1(\omega) + \xi_2(\omega) < z\} = P\{(\xi_1, \xi_2) \in D_z\},$$

где $D_z = \{(x, y) : x + y < z\}$. Согласно формуле (4.3) ([1], гл. 5, § 4)

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \iint\limits_{D_z} p_{\xi_1\xi_2}(x, y)\, dx\, dy = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{z-x} p_{\xi_1\xi_2}(x, y)\, dy \right) dx \,,,$$

положим $y = t - x$, тогда

$$F_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\int\limits_{-\infty}^{z} p_{\xi_1\xi_2}(x, t - x)\, dt \right) dx =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{z} \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1\xi_2}(x, t - x)\, dx \right) dt = \int\limits_{-\infty}^{z} p_{\xi_1+\xi_2}(t)\, dt,$$

где

$$p_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1\xi_2}(x, z - x)\, dx.$$

Применим теперь формулу (4) для распределения, данного в нашей задаче. Если $z < 0$, то $p_{\xi_1+\xi_2}(z) = 0$. Пусть $0 \le z \le \dfrac{\pi}{2}$, тогда $0 \le x \le z$ и

$$p_{\xi_1+\xi_2}(z)=\frac{4}{\pi^2-8}\int\limits_0^z(1-\sin(x+z-x))\,dx=\frac{4z(1-\sin z)}{\pi^2-8}.$$

Пусть $\frac{\pi}{2}<z\le\pi$. Тогда $-\frac{\pi}{2}+z<x\le\frac{\pi}{2}$ и

$$p_{\xi_1+\xi_2}(z)=\frac{4}{\pi^2-8}\int\limits_{z-\pi/2}^{\pi/2}(1-\sin z)\,dx=\frac{4(\pi-z)}{\pi^2-8}(1-\sin z).$$

Ответ

$$p_{\xi_1}(x)=p_{\xi_2}(x)=\frac{4}{\pi^2-8}\left[\frac{\pi}{2}-\cos x-\sin x\right],\quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right],$$

ξ_1 и ξ_2 зависимы,

$$M\xi_1=M\xi_2=\frac{\pi}{4},\quad D\xi_1=D\xi_2=\frac{4}{\pi^2-8}\left(\frac{\pi^4}{192}-\frac{\pi^2}{8}-\pi+4\right),$$

$$M\eta_1=0,\quad D\eta_1=\frac{9\pi^2-68}{18(\pi^2-8)},$$

$$M\eta_2=\frac{\pi-2}{\pi^2-8},\quad D\eta_2=\frac{\pi^4-18\pi^2+8\pi+56}{2(\pi^2-8)^2},$$

$$p_{\xi_1+\xi_2}(z)=\begin{cases} zC(z), & \text{если } z\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]; \\ C(z)(\pi-z), & \text{если } z\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right], \end{cases}\qquad C(z)=\frac{4(1-\sin z)}{\pi^2-8}.$$

Задача 18

Плотность совместного распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 равна

$$p_{\xi_1\xi_2}(x,y)=\begin{cases} C(1+x+y)^{-5}, & \text{если } x\ge 0 \text{ и } y\ge 0; \\ 0, & \text{в остальных случаях}. \end{cases}$$

Найти:

1) константу C;

2) одномерные функции распределения случайных величин ξ_1 и ξ_2 (зависимы ли они?);

3) $M\xi_i$, $D\xi_i$, $i = 1, 2$; $\rho(\xi_1, \xi_2)$;

4) $p_\eta(z)$, $M\eta$, $D\eta$, если $\eta = 3\xi_1 + \xi_2$;

5) $P\{\xi_1 + \xi_2 < 3\}$.

Решение

1. Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1\xi_2}(x, y)\, dx\, dy = 1$ и $\int\limits_0^{\infty}\int\limits_0^{\infty} \frac{dx\, dy}{(1+x+y)^5} = \frac{1}{12}$, то $C = 12$.

2. Согласно свойствам $F_{\xi_1\xi_2}(x, y)$

$$F_{\xi_1}(x) = \int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1\xi_2}(u, \mathrm{v})\, d\mathrm{v}\right) du$$

(см. [1], гл. 5, § 4, с.86). Следовательно, $F_{\xi_1}(x) = 0$ при $x \le 0$ и

$$F_{\xi_1}(x) = \int\limits_0^{x}\left(\int\limits_0^{\infty} 12(1+u+\mathrm{v})^{-5}\, d\mathrm{v}\right) du = 1 - \frac{1}{(1+x)^3} \quad \text{при} \quad x > 0;$$

$$F_{\xi_2}(y) = \int\limits_0^{y}\left(\int\limits_0^{\infty} 12(1+u+\mathrm{v})^{-5}\, du\right) d\mathrm{v} = 1 - \frac{1}{(1+y)^3}, \quad y > 0,$$

$$F_{\xi_2}(y) = 0 \quad \text{при} \quad y \le 0.$$

Так как при $x > 0$ и $y > 0$

$$F_{\xi_1\xi_2}(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x}\left(\int\limits_{-\infty}^{y} p_{\xi_1\xi_2}(u, \mathrm{v})\, d\mathrm{v}\right) du =$$

$$= 1 - \frac{1}{(1+x)^3} - \frac{1}{(1+y)^3} + \frac{1}{(1+x+y)^3},$$

то при $x>0$ и $y>0$

$$F_{\xi_1\xi_2}(x, y) \neq F_{\xi_1}(x)F_{\xi_2}(y),$$

и в силу теоремы 5.1 из книги [1], гл. 6, § 5 случайные величины ξ_1 и ξ_2 зависимы.

3. В п. 2 нашли $F_{\xi_1}(x)$, тогда $p_{\xi_1}(x) = F'_{\xi_1}(x) = 0$, если $x \le 0$ и $p_{\xi_1}(x) = \dfrac{3}{(1+x)^4}$, если $x>0$. Следовательно,

$$M\xi_1 = \int_0^\infty \frac{3x}{(1+x)^4}\,dx = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad M\xi_1^2 = \int_0^\infty \frac{3x^2}{(1+x)^4}\,dx = 1.$$

Тогда $D\xi_1 = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$. Так как ξ_1 и ξ_2 одинаково распределены, то $M\xi_2 = \dfrac{1}{2}$ и $D\xi_2 = 0{,}75$.

При решении задачи 18 в п. 3 была приведена формулировка теоремы 1.2 (см. [1], гл. 6, § 4), полагая в теореме $r=2$, а $g(x, y) = xy$, получаем

$$M(\xi_1\xi_2) = \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{12xy}{(1+x+y)^5}\,dx\,dy = 0{,}5.$$

Тогда (см. [1], гл. 6, § 4)

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = M(\xi_1\xi_2) - (M\xi_1)(M\xi_2) = 0{,}25$$

и

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)}{\sqrt{D\xi_1}\sqrt{D\xi_2}} = \frac{0{,}25}{\sqrt{0{,}75}\sqrt{0{,}75}} = \frac{1}{3}.$$

4. Найдем функцию распределения случайной величины $\eta = 3\xi_1 + \xi_2$. При $z \le 0$ $F_\eta(z) = 0$. Пусть $z>0$. Тогда согласно формуле (4.3) из книги [1], гл. 5, § 4

$$F_\eta(z) = P\{3\xi_1 + \xi_2 < z\} = \iint_{B_z} p_{\xi_1\xi_2}(x, y)\,dx\,dy,$$

в качестве события B_z взято событие

$$B_z = \{(x, y): 3x + y < z\}.$$

Следовательно,

$$F_\eta(z) = \int_0^z \left(\int_0^{\frac{z-y}{3}} \frac{12}{(1+x+y)^5}\, dx \right) dy = 1 - \frac{1}{2}\left[\frac{3^4}{(z+3)^3} - \frac{1}{(z+1)^3} \right]$$

и

$$p_\eta(z) = \frac{3}{2}\left[\frac{3^4}{(z+3)^4} - \frac{1}{(1+z)^4} \right],$$

а при $z \le 0$ $\quad F_\eta(z) = 0$ и $p_\eta(z) = 0$.

$M\eta$ и $D\eta$ найдем, используя соответственно равенства (2.1), (4.4) (см. [1], гл. 6, § 2 и 4):

$$M\eta = M(3\xi_1 + \xi_2) = 3M\xi_1 + M\xi_2 = 2$$

и

$$D\eta = D(3\xi_1 + \xi_2) = 9D\xi_1 + D\xi_2 + 6\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = 9.$$

5. В формуле (4.3) (см. [1], гл. 6, § 4) при $r = 2$ положим $B = \{(x, y): x + y < 3\}$. Тогда

$$P\{\xi_1 + \xi_2 < 3\} = \iint_{(x,\, y)\in B} p_{\xi_1\xi_2}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \int_0^3 \left(\int_0^{3-x} \frac{12\, dy}{(1+x+y)^5} \right) dx = 1 - \frac{13}{256} \approx 0{,}94921875.$$

<u>Ответ</u>

$C = 12$; $\quad F_{\xi_1}(x) = F_{\xi_2}(x) = 1 - \dfrac{1}{(1+x)^3}$, $\quad x > 0$;

ξ_1 и ξ_2 зависимы; $\quad M\xi_1 = M\xi_2 = 0{,}5$; $\quad D\xi_1 = D\xi_2 = 0{,}75$;

$\rho(\xi_1, \xi_2) = \dfrac{1}{3}$; $\quad p_\eta(z) = \dfrac{3}{2}\left[\dfrac{81}{(3+z)^4} - \dfrac{1}{(1+z)^4} \right]$, $\quad z > 0$;

$M\eta = 2$, $\quad D\eta = 9$; $\quad P\{\xi_1 + \xi_2 < 3\} = 0{,}94921875$.

Задача 19

Доказать, что $\rho(\xi_1, \xi_2) = \pm 1$ тогда и только тогда, когда существуют константы a ($a \neq 0$) и b, такие, что $\xi_1(\omega) = a\xi_2(\omega) + b$.

Решение

а) Пусть $\xi_1(\omega) = a\xi_2(\omega) + b$, $a \neq 0$, $b = \text{const}$.

Тогда $M\xi_1 = aM\xi_2 + b$, $D\xi_1 = a^2 D\xi_2$,

$$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = M(\xi_1 - M\xi_1)(\xi_2 - M\xi_2) =$$

$$= M(a\xi_2 + b - aM\xi_2 - b)(\xi_2 - M\xi_2) = aM(\xi_2 - M\xi_2)^2 = aD\xi_2$$

и

$$\rho(\xi_1, \xi_2) = \frac{aD\xi_2}{\sqrt{a^2 D\xi_2}\sqrt{D\xi_2}} = \frac{a}{|a|} = \operatorname{sign} a = \begin{cases} 1, & \text{если } a > 0; \\ -1, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

б) Пусть $|\rho(\xi_1, \xi_2)| = 1$. Тогда $\operatorname{cov}^2(\xi_1, \xi_2) = D\xi_1 D\xi_2$ и многочлен (относительно C), стоящий в правой части равенства:

$$M(\xi_1 - M\xi_1 + C(\xi_2 - M\xi_2))^2 = D\xi_1 + C^2 D\xi_2 + 2C\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2),$$

имеет равные вещественные корни $C_1 = C_2 = C_0$. Следовательно, существует такое C_0, что $M[(\xi_1 - M\xi_1) + C_0(\xi_2 - M\xi_2)]^2 = 0$ и тем самым с вероятностью 1 справедливо

$$\xi_1 - M\xi_1 + C_0(\xi_2 - M\xi_2) = 0$$

или

$$P\{\xi_1 = -C_0\xi_2 + (C_0 M\xi_2 + M\xi_1)\} = 1,$$

т.е. $P\{\xi_1 = a\xi_2 + b\} = 1$, где $a = -C_0$, $b = M\xi_1 + C_0 M\xi_2$.

Задача 20

В N ящиков случайно и независимо друг от друга бросают шары до тех пор, пока не останется пустых ящиков. Обозначим через $\nu(\omega)$ число брошенных шаров. Найти $M\nu$.

Указание. Представить $\nu(\omega)$ в виде суммы $\chi_1 + \chi_2 + \ldots + \chi_N$, где χ_k — число шаров, брошенных с момента, когда число пустых ящиков равно $N-(k-1)$ до изменения числа пустых ящиков на $N-k$, $k=1, 2, \ldots, N$.

Решение

Ясно, что $P\{\chi_1=1\}=1$. При $k \geq 2$ закон распределения χ_k такой:

$$P\{\chi_k=n\}=\left(\frac{k-1}{N}\right)^{n-1} \frac{N-(k-1)}{N}, \quad n=1, 2, \ldots, \quad k=2, 3, \ldots, N,$$

так как каждый из $n-1$ первых шаров, независимо от других, попадает в любой из $k-1$ непустых ящиков, а последний шар в один из $N-(k-1)$ пустых ящиков (иначе $\chi_k \neq n$), тем самым число пустых ящиков уменьшается на один и становится равным $N-k$.

Так как $\nu(\omega)=\sum_{k=1}^{N} \chi_k(\omega)$, то $M\nu=\sum_{k=1}^{N} M\chi_k$. Известно, что при $|x|<1$ $\sum_{n=0}^{\infty} x^n=\frac{1}{1-x}$ и

$$\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(x^n)'=\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2}. \tag{5}$$

Полагая в равенстве (5) $x=\frac{k-1}{N}$, получим

$$M\chi_k=\sum_{n=1}^{\infty} n P\{\chi_k=n\}=\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{k-1}{N}\right)^{n-1} \frac{N-k+1}{N}=$$

$$=\frac{N-k+1}{N}\left(1-\frac{k-1}{N}\right)^{-2}=\frac{N}{N-(k-1)}.$$

Итак,

$$M\nu=\sum_{k=1}^{N} M\chi_k=\sum_{k=1}^{N} \frac{N}{N-(k-1)}=N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}.$$

Ответ

$$M\nu = N\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k}.$$

Задача 21

Брошено три игральные кости. Найти среднее значение, дисперсию, начальный, центральный и абсолютный центральный моменты третьего порядка случайной величины $\xi(\omega)$ — суммы выпавших очков.

Решение

Уже не раз были найдены числовые характеристики случайной величины, когда случайная величина $\xi(\omega)$ была представлена в виде суммы случайных величин, распределение которых находится просто.

Пронумеруем игральные кости и пусть случайная величина $\xi_k(\omega)$ — число очков, выпавшее на k-й игральной кости, $k = 1, 2, 3$. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и одинаково распределены: $P\{\xi_k = l\} = \frac{1}{6}$, $l = 1, 2, \ldots, 6$; $k = 1, 2, 3$ и $\xi = \sum_{k=1}^{3}\xi_k$.

Найдем числовые характеристики случайной величины ξ_k.

Среднее значение случайной величины ξ_k равно

$$M\xi_k = \sum_{l=1}^{6} l\,\frac{1}{6} = \frac{7}{2} = 3{,}5. \qquad (6)$$

Найдем дисперсию случайной величины ξ_k:

$$D\xi_k = M(\xi_k - 3{,}5)^2 = \sum_{l=1}^{6}(l - 3{,}5)^2\,\frac{1}{6} = \frac{35}{12}. \qquad (7)$$

Так как $D\xi_k = M\xi_k^2 - (M\xi_k)^2$, то

$$M\xi_k^2 = D\xi_k + (M\xi_k)^2 = \frac{91}{6}. \qquad (8)$$

Известно, что $\sum\limits_{l=1}^{n} l^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, используя формулу (1.4) (см. [1], гл. 6, § 1) при $r = 1$ и $g(l) = l^3$, находим начальный момент третьего порядка случайной величины ξ_k:

$$M\xi_k^3 = \sum_{l=1}^{6} l^3 \frac{1}{6} = \frac{1}{6}\left(\frac{42}{2}\right)^2 = 73{,}5. \tag{9}$$

Для нахождения центрального момента третьего порядка случайной величины ξ_k в формуле (1.4) при $r = 1$ положим $g(x) = (l - M\xi_k)^3 = \left(l - \frac{7}{2}\right)^3$. Тогда

$$M(\xi_k - M\xi_k)^3 = \sum_{l=1}^{6}\left(l - \frac{7}{2}\right)^3 \frac{1}{6} = 0. \tag{10}$$

Отметим, что

$$M(\xi_k - M\xi_k) = M\xi_k - M\xi_k = 0. \tag{11}$$

Перейдем теперь к нахождению числовых характеристик случайной величины ξ — суммы выпавших очков, $\xi = \sum\limits_{k=1}^{3} \xi_k$.

Используя свойство 4 из теоремы 2.1 ([1], гл. 6, § 2), получим с учетом равенства (6)

$$M\xi = M\left(\sum_{k=1}^{3} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{3} M\xi_k = 10{,}5.$$

Так как ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы, то дисперсия их суммы равна сумме дисперсий этих величин, и, принимая во внимание равенство (7), получим

$$D\xi = D\left(\sum_{k=1}^{3} \xi_k\right) = \sum_{k=1}^{3} D\xi_k = 3 \cdot \frac{35}{12} = \frac{35}{4} = 8{,}75.$$

Найдем начальный момент третьего порядка случайной величины ξ:

$$M\xi^3 = M\left(\sum_{k=1}^{3}\xi_k\right)^3 =$$

$$= M\left[\sum_{k=1}^{3}\xi_k^3 + 3(\xi_1^2\xi_2 + \xi_1^2\xi_3 + \xi_2^2\xi_1 + \xi_2^2\xi_3 + \xi_3^2\xi_1 + \xi_3^2\xi_2) + 6\xi_1\xi_2\xi_3\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{3} M\xi_k^3 + 3[M(\xi_1^2\xi_2) + M(\xi_1^2\xi_3) + M(\xi_2^2\xi_1) + M(\xi_2^2\xi_3) +$$

$$+ M(\xi_3^2\xi_1) + M(\xi_3^2\xi_2)] + 6M(\xi_1\xi_2\xi_3).$$

Мы использовали формулу (2.1) (см. [1], гл. 6, § 2).

Согласно теореме 6.1 (см. [1], гл. 5, § 6) случайные величины ξ_k^2 и ξ_l при $k \neq l$ независимы и из теоремы 2.1, свойства 5 ([1], гл. 6, § 2) следует ввиду равенств (6) и (8): при $k \neq l$

$$M(\xi_k^2\xi_l) = (M\xi_k^2)(M\xi_l) = \frac{91}{6}\cdot\frac{7}{2} = \frac{637}{12}$$

и

$$M(\xi_1\xi_2\xi_3) = \prod_{k=1}^{3} M\xi_k = \left(\frac{7}{2}\right)^3 = \frac{343}{8}.$$

Используя равенство (9), окончательно получаем

$$M\xi^3 = 3M\xi_k^3 + 18(M\xi_k^2)(M\xi_l) + 6(M\xi_k)^3 =$$

$$= 3\cdot 73{,}5 + 18\cdot\frac{637}{12} + 6\cdot\frac{343}{8} = 1433{,}25.$$

Перейдем к нахождению центрального момента третьего порядка суммы выпавших очков

$$M(\xi - M\xi)^3 = M\left[\sum_{k=1}^{3}(\xi_k - M\xi_k)\right]^3.$$

Рассуждения, аналогичные тем, что были проведены при вычислении $M\xi^2$, с учетом равенств (10) и (11) дадут следующий результат:

$$M(\xi - M\xi)^3 = 3M(\xi_k - M\xi_k)^3 +$$

$$+18[M(\xi_k - M\xi_k)^2][M(\xi_l - M\xi_l)] + 6[M(\xi_k - M\xi_k)]^3 = 0.$$

Рассмотрим абсолютный центральный момент 3-го порядка $M|\xi - M\xi|^3$. При решении этой задачи опять применим формулу (1.4) (см. [1], гл. 6, § 1) при $r = 1$ и $g(m) = |m - M\xi|^2$:

$$M|\xi - M\xi|^3 = \sum_{m=3}^{18} |m - 10{,}5|^3 P\{\xi = m\}.$$

Главная трудность — найти закон распределения ξ. Фактически надо найти число решений уравнения:

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = m \qquad (12)$$

в целых числах $1 \le \xi_i \le 6$, $i = 1, 2, 3$, и $m = 3, 4, \ldots, 18$.

В [2] на с. 5 (см. [3], с. 24) получили, что число решений уравнения:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = m, \quad 0 \le x_i \le m, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \qquad (13)$$

равно $C_{n+m-1}^m = C_{n+m-1}^{n-1}$. Применим этот результат к уравнению (12): $n = 3$, обозначим $x_i + 1 = \xi_i$, тогда уравнение (12) запишется в виде

$$x_1 + x_2 + x_3 = m - 3, \qquad (14)$$

где $0 \le x_i \le m - 3$. Число решений этого уравнения равно $C_{3+(m-3)-1}^{3-1} = C_{m-1}^2$. Значит, при $3 \le m \le 8$

$$P\{\xi - m\} = P\{\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = m\} = \frac{C_{m-1}^2}{216},$$

ибо при таких m $x_i \le m - 3 \le 5$ ($1 \le \xi_i \le 6$). При $m = 9$, 10 надо вычесть из $C_8^2 = 28$ и $C_9^2 = 36$ соответственно число «невозможных» случаев: при $x_1 + x_2 + x_3 = 6$ это три комбинации (6, 0, 0), (0, 6, 0), (0, 0, 6) (что для уравнения (12) соответствует числам 7, 1, 1), аналогично для $x_1 + x_2 + x_3 = 7$ «лишние» — (6, 1, 0) (с учетом порядка шесть решений) и (7, 0, 0) (три решения) и

$$P\{\xi = 9\} = \frac{28 - 3}{216} = \frac{25}{216};$$

$$P\{\xi=10\}=\frac{36-9}{216}=\frac{27}{216}.$$

При $11 \le m \le 18$ число решений уравнения (12) совпадает с числом решений уравнения:

$$\xi_1+\xi_2+\xi_3=21-m, \quad 1 \le \xi_i \le 6, \quad i=1, 2, 3.$$

Так как при $11 \le m \le 18$ $\quad 3 \le 21-m \le 10$, то окончательно получаем

$$P\{\xi=m\}=P\{\xi=21-m\}=\frac{C_{m-1}^2}{216}, \quad 3 \le m \le 8;$$

$$P\{\xi=9\}=P\{\xi=12\}=\frac{25}{216};$$

$$P\{\xi=10\}=P\{\xi=11\}=\frac{27}{216}.$$

Запишем полученный результат в виде табл. 2, где обозначено

$$\eta=\left|\sum_{k=1}^{3}(\xi_k-M\xi_k)\right|=|\xi-10{,}5|.$$

Таблица 2

C_l	7,5	6,5	5,5	4,5	3,5	2,5	1,5	0,5
$P\{\eta=C_l\}$	$\frac{1}{108}$	$\frac{3}{108}$	$\frac{6}{108}$	$\frac{10}{108}$	$\frac{15}{108}$	$\frac{21}{108}$	$\frac{25}{108}$	$\frac{27}{108}$

Итак,

$$M\eta^3=\sum_{l=1}^{8}C_l^3 P\{\eta=C_l\}=\frac{33714}{864}\approx 39{,}02.$$

<u>Ответ</u>

$M\xi=10{,}5$; $\quad D\xi=8{,}75$; $\quad M\xi^3=1433{,}25$; $\quad M(\xi-M\xi)^3=0$;

$M\left|\xi-M\xi\right|^3 \cong 39{,}02$.

УСЛОВНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ И УСЛОВНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОЖИДАНИЯ

Пусть в вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{A}, P\}$ определен случайный вектор (ξ, η). Введем понятие условного распределения величины ξ при условии, что задано значение η.

Пусть ξ и η — дискретные случайные величины и

$$P\{\xi = x_i, \eta = y_j\} = p_{ij} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = 1;$$

$$P\{\xi = x_i\} = \sum_{j=1}^{\infty} p_{ij} = p_i > 0; \qquad P\{\eta = y_j\} = \sum_{i=1}^{\infty} p_{ij} = p_j > 0.$$

В книге [1] (гл. 3, § 1) дано определение условной вероятности. Используя это определение, запишем

$$P\{\xi = x_i \mid \eta = y_j\} = \frac{P\{\xi = x_i, \eta = y_j\}}{P\{\eta = y_j\}} = \frac{p_{ij}}{p_j}. \tag{15}$$

Если зафиксировать значение y_j (или j), то вероятности $P\{\xi = x_i \mid \eta = y_j\}$ можно рассматривать как условное распределение величины ξ при условии, что $\eta = y_j$.

Определение

Условным математическим ожиданием случайной величины ξ при условии, что $\eta = y_j$, называется число

$$M(\xi \mid \eta = y_j) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \frac{p_{ij}}{p_j}. \tag{16}$$

Рассматривая условные вероятности $P\{\xi = x_i \mid \eta = y_j\}$ и условные математические ожидания $M(\xi \mid \eta = y_j)$ как функции от y_j, можем считать их случайными величинами, определенными в исходном вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathfrak{A}, P\}$. Тогда условное распределение и условное математическое ожидание ξ при условии $\eta = y_j$ определяются соответственно формулами:

$$P\{\xi = x_i \mid \eta\} = P\{\xi = x_i \mid \eta = y_j\},$$

если $\omega \in \{\eta = y_j\}, j = 1, 2, \ldots;$

$$M(\xi \mid \eta) = M(\xi \mid \eta = y_j),$$

если $\omega \in \{\eta = y_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, где $P\{\xi = x_i \mid \eta = y_j\}$, $M(\xi \mid \eta = y_j)$ определяются формулами (15) и (16).

Справедлива следующая формула (формула полного математического ожидания)

$$M\xi = M\,[M(\xi \mid \eta)], \tag{17}$$

где условное математическое ожидание $M(\xi \mid \eta)$ рассматривается как случайная величина. Соотношение (17) можно записать в эквивалентной форме

$$M\xi = \sum_{j=1}^{\infty} P\{\eta = y_j\} M(\xi \mid \eta = y_j). \tag{18}$$

Доказательство (18) можно найти в книге [1] (см. гл. 6, § 6).

Перейдем к рассмотрению абсолютно непрерывного вектора (ξ, η). Так как $P\{\eta = y\} = 0$ при любом y, то нельзя воспользоваться определением условной вероятности, как это было сделано в случае дискретного вектора (ξ, η).

Назовем <u>условной плотностью распределения вероятностей величины ξ при условии, что</u> $\eta = y$ следующую функцию

$$p_\xi(x \mid \eta = y) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(u, y)\, du}, \tag{19}$$

где $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(u, y)\, du = p_\eta(y) > 0$. По определению будем считать, что $p_\xi(x \mid \eta = y) = 0$, если $p_\eta(y) = 0$.

Определение

Условное математическое ожидание ξ при условии, что $\eta = y$, определяется формулой:

$$M(\xi \mid \eta = y) = \int_{-\infty}^{\infty} x p_{\xi}(x \mid \eta = y)\, dx. \tag{20}$$

Из формулы (19) можно получить, что при любых a и b

$$P\{a \le \xi \le b\} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\eta}(y) \left(\int_{a}^{b} p_{\xi}(x \mid \eta = y)\, dx \right) dy. \tag{21}$$

Из равенства (20) получается формула, аналогичная (18):

$$M\xi = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\eta}(y) M(\xi \mid \eta = y)\, dy. \tag{22}$$

Если рассматривать (19) и (20) как случайные величины

$$p_{\xi}(x \mid \eta) = p_{\xi}(x \mid \eta = y),$$

если $\omega \in \{\eta = y\}$, $y \in (-\infty, +\infty)$,

$$M(\xi \mid \eta) = M(\xi \mid \eta = y),$$

если $\omega \in \{\eta = y\}$, $y \in (-\infty, \infty)$ то формулы (21) и (22) можно записать соответственно в виде

$$P\{a \le \xi \le b\} = M \left(\int_{a}^{b} p_{\xi}(x \mid \eta)\, dx \right)$$

и (см. формулу (17)) $M\xi = M\,[M(\xi \mid \eta)]$.

Для условного математического ожидания справедливы следующие свойства.

1. $M\,[\varphi(\eta) \mid \eta] = \varphi(\eta)$.

2. $M\,[\varphi(\eta) \cdot \xi \mid \eta] = \varphi(\eta) M(\xi \mid \eta)$.

3. $M\,(\xi_1 + \xi_2 \mid \eta) = M(\xi_1 \mid \eta) + M\,(\xi_2 \mid \eta)$.

4. Если ξ и η независимы, то $M\,(\xi \mid \eta) = M\xi$.

Рассмотрим несколько примеров.

Пример 1

Случайная точка (ξ, η) имеет двумерное нормальное распределение

$$p_{\xi\eta}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \times$$

$$\times \left\{ -\frac{1}{2(1-r^2)} \left[\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x-a_1)(y-a_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2} \right] \right\},$$

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty .$$

Найти:

а) плотность распределения координат ξ, η;

б) условные плотности распределения

$$p_\xi(x \mid \eta = y), \quad p_\eta(y \mid \xi = x);$$

в) условные математические ожидания.

Решение

а) Согласно равенству (4.4) (см. [1], гл. 5, § 4)

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi\eta}(x, y)\, dy .$$

Произведем замену переменной $\mathrm{v} = \dfrac{y-a_2}{\sigma_2}$ и обозначим $u = \dfrac{x-a_1}{\sigma_1}$, тогда

$$p_\xi(x) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left[u^2 + \frac{(\mathrm{v}-ru)^2}{1-r^2}\right]} d\mathrm{v} =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-r^2}} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(v-ru)^2}{2(1-r^2)}} dv =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

и

$$p_\xi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x-a_1)^2}{2\sigma_1^2}} .$$

Аналогично

$$p_\eta(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(y-a_2)^2}{2\sigma_2^2}} .$$

б) Используя равенство (19) получаем

$$p_\xi(x \,|\, \eta = y) = \frac{p_{\xi\eta}(x, y)}{p_\eta(y)} =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_1^2}\left[(x-a_1) - r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-a_2)\right]^2\right\}.$$

Аналогично

$$p_\eta(y \,|\, \xi = x) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-r^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\left[(y-a_2) - r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1)\right]^2\right\}.$$

в) Условное математическое ожидание случайной величины ξ при условии, что $\eta = y$, согласно равенству (20) равно

$$M(\xi \,|\, \eta = y) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_1 \sqrt{2\pi} \sqrt{1-r^2}} \int_{-\infty}^{\infty} x \mathrm{e}^{-\frac{1}{2(1-t^2)\sigma_1^2}\left[(x-a_1)-r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-a_2)\right]^2} dx =$$

$$= a_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-a_2)$$

и

$$M(\eta \,|\, \xi = x) = a_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1).$$

Ответ

а) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(x-a_1)^2}{\sigma_1^2}\right]$, $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2}\exp\left[-\frac{1}{2}\frac{(y-a_2)^2}{\sigma_2^2}\right]$;

б) $\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_1^2}\left[(x-a_1)-r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-a_2)\right]^2\right\}$;

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2\sqrt{1-r^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2(1-r^2)\sigma_2^2}\left[(y-a_2)-r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1)\right]^2\right\}$;

в) $M(\xi \,|\, \eta = y) = a_1 + r\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y-a_2)$; $M(\eta \,|\, \xi = x) = a_2 + r\frac{\sigma_2}{\sigma_1}(x-a_1)$.

Пример 2

Случайные величины ξ_1 и ξ_2 независимы и одинаково распределены и имеют показательное распределение с параметром λ:

$$p_{\xi}(x) = p_{\xi_2}(x) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}, \quad x > 0.$$

Найти условную плотность распределения ξ_1 при условии, что $\xi_1 + \xi_2 = z$, $z > 0$.

Решение

При $z > 0$ найдем $p_{\xi_1+\xi_2}(z)$: согласно равенству (6.6) (см. [1], гл. 5, § 6)

$$p_{\xi_1+\xi_2}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} p_{\xi_1}(x) p_{\xi_2}(z-x)\,dx = \int_0^z \lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)}\,dx =$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda z} \int_0^z dx = \lambda^2 z e^{-\lambda z}.$$

Тогда

$$p_{\xi_1}(x \mid \xi_1 + \xi_2 = z) = \frac{p_{\xi_1 \xi_2}(x, z-x)}{p_{\xi_1+\xi_2}(z)} = \frac{p_{\xi_1}(x) p_{\xi_2}(z-x)}{p_{\xi_1+\xi_2}(z)},$$

так как ξ_1 и ξ_2 независимы. Далее при $0 < x \le z$

$$p_{\xi}(x \mid \xi_1 + \xi_2 = z) = \frac{\lambda e^{-\lambda x} \lambda e^{-\lambda(z-x)}}{\lambda^2 z e^{-\lambda z}} = \frac{1}{z}.$$

Ответ

$p_{\xi}(x \mid \xi_1 + \xi_2 = z) = \dfrac{1}{z}, \quad z > 0, \quad 0 < x \le z.$

Пример 3

Случайные величины ξ_1, ξ_2, ..., ξ_N независимы и распределены по закону Пуассона с параметрами λ_1, λ_2, ..., λ_N соответственно. Найти:

а) $P\{\xi_1 + \ldots + \xi_k = m \mid \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}$;

б) $M\{\xi_1 + \ldots + \xi_k \mid \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_N = n\}$.

Решение

В задаче 3.7 (см. [4], с. 14) показано, что сумма двух независимых случайных величин, распределенных по закону Пуассона, также распределена по закону Пуассона с параметром, равным сумме параметров слагаемых. Индукцией по числу слагаемых этот результат можно распространить на случай конечного числа слагаемых:

$$P\{\xi_k = l\} = e^{-\lambda_k} \frac{\lambda_k^l}{l!}, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \quad l = 0, 1, 2, \ldots .$$

Тогда

$$P\{\xi_1 + \ldots + \xi_r = n\} = e^{-\sum_{s=1}^{r}\lambda_s} \frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_r)^n}{n!}, \quad n = 0, 1, \ldots .$$

Обозначим $\sum_{s=1}^{k} \xi_s = \xi$, $\sum_{s=1}^{N} \xi_s = \eta$. Тогда

$$P\{\xi = m \mid \eta = n\} = \frac{P\{\xi = m, \eta - \xi = n - m\}}{P\{\eta = n\}} =$$

$$= \frac{P\{\xi = m\} P\{\eta - \xi = n - m\}}{P\{\eta = n\}} =$$

$$= e^{-\sum_{s=1}^{k}\lambda_s} \frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_k)^m}{m!} e^{-\sum_{s=k+1}^{N}\lambda_s} \times$$

$$\times \frac{(\lambda_{k+1} + \ldots + \lambda_N)^{n-m}}{(n-m)!} \left[e^{-\sum_{s=1}^{N}\lambda_s} \frac{(\lambda_1 + \ldots + \lambda_N)^n}{n!} \right]^{-1} =$$

$$= \frac{n!}{m!(n-m)!} \left(\frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_k}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_N} \right)^m \left(\frac{\lambda_{k+1} + \ldots + \lambda_N}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_N} \right)^{n-m} = C_n^m p^m q^{n-m},$$

где $p = \dfrac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_k}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_N}$ и $q = \dfrac{\lambda_{k+1} + \ldots + \lambda_N}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_N}$. Из равенства (16) получаем

$$M(\xi_1 + \ldots + \xi_k \mid \xi_1 + \ldots + \xi_N = n) = \sum_{m=0}^{n} m C_n^m p^m q^{n-m} =$$

$$= np = n \frac{\lambda_1 + \ldots + \lambda_k}{\lambda_1 + \ldots + \lambda_N}$$

(см. [1], гл. 6, § 3, пример 4).

Ответ

а) $C_n^m\left(\dfrac{\lambda_1+...+\lambda_k}{\lambda_1+...+\lambda_N}\right)^m\left(\dfrac{\lambda_{k+1}+...+\lambda_N}{\lambda_1+...+\lambda_N}\right)^{n-m}$;

б) $n\dfrac{\lambda_1+...+\lambda_k}{\lambda_1+...+\lambda_N}$/

Пример 4

В схеме Бернулли с вероятностью p исхода 1 и вероятностью q исхода 0 найти математическое ожидание ν_{00}-числа испытаний до первого появления цепочки из двух нулей. В частности, вычислить $M\nu_{00}$ при $p=q=0{,}5$.

Решение

В некоторых задачах (например, задача 7) мы находили среднее значение случайной величины, представляя ее в виде суммы случайных величин, распределение которых находится «просто». В данном примере рассмотрим еще один способ нахождения среднего значения случайной величины, который основывается на использовании условного математического ожидания и формулы полного математического ожидания (в нашем примере равенства (18)).

Положим $\xi_t=1$, если в испытании с номером t появилась 1, и $\xi_t=0$ — в противном случае. Обозначим $m_0=M(\nu_{00}\,|\,\xi_1=0)$ и $m_1=M(\nu_{00}\,|\,\xi_1=1)$. Рассмотрим исходы второго испытания.

Так как $P\{\nu_{00}=2\,|\,\xi_1=\xi_2=0\}=1$, то $M(\nu_{00}\,|\,\xi_1=\xi_2=0)=2$.

Пусть $\omega\in\{\nu_{00}=l\,|\,\xi_1=0,\xi_2=1\}$, $\omega=(0,1,\varepsilon_3,...,\varepsilon_{l-2},0,0)$ и $\varepsilon_i=0,1$; $i=3,...,l-2$, тогда $\nu_{00}(\omega)=l$. Отбросим исход первого испытания: $\omega_1=(1,\varepsilon_3,...,\varepsilon_{l-2},0,0)$, тогда $\nu_{00}(\omega_1)=l-1$.

Следовательно, если рассмотрим <u>все</u> ω_1, для которых $\nu_{00}(\omega_1)=l-1$, то добавлением слева (считая это результатом первого испытания) символа 0 получим <u>все</u> ω, такие, что $\omega\in\{\nu_{00}=l\,|\,\xi_1=0\}$.

Таким образом, $\nu_{00}(\omega) = \nu_{00}(\omega_1) + 1$, и получаем равенство:

$$M(\nu_{00} \mid \xi_1 = 0, \xi_2 = 1) = 1 + M(\nu_{00} \mid \xi_1 = 1) = 1 + m_1.$$

Аналогично рассуждая, получим еще два равенства:

$$M(\nu_{00} \mid \xi_1 = 1, \xi_2 = 0) = 1 + M(\nu_{00} \mid \xi_1 = 0) = 1 + m_0$$

и $M(\nu_{00} \mid \xi_1 = 1, \xi_2 = 1) = 1 + m_1$. Тогда

$$M(\nu_{00} \mid \xi_1 = 1) = M(\nu_{00} \mid \xi_1 = 1, \xi_2 = 1) P\{\xi_2 = 1\} +$$

$$+ M(\nu_{00} \mid \xi_1 = 1, \xi_2 = 0) P\{\xi_2 = 0\}$$

и $m_1 = (1 + m_1)p + (1 + m_0)q$, откуда первое уравнение такое: $-qm_0 + qm_1 = 1$. Аналогично

$$M(\nu_{00} \mid \xi_1 = 0) = M(\nu_{00} \mid \xi_1 = 0, \xi_2 = 1) P\{\xi_2 = 1\} +$$

$$+ M(\nu_{00} \mid \xi_1 = 0, \xi_2 = 0) P\{\xi_2 = 0\}$$

и

$$m_0 = p + m_1 p + 2q,$$

$$m_0 - pm_1 = 1 + q.$$

Таким образом, получена система линейных уравнений:

$$\begin{cases} m_0 - pm_1 = 1 + q; \\ -qm_0 + qm_1 = 1. \end{cases}$$

Решая полученную систему, находим

$$m_0 = \frac{1 + q^2}{q^2}, \quad m_1 = \frac{1 + q + q^2}{q^2}.$$

Следовательно, $M\nu_{00} = m_0 q + m_1 p = (q + q^3 + p + pq + pq^2)q^{-2}$.

Так как $p + q = 1$, то $M\nu_{00} = \dfrac{1 + q}{q^2}$. При $p = q = 0{,}5$ $M\nu_{00} = 6$.

Ответ

$\dfrac{1 + q}{q^2}$, 6.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

1. Законы распределения числа очков, выбиваемых каждым из двух стрелков независимо друг от друга, даны в табл. 3 и 4.

Найти закон распределения суммы очков, выбиваемых двумя стрелками.

Таблица 3

i	1	2	3
$P\{\xi_1 = i\}$	0,1	0,3	0,6

Таблица 4

j	1	2	3
$P\{\xi_2 = j\}$	0,2	0,3	0,5

2. Плотность совместного распределения случайных величин $\xi_1(\omega)$ и $\xi_2(\omega)$ равна

$$p_{\xi_1\xi_2}(x, y) = \begin{cases} Cxy, & \text{если } (x, y) \in D; \\ 0, & \text{если } (x, y) \notin D, \end{cases}$$

где D — треугольник, ограниченный прямыми $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$. Найти C, $M\xi_i$, $D\xi_i$, $i = 1, 2$; $\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2)$, $\rho(\xi_1, \xi_2)$.

3. Случайные величины ξ и η независимы и нормально распределены с параметрами (0, 1). Найти вероятность того, что случайная точка (ξ, η) попадает в кольцо $\{(xy) : 2 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 3\}$.

4. Найти плотность распределения модуля вектора

$$|\vec{v}| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} ,$$

где ξ и η — независимые и нормально распределенные случайные величины с $M\xi = M\eta = 0$ и $D\xi = D\eta = \sigma^2$.

5. Найти плотность распределения случайного вектора $\vec{\eta} = (\xi_1, \xi_2)$ по заданной функции распределения:

$$F_{\xi_1\xi_2}(x, y) = (1 - \mathrm{e}^{-ax})(1 - \mathrm{e}^{-bx}), \quad a > 0, \quad b > 0.$$

В задачах 6 — 9 встречается термин «ковариационная матрица». Пусть $\vec{\xi} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r)$ r-мерный случайный вектор-столбец,

$$\sigma_{ij} = \operatorname{cov}(\xi_i, \xi_j), \quad i, j = 1, 2, ..., r .$$

Матрица $D[\vec{\xi}] = D[\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r] = (\sigma_{ij})$ называется ковариационной (см. [1], гл. 6, § 4 и 7).

6. Совместное распределение случайных величин ξ_1 и ξ_2 задано табл. 5, где на пересечении i-й строки и j-го столбца приведена вероятность $p_{ij} = P\{\xi_1 = i, \xi_2 = j\}$, i =0, 1; $j = -1, 0, 1$. Найти ковариационную матрицу. Зависимы ли ξ_1 и ξ_2?

Таблица 5

ξ_1	ξ_2		
	−1	0	1
0	0,1	0,15	0,2
1	0,15	0,25	0,15

7. Найти плотность распределения и ковариационную матрицу, если

$$F_{\xi,\eta}(x,y)=\begin{cases} 0, & \text{если хотя бы одно из чисел } x \text{ и } y \text{ меньше } 0; \\ \sin x \sin y, & \text{если } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \text{ и } y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]; \\ \sin y, & \text{если } y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \text{ и } x>\dfrac{\pi}{2}; \\ \sin x, & \text{если } x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \text{ и } y>\dfrac{\pi}{2}; \\ 1, & \text{если } x>\dfrac{\pi}{2} \text{ и } y>\dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

8. Случайная величина ξ распределена по нормальному закону с параметрами (1, 1). Найти ковариационную матрицу случайного вектора $\eta=(\xi,\xi^2,\xi^3)$.

9. Известно, что ξ и η — нормально распределенные случайные величины $M\xi=26$, $M\eta=-12$ и их ковариационная матрица $D[\xi,\eta]=\begin{pmatrix}196 & -91\\ -91 & 169\end{pmatrix}$. Найти плотность распределения величин (ξ,η).

10. Совместное распределение случайных величин ξ и η задано табл. 6, где на пересечении i-й строки и j-го столбца приведена вероятность $p_{ij}=P\{\xi=i,\eta=j\}$, $i=0,1$; $j=-1,0,1$. Найти распределение $\zeta=\xi\eta$.

Таблица 6

ξ	η		
	-1	0	1
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$

11. Случайные величины ξ и η независимы и нормально распределены с параметрами (0, 1). Найти плотность распределения случайной величины $\zeta = \xi / \eta$.

12. Независимые случайные величины ξ и η распределены нормально с $M\xi = 2$, $D\xi = 9$, $M\xi = 3$ и $D\eta = 5$.

Найти:

а) плотность распределения $\zeta = 2\xi - 3\eta$ и $P\{-14 < 2\xi - 3\eta < 22\}$;

б) $P\{3\xi - 2\eta < 0\}$.

13. Двумерная случайная величина (ξ, η) имеет плотность распределения

$$p_{\xi\eta}(x, y) = C / \pi^2 (3 + x^2)(1 + y^2), \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty.$$

Найти: а) константу C; б) функцию распределения $F_{\xi\eta}(x, y)$; в) вероятность попадания случайной точки с координатами (ξ, η) в квадрат, ограниченный прямыми: $x = 0$, $y = 0$, $x = 1$, $y = 1$.

14. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и равномерно распределены на отрезке [0, 1]. Найти плотность распределения сумм

$$\eta_1 = \xi_1 + \xi_2 \quad \text{и} \quad \eta_2 = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3, \quad P\{0{,}5 \le \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 \le 2{,}5\}.$$

15. Случайные величины $\xi(\omega)$ и $\eta(\omega)$ независимы. $\xi(\omega)$ дискретна с распределением

$$P\{\xi(\omega) = -2\} = P\{\xi(\omega) = 2\} = \frac{1}{4}, \; P\{\xi(\omega) = 0\} = \frac{1}{2},$$

$\eta(\omega)$ равномерно распределена на отрезке $[a, b]$. Найти функцию распределения $\xi + \eta$, если: а) $a = 0$, $b = 1$; б) $a = 0$, $b = 0$.

16. На окружности радиусом R фиксирована точка A. Вторая точка взята на окружности случайным образом. Обе точки соединены между собой и с центром окружности. Найти среднее значение площади получившегося треугольника.

17. В продукции завода брак вследствие дефекта α составляет 6 %, причем среди забракованной по дефекту α продукции в 4 % случаев встречается дефект β, а в продукции, свободной от дефекта

α, дефект β встречается в 1 % случаев. Найти вероятность встретить дефект β во всей продукции и ковариацию дефектов α и β.

Указание. Ввести индикаторы дефектов α и β.

18. Два баскетболиста поочередно забрасывают мяч в корзину до тех пор, пока один из них не попадает. Вероятность попадания для первого баскетболиста равна 0,4, а для второго — 0,6 при каждом броске. Обозначим через $\xi_i(\omega)$ — число бросков, сделанных i-м баскетболистом, $i = 1, 2$. Найти $M\xi_i$, $D\xi_i$, $i = 1, 2$, $\mathrm{cov}(\xi_1, \xi_2)$.

19. Пусть $\xi(\omega)$ — число комбинаций YHY в $n+2$ испытаниях схемы Бернулли. Найти $M\xi$, $D\xi$.

20. Определить вероятность попадания точки с координатами (ξ, η) в область $\{(x, y): 1 \le x \le 2; 1 \le y \le 2\}$, если

$$F_{\xi\eta}(x, y) = \begin{cases} 1 - a^{-x^2} - a^{-2y^2} + a^{-x^2-2y^2}, & \text{если } x \ge 0 \text{ и } y \ge 0; \\ 0, & \text{если } x < 0 \text{ или } y < 0, \end{cases} \quad a > 1.$$

21. Случайная величина τ_n имеет распределение Стьюдента с n степенями свободы:

$$p_{\tau_n}(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{n\pi}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}}, \quad -\infty < x < \infty.$$

Найти $M\tau_7^2$, $M\tau_7^3$, $D\tau_7$, $P\{|\tau_7| < 2{,}365\}$.

22. Владелец сезонного железнодорожного билета обычно выезжает из дома между 7.30 и 8.00 утра; поездка до станции занимает от 20 до 30 мин. Предполагается, что время выхода и продолжительность поездки представляют собой независимые случайные величины, равномерно распределенные в соответствующих интервалах. Имеются два поезда, которыми он может ехать: первый отправляется в 8.05 утра и идет 35 мин, а второй — в 8.25 и идет 30 мин. Предполагая, что он выезжает одним из этих поездов, определить среднее время прибытия его к месту назначения. Какова вероятность того, что он пропустит оба поезда?

23. Случайные величины ξ и η независимы,

$$P\{\xi = k\} = P\{\eta = k\} = pq^{k-1}, \quad k = 1, 2, \ldots, 0 < p < 1, \quad q = 1 - p.$$

Найти: 1) $P\{\xi = \eta\}$; 2) $P\{\xi > \eta\}$; 3) $P\{\xi < \eta\}$; 4) $P\{\xi = k \mid \xi > \eta\}$; 5) $P\{\xi = k \mid \xi < \eta\}$; 6) $P\{\xi = k \mid \xi = \eta\}$; 7) $P\{\xi = k \mid \xi + \eta = l\}$; 8) $M\{\xi \mid \xi + \eta = l\}$, $l = 2, 3, \ldots$.

Указание. Воспользоваться равенством: $P\{\xi < \eta\} = P\{\xi > \eta\}$.

24. Случайные величины ξ и η независимы и одинаково распределены. Найти условную плотность распределения ξ при условии $\xi + \eta = z$ в следующих случаях: а) ξ и η равномерно распределены на отрезке $[0, 1]$; б) ξ и η имеют распределение с плотностью $\lambda^2 x e^{-\lambda x}$, $x > 0, \lambda > 0$.

25. Случайные величины ξ_1, ξ_2, ξ_3 независимы и нормально распределены с параметрами $(0, 1)$, $\eta = \dfrac{\xi_1 + \xi_2\xi_3}{\sqrt{1 + \xi_3^2}}$. Найти плотность распределения η.

Указание. Найти условную плотность распределения η при фиксированном значении ξ_3.

ОТВЕТЫ К ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

1.

k	2	3	4	5	6
$P\{\xi_1+\xi_2=k\}$	0,02	0,09	0,26	0,33	0,30

2. $C=24$, $M\xi_1=M\xi_2=\dfrac{2}{5}$, $D\xi_1=D\eta_2=\dfrac{1}{25}$, $\operatorname{cov}(\xi_1,\xi_2)=-\dfrac{2}{75}$, $\rho(\xi_1,\xi_2)=-\dfrac{2}{3}$.

3. $e^{-2}-e^{-4,5}=0,1242$.

4. $\dfrac{x}{\sigma^2}e^{-x^2/2\sigma^2}$, $x>0$.

5. $abe^{-ax}e^{-by}$, $x>0$, $y>0$.

6. $\begin{pmatrix} 0,2475 & -0,055 \\ -0,055 & 0,59 \end{pmatrix}$, ξ_1 и ξ_2 зависимы.

7. $\cos x\cos y$, $x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $y\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$, $M\xi=M\eta=\dfrac{\pi}{2}-1$, $\begin{pmatrix} \pi-3 & 0 \\ 0 & \pi-3 \end{pmatrix}$.

8. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 6 & 18 \\ 6 & 18 & 60 \end{pmatrix}$.

9. $\dfrac{1}{182\pi\sqrt{3}}\exp\left\{-\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{(x-26)^2}{196}+\dfrac{(x-26)(y+12)}{182}+\dfrac{(y+12)^2}{169}\right]\right\}$.

10. $P\{\zeta=-1\}=\dfrac{1}{16}$, $P\{\zeta=0\}=\dfrac{5}{8}$, $P\{\zeta=1\}=\dfrac{5}{16}$.

11. $\dfrac{1}{\pi(1+z^2)}$, $-\infty<z<+\infty$.

12. а) $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi 9}}e^{-\frac{(x+5)^2}{162}}$, 0,84; б) 0,5.

13. $C=\sqrt{3}$, $F_{\xi\eta}(x,y)=\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}\dfrac{x}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{2}\right)\left(\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} y+\dfrac{1}{2}\right)$,

$p=\dfrac{1}{24}\approx 0{,}0417$.

14. а) $1-|1-x|$, $0\le x\le 2$;

б) $\dfrac{x^2}{2}$, $0\le x\le 1$; $\dfrac{3}{4}-\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2$, $1\le x\le 2$; $\dfrac{(3-x)^2}{2}$, $2\le x\le 3$;

в) $\dfrac{23}{24}\approx 0{,}9583$.

15. а) $$F(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y\le -2;\\ 0{,}5+0{,}25y, & \text{если } -2<y\le -1;\\ 0{,}25, & \text{если } -1<y\le 0;\\ 0{,}25+0{,}5y, & \text{если } 0<y\le 1;\\ 0{,}75, & \text{если } 1<y\le 2;\\ 0{,}25+0{,}25y, & \text{если } 2<y\le 3;\\ 1, & \text{если } y>3;\end{cases}$$

б) $$F(y)=\begin{cases}0, & \text{если } y\le -2;\\ 0{,}25+0{,}125y, & \text{если } -2<y\le 0;\\ 0{,}25+0{,}25y, & \text{если } 0<y\le 2;\\ 0{,}5+0{,}125y, & \text{если } 2<y\le 4;\\ 1, & \text{если } y>4.\end{cases}$$

16. $\dfrac{R^2}{\pi}$.

17. $P(\beta) = 0{,}0118$; $0{,}001692$.

18. $M\xi_1 = \frac{25}{19}$, $M\xi_2 = \frac{15}{19}$, $D\xi_1 = \frac{150}{361}$, $D\xi_2 = \frac{240}{361}$,

$\operatorname{cov}(\xi_1, \xi_2) = \frac{150}{361}$.

19. $M\xi = np^2 q$, $D\xi = np^2 q(1 + 2pq - 5q^2 p) + 2p^3 q^2 (3p - 2)$.

20. $a^{-3} - a^{-6} - a^{-9} + a^{-12}$.

21. $M\tau_7^2 = D\tau_7 = \frac{7}{5}$, $M\tau_7^3 = 0$, $P\{|\tau_7| < 2{,}365\} = 0{,}95$.

22. $\approx 8{,}50$; $p = \frac{1}{24}$.

23. 1) $\frac{p}{p+q}$; 2) $\frac{q}{1+q}$; 3) $\frac{q}{1+q}$;

4) $\frac{1+q}{q} pq^{k-1}(1 - q^{k-1})$, $k = 2, 3, \ldots$;

5) $(1+q)pq^{2(k-1)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$;

6) $(1+q)pq^{2(k-1)}$, $k = 1, 2, 3, \ldots$;

7) $\frac{1}{l-1}$, $1 \le k \le l - 1$; 8) $\frac{l}{2}$, $l \ge 2$.

24. а) $\frac{1}{z}$, $0 \le x \le z$, если $0 < z \le 1$;

$\frac{1}{2-z}$, $z - 1 \le x \le 1$, если $1 \le z < 2$;

б) $\frac{6x(z-x)}{z^3}$, $0 < x \le z$.

25. $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$, $-\infty < z < \infty$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Чистяков В.П.* Курс теории вероятностей. М.: Агар, 2000.

2. *Полякова Е.И., Постникова Л.П.* Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: МИФИ, 2004.

3. Методические указания к решению задач по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» (часть 1). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин.* М.: МИФИ, 1999.

4. Методические указания к решению задач по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» (часть 2). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин.* М.: МИФИ, 1999.

5. Методические указания к решению задач по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» (часть 3). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин.* М.: МИФИ, 1999.

6. Методические указания к решению задач по курсу «Теория вероятностей и математическая статистика» (часть 4). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин.* М.: МИФИ, 2000.

7. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические рекомендации (часть 1). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин.* М.: МИФИ, 2008.

8. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические рекомендации (часть 2). В 4-х частях / Сост. *Е.И. Полякова, Л.П. Постникова, Е.В. Сумин.* М.: МИФИ, 2008.

СОДЕРЖАНИЕ