ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

МОСКОВСКИЙ ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ
(ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ)

Е.Н. Пирогов, В.Ю. Гольцев

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

*Рекомендовано УМО «Ядерные физика и технологии»
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений*

Москва 2008

УДК 629.7:539.3/6
ББК 30.121
П 33

Пирогов Е.Н., Гольцев В.Ю. **Сопротивление материалов:** *Учебное пособие.* – М.: МИФИ, 2008. – 200 с.

Изложены основные понятия и исходные положения сопротивления материалов как науки. Рассмотрены простейшие виды деформации и методы расчета на прочность и жесткость при растяжении, сжатии, изгибе, сложном сопротивлении прямого бруса; статически определимые и неопределимые системы; теория напряженно-деформированного состояния; устойчивость прямого бруса при продольном сжатии, а также расчет тонкостенной осесимметричной оболочки и трубы под действием внутреннего давления. Описано поведение конструкционных материалов при различных условиях нагрузки с учетом влияния окружающей среды. Приведены примеры расчетов.

Книга предназначена для студентов физических вузов в качестве учебного пособия по общеинженерной подготовке.

Пособие подготовлено в рамках Инновационной образовательной программы.

Рецензент д-р техн. наук, проф. Ю.Г. Матвиенко

ISBN 978-5-7262-0927-2

Оглавление

Предисловие

В основу настоящего пособия положен конспект лекций по общеобразовательному курсу «Сопротивление материалов и физика прочности», соответствующему программе в объеме 64 ч и изучаемому студентами физических специальностей МИФИ.

Учитывая это обстоятельство, в пособие наряду с традиционными для сопротивления материалов разделами включен раздел, в котором рассматривается влияние окружающей среды (в том числе и влияние радиационного облучения) на свойства и поведение конструкционных материалов.

Теоретический материал иллюстрируется примерами расчета напряжений, деформаций и перемещений в брусах и оболочках под действием приложенных нагрузок. В зависимости от особенностей подготовки специалистов разделы 11–17 могут быть прочитаны выборочно или в сокращенном объеме.

Авторы считают своим долгом выразить благодарность д-ру техн. наук, проф. Маркочеву В.М. за ценные советы и замечания, сделанные в процессе подготовки пособия.

Все критические замечания и пожелания, которые читатели пришлют в адрес кафедры «Физика прочности» МИФИ, будут с благодарностью приняты и использованы в работе по совершенствованию данного пособия.

1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ИСХОДНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В сопротивлении материалов (СМ) рассматриваются вопросы расчета на *прочность, жесткость* и *устойчивость* элементов инженерных конструкций и деталей машин.

Прочность – свойство материалов воспринимать в определенных пределах, не разрушаясь, приложенные к ним нагрузки.

Жесткость – способность тела или конструкции сопротивляться *деформации.*

Деформацией называется изменение взаимного расположения точек тела в результате внешних воздействий.

Если после снятия внешнего силового воздействия точки тела возвращаются в свое первоначальное положение, то такая деформация называется *упругой.* В противном случае деформация, оставшаяся после разгрузки, называется *остаточной*, или *пластической.*

Устойчивость – способность системы сохранять первоначальную форму равновесия под воздействием внешней нагрузки. При потере устойчивости система обычно внезапно переходит к новой форме равновесия.

1.1. Схематизация геометрии объекта нагружения

В СМ геометрия реального объекта упрощается и приводится к форме бруса, пластины или оболочки.

Брус – тело, у которого размеры поперечного сечения малы по сравнению с длиной. *Геометрическая ось бруса* – линия, соединяющая центры тяжести поперечных сечений. Брус с прямолинейной осью называется *прямолинейным*, с криволинейной осью – *криволинейным*. Брус, который воспринимает только растягивающие или сжимающие усилия, называется *стержнем.*

Пластина – конструкция, ограниченная двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами.

Оболочка – конструкция, ограниченная двумя криволинейными поверхностями, расстояние между которыми мало по сравнению с другими размерами.

1.2. Схематизация свойств материала

В СМ все материалы рассматриваются как *сплошная, однородная* и *изотропная* твердая среда, т. е. непрерывная, заполняющая отведенный ей объем и обладающая во всех точках и во всех направлениях одинаковыми свойствами.

1.3. Нагрузки

Нагрузки, действующие на объект, являются по отношению к нему внешними силами, которые можно подразделить на:

- *поверхностные,* т. е. приложенные к поверхности тела (включая опорные реакции);
- *объемные,* т. е. приложенные ко всем внутренним точкам тела (вес тела, силы инерции и т.д.).

Поверхностные силы делятся на сосредоточенные и распределенные.

Сосредоточенными считаются силы, действующие на весьма малые площадки тела по сравнению с размерами самого тела.

Распределенными являются силы, приложенные непрерывно по некоторой поверхности или на протяжении некоторой длины.

Различают нагрузки статические и динамические.

Статическая нагрузка возрастает достаточно медленно от нуля до своего конечного значения.

Динамическая нагрузка меняет свою величину в течение малого промежутка времени (например, удар).

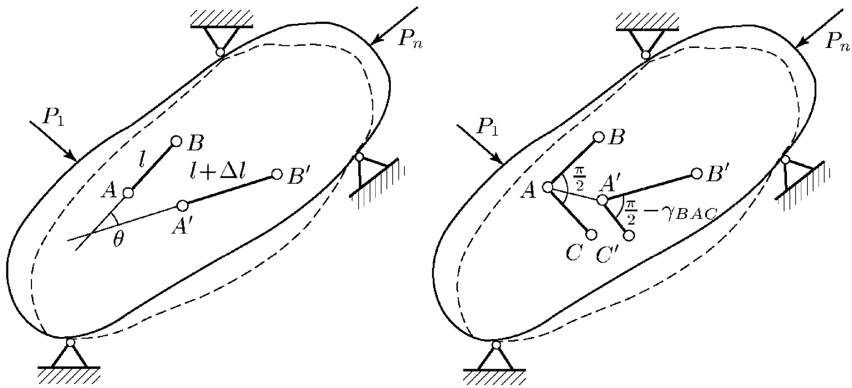
1.4. Деформации

Под действием нагрузок происходит изменение взаимного расположения точек тела, что может привести к реализации таких простейших видов деформации прямолинейного бруса, как *растяжение (сжатие), кручение и изгиб.* Замер этих изменений дает возможность оценить степень его деформирования. Понятно, что деформация тела в целом определяется совокупной деформацией его элементарных составляющих. Если объем тела разбить на множество элементарных параллелепипедов с размерами dx, dy и dz, то в общем случае изменение размеров и формы каждого элемента будет зависеть от его положения в теле. Уменьшая размеры dx, dy и dz, мы в пределе получим точку.

Для характеристики деформированного состояния в точке введем понятия линейной и угловой деформаций.

Линейная деформация. Отметим в теле точки A и B (рис. 1, *а*) так, что расстояние между ними будет равно l. После нагружения точки A и B займут новое положение A' и B' соответственно. Расстояние между точками изменится (увеличится или уменьшится) на Δl. *Отношение приращения длины отрезка AB к его начальной длине называют средней линейной деформацией в точке A по направлению AB и обозначают* $\varepsilon_{AB}^{\text{ср}}$, *т.е.*

$$\varepsilon_{AB}^{\text{ср}} = \frac{\Delta l}{l}.$$



а *б*

Рис. 1

Приближаем точку B к точке A, уменьшая отрезок l. В пределе получим:

$$\lim_{l \to 0} \frac{\Delta l}{l} = \varepsilon_{AB}.$$

где величина ε_{AB} называется *линейной деформацией* (или просто *деформацией*) в точке A по направлению AB. Если через точку A провести отрезки в других направлениях, например в направлениях, параллельных координатным осям x, y и z, то деформации в новых направлениях будут отличаться друг от друга и от деформации в направлении AB. Деформации в направлениях x, y и z обозначаются ε_x, ε_y и ε_z соответственно.

Угловая деформация. Если в теле два бесконечно малых отрезка AB и AC (рис. 1, *б*) располагались до нагружения под углом $\frac{\pi}{2}$, а после нагрузки под углом $\frac{\pi}{2}+\gamma_{BAC}$, то *угол* γ_{BAC} *называют угловой деформацией,* или *деформацией сдвига,* в точке A в плоскости BAC. В той же точке A угловые деформации в различных плоскостях различны. Угловые деформации в трех взаимно перпендикулярных координатных плоскостях с началом координат в точке A обозначаются γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}.

1.5. Принцип начальных размеров и принцип независимости действия сил

В большинстве практических случаев перемещения любой точки рассматриваемой конструкции являются малыми по сравнению с ее геометрическими размерами.

Это позволяет сформулировать *принцип начальных размеров.* Согласно этому принципу при составлении уравнений равновесия конструкция рассматривается как недеформированная, т.е. как имеющая те же геометрические размеры, какие она имела до нагружения.

К системам, в которых соблюдается условие пропорциональности между перемещениями и внешними силами, можно применить принцип *независимости действия сил.* Согласно этому принципу результат одновременного действия нескольких сил, приложенных к телу, равен сумме результатов воздействия каждой силы в отдельности, независимо от порядка приложения сил.

1.6. Принцип Сен-Венана и гипотеза плоских сечений

В СМ широко используется *принцип Сен-Венана,* который в приложении к нижерассматриваемым задачам может быть сформулирован следующим образом: *конкретный способ приложения нагрузки мало сказывается на деформации в точках достаточно удаленных от поверхности приложения нагрузки.*

При решении большинства задач СМ используется *гипотеза Я. Бернулли,* на основании которой принимается, что *плоские поперечные сечения в брусе до деформации остаются плоскими и после деформации.*

1.7. Метод сечений. Внутренние силы и напряжения

Рассмотрим некоторое тело в форме бруса (рис. 2, *а*), находящееся в равновесии под действием системы внешних сил P_1, P_2,..., P_n. Мысленно рассечем брус плоскостью A на две части, отбросим одну из них (например, левую) вместе с приложенными к ней силами. Правая часть под действием оставшихся сил в общем случае не будет в равновесии. Следовательно, отброшенная часть действует на оставшуюся так, что уравновешивает силы, приложенные к правой части. Действие отброшенной части на оставшуюся может быть заменено приложением к сечению A'' системы внутренних сил (P_A) (рис. 2, *б*). Внутренние силы нужно представить себе непрерывно распределенными по сечению. По принципу действия и противодействия правая часть бруса действует на левую точно так же, как левая на правую, и система сил, возникающих в плоскости A', будет обратна по знаку системе сил в плоскости A'' (см. рис. 2, *б*).

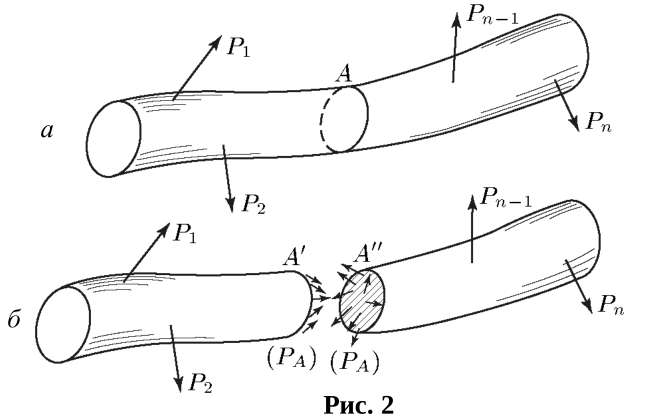


Рис. 2

Систему внутренних сил согласно правилам статики можно привести к центру тяжести поперечного сечения.

Получаем главный вектор R и главный момент M (рис. 3). В системе координат x, y, z (ось x нормальна к сечению и проходит через его центр тяжести) проекции R и M на координатные оси образуют систему из шести внутренних силовых факторов. Сила N, действующая по нормали к сечению, называется *нормальной*, или *продольной*. Силы Q_y и Q_z называются *поперечными*. Момент относительно нормальной оси (M_x) – крутящий момент, а M_y и M_z – изгибающие моменты относительно осей y и z соответственно. Все внутренние силовые факторы определяются из шести уравнений равновесия, составленных для любой отсеченной части бруса. Для этого необходимо приравнять нулю суммы проекций всех сил на координатные оси и суммы моментов сил относительно этих же осей.

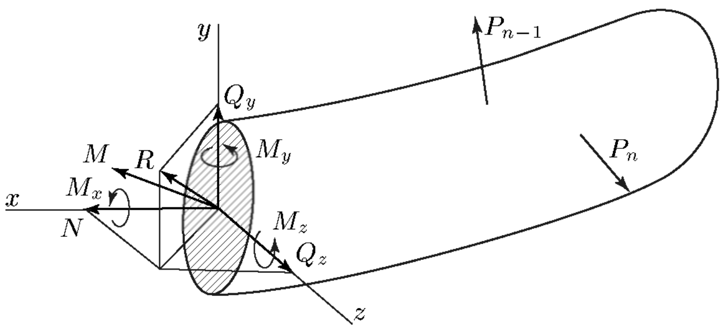


Рис. 3

Интенсивность действия внутренних сил выражается *напряжением.*

Допустим, что около некоторой точки K сечения выделена элементарная площадка ΔF, на которую действует внутренняя сила ΔR (рис. 4).

Если площадка ΔF будет уменьшаться, стягиваясь около точки K, то предел

$$\lim_{\Delta F \to 0} \frac{\Delta R}{\Delta F} = p$$

будет представлять собой *полное напряжение* в точке K.

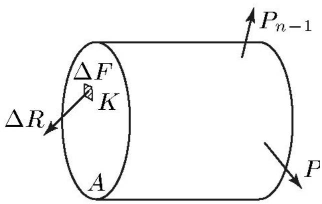


Рис. 4

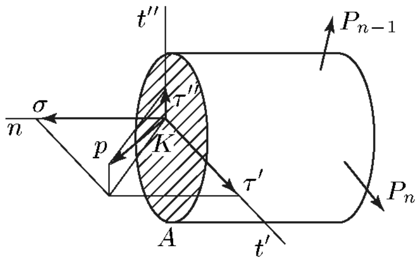


Рис. 5

Полное напряжение p может быть разложено на три компоненты, действующие по нормали к плоскости сечения (σ – *нормальное напряжение*) и по двум осям в плоскости сечения (τ' и τ'' – *касательные напряжения*) (рис. 5).

Между полным напряжением и его компонентами имеется следующая зависимость:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + (\tau')^2 + (\tau'')^2}\ .$$

Напряжения имеют размерность: кгс/см^2, Н/м^2 (Па), МН/м^2 (МПа) и т.д.

2. РАСТЯЖЕНИЕ-СЖАТИЕ

Растяжение (сжатие) – деформация стержня под действием сил, приложенных вдоль оси стержня; характеризуется изменением длины стержня.

2.1. Внутренние силы

Рассмотрим прямолинейный стержень *ABC* прямоугольного поперечного сечения, находящийся в равновесии, под действием трех сил (рис. 6, *а*).

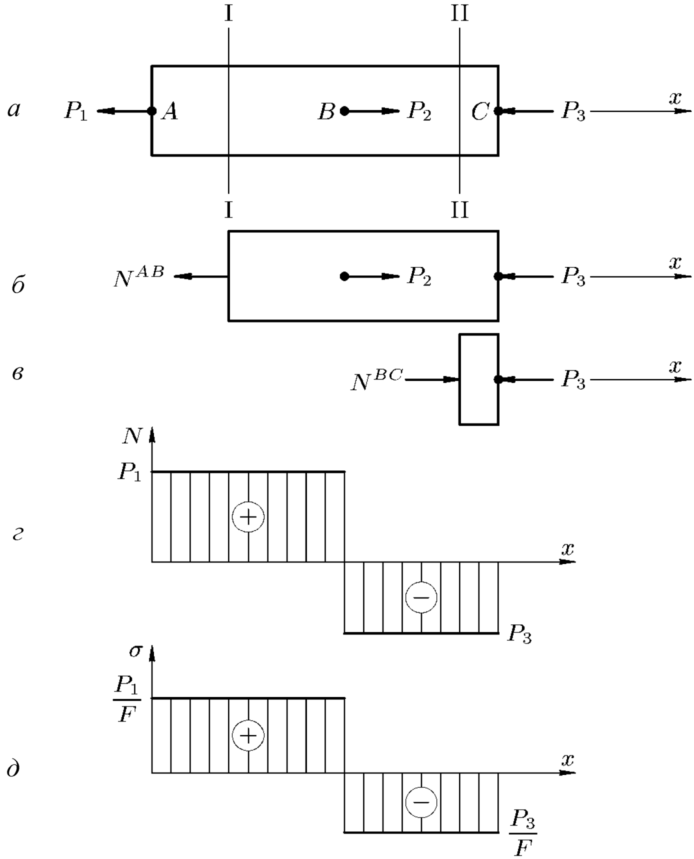


Рис. 6

Для выявления внутренних сил рассечем стержень на участке AB плоскостью I – I, перпендикулярной оси стержня, и мысленно отбросим левую часть бруса. Действие левой части на правую заменим нормальной силой N^{AB} (рис. 6, *б*). Условие равновесия целого стержня и усеченного выражаются соответственно уравнениями:

$$-P_1 + P_2 - P_3 = 0,$$
$$-N^{AB} + P_2 - P_3 = 0.$$

Очевидно, что $N^{AB} = P_1$.

Рассекая стержень плоскостью II – II на участке BC и рассматривая равновесие правой части (рис. 6, *в*), получаем уравнение:

$$N^{BC} - P_3 = 0 \text{, или } N^{BC} = P_3.$$

Но из условия равновесия целого стержня следует, что

$$P_3 = P_2 - P_1.$$

Следовательно, $N^{BC} = P_2 - P_1$.

Полученные результаты для N^{AB} и N^{BC} позволяют сформулировать правило определения внутренних сил в произвольном поперечном сечении: *нормальная сила численно равна алгебраической сумме проекций на ось стержня всех внешних сил, взятых с одной стороны от сечения.*

Очевидно, что если возьмем внешние силы справа от сечения, то определим нормальную силу, действующую на левую часть стержня.

Определив величину и направление действия силы N на отдельных участках стержня, можем построить график зависимости N от координаты сечения (рис. 6, *г*), который в СМ называется *эпюрой*.

При построении эпюры N растягивающие силы (направленные от сечения) считаются *положительными*, сжимающие (направленные к сечению) – *отрицательными*.

2.2. Удлинение стержня. Напряжения и деформации

Выделим из какой-либо части стержня (например, левой части AB) участок с начальной длиной l и рассмотрим его как самостоятельный объект, нагруженный по торцам силами $N = N^{AB}$. После растяжения расстояние между торцевыми поверхностями увеличивается и становится равным $l + \Delta l$ (рис. 7). Величину Δl называют *абсолютным удлинением стержня.*

Представим себе стержень как совокупность множества волокон длиной l и с одинаковой площадью поперечного сечения dF. В силу того, что торцевые сечения при нагружении остались плоскими (гипотеза плоских сечений) и параллельными (отсутствует изгиб), все волокна получили одинаковые удлинения Δl и, очевидно, растягивались одинаковыми усилиями $dN = \sigma dF$ и, следовательно, испытывали одинаковые напряжения (σ = const в поперечных сечениях).

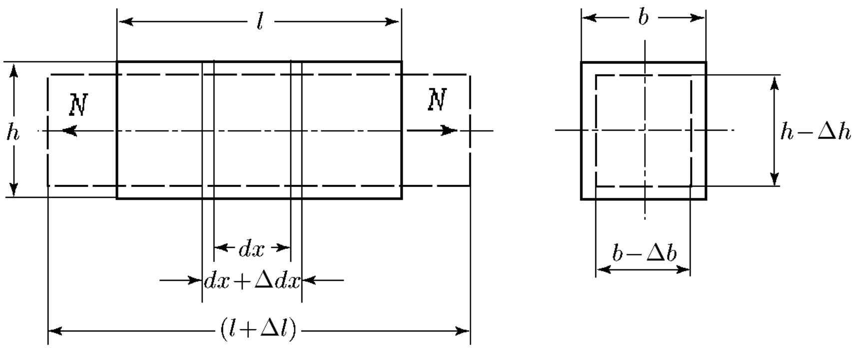


Рис. 7

Внутренняя сила N является равнодействующей элементарных усилий в плоскости поперечного сечения, т.е.

$$N = \int_F \sigma dF = \sigma F,$$

или
$$\sigma = \frac{N}{F}. \tag{2.1}$$

Эпюра σ для стержня *ABC* представлена на рис. 6, *д*.

Таким образом, напряжения σ во всех точках стержня на длине l являются постоянными, все участки растянутых волокон находятся в одинаковых условиях, деформация волокон по оси стержня остается одной и той же, равной своему среднему значению по длине:

$$\varepsilon = \varepsilon^{\text{ср}} = \frac{\Delta l}{l}$$

и характеризует *относительное удлинение стержня.*

2.3. Коэффициент Пуассона

Наблюдения показывают, что растяжение бруса сопровождается уменьшением (сжатие сопровождается увеличением) его поперечных размеров b и h на Δb и Δh соответственно (см. рис. 7). Если обозначить

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta l}{l}, \quad \varepsilon_y = -\frac{\Delta h}{h}, \quad \varepsilon_z = -\frac{\Delta b}{b},$$

то, как показывает опыт,

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu\varepsilon_x, \tag{2.2}$$

где μ – коэффициент пропорциональности, называемый *коэффициентом Пуассона.*

Величина коэффициента Пуассона характеризует свойства материала и для различных материалов лежит в пределах от 0 до 0,5.

2.4. Закон Гука. Определение перемещений и деформаций

Экспериментально установлено, что в пределах малых удлинений существует прямая пропорциональная зависимость между напряжениями и деформациями:

$$\sigma = E\varepsilon. \tag{2.3}$$

Эта зависимость выражает математически закон Гука. Коэффициент пропорциональности E называют *модулем упругости первого рода (модуль Юнга).*

Разобьем стержень (см. рис. 7) на элементарные участки длиной dx, которые при растяжении удлиняются на $\Delta(dx)$. Очевидно, что относительное удлинение каждого элементарного участка определяется соотношением:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx}.$$

Формулу (2.3) представим в виде:

$$\frac{N}{F} = E\frac{\Delta(dx)}{dx}, \quad \text{или} \quad \Delta(dx) = \frac{Ndx}{EF}.$$

Произведение EF называется *жесткостью поперечного сечения стержня при растяжении (сжатии).*

Суммируя удлинения элементарных участков, получаем удлинение стержня длиной *l:*

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EF}dx. \tag{2.4}$$

В случае, когда N, E и F не зависят от координаты x (постоянны по длине):

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF}. \tag{2.5}$$

Если силовое нагружение сопровождается температурным воздействием, то относительные удлинения, обусловленные напряжением и температурой, суммируются:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha t, \tag{2.6}$$

где α – коэффициент линейного температурного расширения материала, а t – температура материала в сечении с координатой x.

Общая деформация в этом случае определяется выражением:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N}{EF}dx + \int_0^l \alpha t dx. \tag{2.7}$$

В частном случае, когда N, E, F, α и t – постоянны по длине:

$$\Delta l = \frac{Nl}{EF} + \alpha t l. \tag{2.8}$$

Очевидно, что взаимные перемещения сечений (u), например сечения B относительно сечения A, равны удлинению отрезка стержня между сечениями A и B, т.е. $u_{B/A} = \Delta l_{AB}$, или $u_{B/A} = \int_A^B \varepsilon dx$,

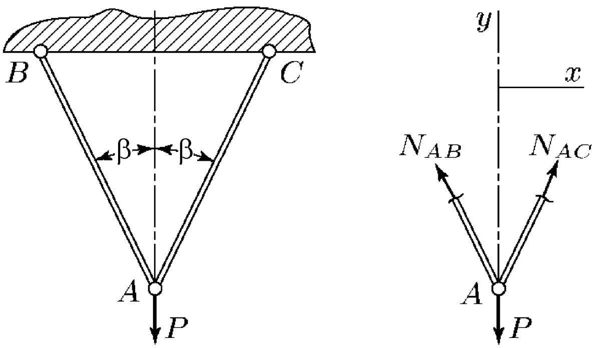
или $u_{B/A} = \int_A^B \frac{N}{EF}dx$.

2.5. Статически определимые и статически неопределимые системы

Рассмотрим систему из двух стержней, одинаковых сечений F, нагруженных силой P (рис. 8, *а*). Материал стержней одинаков. Для того чтобы стержни работали только на растяжение или сжатие, необходимо обеспечить возможность свободного поворота стержней в узлах A, B и C. Такие узлы называются *шарнирами*. Разрезая стержни AB и AC, отбрасывая верхние части и заменяя действие отброшенных частей стержней на оставшиеся внутренними силами N_{AB} и N_{AC}, можем рассмотреть условие равновесия узла A (рис. 8, *б*). Совместив координатную плоскость $x-y$ с плоскостью стержневой системы, запишем условие равновесия узла A следующим образом:

$$\sum X = 0 \quad \text{или} \quad -N_{AB} + N_{AC} = 0;$$

$$\sum Y = 0 \quad \text{или} \quad N_{AB}\cos\beta + N_{AC}\cos\beta = P.$$



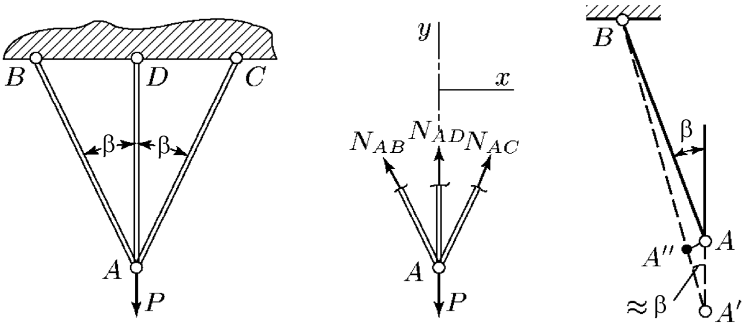
а *б*

Рис. 8

Здесь и далее пользуемся принципом неизменности начальных размеров и считаем угол β неизменным.

Решение системы двух уравнений с двумя неизвестными (N_{AB} и N_{AC}) дает возможность определить усилия в стержнях, а затем напряжения, деформации и перемещения.

Системы, для которых все реакции связей могут быть определены с помощью уравнений равновесия, называются *статически определимыми.*



а *б* *в*

Рис. 9

Усложним конструкцию системы, добавив стержень *AD* сечения *F* (рис. 9, *а*). Рассматривая равновесие узла *A* (рис. 9, *б*) и проецируя все силы на координатные оси *x* и *y*, получаем систему двух уравнений с тремя неизвестными:

$$\sum X = 0 \quad \text{или} \quad -N_{AB} + N_{AC} = 0\,;$$

$$\sum Y = 0 \quad \text{или} \quad N_{AB}\cos\beta + N_{AC}\cos\beta + N_{AD} = P\,.$$

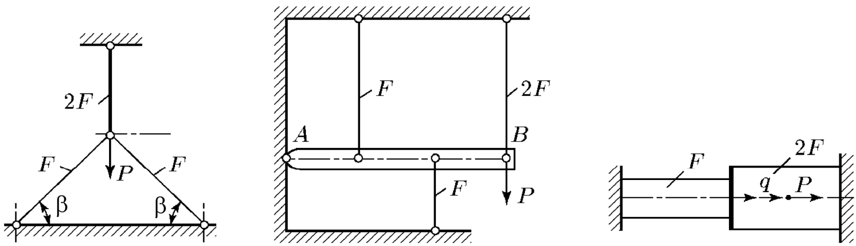


Рис. 10

Системы, для которых количество реакций связей превышает число возможных уравнений равновесия, называются *статически неопределимыми.* Разность между числом неизвестных и числом независимых уравнений равновесия определяет *степень статиче-*

ской неопределимости. На рис. 10 представлены примеры статически неопределимых систем.

Для решения статически неопределимой задачи необходимо составить дополнительные уравнения, выражающие условия деформирования заданной системы. Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Продолжим решение задачи, представленной на рис. 9, *а*, и определим усилия в стержнях. Ранее была получена система двух уравнений с тремя неизвестными. Для составления дополнительного уравнения рассмотрим перемещение узла A, который в силу симметрии системы опустится вертикально и займет положение A' (рис. 9, *в*). Отрезок AA' равен удлинению среднего стержня AD:

$$AA' = \Delta l_{AD}.$$

Из точки A проведем дугу окружности AA'' с центром в точке B до пересечения со стержнем $A'B$ (новое положение стержня AB после деформации). Отрезок $A'A''$ равен удлинению бокового стержня AB:

$$A'A'' = \Delta l_{AB}.$$

Дугу AA'' можно принять за отрезок, перпендикулярный к прямой $A'B$, допуская при этом пренебрежимо малые погрешности, так как перемещение узла A мало.

По этой же причине угол β меняется незначительно, и получим:

$$\Delta l_{AB} = \Delta l_{AD} \cos\beta.$$

Выразим удлинения через усилия в стержнях, используя зависимость (2.5):

$$\Delta l_{AB} = \frac{N_{AB} l_{AB}}{E_{AB} F}; \quad \Delta l_{AD} = \frac{N_{AD} l_{AD}}{E_{AD} F}.$$

Если материал стержней AB и AD одинаков, то $E_{AB} = E_{AD}$. Учитывая, что

$$l_{AD} = l_{AB} \cos\beta,$$

получаем

$$N_{AB} = N_{AD} \cos^2\beta.$$

Решая это уравнение совместно с уравнениями равновесия узла A, определяем усилия в стержнях:

$$N_{AB} = N_{AC} = \frac{P\cos^2\beta}{1+2\cos^3\beta}; \quad N_{AD} = \frac{P}{1+2\cos^3\beta}.$$

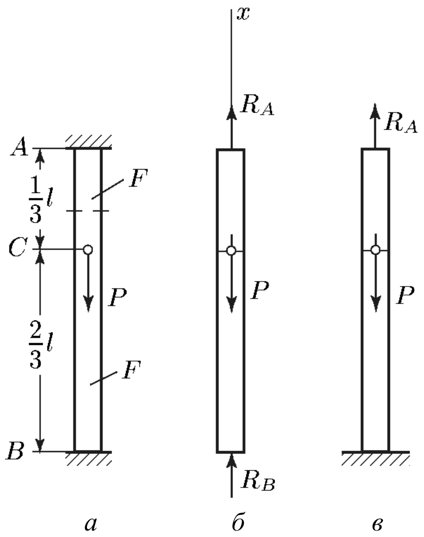


Рис. 11

Пример 2. Однородный стержень (рис. 11, *а*) жестко закреплен по концам и нагружен силой *P*, приложенной в сечении *C*. Определить перемещение точки приложения силы *P*.

Заменяя действие опор *A* и *B* их реакциями R_A и R_B, получаем расчетную схему (рис. 11, *б*) и составим уравнение равновесия бруса:

$$\sum X = 0, \quad R_A + R_B = P.$$

Число неизвестных равно двум при одном уравнении равновесия. Следовательно, система один раз статически неопределима. Преобразуем статически неопределимую систему в статически определимую, отбросив опору *A* и заменив ее действие реакцией R_A (рис. 11, *в*).

Полученная система будет эквивалентна заданной, если перемещение сечения *A* будет равно нулю, так как опора *A* неподвижна. Согласно принципу независмости действий сил, результат одновременного действия сил *P* и R_A равен сумме результатов действия каждой силы в отдельности, т.е.

$$u_A = u_A(R_A) + u_A(P) = 0.$$

Перемещение сечения *A* под действием силы R_A:

$$u_A(R_A) = \frac{R_A l}{EF},$$

а под действием силы *P*:

$$u_A(P) = -\frac{P \cdot \frac{2}{3} l}{EF}.$$

Следовательно, $R_A = \frac{2}{3}P$.

Из уравнения равновесия бруса получаем:

$$R_B = \frac{1}{3}P.$$

Перемещение сечения C:

$$u_C = u_C(R_A) + u_C(P),$$

или

$$u_C = \frac{2P \cdot \frac{2}{3}l}{3EF} - \frac{P \cdot \frac{2}{3}l}{EF} = -\frac{2Pl}{9EF}.$$

Сечение C перемещается вниз.

2.6. Механические испытания материалов при статическом растяжении и сжатии

В расчетах на прочность очень важно знать механические свойства материала, которые определяются из различных испытаний. В силу своей относительной простоты и существенной информативности, значительное распространение получили испытания на растяжение и сжатие.

Для того чтобы результаты испытаний были сопоставимы, необходимо стандартизовать конструкцию образца, условия нагружения и метод обработки полученных результатов.

Растяжение образцов осуществляется на специальных испытательных машинах и сопровождается регистрацией усилий и соответствующих им деформаций. Большинство машин снабжено устройствами, позволяющими записать зависимость удлинения образца от приложенной к нему нагрузки в координатах $P - \Delta l$, которая называется *диаграммой растяжения образца*.

Для получения количественных оценок свойств материала диаграмма $P - \Delta l$ перестраивается в диаграмму $\sigma - \varepsilon$ делением усилия P на первоначальную (до растяжения) площадь поперечного сечения образца F_0 и удлинения расчетной части образца Δl на его начальную длину l_0.

На рис. 12 представлена типичная диаграмма $\sigma = f(\varepsilon)$ для малоуглеродистой стали. Точками отмечены наиболее характерные моменты деформации материала.

Наибольшее напряжение, до которого справедлив закон Гука (точка а), называется пределом пропорциональности $\sigma_{пц}$.

Предел текучести $\sigma_т$ *– напряжение, при котором происходит рост деформации без заметного увеличения нагрузки (точка с).* Для материалов, не имеющих на диаграмме выраженной площадки текучести, вводят понятие *условного предела текучести* $\sigma_{0,2}$; *напряжение, при котором остаточная деформация равна 0,002, или 0,2 %.*

Опыт показывает, что разгрузка образца осуществляется всегда по закону Гука, т.е. параллельно прямолинейному участку *Oa.* При полной разгрузке, когда $\sigma = 0$, упругие деформации снимаются и остаются только пластические. Следовательно, если на оси деформаций диаграммы $\sigma - \varepsilon$ отложить от начала координат отрезок *OA*, равный 0,002, и провести из точки *A* линию, параллельную прямой, выражающей закон Гука, то пересечение линии с диаграммой определит точку *B*, ордината которой будет соответствовать условному пределу текучести $\sigma_{0,2}$ (рис. 13).

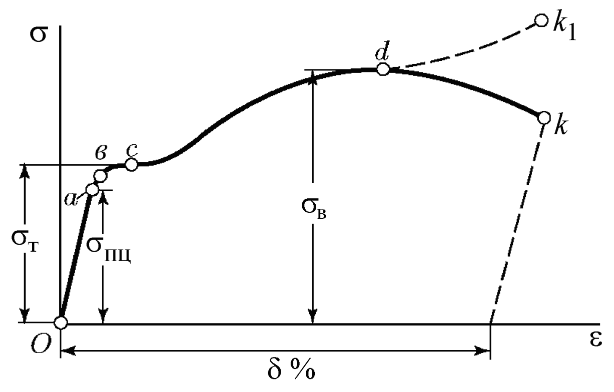


Рис. 1

Временное сопротивление $\sigma_в$ – *условное напряжение, которое соответствует наибольшему усилию в процессе растяжения образца* (точка d на рис. 12):

$$\sigma_в = \frac{P_{max}}{F_0}.$$

До точки d деформация равномерно распределяется по длине образца, площадь поперечного сечения образца уменьшается, но не зависит от координаты сечения. Дальнейшее растяжение сопровождается локализацией пластических деформаций, что ведет к образованию шейки (рис. 14). Площадь поперечного сечения в зоне локализации пластической деформации резко уменьшается, что ведет к росту истинных напряжений, несмотря на снижение нагрузки (см. рис. 12, участок $d\,k_1$).

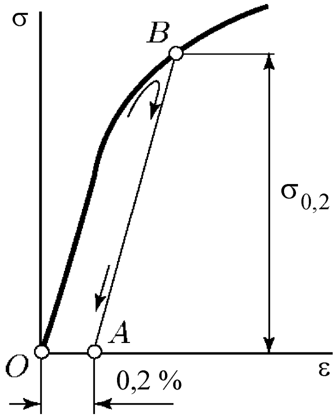


Рис. 2

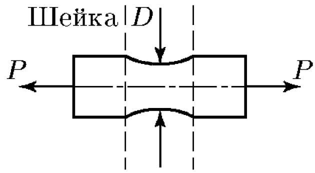


Рис. 14

Отношение растягивающего усилия в момент разрушения (P_K) к площади поперечного сечения в месте разрушения (F_K) характеризует истинное сопротивление разрушению (S_K):

$$S_K = \frac{P_K}{F_K}.$$

Для цилиндрического образца F_K определяется путем замера диаметра в сечении, где произошло разрушение:

$$F_K = \frac{\pi D^2}{4}.$$

Рассмотренные выше напряжения количественно характеризуют прочностные свойства материала.

Для характеристики пластических свойств материала определяют *относительное удлинение образца после разрыва* (δ) *и относительное сужение после разрыва* (ψ).

Первая характеристика определяется отношением:

$$\delta = \frac{l_p - l_0}{l_0} 100\,\% ,$$

где l_p – длина рабочей части образца после разрушения. Вторая характеристика определяется отношением:

$$\psi = \frac{F_0 - F_K}{F_0} 100\,\% \cdot$$

Чем выше значения δ и ψ, тем пластичнее материал. Обычно материал считается пластичным, если δ > 5 %. Как правило, ψ несколько выше значения δ, если образуется шейка при растяжении образца. При равномерном деформировании образца δ незначительно превышает ψ.

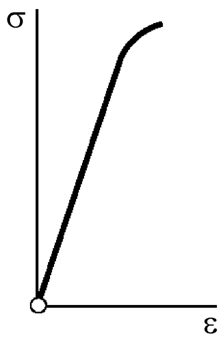


Рис. 3

Противоположным свойству пластичности является хрупкость, т.е. способность материала разрушаться без образования существенных остаточных деформаций. Для хрупких материалов δ не превышает 2–5 %. Типичная диаграмма растяжения хрупкого материала показана на рис. 15. Она не имеет площадки текучести, и разрушение образца происходит практически без остаточных деформаций. Единственной характеристикой прочностных свойств материала является величина $\sigma_в$, которая в этом случае называется *пределом прочности*.

Испытания на сжатие пластичных материалов свидетельствуют о том, что пределы пропорциональности, упругости и текучести, как правило, мало отличаются от аналогичных характеристик, полученных при растяжении. Если необходимо отличить предел текучести при растяжении от предела текучести при сжатии, используют дополнительный индекс «р» для растяжения или «с» для сжатия. Таким образом, получаем обозначения $\sigma_{тр}$ и $\sigma_{тс}$.

При испытаниях на сжатие пластичного материала невозможно осуществить разрушение образца. Цилиндрический образец получает бочкообразную форму, площадь поперечного сечения образца резко увеличивается (рис. 16).

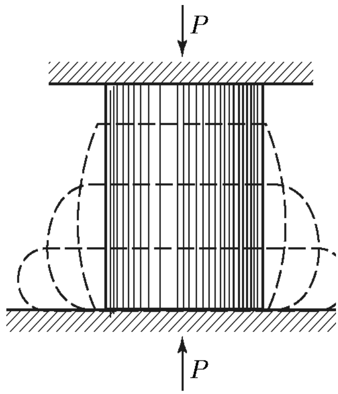


Рис. 16

Это делает невозможным определение временного сопротивления при сжатии.

При сжатии хрупкого материала вид диаграмм $\sigma - \varepsilon$ напоминает аналогичную диаграмму при растяжении. Однако, как правило, предел прочности при сжатии значительно выше, чем при растяжении. В этом случае характеристика, полученная при растяжении и сжатии, отмечается дополнительным индексом «р» (для растяжения) или «с» (для сжатия), например при растяжении $- \sigma_{вр}$, при сжатии $- \sigma_{вс}$.

2.7. Расчет на прочность при растяжении и сжатии

Расчеты на прочность должны обеспечить отсутствие в конструкции остаточных деформаций (для пластичных материалов) или признаков разрушений (для хрупких материалов). Из механических испытаний известны напряжения, под действием которых в пластичных материалах начинается пластическое деформирование – $\sigma_т$, а в хрупких разрушение – $\sigma_в$. Эти напряжения принято считать предельными.

Максимальное напряжение σ_{max}, возникающее в конструкции, не должно превышать определенной величины, свойственной условиям работы конструкции. Это напряжение называется *допускаемым* и обозначается $[\sigma]$.

Условие прочности удовлетворено, если

$$\sigma_{max} \leq [\sigma].$$

Для пластичных материалов допускаемое напряжение равно:

$$[\sigma]_{\text{р}} = \frac{\sigma_{\text{тр}}}{n_{\text{т}}} \text{ – для растяжения,}$$

$$[\sigma]_{\text{с}} = \frac{\sigma_{\text{тс}}}{n_{\text{т}}} \text{ – для сжатия,}$$

где $n_{\text{т}}$ – коэффициент запаса прочности по пределу текучести.

Если $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}}$, то индексы «р» и «с» у напряжений опускаются.

Для хрупких материалов допускаемые напряжения для растяжения и для сжатия равны соответственно:

$$[\sigma]_{\text{р}} = \frac{\sigma_{\text{вр}}}{n_{\text{в}}}, \quad [\sigma]_{\text{с}} = \frac{\sigma_{\text{вс}}}{n_{\text{в}}},$$

где $n_{\text{в}}$ – коэффициент запаса прочности по пределу прочности. Обычно $n_{\text{т}} < n_{\text{в}}$.

Величина коэффициента запаса зависит от точности выбранного метода расчета, вероятности наличия дефектов в материале, серьезности последствий разрушения. На величине коэффициента запаса прочности сказывается накопленный опыт в той или иной области техники. Обычно $n_{\text{т}}$ выбирается в пределах 1,7–3,5, а $n_{\text{в}}$ – в пределах 2–5.

3. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННО–ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ

3.1. Напряженное состояние в точке

Как уже отмечалось, в общем случае в площадке, проходящей через какую-либо точку нагруженного тела, действуют нормальные и касательные напряжения. Очевидно, что при изменении ориентации площадки нормальные и касательные напряжения изменят свои значения. *Совокупность нормальных и касательных напряжений для бесчисленного количества площадок, проходящих через рассматриваемую точку, характеризует в ней напряженное состояние.*

Выделим в окрестности исследуемой точки бесконечно малый элемент в форме куба так, чтобы его грани были параллельны координатным плоскостям. В общем случае на всех гранях действуют полные напряжения, которые можно разложить на составляющие, параллельные координатным осям. Таким образом, на трех взаимно перпендикулярных площадках имеем девять составляющих напряжений (рис. 17): σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy} , τ_{yx}, τ_{xz} , τ_{zx}, τ_{yz}, τ_{zy}. На невидимых гранях возникают такие же напряжения, но противоположно направленные.

Индекс у σ указывает ось, параллельно которой направлено напряжение. Первый индекс у τ указывает, какой оси параллельна нормаль к площадке, где действует касательное напряжение. Второй индекс указывает ось, параллельно которой направлено напряжение.

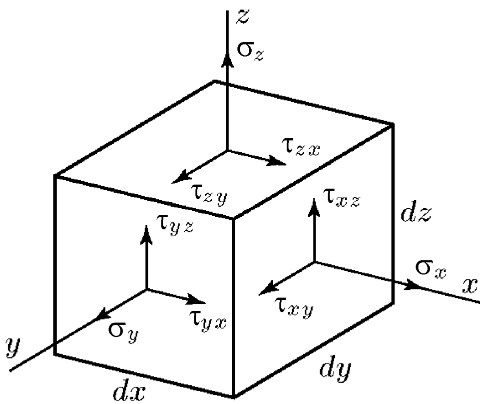


Рис. 4

Напряжения, действующие в площадке, внешняя нормаль к которой совпадает с направлением координатной оси, *считаются положительными, если* *вектора напряжений соответствуют направлению координатных осей.*

Если же внешняя нормаль к площадке направлена противоположно координатной оси, то *положительным напряжениям на этой площадке соответствуют направления, противоположные координатным осям.*

При исследовании напряженного состояния считают, что в пределах элементарного объема при переходе от одной грани куба к другой, ей параллельной, (расстояния между гранями: dx, dy или dz) напряжения остаются постоянными и по граням распределены равномерно.

3.2. Закон парности касательных напряжений

Система сил, приложенных к элементарному кубу, должна удовлетворять условиям равновесия. Для получения сил необходимо напряжения умножить на площадь грани, на которой они возникают. Поскольку на противоположных гранях возникают равные и противоположно направленные силы, то первые три уравнения равновесия (суммы проекций всех сил на оси x, y и z равны нулю) удовлетворяются независимо от величины напряжений. Составим уравнение моментов сил относительно оси x. Силы, действующие на гранях, приложены к центру тяжести граней.

Следовательно, уравнение моментов записывается следующим образом:

$$\tau_{zy}\, dz\, dx\, dy - \tau_{yz}\, dz\, dx\, dy = 0.$$

Аналогично запишутся моменты сил относительно осей y и z. Из этих уравнений следует, что: $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, $\tau_{yz} = \tau_{zy}$, $\tau_{zx} = \tau_{xz}$, т.е. *на двух взаимно перпендикулярных площадках составляющие касательных напряжений, перпендикулярные к общему ребру, равны и направлены либо к ребру, либо от ребра.* Этот вывод выражает закон парности касательных напряжений. Следствием из закона парности касательных напряжений является то, что на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку, имеем не девять, а только шесть независимых компонентов напряжений. Эти напряжения полностью определяют напряженное состояние, так как, зная их, можно определить напряжения на любой другой площадке, проходящей через ту же точку. Можно доказать, что существуют по крайней мере три взаимно перпендикулярные площадки, проходящие через исследуемую точку, на которых касательные напряжения отсутствуют, а нормальные напряжения принимают экстремальные значения. Эти площадки называются *главными,* а нормальные напряжения на них – *главными напряжениями.* В порядке возрастания эти напряжения обозначают через σ_3, σ_2 и σ_1. Например, если одно из главных напряжений растягивающее и равно 30 МПа, а два других сжимающих и равны 40 и 50 МПа соответственно, то их следует обозначать: $\sigma_1 = 30$ МПа, $\sigma_2 = -40$ МПа, $\sigma_3 = -50$ МПа.

Через главные напряжения удобно определять тип напряженного состояния в точке, так как достаточно трех напряжений вместо шести. Если все главные напряжения отличны от нуля, то напряженное состояние в точке называется *трехосным*, или *объемным*. Если одно из главных напряжений равно нулю, а два других отличны от нуля, то напряженное состояние называется *двухосным*, или *плоским*. И, наконец, если два главных напряжения равны нулю, то напряженное состояние называется *одноосным*, или *линейным*.

Особый интерес представляет частный случай двухосного напряженного состояния, для которого $\sigma_1 = -\sigma_3$ и $\sigma_2 = 0$. Такое напряженное состояние называется *чистым сдвигом.*

Можно доказать, что сумма взаимно перпендикулярных напряжений в любых декартовых координатах с центром в данный точке тела равна постоянной величине (свойство инвариантности), т.е.:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \text{const}.$$

3.3. Тензор напряжений. Анализ напряженного состояния

Известно, что совокупность девяти величин, преобразующихся при повороте координатной системы так же, как попарные произведения координат, называется *тензором второго ранга*. В теории упругости доказано, что именно так преобразуются напряжения при повороте системы трех взаимно перпендикулярных площадок. Следовательно, напряжения σ_x, σ_y, σ_z, τ_{xy}, τ_{yx}, τ_{xz}, τ_{zx}, τ_{yz} и

τ_{zy} могут рассматриваться как составляющие тензора, который в данном случае называется *тензором напряжений* и обозначается T_σ. Тензор напряжений обычно задан матрицей (таблицей), написанной, например, в виде:

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{Bmatrix}$$

для общего случая, когда напряженное состояние в точке задается девятью компонентами напряжений, или

$$T_\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Bmatrix},$$

когда напряженное состояние в точке задается главными напряжениями.

Экспериментально установлено, что прочность материала зависит от типа напряженного состояния, в котором находятся элементарные объемы конструкции. Поэтому определение главных напряжений является одним из этапов при ведении расчетов на прочность.

В общем случае для этого можно использовать операции с тензором напряжений.

Однако следует отметить, что на практике в абсолютном большинстве случаев положение одной из главных площадок в исследуемой точке нам известно. Достаточно легко определяется и напряжение, действующее в этой площадке. Задача упрощается, так как остальные две площадки находятся в семействе площадок, перпендикулярных к уже известной главной площадке.

Определение главных площадок и напряжений, когда положение одной главной площадки известно. Рассмотрим элементарный куб, вырезанный в окрестностях анализируемой точки (рис. 18, *а*). Пусть его грань, параллельная плоскости $x - y$, свободна от касательных напряжений. На этой грани действует напряжение σ_z, которое является главным. На двух других площадках имеются напряжения σ_x, σ_y и $\tau_{xy} = \tau_{yx}$.

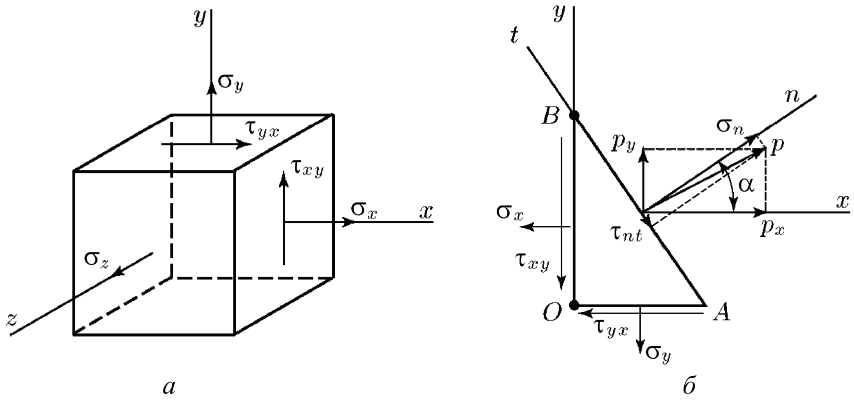


Рис. 5

Рассекаем элементарный куб наклонной плоскостью, параллельной оси z (рис. 18, *б*). Нормаль n к наклонной площадке образует с осью x угол α.

Вектор полного напряжения p, возникающего на наклонной площадке, разложим на составляющие p_x и p_y, направленные параллельно осям x и y. Запишем уравнения равновесия трехгранной элементарной призмы *AOB*, просуммировав проекции сил, действующих на ее гранях, на оси x и y. Обозначим площадь наклонной грани *AB* через dF, тогда площадь грани *OA* будет $dF \sin \alpha$, а грани *OB* − $dF \cos \alpha$. Для получения сил умножим каждое из напряжений на площадь грани, на которой оно действует. Уравнения равновесия примут вид:

$$\sum X = p_x dF - \sigma_x dF \cos\alpha - \tau_{xy} dF \sin\alpha = 0\,;$$

$$\sum Y = p_y dF - \sigma_y dF \sin\alpha - \tau_{xy} dF \cos\alpha = 0\,,$$

откуда

$$\begin{aligned} p_x &= \sigma_x \cos\alpha + \tau_{yx} \sin\alpha; \\ p_y &= \sigma_y \sin\alpha + \tau_{xy} \cos\alpha. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Проецируя составляющие p_x и p_y на нормаль n к наклонной площадке и на ось t, совпадающую с линией пересечения наклонной площадки с плоскостью $x - y$, получаем:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= p_x \cos\alpha + p_y \sin\alpha; \\ \tau_{nt} &= -p_x \sin\alpha + p_y \cos\alpha. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Подставив p_x и p_y из выражений (3.1) в зависимости (3.2) и учтя закон парности касательных напряжений, получим:

$$\sigma_n = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin^2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha\,;$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha\,.$$

Заменив в первом выражении $\cos^2\alpha$ на $0{,}5(1 + \cos 2\alpha)$ и $\sin^2\alpha$ на $0{,}5(1 - \cos 2\alpha)$, окончательно получим:

$$\sigma_n = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha + \tau_{xy} \sin 2\alpha\,. \tag{3.3}$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{xy} \cos 2\alpha\,. \tag{3.4}$$

Формулы (3.3) и (3.4) дают возможность определить напряжения σ_n и τ_{nt} в любой наклонной площадке, параллельной оси z, если известны напряжения σ_x, σ_y и τ_{xy}. На главной площадке касательные напряжения по определению равны нулю. Из (3.4) получаем:

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}\,. \tag{3.5}$$

Полученная формула дает два значения угла 2α, отличающиеся друг от друга на π, т.е. для угла α, определяющего положение главных площадок, имеем два значения, различающиеся на $\pi/2$, что вполне естественно, так как главные площадки взаимно перпендикулярны. Используя известные тригонометрические зависимости

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2 2\alpha}}\,; \quad \sin 2\alpha = \mathrm{tg}2\alpha \cos 2\alpha\,,$$

найдем

$$\cos 2\alpha = \pm\frac{\sigma_x - \sigma_y}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}\,; \quad \sin 2\alpha = \pm\frac{2\tau_{xy}}{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}}\,.$$

Подставив эти выражения в (3.3), после простых преобразований получим выражение для двух главных напряжений, которые принимают экстремальные значения для семейства площадок параллельных оси z

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \ . \qquad (3.6)$$

Сопоставив найденные значения главных напряжений с величиной σ_z, переименовываем их на σ_1, σ_2 и σ_3 в порядке убывания. Заметим, что если с известным главным напряжением совместим ось y или x, то в формуле (3.6) должны будем заменить σ_y и τ_{xy} на σ_z и τ_{xz} или σ_x и τ_{xy} на σ_z и τ_{xz} соответственно.

В формулах (3.3) и (3.4) угол α отсчитывается от оси x к нормали n. Если вырежем элементарный куб так, что ось x совпадет с направлением σ_1, ось y – с σ_3, а ось z – с σ_2, то формулы (3.3) и (3.4) преобразуются и примут вид

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha \ . \qquad (3.7)$$

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha \ . \qquad (3.8)$$

Здесь угол α отсчитывается от направления σ_1 к нормали n, ориентирующей положение площадки, где действуют напряжения σ_n и τ_{nt}.

Из формулы (3.8) следует, что максимальные касательные напряжения равны:

$$\tau_{\max} = 0{,}5(\sigma_1 - \sigma_3) \qquad (3.9)$$

и действуют в двух взаимно перпендикулярных площадках, нормали к которым составляют с направлениями σ_1 и σ_3 углы, равные $\pi/4$. В случае чистого сдвига $(\sigma_1 = -\sigma_3)$ максимальные касательные напряжения по модулю равны максимальному нормальному напряжению и, согласно (3.7), действуют в площадках, в которых нормальные напряжения равны нулю.

Следует отметить, что формулы (3.3)–(3.8) будут справедливы и в случае отсутствия нормальных напряжений на известной главной площадке. Это утверждение справедливо в силу того, что при выводе этих формул напряжение, действовавшее в известной главной площадке, не входило в сумму проекций всех сил на оси n и t при рассмотрении равновесия элементарной призмы.

Полученные формулы (3.3)–(3.8) являются инструментом для анализа напряженного состояния в абсолютном большинстве встречающихся на практике случаях.

3.4. Круговые диаграммы Мора

Нетрудно заметить, что выражения (3.7) и (3.8) задают в параметрическом виде уравнение окружности в координатах $\sigma_n - \tau_{nt}$ (ось τ_{nt} направлена вниз), рис. 19. Отрезки *OC*, *OA* и *OB* в соответствующем масштабе представляют нам σ_1, σ_3 и $0{,}5(\sigma_1 + \sigma_3)$ соответственно. Точка *B* – центр окружности. Тогда отрезок *AB* = *BC* = $= 0{,}5(OC - OA) = 0{,}5(\sigma_1 - \sigma_3)$ – радиус окружности (*R*). Отсчитывая угол 2α от точки *C* по часовой стрелке (отрицательный угол), находим точку *D*, координаты которой (отрезки DD_1 и OD_1) соответствуют напряжениям τ_{nt} и σ_n в площадке, нормаль к которой направлена под отрицательным углом α к направлению σ_1. Действительно,

$$OD_1 = \frac{OC + OA}{2} + BD\cos 2\alpha$$

или

$$\sigma_n = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\cos 2\alpha;$$

$$DD_1 = BD\sin 2\alpha$$

или, учитывая, что синус отрицательного угла отрицателен, имеем:

$$\tau_{nt} = -\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}\sin 2\alpha .$$

Таким образом, координаты точек окружности радиусом $R = 0{,}5(\sigma_1 - \sigma_3)$

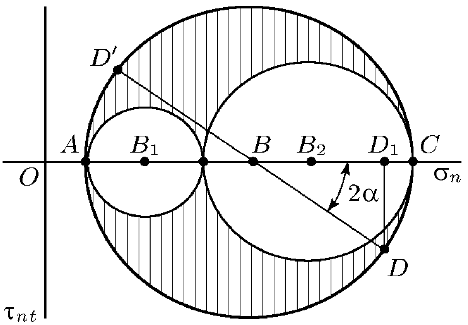


Рис. 6

представляют семейства нормальных (σ_n) и касательных (τ_{nt}) напряжений, действующих в площадках, параллельных напряжению σ_2. Аналогично можно построить окружности, точки которых будут представлять напряжения в семействе площадок, параллельных напряжению σ_1 (центр окружности в точке B_1) и напряжению σ_3 (центр окружности в точке B_2). Эти окружности называются *круговыми диаграммами напряженного состояния* (*круги Мора*). Напряжения, действующие на взаимно перпендикулярных площадках, параллельных одному из главных напряжений, представлены на соответствующем круге точками, лежащими на противоположных концах диаметра. Так, если координаты точки D представляют напряжения σ_x и τ_{xy}, то координаты D' − напряжения σ_y и τ_{yx}. Из диаграммы следует, что касательные напряжения на взаимно перпендикулярных площадках имеют разные знаки, что противоречит принятому ранее правилу определения знака для напряжений. Это противоречие заложено в процедуре проецирования сил на ось t при рассмотрении условий равновесия призмы. Так, при повороте сечения на угол $\alpha = \pi/2$ ось t будет противоположна направлению оси x, и положительное касательное напряжение, совпадающее по направлению с осью x, в системе координат $n - t$ будет иметь противоположный знак.

Следует подчеркнуть, что точки, расположенные на трех кругах, не исчерпывают всего множества секущих площадок. Можно показать, что площадкам, не параллельным ни одному из главных напряжений, соответствуют точки, лежащие внутри заштрихованной зоны круговых диаграмм.

Пример 3. Напряженное состояние в точке задано следующими компонентами напряженного состояния: $\sigma_x = 20$ МПа, $\sigma_y = -40$ МПа, $\sigma_z = 45$ МПа, $\tau_{xy} = 40$ МПа, $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$ (рис. 20, *а*).

Определить главные напряжения и положение главных площадок.

В данном примере одна из главных площадок и одно из главных напряжений заданы.

Площадка, нормальная оси z, − главная, так как на ней отсутствуют касательные напряжения. Следовательно, одно из главных напряжений известно ($\sigma_z = 45$ МПа). Остальные два главных напряжения находятся по формуле (3.6):

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{20-40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{20+40}{2}\right)^2 + 1600},$$

$$\sigma_{\max} = 40 \text{ МПа}, \quad \sigma_{\min} = -60 \text{ МПа}.$$

Следовательно, $\sigma_1 = 45$ МПа, $\sigma_2 = 40$ МПа, $\sigma_3 = -60$ МПа

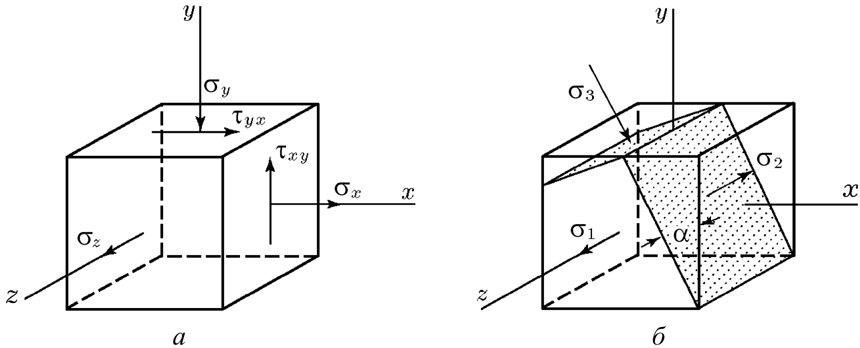


Рис. 20

Площадка, где действует σ_1 известна. Положение остальных (параллельных оси z) определяется из формулы (3.5):

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{80}{20+40} = \frac{4}{3}; \quad 2\alpha \approx 53°; \quad \alpha \approx 26°30'.$$

Площадку, перпендикулярную оси x, необходимо повернуть на угол $\alpha \approx 26°30'$ против часовой стрелки вокруг оси z, чтобы она совпала с положением главной площадки, на которой действует напряжение σ_2. Повернутая на тот же угол, в том же направлении площадка, перпендикулярная оси y, совпадает с площадкой, на которой действует напряжение σ_3 (рис. 20, *б*).

3.5. Деформированное состояние в точке. Тензор деформаций

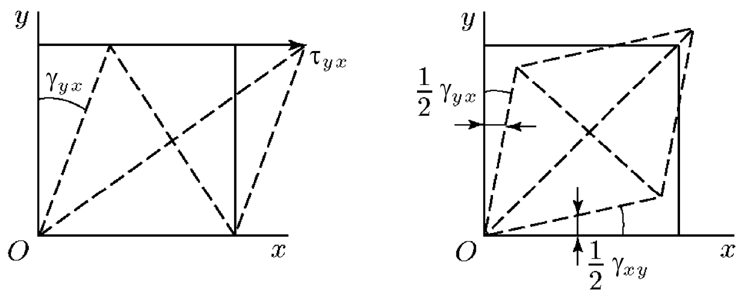
Совокупность линейных и угловых деформаций, возникающих по различным направлениям и в различных плоскостях, проходящих через данную точку, характеризует деформированное состояние в точке.

Можно показать, что шести компонентов деформации (ε_x, ε_y, ε_z, γ_{xy}, γ_{yz}, γ_{zx}) достаточно, чтобы определить в данной точке деформации в любых направлениях и любых плоскостях.

Для упругого куба (рис. 21, *а*) сдвиг γ_{yx} характеризует его деформированное состояние. Из рис. 21, *б* видно, что поворот такого куба как жесткого целого против часовой стрелки вокруг точки *O* на угол 0,5 γ_{yx} не меняет его деформированного состояния, которое теперь будет характеризоваться равными углами 1/2 γ_{yx} = 1/2 γ_{xy}. При наличии сдвигов в плоскостях *yz* и *zx* можно повторить приведенные рассуждения и получить, таким образом, шесть компонентов деформаций сдвига, которые совместно с тремя компонентами линейных деформаций образуют тензор деформаций T_ε. Тензор деформаций имеет вид:

$$T_\varepsilon = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x & 0{,}5\gamma_{yx} & 0{,}5\gamma_{zx} \\ 0{,}5\gamma_{xy} & \varepsilon_y & 0{,}5\gamma_{zy} \\ 0{,}5\gamma_{xz} & 0{,}5\gamma_{yz} & \varepsilon_z \end{Bmatrix},$$

причем $\gamma_{xy} = \gamma_{yx}$, $\gamma_{yz} = \gamma_{zy}$, $\gamma_{zx} = \gamma_{xz}$.



а *б*

Рис. 21

Анализ деформированного состояния показывает, что оно обладает свойствами, аналогичными свойствам напряженного состояния. В каждой точке деформированного сплошного тела имеются три взаимно перпендикулярные направления, сдвиги между которыми равны нулю.

Прямые, проведенные из данной точки по этим направлениям, называются *главными осями деформированного состояния в этой точке.* Линейные деформации по направлению главных осей 1, 2, 3 называются *главными деформациями* и обозначаются ε_1, ε_2 и ε_3. Сумма линейных деформаций в трех взаимно перпендикулярных направлениях инвариантна, т.е.:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \text{const}\,.$$

Сравнивая деформированное состояние с напряженным, можно сказать, что аналогом нормального напряжения является линейная деформация, а аналогом касательного напряжения – половина угла сдвига в соответствующей плоскости. Полученные ранее формулы (3.3)–(3.8) после замены нормальных напряжений на соответствующие линейные деформации и касательных напряжений на соответствующие половинки углов сдвига могут быть использованы для анализа деформированного состояния.

4. СВЯЗЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ ПРИ СЛОЖНОМ НАПРЯЖЕННОМ СОСТОЯНИИ. ЭНЕРГИЯ УПРУГОЙ ДЕФОРМАЦИИ

4.1. Закон Гука для чистого сдвига

Опытным путем установлена линейная зависимость относительного сдвига (угла сдвига) от касательного напряжения:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \tag{4.1}$$

где G – модуль сдвига (модуль упругости второго рода). Он характеризует способность материала сопротивляться деформации сдвига. Для материала, находящегося в упругом состоянии, установлена связь между E, G и μ:

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \tag{4.2}$$

4.2. Закон Гука для трехосного напряженного состояния, заданного главными напряжениями

Используя принцип независимости действия сил, объемное напряженное состояние можно представить как сумму трех одноосных напряженных состояний A, B и C (рис. 22).

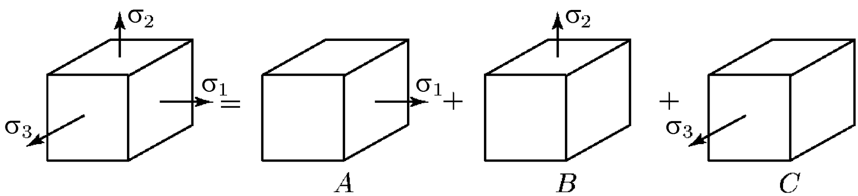


Рис. 7

Запишем деформации для всех трех случаев:

$$\text{для } A\text{:}\quad \varepsilon_1^A = \frac{\sigma_1}{E},\quad \varepsilon_2^A = \varepsilon_3^A = -\mu\frac{\sigma_1}{E};$$

$$\text{для } B:\ \ \varepsilon_1^B = \varepsilon_3^B = -\mu\frac{\sigma_2}{E},\ \ \varepsilon_2^B = \frac{\sigma_2}{E};$$

$$\text{для } C:\ \ \varepsilon_1^C = \varepsilon_2^C = -\mu\frac{\sigma_3}{E},\ \ \varepsilon_3^C = \frac{\sigma_3}{E}.$$

Тогда при одновременном действии трех главных напряжений главные деформации будут равны:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^A + \varepsilon_1^B + \varepsilon_1^C;\ \ \varepsilon_2 = \varepsilon_2^A + \varepsilon_2^B + \varepsilon_2^C;\ \ \varepsilon_3 = \varepsilon_3^A + \varepsilon_3^B + \varepsilon_3^C$$

или

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)\right]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right]. \end{aligned} \qquad (4.3)$$

4.3. Обобщенный закон Гука

В случае, когда напряженное состояние задано шестью компонентами напряжений, его можно представить как сумму напряженных состояний A и B (рис. 23). В состоянии A элементарный куб испытывает только линейные деформации, так как грани куба свободны от касательных напряжений. Напряжения σ_x, σ_y, σ_z в состоянии A являются главными и тогда, учитывая (4.3), можно записать деформации в направлении осей x, y и z:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right]; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right]; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right]. \end{aligned} \qquad (4.4)$$

В состоянии B элементарный куб испытывает только деформации сдвига, так как касательные напряжения не могут вызвать удлинения ребер куба в направлении осей x, y и z. В соответствии с законом Гука для чистого сдвига (4.1) имеем

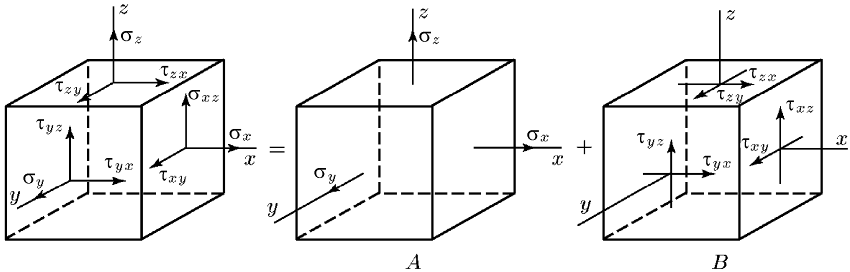


Рис. 23

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \tag{4.5}$$

Совокупность шести уравнений (4.4) и (4.5) выражает обобщенный закон Гука для трехосного напряженного состояния в общем случае.

4.4. Объемная деформация

Пусть ребра элементарного куба до деформации имели длину, равную единице. После приложения внешней нагрузки вдоль ребер стали действовать главные напряжения, которые вызвали относительные удлинения ребер, равные ε_1, ε_2 и ε_3. Учитывая начальную длину ребер, можно записать, что удлинения ребер соответственно равны ε_1, ε_2 и ε_3. Новый объем куба V_K будет равен:

$$V_K = (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)(1+\varepsilon_3).$$

Из-за малости ε_1, ε_2 и ε_3 по сравнению с единицей пренебрегаем их произведениями и получаем

$$V_K \approx 1+\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3.$$

Начальный объем куба $V_0 = 1$. Тогда относительное изменение объема ε_V будет равно:

$$\varepsilon_V = \frac{V_K - V_0}{V_0} = \varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3. \tag{4.6}$$

Подставим формулы (4.3) в выражение (4.6) и получим:

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\,. \qquad (4.7)$$

Учитывая инвариантность суммы нормальных напряжений для заданного напряженного состояния, можно записать:

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\,. \qquad (4.8)$$

4.5. Удельная потенциальная энергия упругой деформации

При статическом нагружении считается, что работа внешних сил полностью (без потерь) переходит в потенциальную энергию упругой деформации. *Удельная потенциальная энергия определяется путем деления потенциальной энергии, накопленной нагруженным телом, на его объем.*

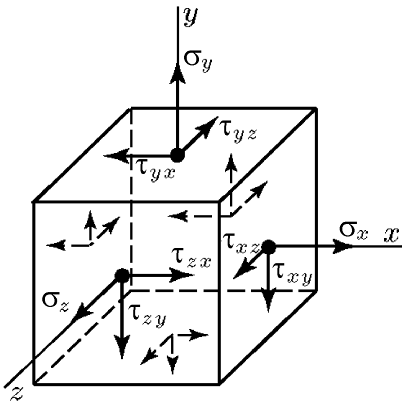


Рис. 24

Определим потенциальную энергию деформации, накопленную в элементарном объеме $dx\,dy\,dz$ в случае трехосного напряженного состояния (рис. 24). Нормальная сила $\sigma_x\,dy\,dz$ совершает работу на перемещении $\varepsilon_x\,dx$. Так как сила меняется пропорционально смещению (закон Гука), то ее работа равна:

$$0{,}5\,\sigma_x\,\varepsilon_x\,dx\,dy\,dz\,.$$

Аналогичные выражения дают и остальные нормальные силы. Касательная сила $\tau_{yx}\,dx\,dz$ на перемещении $\gamma_{yx}\,dy$ также меняется пропорционально смещению (закон Гука для чистого сдвига) и совершает работу

$$0{,}5\,\tau_{yx}\,dx\,dz\,\gamma_{yx}\,dy\,.$$

Выражения для остальных слагаемых потенциальной энергии упругой деформации получаются простой перестановкой индексов.

В итоге потенциальная энергия (dU), накопленная элементарным объемом, будет равна:

$$dU = 0{,}5\,dx\,dy\,dz\,(\sigma_x\varepsilon_x + \sigma_y\varepsilon_y + \sigma_z\varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{xz})\,.$$

Разделим обе части равенства на элементарный объем и выразим деформации через напряжения по формулам (4.4)–(4.5).

Получим выражение для удельной потенциальной энергии a в виде:

$$a = \frac{1}{2E}\left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x)\right] + \\ + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2), \qquad (4.9)$$

или в главных напряжениях:

$$a = \frac{1}{2E}\left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)\right]. \qquad (4.10)$$

Очевидно, что потенциальная энергия во всем объеме тела будет равна:

$$U = \int\limits_V a\,dV.$$

Представим теперь напряженное состояние, заданное главными напряжениями, как сумму двух напряженных состояний (рис. 25), где $\sigma_{ср} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, $\sigma_1' = \sigma_1 - \sigma_{ср}$, $\sigma_2' = \sigma_2 - \sigma_{ср}$ и $\sigma_3' = \sigma_3 - \sigma_{ср}$.

Для трехосного растяжения элементарного куба под действием напряжений $\sigma_{ср}$ характерно сохранение формы. Изменение объема согласно (4.7) $\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}3\sigma_{ср}$, или

$$\varepsilon_V = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)\,.$$

Накопленная удельная потенциальная энергия, связанная с изменением объема $(a_{об})$ согласно (4.10), будет равна:

$$a_{об} = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2. \qquad (4.11)$$

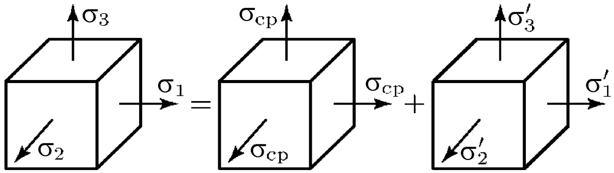


Рис. 25

Для второго напряженного состояния (второе слагаемое) объем не меняется. Вся деформация, а следовательно, и накопленная потенциальная энергия связаны с изменением формы $(a_{ф})$. Эта энергия находится путем вычитания $a_{об}$ из a, т. е. выражения (4.11) из (4.10). После преобразования получим:

$$a_{ф} = \frac{1+\mu}{3E}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1\right),$$

или

$$a_{ф} = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]. \qquad (4.12)$$

Эта энергия называется *удельный потенциальной энергией изменения формы* (или *формоизменения*).

5. ТЕОРИИ ПРОЧНОСТИ

Для расчета на прочность в условиях сложного напряженного состояния, строго говоря, необходимо было бы иметь диаграммы испытаний для любой комбинации главных напряжений, характеризующих напряженное состояние в точке. Однако понятно, что практически невозможно реализовать экспериментально бесчисленное множество напряженных состояний. Поэтому необходимо найти такой прием, который позволил бы по экспериментальным данным, полученным при растяжении или сжатии, проводить оценку прочности в условиях любого напряженного состояния.

Предварительно введем понятие об эквивалентном напряжении. *Эквивалентное напряжение* $\sigma_{\text{экв}}$ *– такое напряжение, которое следует создать в растянутом или сжатом образце, чтобы его напряженное состояние было равноопасно с заданным.*

Понятно, что в расчетах на прочность $\sigma_{\text{экв}}$ должно быть меньше допускаемого напряжения, которое определяется экспериментально при растяжении или сжатии. Задача заключается в том, как выразить $\sigma_{\text{экв}}$ через σ_1, σ_2 и σ_3. Для этого рассмотрим несколько гипотез, которые легли в основу технических теорий прочности.

5.1. Теория максимального нормального напряжения (первая теория прочности)

В основе этой теории лежит предположение о том, что два напряженных состояния будут равноопасны (эквивалентны), если у них равны максимальные нормальные напряжения, т.е.

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{экв}} = |\sigma_3|, \text{ где } \sigma_3 < 0. \tag{5.1}$$

Условие прочности по этой теории имеет вид:

$$\sigma_1 \le [\sigma]_P, \quad |\sigma_3| \le [\sigma]_C. \tag{5.2}$$

В практических расчетах первая теория прочности в настоящее время почти не применяется. Она дает совпадение расчета с экспериментом при растяжении хрупких материалов, когда σ_1 по абсолютной величине значительно больше других напряжений.

5.2. Теория максимальной линейной деформации (вторая теория прочности)

Согласно этой теории два напряженных состояния равноопасны, если у них равны максимальные относительные удлинения.

Для одноосного напряженного состояния максимальное относительное удлинение

$$\varepsilon_1^{\text{ОН}} = \frac{\sigma_{\text{экв}}}{E}.$$

Для трехосного напряженного состояния максимальное относительное удлинение:

$$\varepsilon_1^{\text{ТН}} = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right].$$

Следовательно,

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3). \qquad (5.3)$$

Условие прочности по этой теории имеет вид:

$$\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \le [\sigma]_P. \qquad (5.4)$$

Эта теория находится в противоречии с экспериментальными данными для пластичных материалов. В настоящее время практически не применяется.

5.3. Теория максимальных касательных напряжений (третья теория прочности)

В основе третьей теории лежат известные данные о том, что пластическая деформация реализуется за счет сдвига под действием касательных напряжений. Поэтому естественно принять в качестве критерия перехода из упругого состояния в пластическое наибольшее касательное напряжение в точке.

Согласно (3.9) $\tau_{\max} = 0{,}5(\sigma_1 - \sigma_3)$.

Для одноосного напряженного состояния максимальное касательное напряжение $\tau_{\max}^{\text{ОН}}$ равно:

$$\tau_{\max}^{\text{ОН}} = 0{,}5\sigma_{\text{экв}}.$$

Следовательно,

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3, \tag{5.5}$$

так как два напряженных состояния будут равноопасны, если у них максимальные касательные напряжения будут равны. Условие прочности по этой теории имеет вид:

$$\sigma_1 - \sigma_3 \le [\sigma]. \tag{5.6}$$

Эта теория применяется для пластичных материалов. Для хрупких материалов она не применима.

5.4. Энергетическая теория прочности (четвертая теория прочности)

В соответствии с четвертой теорией два напряженных состояния равноопасны, если их удельные потенциальные энергии изменения формы равны.

Для одноосного напряженного состояния эта энергия $a_{\Phi}^{\text{ОН}}$ согласно (4.12) равна:

$$a_{\Phi}^{\text{ОН}} = \frac{1+\mu}{6E}(2\sigma_{\text{экв}}^2) = \frac{1+\mu}{3E}\sigma_{\text{экв}}^2,$$

а для трехосного

$$a_{\Phi}^{\text{ТН}} = \frac{1+\mu}{6E}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right].$$

Поэтому эквивалентное напряжение будет равно:

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \tag{5.7}$$

Условие прочности по четвертой теории имеет вид:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \le [\sigma]. \tag{5.8}$$

Эта теория широко используется при расчете конструкций из пластичных материалов, одинаково сопротивляющихся растяжению и сжатию. Для хрупких материалов она не пригодна.

5.5. Теория Мора

Теория прочности Мора не содержит критериальных гипотез и основана в первую очередь на логической систематике экспериментальных результатов. Ее основное допущение заключается в том, что главное напряжение σ_2 не оказывает влияния на прочность. Для получения выражения для $\sigma_{\text{экв}}$ строятся круги Мора для предельных напряженных состояний, т.е. состояний, при которых начинается пластическое деформирование или разрушение. Круги для одноосного сжатия и одноосного растяжения строятся достаточно достоверно, так как одноосное растяжение и одноосное сжатие легко реализуются экспериментально. К этим кругам проводится общая касательная, которая в некотором приближении рассматривается как огибающая предельных кругов Мора (диаграмм для предельных напряженных состояний). Предельные круги Мора для любого напряженного состояния не должны выходить за огибающую. Опуская дальнейшие геометрические построения, дадим окончательный результат для эквивалентного напряжения:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - k\,\sigma_3\,, \qquad (5.9)$$

где $k = \dfrac{\sigma_{\text{тр}}}{\sigma_{\text{тс}}}$ – для пластичных материалов.

Для хрупких материалов отношение $\dfrac{\sigma_{\text{тр}}}{\sigma_{\text{тс}}}$ заменяется на $\dfrac{\sigma_{\text{вр}}}{\sigma_{\text{вс}}}$. Условие прочности запишется в виде:

$$\sigma_1 - k\,\sigma_3 \le [\sigma]_p\,. \qquad (5.10)$$

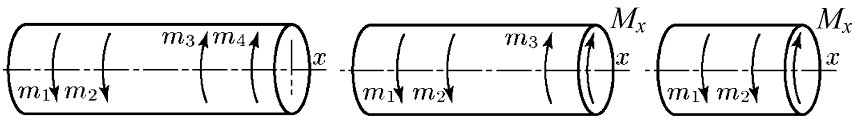
Наилучшие результаты эта теория дает для случая, когда $\sigma_1 > 0$, а $\sigma_3 < 0$. Это обстоятельство существенно, так как при решении практических задач напряженное состояние такого рода встречается чаще других. Для многих пластичных материалов, у которых $\sigma_{\text{тр}} = \sigma_{\text{тс}}$, теория прочности Мора совпадает с теорией максимальных касательных напряжений.

6. КРУЧЕНИЕ ПРЯМОГО БРУСА

Кручение – вид деформации, характеризующийся взаимным поворотом поперечных сечений бруса под влиянием моментов (пар сил), действующих в этих сечениях.

6.1. Внутренние силовые факторы при кручении

Рассмотрим брус круглого поперечного сечения, нагруженный моментами m_1, m_2, m_3, m_4, плоскость действия которых перпендикулярна оси бруса (рис. 26, *а*). Брус, испытывающий кручение, принято называть *валом.*



а *б* *в*

Рис. 26

Брус находится в равновесии, и, следовательно, сумма моментов относительно оси *x* должна быть равна нулю:

$$\sum mom_x = 0, \text{ т.е. } m_1 + m_2 - m_3 - m_4 = 0. \tag{6.1}$$

Рассечем вал плоскостью, перпендикулярной его оси так, что секущая плоскость пройдет между плоскостями действия моментов m_3 и m_4. Мысленно отбросим правую часть вала и рассмотрим равновесие оставшейся части (рис. 26, *б*). Равновесие будет возможно только в случае возникновения в плоскости сечения внутреннего крутящего момента M_x. Условие равновесия левой части вала запишется в виде:

$$m_1 + m_2 - m_3 - M_x = 0. \tag{6.2}$$

Из уравнений (6.1) и (6.2) определяется значение $M_x = m_4$. Результат получился со знаком «плюс». Следовательно, угадано направление действия момента M_x.

Пусть секущая плоскость проходит теперь между плоскостями действия моментов m_2 и m_3.

Вновь отбросим правую часть и рассмотрим равновесие оставшейся части (рис. 26, *в*). Левая часть вала будет в равновесии, если

$$m_1 + m_2 - M_x = 0. \qquad (6.3)$$

Из уравнений (6.1) и (6.3) находим:

$$M_x = m_3 + m_4.$$

Обобщая полученные результаты, можно сформулировать правило для определения величины и направления момента M_x: *внутренний силовой фактор крутящий момент* M_x *равен алгебраической сумме всех моментов, взятых с одной стороны от сечения.* В соответствии с принципом действия и противодействия крутящие моменты, действующие в одном и том же сечении, принадлежащем разным частям вала, будут равны и противоположно направлены. Момент M_x считается положительным, если его вектор совпадает по направлению с внешней нормалью к поперечному сечению.

6.2. Определение деформаций и напряжений при кручении бруса круглого поперечного сечения

Исходные положения. Напряженное состояние. При решении задачи принимаются следующие допущения.

1. Круглое сечение вала при кручении поворачивается как жесткое целое вокруг его оси.

2. Расстояния между поперечными сечениями остаются постоянными.

Решаем задачу в цилиндрической системе координат $x - r - \varphi$. Из принятых допущений следует, что деформации

$$\varepsilon_x = \varepsilon_r = \varepsilon_\varphi = 0, \quad \gamma_{xr} = \gamma_{r\varphi} = 0, \quad \gamma_{x\varphi} \neq 0$$

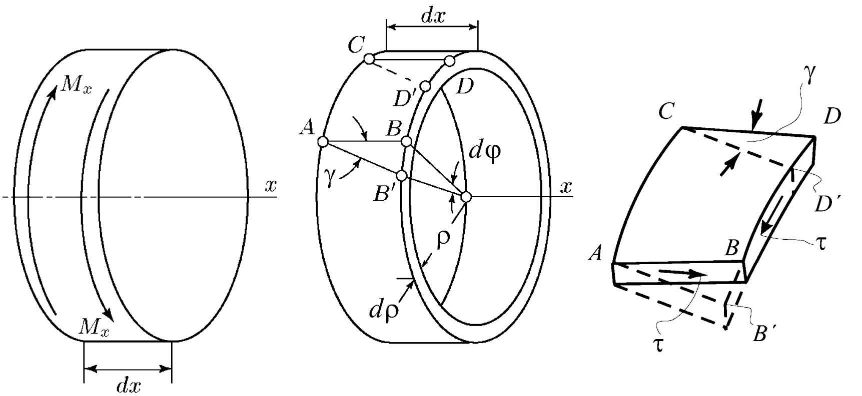
и связанные с ними напряжения

$$\sigma_x = \sigma_r = \sigma_\varphi = 0, \quad \tau_{xr} = \tau_{r\varphi} = 0, \quad \tau_{x\varphi} \neq 0.$$

Следовательно, в плоскости поперечного сечения, перпендикулярного оси вала x, возникают только касательные напряжения.

Такое напряженное состояние называется *чистым сдвигом*. В силу симметрии вала относительно оси x и характера нагружения касательное напряжение не зависит от координаты φ и является функцией только радиуса.

Угол закручивания. Касательные напряжения. Ниже для упрощения записи опустим индексы у касательного напряжения. Выделим из вала двумя бесконечно близкими поперечными сечениями элементарный цилиндр длиной dx (рис. 27, *а*). Из него двумя цилиндрическими поверхностями радиусами ρ и $\rho + d\rho$ вырежем элементарное кольцо (рис. 27, *б*) и рассмотрим его деформацию.



а *б* *в*

Рис. 27

Правое торцевое сечение кольца повернется относительно левого на угол $d\varphi$. Образующая цилиндра AB поворачивается при этом на угол γ и занимает положение AB'. Отрезок BB' равен, с одной стороны, $(\rho + d\rho)d\varphi \approx \rho d\varphi$ (как длина дуги), с другой – γdx. Прямоугольник $ABDC$ превратится в параллелограмм $AB'D'C$. Угол γ представляет собой угол сдвига части плоскости, связанной с дугой BD относительно части плоскости, связанной с дугой AC (рис. 27, *в*). Величина $\dfrac{d\varphi}{dx}$ обозначается через θ,

$$\frac{d\varphi}{dx} = \theta, \qquad (6.4)$$

и называется *относительным углом закручивания.*

Учитывая равенство

$$\rho d\varphi = \gamma dx$$

и отношение (6.4), получаем

$$\gamma = \rho\theta. \qquad (6.5)$$

По закону Гука для чистого сдвига

$$\tau = G\gamma = G\rho\theta. \qquad (6.6)$$

Парные им напряжения возникают в продольных плоскостях, проходящих через ось вала (см. рис. 27, *в*).

Крутящий момент M_x создается элементарными силами τdF (рис. 28) и равен

$$M_x = \int_F \tau\rho dF,$$

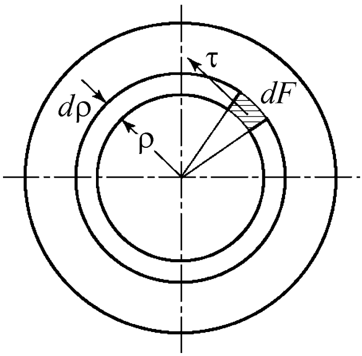


Рис. 28

или, учитывая выражение (6.6),

$$M_x = G\theta\int_F \rho^2 dF. \qquad (6.7)$$

Интеграл $\int_F \rho^2 dF$ носит название *полярного момента инерции сечения* и является его геометрической характеристикой. Обозначим полярный момент инерции через J_p. Для круглого сечения

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} \approx 0{,}1D^4, \qquad (6.8)$$

для кольцевого сечения

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \qquad (6.9)$$

Представим выражение (6.7) в виде $M_x = GJ_p\theta$, откуда:

$$\theta = \frac{M_x}{GJ_p}. \qquad (6.10)$$

Произведение GJ_p называют *жесткостью круглого поперечного сечения вала при кручении.*

Из (6.4) и (6.10) получаем

$$d\varphi = \frac{M_x}{GJ_p} dx\,, \tag{6.11}$$

откуда

$$\varphi = \int_0^l \frac{M_x}{GJ_p} dx\,, \tag{6.12}$$

где l – расстояние между сечениями, для которых определяется взаимный угол поворота φ.

Если M_x по длине вала не изменяется и жесткость GJ_p постоянна, то

$$\varphi = \frac{M_x l}{GJ_p}\,. \tag{6.13}$$

Выражения (6.10), (6.12), (6.13) используются в расчетах на жесткость при кручении вала. Для расчета на прочность необходимо получить зависимость для касательного напряжения от крутящего момента и положения точки на плоскости поперечного сечения, для которой ведется расчет напряжения.

Из выражений (6.6) и (6.10) получим

$$\tau = \frac{M_x}{J_p}\rho\,. \tag{6.14}$$

Из (6.14) следует, что касательные напряжения распределены в поперечном сечении вала по линейному закону и имеют максимальное значение в точках, наиболее удаленных от оси вала (рис. 29):

$$\tau_{max} = \frac{M_x}{J_p}\rho_{max}\,. \tag{6.15}$$

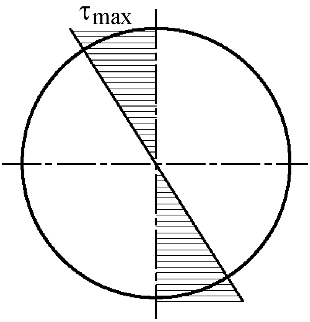


Рис. 29

Отношение $\dfrac{J_p}{\rho_{max}} = W_p$ называется *полярным моментом сопротивления.*

Выражение (6.15) можно переписать в виде

$$\tau_{\max} = \frac{M_x}{W_p}. \qquad (6.16)$$

Заметим, что для круглого сечения

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0{,}2D^3, \qquad (6.17)$$

а для кольцевого

$$W_p = \frac{\pi D^3}{16}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right) \approx 0{,}2D^3\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right). \qquad (6.18)$$

6.3. Определение прочностных характеристик при кручении

Для проведения расчетов на прочность при кручении, как и в случае растяжения, необходимо знать, в первую очередь, предельные напряжения. Эти напряжения определяются из испытаний на кручение цилиндрических или трубчатых образцов. Ограничимся рассмотрением методики экспериментального определения только этих напряжений. Размеры образцов, требования к испытательному оборудованию и к условиям проведения испытаний стандартизованы и отражены в специальных ГОСТах. Испытания сопровождаются построением диаграмм зависимости угла закручивания φ от крутящего момента M. Типичная диаграмма $M - \varphi$ для малоуглеродной стали представлена на рис. 30.

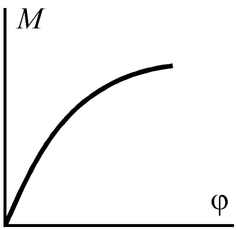


Рис. 30

Испытания показывают, что разрушение пластичных материалов происходит после значительного пластического деформирования. При этом поверхность излома перпендикулярна оси образца, что свидетельствует о том, что за разрушение ответственны касательные напряжения, так как нормальные напряжения на этой поверхности равны нулю.

При обработке диаграммы $M - \varphi$ определяется так называемый условный предел текучести при кручении $\tau_{0,3}$. *Условным пределом* *текучести при кручении* $\tau_{0,3}$ *называется максимальное касательное напряжение, при котором образец получает остаточный сдвиг* $\gamma_{ост}$, *равный 0,3 % (0,003 рад).*

Для точек окружности диаметром D согласно выражению (6.5) имеем

$$\gamma_{ост} = \frac{D}{2}\theta_{ост}, \quad \text{или} \quad \theta_{ост} = \frac{2\gamma_{ост}}{D}.$$

Для определения $\tau_{0,3}$ при кручении фиксируется угол взаимного поворота двух сечений, расстояние между которыми равно l_0. На длине l_0 относительный угол закручивания θ постоянен, и, следовательно,

$$\varphi_{ост} = \frac{2\gamma_{ост}\, l_0}{D}, \quad \text{или} \quad \varphi_{ост} = \frac{6\, l_0}{D}10^{-3}.$$

Экспериментально устанавливают величину крутящего момента $M_{0,3}$, при котором остаточный угол закручивания образца равен $\frac{6\, l_0}{D}10^{-3}$.

Условный предел текучести $\tau_{0,3}$ определяется по формуле (6.16) и равен:

$$\tau_{0,3} = \frac{M_{0,3}}{W_p}.$$

Опыты с образцами из хрупкого материала свидетельствуют о том, что разрушение происходит без существенных пластических деформаций. Разрушение реализуется путем отрыва по сложной винтовой поверхности, наклоненной к оси образца под углом, приблизительно равным $\pi/4$. Для напряженного состояния чистого сдвига характерно то, что в плоскостях, наклоненных к плоскости действия максимальных касательных напряжений под углом $\pm\pi/4$, действуют только растягивающие или сжимающие напряжения, равные τ_{max} (рис. 31). Очевидно, что разрушение хрупких материалов происходит под действием растягивающего главного напряжения $\sigma_1 = \tau_{max}$.

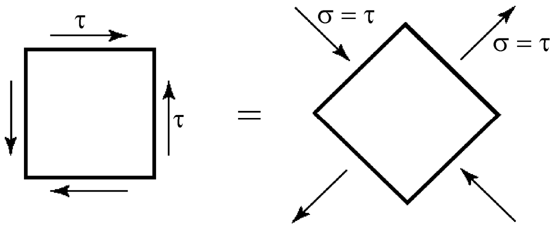


Рис. 31

При испытании хрупких материалов распределение касательных напряжений в момент разрушения удовлетворительно описывается формулой (6.14). Максимальное касательное напряжение в момент разрушения принимается в качестве характеристики прочности хрупкого материала при кручении, обозначается $\tau_{\text{пч}}$ и называется *условным пределом прочности при кручении.* Согласно (6.16), $\tau_{\text{пч}}$ определяется отношением

$$\tau_{\text{пч}} = \frac{M_{\text{к}}}{W_p},$$

где $M_{\text{к}}$ – крутящий момент при разрушении образца.

6.4. Расчет валов на прочность и жесткость

Появление значительных пластических деформаций недопустимо в конструкции и, следовательно, в качестве предельного напряжения для пластичных материалов необходимо принять условный предел текучести $\tau_{0,3}$. *Допускаемое напряжение* для пластичных материалов [τ] определяется как отношение

$$[\tau] = \frac{\tau_{0,3}}{n_{\text{т}}},$$

где $n_{\text{т}}$ – коэффициент запаса прочности по условному пределу текучести при кручении.

Для хрупких материалов в качестве предельного напряжения естественно принять условный предел прочности $\tau_{\text{пч}}$. *Допускаемое напряжение* в этом случае определяется отношением

$$[\tau]=\frac{\tau_{пч}}{n_{пч}},$$

где $n_{пч}$ – коэффициент запаса прочности по условному пределу прочности при кручении.

Коэффициенты $n_т$ и $n_{пч}$ выбираются с учетом характера работы конструкции, серьезности последствий выхода ее из строя и других условий. Условие прочности требует, чтобы наибольшее касательное напряжение в конструкции не превышало допускаемого напряжения, т. е.

$$\tau_{max}=\frac{M_x}{W_p}\le[\tau]. \tag{6.19}$$

В ряде случаев от конструкции требуется, чтобы она обладала определенной жесткостью, т. е. деформации не должны превышать величины, определенной техническими условиями.

Условие жесткости записывается либо в виде

$$\varphi\le[\varphi], \tag{6.20}$$

либо в виде

$$\theta_{max}\le[\theta], \tag{6.21}$$

где $[\varphi]$ и $[\theta]$ – допускаемые абсолютный и относительный углы закручивания соответственно; θ и φ – углы, рассчитанные, соответственно, по формулам (6.10) и (6.12).

Для того чтобы вал одновременно удовлетворял обоим требованиям (на прочность и жесткость), из двух найденных значений диаметра выбирается большее значение.

Пример 4. Цилиндрический вал, геометрические размеры которого представлены на рис. 32, *а*, жестко защемлен по торцевым сечениям A и D и нагружен моментами m_1 и m_2, действующими в сечениях B и C соответственно. На участке AB вал в поперечном сечении представляет кольцо с внешним и внутренним диаметрами D и d соответственно.

Задано: $m_1 = m = 500$ Нм; $m_2 = 2m = 1000$ Нм; $[\tau] = 120$ МПа; $l = 0{,}5$ м; $G = 8\cdot10^4$ МПа; $\frac{d}{D}=0{,}84$; $[\theta]=6\cdot10^{-3}$ рад/м.

Определить необходимый размер D, удовлетворяющий условиям прочности и жесткости.

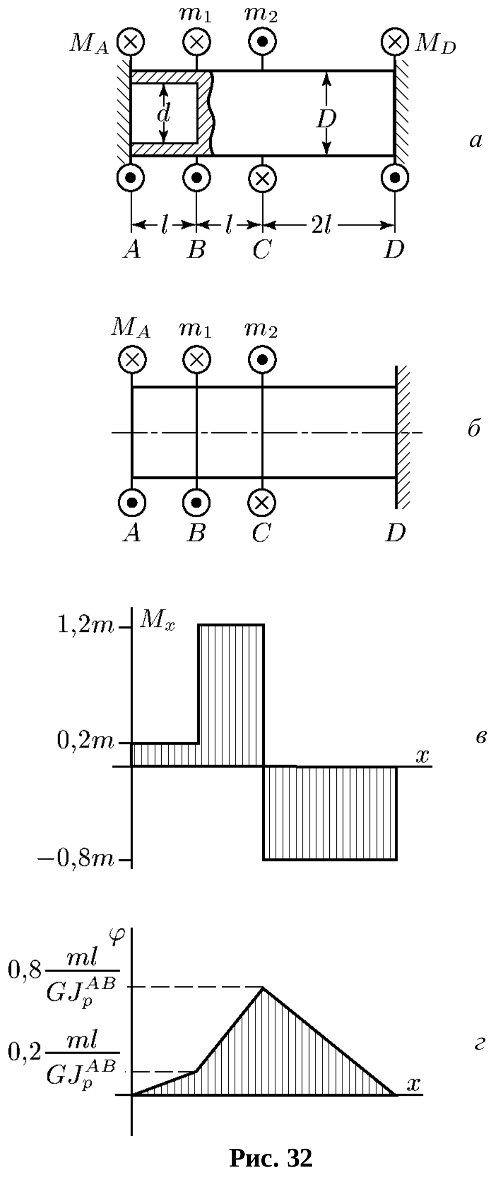


Рис. 32

Решение. Очевидно, что в опорах A и D под действием приложенной нагрузки возникают реактивные моменты M_A и M_D. Из уравнений статики можем записать лишь одно – уравнение моментов относительно оси x. Таким образом, число неизвестных превышает число возможных уравнений статики, т.е. система обладает первой степенью статической неопределимости.

Выбираем эквивалентную статически определимую систему. Для этого связь, налагаемую заделкой A, препятствующую повороту сечения A, отбрасываем и заменяем моментом M_A, приложенным по предполагаемому направлению его действия (рис. 32, *б*). Используя принцип независимости действия силовых факторов, представим угол поворота сечения A в следующем виде:

$$\varphi_A(M_A, m_1, m_2) = \varphi_A(M_A) + \varphi_A(m_1) + \varphi_A(m_2).$$

Каждое из трех слагаемых представляет поворот сечения A под действием соответствующего крутящего момента. Сечение A неподвижно и, следовательно,

$$\varphi_A(M_A) + \varphi_A(m_1) + \varphi_A(m_2) = 0.$$

Поворот сечения A под действием момента M_A равен:

$$\varphi_A(M_A) = \frac{M_A l}{GJ_p^{AB}} + \frac{M_A 3l}{GJ_p^{BD}}. \qquad (6.22)$$

Первое слагаемое в выражении (6.22) представляет поворот сечения A относительно B согласно (6.13).

Второе слагаемое – поворот сечения B относительно сечения D.

$$\varphi_A(m_1) = \frac{m_1 3l}{GJ_p^{BD}}; \qquad (6.23)$$

$$\varphi_A(m_2) = -\frac{m_2 2l}{GJ_p^{CD}}. \qquad (6.24)$$

Суммируем (6.22), (6.23) и (6.24) и учтем, что $m_1 = m$, а $m_2 = 2m$. Получаем:

$$\frac{M_A l}{GJ_p^{AB}} + \frac{M_A 3l}{GJ_p^{BD}} + \frac{m3l}{GJ_p^{BD}} - \frac{4ml}{GJ_p^{CD}} = 0. \qquad (6.25)$$

Полярный момент инерции сечения на участке $AB\,(J_p^{AB})$ согласно (6.9) равен:

$$J_p^{AB} = \frac{\pi D^4}{32}\left(1 - \frac{d^4}{D^4}\right)$$

или, учитывая, что $\left(\frac{d^4}{D^4}\right) = 0{,}5$,

$$J_p^{AB} = \frac{\pi D^4}{64}.$$

Полярные моменты инерции сечений J_p^{BD} и J_p^{CD} согласно (6.8) равны:

$$J_p^{BD} = J_p^{CD} = \frac{\pi}{32} D^4.$$

Подставляя J_p^{AB}, J_p^{BD}, J_p^{CD} в уравнение (6.25), получаем:

$$2M_A + 3M_A + 3m - 4m = 0,$$

или $M_A = 0{,}2m$.

Ответ получен со знаком «плюс», что подтверждает предположение о направлении действия момента M_A.

Построение эпюры крутящих моментов M_x. Мысленно рассекая вал на участках *AB*, *BC* и *CD*, отбрасывая каждый раз левую часть и используя метод приведения (правило для определения внутреннего силового фактора M_x), находим:

участок *AB:* $M_x = M_A = 0{,}2m$;

участок *BC:* $M_x = M_A + m_1 = 0{,}2m + m = 1{,}2m$;

участок *CD:* $M_x = M_A + m_1 - m_2 = 0{,}2m + m - 2m = -\,0{,}8m$.

Эпюра M_x представлена на рис. 32, *в*.

Построение эпюры углов поворота. Крутящие моменты в пределах участков *AB*, *BC* и *CD* постоянны. Следовательно, согласно (6.13) имеем линейную зависимость $\varphi(x)$.

На участке AB: $\varphi_{\frac{B}{A}} = \dfrac{M_x^{AB} l}{GJ_p^{AB}} = \dfrac{0{,}2ml}{GJ_p^{AB}}$, где $\varphi_{\frac{B}{A}}$ – угол поворота сечения B относительно неподвижного сечения A. На участке BC:

$$\varphi_{\frac{C}{B}} = \frac{M_x^{BC} l}{GJ_p^{BC}} = \frac{1{,}2ml}{GJ_p^{BC}};$$

$$J_p^{BC} = 2J_p^{AB}, \quad \varphi_{\frac{C}{B}} = \frac{0{,}6ml}{GJ_p^{AB}};$$

$$\varphi_{\frac{C}{A}} = \varphi_{\frac{C}{B}} + \varphi_{\frac{B}{A}} = 0{,}8\frac{ml}{GJ_p^{AB}}.$$

На участке CD:

$$\varphi_{\frac{D}{C}} = \frac{M^{CD}}{GJ_p^{CD}} = -\frac{0{,}8m \cdot 2l}{GJ_p^{CD}};$$

$$J_p^{CD} = 2J_p^{AB}, \quad \varphi_{\frac{D}{C}} = -\frac{0{,}8ml}{GJ_p^{AB}};$$

$$\varphi_{\frac{D}{A}} = \varphi_{\frac{D}{C}} + \varphi_{\frac{C}{A}} = 0.$$

Эпюра $\varphi(x)$ представлена на рис. 32, *г*.

Расчет на прочность. Участок BC опаснее участка CD, так как $M_x^{BC} > M_x^{CD}$.

На участках AB и BC вал обладает различным полярным моментом сопротивления. Поэтому сравним максимальные касательные напряжения на этих участках.

На участке AB: $\max \tau_{AB} = \dfrac{M_x^{AB}}{W_p^{AB}}$; $W_p^{AB} = \dfrac{J_p^{AB}}{0{,}5D} = \dfrac{\pi D^3}{32}$;

$$\max \tau_{AB} = \frac{6{,}4m}{\pi D^3}.$$

На участке *BC*: $\max\tau_{BC} = \dfrac{M_x^{BC}}{W_p^{BC}}$; $W_p^{BC} = \dfrac{J_p^{BC}}{0{,}5D} = \dfrac{\pi D^3}{16}$;

$\max\tau_{BC} = \dfrac{19{,}2m}{\pi D^3}$.

Участок *BC* опаснее участка *AB*, так как $\max\tau_{BC} > \max\tau_{AB}$.

Расчет на прочность ведем по $\max\tau_{BC}$:

$$\max\tau_{BC} = \frac{19{,}2m}{\pi D^3} \le [\tau],$$

следовательно,

$$D^3 \ge \frac{19{,}2m}{\pi[\tau]} = \frac{19{,}2 \cdot 500}{\pi \cdot 120 \cdot 10^6}\,\text{м}^3 = 25{,}48 \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3,$$

$$D \ge \sqrt[3]{25{,}48 \cdot 10^{-6}} \approx 2{,}94 \cdot 10^{-2}\,\text{м} = 2{,}94\ \text{см}.$$

Расчет на жесткость. Из эпюры $\varphi(x)$ видно, что наибольший угол относительного закручивания ($\theta_{\max}$) на участке *BC*.

$$\theta_{\max} = \frac{\varphi_{\frac{C}{B}}}{l} = \frac{0{,}6m}{GJ_p^{AB}}; \quad J_p^{AB} = \frac{\pi D^4}{64}; \quad \theta_{\max} = \frac{0{,}6m \cdot 64}{G\pi D^4} = \frac{38{,}4m}{G\pi D^4}.$$

Условие жесткости будет удовлетворено, если $\theta_{\max} \le [\theta]$ или $[\theta] \ge \dfrac{38{,}4m}{G\pi D^4}$.

Следовательно,

$$D \ge \sqrt[4]{\frac{38{,}4m}{G\pi[\theta]}}\ [\text{м}],$$

или

$$D \ge \sqrt[4]{\frac{38{,}4 \cdot 500}{8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 6 \cdot 10^{-3}}} = 5{,}9 \cdot 10^{-2}\ [\text{м}].$$

Принимаем

$$D = 6\ \text{см}.$$

Из двух найденных значений для *D* выбираем большее, поэтому *D* = 6 см.

6.5. Брус прямоугольного поперечного сечения

Задача об определении напряжений и деформаций в брусе некруглого сечения не может быть решена методами СМ. Здесь гипотеза плоских сечений неприемлема. Как показывает опыт, при кручении бруса прямоугольного профиля поперечные сечения бруса искривляются. Для точного решения задачи необходимо гипотезу плоских сечений заменить в данном случае условием неразрывности деформаций, что приводит к значительному усложнению решения. Однако некоторые соображения относительно законов распределения напряжений в поперечных сечениях некруглой формы могут быть высказаны.

Прежде всего, можно установить, что касательные напряжения в точках контура поперечного сечения должны быть направлены по касательной к контуру. Действительно, положим, что в точке A (рис. 33) касательное напряжение τ будет направлено под некоторым углом к контуру. Тогда оно может быть разложено на две составляющие: по касательной к контуру (τ_t) и по нормали (τ_n). По закону парности касательных напряжений на поверхности вала должно возникнуть касательное напряжение $\tau'_n = \tau_n$. Но поверхность свободна от нагрузки и, следовательно, τ'_n, а с ней и τ_n должны быть равны нулю.

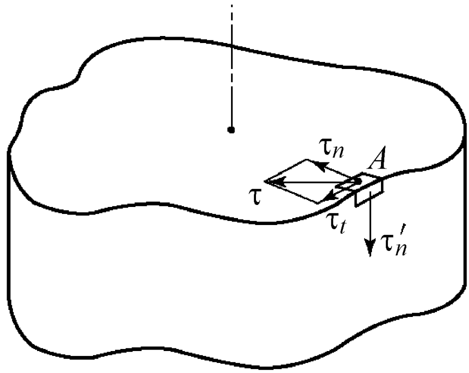


Рис. 33

Аналогично рассуждая, можно показать, что в углах прямоугольного поперечного сечения касательные напряжения равны нулю. Если допустить, что в угловой точке (рис. 34) возникло напряжение τ, то его можно разложить на две составляющие τ_1 и τ_2, направленные по сторонам прямоугольника. В этом случае по закону парности касательных напряжений получим на свободных поверхностях вала напряжения τ_1' и τ_2', что противоречит условиям нагружения. Следовательно, в угловых точках прямоугольного поперечного сечения бруса касательные напряжения отсутствуют.

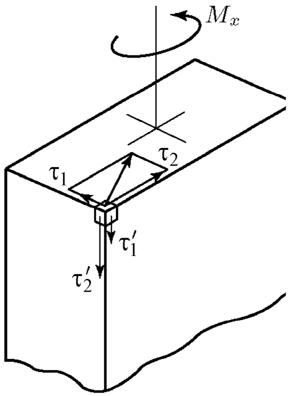


Рис. 34

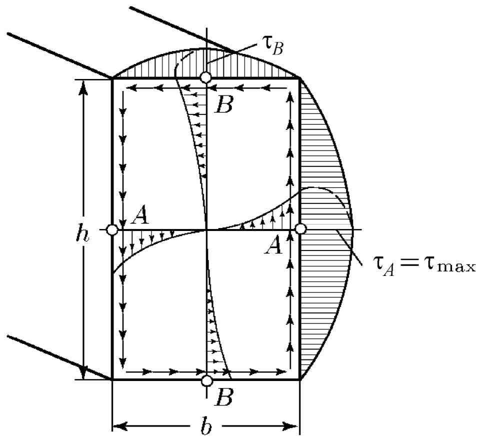


Рис. 35

На рис. 35 показана эпюра касательных напряжений, полученная методами теории упругости для бруса прямоугольного поперечного сечения. В его углах напряжения равны нулю, а наибольшие напряжения возникают в точках *A*, лежащих в серединах больших сторон, и определяются по формуле:

$$\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_x}{W_к}, \tag{6.26}$$

где $W_к = \alpha hb^2$ – момент сопротивления сечения при кручении. Касательные напряжения посередине коротких сторон (точки *B*) равны:

$$\tau_B = \eta\tau_{max} . \tag{6.27}$$

Угловое перемещение определяется по формуле:

$$\varphi = \frac{M_x l}{GJ_к} , \tag{6.28}$$

где $J_к = \beta h b^3$ – момент инерции сечения при кручении. Коэффициенты α, η и β зависят от отношения $\frac{h}{b}$. Численные значения этих коэффициентов приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\frac{h}{b}$	1	1,5	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,246	0,258	0,267	0,282	0,299	0,007	0,313	0,333
η	1,000	0,859	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742
β	0,141	0,196	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333

Формулы (6.26) и (6.28) могут рассматриваться как обобщающие. В случае круглого поперечного сечения $J_к = J_p$, а $W_к = W_p$.

7. ИЗГИБ ПРЯМОГО БРУСА

Изгиб – вид деформации, характеризующийся искривлением оси бруса.

7.1. Внутренние силовые факторы, возникающие при изгибе

Ограничимся рассмотрением изгиба брусьев, которые имеют, по крайней мере, одну плоскость симметрии, проходящую через ось бруса. Брусья, работающие на изгиб, называются *балками*.

Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения, нагруженную силами $P_1, ..., P_5$, плоскость действия (силовая плоскость) которых проходит через ось балки (ось x) и является для балки плоскостью симметрии (рис. 36, *а*). Рассечем балку плоскостью, перпендикулярной к оси x, так, чтобы она проходила между линиями действия сил P_2 и P_5. Через центр тяжести полученного сечения проведем оси y и z, параллельные сторонам прямоугольника.

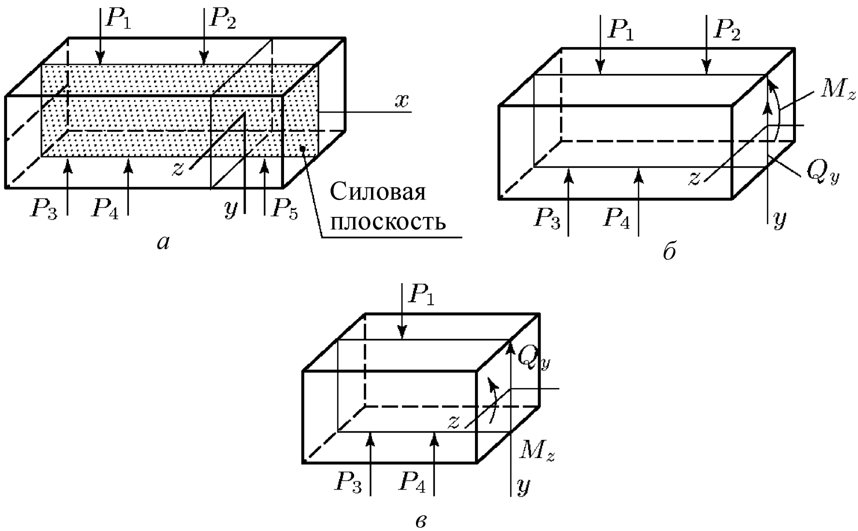


Рис. 36

Условие равновесия балки выражается уравнениями:

$$\sum Y = 0 \quad \text{или} \quad P_1 + P_2 = P_3 + P_4 + P_5\,; \qquad (7.1)$$

$$\sum mom_z = 0 \quad \text{или} \quad P_1a_1 + P_2a_2 - P_3a_3 - P_4a_4 + P_5a_5 = 0\,, \qquad (7.2)$$

где a_1, a_2, ..., a_5 – расстояния от линии действия силы, отмеченной соответствующим индексом, до оси *z*.

Мысленно отбросим часть балки справа от проведенного сечения и рассмотрим условие равновесия левой части (рис. 36, *б*). Видно, что действующие силы на оставшуюся часть балки не уравновешены. Следовательно, в поперечном сечении возникает поперечная сила Q_y. Делаем предположение, что она направлена так же, как и сила P_5, что вполне очевидно в нашем случае. Тогда ее величина определится из первого уравнения равновесия для оставшейся части балки:

$$P_1 + P_2 = P_3 + P_4 + Q_y\,.$$

Учитывая уравнение (7.1), находим, что

$$Q_y = P_5\,.$$

Получили ответ со знаком «плюс», что свидетельствует о верности предположения о направлении действия силы Q_y. Если бы изначально направили силу Q_y в противоположном направлении, результат получился бы со знаком «минус».

Для равновесия левой части балки необходимо, чтобы и сумма моментов от сил, приложенных к этой части относительно оси *z*, была равна нулю. Видно, что последнее условие будет удовлетворено, если предположить наличие в поперечном сечении внутреннего силового фактора – изгибающего момента M_z, направленного так же, как и момент от силы P_5.

В этом случае второе уравнение равновесия записывается в виде:

$$P_1a_1 + P_2a_2 - P_3a_3 - P_4a_4 + M_z = 0\,.$$

Учитывая уравнение (7.2), находим, что

$$M_z = P_5a_5\,.$$

И здесь получаем результат со знаком «плюс», что подтверждает предположение о направлении действия M_z.

Перенесем секущую плоскость вместе с координатными осями $y-z$ так, чтобы она проходила между линиями действия сил P_2 и P_4 (рис. 36, *в*).

Расстояния от линий действия сил до новой оси *z* станут равны a'_1, a'_2, ..., a'_5. Уравнение равновесия балки (7.1) сохраняется, а уравнение (7.2) примет вид:

$$P_1a'_1 - P_2a'_2 - P_3a'_3 - P_4a'_4 + P_5a'_5 = 0. \qquad (7.3)$$

Сила P_2 теперь находится справа от новой оси *z* и создает отрицательный момент. Если отбросить часть балки справа от сечения, то условие равновесия оставшейся части выразится уравнениями:

$$P_1 = P_3 + P_4 + Q_y,$$

$$P_1a'_1 - P_3a'_3 - P_4a'_4 + M_z = 0.$$

Учитывая уравнения (7.1) и (7.3), находим

$$Q_y = P_5 - P_2,$$

$$M_z = P_5a'_5 - P_2a'_2.$$

Обобщая полученные результаты, можно сформулировать правила для определения Q_y и M_z в поперечных сечениях балки при изгибе.

Поперечная сила Q_y равна сумме проекций на ось y в плоскости сечения всех внешних сил, взятых с одной стороны от сечения.

Изгибающий момент M_z равен сумме моментов относительно оси z всех сил, взятых с одной стороны от сечения.

Сформулированные правила выражают так называемый метод приведения. Все силы, действующие на отброшенную часть, переносим в рассматриваемое сечение, сохраняя их величины и направление.

Таким образом, поперечная сила Q_y является равнодействующей всех перенесенных сил. При переносе сил в новое сечение добавляем момент, который производит эта сила относительно оси *z* в этом сечении. Эти операции находятся в полном соответствии с правилами механики, так как не нарушают условие равновесия нагруженного тела.

Не следует забывать, что, отбросив правую часть балки, получили внутренние силовые факторы, действующие в сечении, принадлежащем левой части. Если отбросим левую часть, то получим Q_y и M_z для правой части балки.

В соответствии с принципом действия и противодействия внутренние силовые факторы Q_y и M_z, действующие в одном и том же сечении, принадлежащем разным частям балки, будут равны и противоположно направлены.

Определив величину и направление внутренних силовых факторов, можем построить эпюры для Q_y и M_z. Для этого нужно договориться о правиле определения знака для Q_y и M_z.

Если рассматриваем сечение, принадлежащее правой части балки (идем слева направо), то Q_y считается положительной, если направлена вверх, и отрицательной, если направлена вниз.

Изгибающий момент M_z считается положительным, если направлен по часовой стрелке, и отрицательным, если направлен в противоположную сторону.

Для сечения, принадлежащего левой части балки (идем справа налево), сформулированные выше правила читаются наоборот.

Эти правила иллюстрируются схемой, показанной на рис. 37.

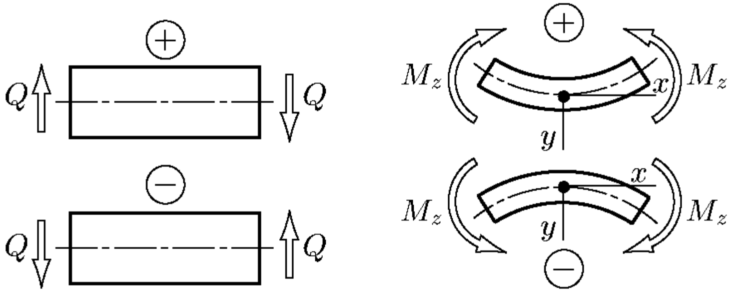


Рис. 37

Соблюдение этих правил приводит к тому, что ординаты в эпюре M_z откладываются на сжатом волокне, что дает возможность определить на различных участках балки, где находятся (сверху или снизу) растянутое и сжатое волокна.

При определении функции Q_y и M_z от x и построении их графиков (эпюр) можно пользоваться известными дифференциальными зависимостями:

$$\frac{dQ_y}{dx} = q\,, \quad \frac{dM_z}{dx} = Q_y\,,$$

где q – *интенсивность распределенной нагрузки,* т.е. сила, приходящаяся на единицу длины бруса. Эти зависимости получены Д.И. Журавским и носят его имя.

При изгибе рассматриваемой балки ее ось искривляется, но остается в силовой плоскости. По этой причине такой изгиб называют *плоским.* Изогнутую ось балки принято называть *упругой линией.*

Для реализации плоского изгиба достаточно, чтобы силовая плоскость совпадала с плоскостью симметрии, проходящей через ось балки.

В ряде частных случаев внутренний силовой фактор Q_y может отсутствовать на отдельных участках балки при ее изгибе.

Изгиб, при котором в поперечных сечениях балки возникает только изгибающий момент, а поперечная сила равна нулю, называется *чистым.* Если при изгибе в поперечных сечениях балки возникают оба внутренних силовых фактора (Q_y и M_z), то такой изгиб называется *поперечным.*

7.2. Кривизна изогнутой оси и напряжения в балке при чистом изгибе

Отвлекаясь от особенностей приложения внешних сил и условий закрепления балки, рассмотрим тот участок, где M_z = const и Q_y = 0, т. е. на границах этого участка действуют только моменты M_z (рис. 38, *а*).

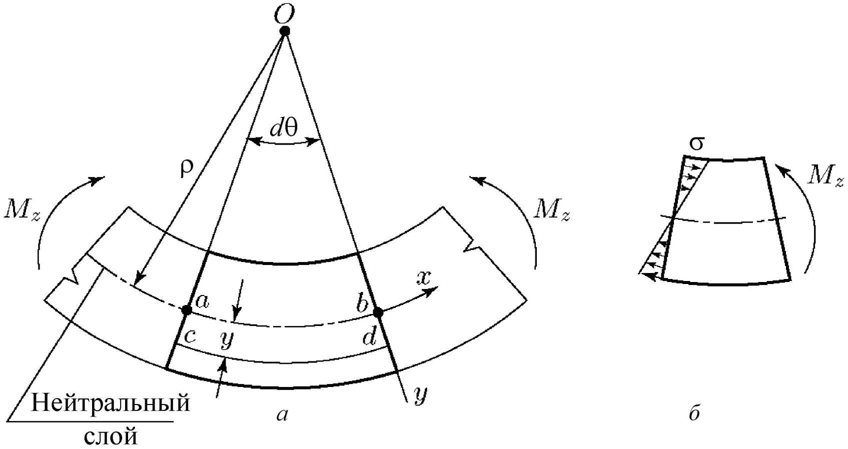


Рис. 38

Под действием моментов брус изогнется. Так как M_z постоянен по длине участка, то радиус кривизны на всем участке будет одним и тем же, т.е. ось балки принимает форму дуги окружности.

Для дальнейших рассуждений примем, что *при чистом изгибе поперечные сечения бруса плоские до деформации остаются плоскими и в процессе деформирования* (гипотеза плоских сечений) и что *продольные волокна не давят друг на друга.*

Рассмотрим два смежных сечения, отстоящих до деформации друг от друга на расстоянии dx. После изгиба эти сечения повернутся относительно друг друга на угол $d\theta$. Следы этих сечений представлены на рис. 38, *а* прямыми линиями, сходящимися в точке O (центр окружности).

При чистом изгибе нормальная сила $N = 0$. Поэтому

$$N = \int_F \sigma dF = 0, \tag{7.4}$$

и, следовательно, элементарные силы σdF должны быть внутренне уравновешены в поперечном сечении. Это означает, что часть слоев (в нашем случае верхних) испытывает сжимающие напряжения и укорачивается, а часть слоев (нижних) испытывает растягивающие напряжения и удлиняется. Очевидно, что между растянутыми и сжатыми слоями должен находиться слой (ab), в котором напряжения равны нулю. Радиус кривизны этого нейтрального слоя после изгиба отмечен ρ (см. рис. 38, *а*).

После изгиба длина нейтрального слоя не изменилась и, следовательно,

$$dx = \rho d\theta, \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx}.$$

Длина произвольного слоя $\cup cd$ после деформации станет равна:

$$\cup cd = (\rho + y)d\theta,$$

где y – расстояние между рассматриваемым и нейтральным слоем. Относительное удлинение волокна в слое cd равно:

$$\varepsilon = \frac{(\rho + y)d\theta - \rho d\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}. \tag{7.5}$$

Волокна при изгибе не давят друг на друга и, следовательно, испытывают одноосное растяжение или сжатие. По закону Гука *для одноосного напряженного состояния:*

$$\sigma = E\varepsilon = E\frac{y}{\rho}. \tag{7.6}$$

Согласно (7.6) напряжения в поперечном сечении распределяются по линейному закону (рис. 38, *б*). *Геометрическое место точек в сечении, для которых* σ = 0*, называется нейтральной линией.* Нейтральная линия перпендикулярна к плоскости изгиба (силовой плоскости). На рис. 38, *а* следы нейтральных линий отмечены точками *a* и *b*.

Подставим в (7.4) σ согласно (7.6) и получим:

$$\frac{E}{\rho}\int_F ydF = 0,$$

откуда

$$\int_F ydF = 0.$$

Интеграл $\int_F ydF = S_{\text{нл}}$ представляет *статический момент площади поперечного сечения относительно нейтральной линии.*

Известно, что если статический момент площади относительно оси равен нулю, то эта ось проходит через центр тяжести поперечного сечения.

Таким образом, нейтральная линия совпадает с осью z подвижной системы координат (см. рис. 36, *а*), т.е.

$$S_{\text{нл}} = S_z .$$

Кривизна нейтрального слоя $\frac{1}{\rho}$ – кривизна оси бруса после деформации.

Изгибающий момент M_z в поперечном сечении равен:

$$M_z = \int_F \sigma y dF$$

или, учитывая (7.6),

$$M_z = \frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF . \qquad (7.7)$$

Интеграл $\int_F y^2 dF = J_z$ называется *осевым моментом инерции поперечного сечения относительно оси z* и является геометрической характеристикой сечения.

Из выражения (7.7) получаем зависимость кривизны балки от изгибающего момента:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_z}{EJ_z} . \qquad (7.8)$$

Величина EJ_z называется *жесткостью поперечного сечения балки при изгибе.*

Из выражений (7.6) и (7.8) получаем:

$$\sigma = \frac{M_z}{J_z} y . \qquad (7.9)$$

Максимальное напряжение возникает в наиболее удаленных точках от нейтральной линии:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{J_z} y_{\max} .$$

Отношение $\dfrac{J_z}{y_{\max}} = W_z$ называется *моментом сопротивления поперечного сечения при изгибе*. Таким образом,

$$\sigma_{\max} = \frac{M_z}{W_z}. \qquad (7.10)$$

Из формулы (7.9) получаем σ с соответствующим знаком (плюсом или минусом), что дает возможность определить, какую деформацию (растяжение или сжатие) испытывает волокно. Однако на практике ответ на вопрос о знаке для σ часто очевиден. Удобно, отвлекаясь от системы координат и необходимости определять знак для координаты точки, для которой рассчитывается напряжение, определять только величину σ. В этом случае формулам (7.9) и (7.10) целесообразно придать вид:

$$\sigma = \frac{|M_z|}{J_z}|y|, \qquad (7.11)$$

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{W_z}, \qquad (7.12)$$

где
$$W_z = \frac{J_z}{|y_{\max}|}.$$

Для прямоугольного сечения со сторонами b и h (ось z параллельна стороне b)

$$J_z = \frac{bh^3}{12}, \quad W_z = \frac{bh^2}{6}. \qquad (7.13)$$

Для круглого сечения диаметром D

$$J_z = \frac{\pi D^4}{64}, \quad W_z = \frac{\pi D^3}{32}. \qquad (7.14)$$

Из выражения (7.9) следует, что слои, расположенные вблизи от нейтральной линии, испытывают незначительные напряжения. Очевидно, целесообразно распределить площадь поперечного сечения таким образом, чтобы она была, по возможности, удалена подальше от нейтральной линии. В этом случае материал бруса будет оказывать большее сопротивление внешним нагрузкам.

Примером экономичной формы поперечного сечения может служить двутавровый профиль (рис. 39). При изгибе такие профили дают существенную экономию в материальных затратах.

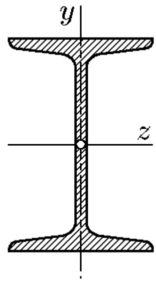


Рис. 39

При плоском изгибе изгибающий момент относительно оси y в поперечном сечении отсутствует. Следовательно,

$$M_y = \int_F \sigma z dF = 0.$$

Учитывая выражение (7.6), получаем

$$M_y = \frac{E}{\rho} \int_F yz dF = 0,$$

из чего следует, что

$$\int_F yz dF = 0.$$

Последний интеграл носит название *центробежного момента инерции площади поперечного сечения* относительно осей y и z и обозначается J_{yz}.

Оси, относительно которых центробежный момент инерции равен нулю, называются главными. Любая ось симметрии является главной осью. Оси, перпендикулярные в плоскости сечения уже известной главной оси, также являются главными. *Главные оси, проходящие через центр тяжести, называются главными центральными.* Можно сказать, что задача о плоском чистом изгибе решена в системе координатных осей $x - y - z$, из которых оси y и z являются главными центральными осями поперечного сечения, при этом ось y находится в силовой плоскости.

Далее убедимся, что если силовая плоскость не содержит в себе главной центральной оси, то это приводит к возникновению косого изгиба.

7.3. Напряжения при поперечном изгибе

В случае поперечного изгиба в сечении балки наряду с изгибающим моментом возникает поперечная сила Q_y. Эта сила представляет собой равнодействующую элементарных сил, действующих в плоскости сечения. Следовательно, в поперечных сечениях бруса возникают касательные напряжения, которые вызывают искривление плоскости поперечного сечения. Однако на величине нормальных напряжений это искривление заметным образом не сказывается. Формулы (7.9)–(7.10), полученные для чистого изгиба, дают точные результаты при $Q_y = \text{const}$. Если же Q_y меняется вдоль оси бруса, то полученные формулы дают некоторую погрешность, однако ее величина пренебрежимо мала при длине бруса существенно большей максимального размера поперечного сечения.

Для оценки касательных напряжений используют формулу Журавского:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z(y)}{J_z b(y)}, \tag{7.15}$$

где $S_z(y)$ – статический момент части площади поперечного сечения (на рис. 40 отмечена штриховкой), расположенной выше или ниже линии, параллельной оси z и проходящей через точку с ординатой y, для которой определяется касательное напряжение; $b(y)$ – ширина сечения на уровне точки, для которой определяется касательное напряжение.

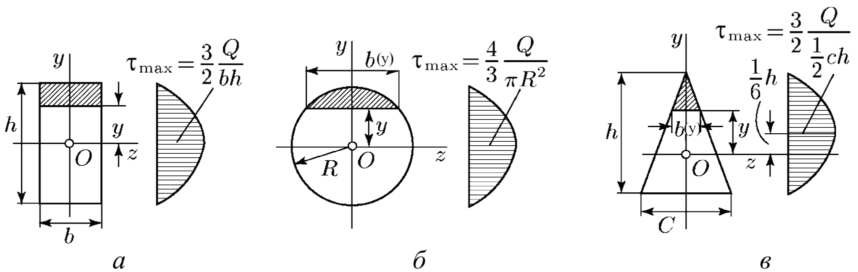


Рис. 40

На рис. 40 представлены распределения касательных напряжений в прямоугольном (рис. 40, *а*), круглом (рис. 40, *б*) и треугольном (рис.40, *в*) поперечных сечениях, вычисленных с помощью формулы (7.15).

Обобщая результаты вычислений, можно записать выражения для максимальных касательных напряжений в следующем виде:

$$\max \tau_{xy} = \frac{3Q_y}{2F} \text{ (для прямоугольного и треугольного сечения)}, \quad (7.16)$$

$$\max \tau_{xy} = \frac{4Q_y}{3F} \text{ (для круглого сечения)}. \quad (7.17)$$

В большинстве практических случаев (длина балки много больше размеров поперечного сечения) касательные напряжения на один или два порядка меньше нормальных напряжений. Поэтому в расчетах на прочность при изгибе, прежде всего, ориентируются на нормальные напряжения. После выбора формы поперечного сечения и его размеров можно рассчитать касательные напряжения, если есть основания предполагать, что они могут достигнуть значительной величины.

7.4. Расчет на прочность при изгибе

Расчет балок на прочность обычно ведется по наибольшим нормальным напряжениям σ, т. е. необходимо определить сечение, где изгибающий момент по абсолютной величине имеет наибольшее значение. Такое сечение называется *опасным*.

Затем в опасном сечении должно быть удовлетворено условие прочности:

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{W_{z_{\min}}} \le [\sigma], \quad (7.18)$$

где $W_z = \dfrac{J_z}{|y_{\max}|}$. В случае, если сопротивление материала растяжению и сжатию различно, расчет ведется отдельно для растянутых и сжатых волокон:

$$\sigma^p_{\max} = \frac{|M_z|}{W^p_z} \le [\sigma]_p, \quad \sigma^c_{\max} = \frac{|M_z|}{W^c_z} \le [\sigma]_c, \quad (7.19)$$

при этом

$$W^p_z = \frac{J_z}{|y^p_{\max}|}, \quad W^c_z = \frac{J_z}{|y^c_{\max}|}. \quad (7.20)$$

При расчете на прочность элементов конструкций возможны три вида задач.

1. Проверка напряжений (проверочный расчет).
2. Подбор сечения.
3. Определение допускаемой нагрузки.

Расчет на прочность начинается, как правило, с определения реакций опор. На рис. 41 представлены три типа опор:

а) подвижная шарнирная;
б) шарнирно-неподвижная;
в) жесткая заделка.

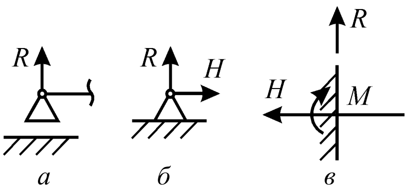


Рис. 41

Наличие подвижной опоры равнозначно наложению на балку одной связи. В опоре возникает лишь вертикально направленная реакция *R*.

Наличие шарнирно-неподвижной опоры равнозначно наложению на балку двух связей. В опоре возникает реакция, которая имеет в общем случае две компоненты: вертикальную (*R*) и горизонтальную (*H*).

Жесткая заделка означает, что на балку наложены три связи. В опоре возникают две компоненты реакции (*R* и *H*), а также реактивный момент *M*. Сечение балки, связанное с жесткой заделкой, не может ни перемещаться, ни поворачиваться.

Пример 5. Балка постоянного сечения закреплена и нагружена, как это показано на рис. 42. Известно, что $P = ql$, $m = 0{,}5ql^2$, распределенная нагрузка $q = 5 \cdot 10^4$ Н/м, $l = 2$ м. Допускаемое напряжение для материала балки $[\sigma] = 120$ МПа.

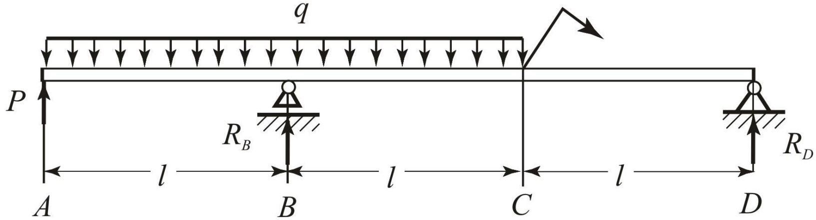


Рис. 42

Требуется выполнить следующие действия.

1. Подобрать три варианта поперечного сечения балки: а) круглое; б) прямоугольное с соотношением сторон $\frac{h}{b} = 2$; в) два швеллера.

2. Построить эпюру нормальных (σ) и касательных (τ_{xy}) напряжений для опасного сечения балки, составленной из двух швеллеров.

3. Провести аналитический и графический анализ напряженного состояния в точке на уровне перехода стенки в полку и сравнить его по первой теории прочности с напряженным состоянием в точке, наиболее удаленной от нейтральной оси.

Решение.

1. *Определение опорных реакций.*

Заменяя действия опор B и D их реакциями R_B и R_D (см. рис. 42), запишем уравнения равновесия балки:

$$\sum Y = 0; \quad P - 2ql + R_B + R_D = 0; \quad R_B + R_D = ql;$$

$$\sum mom_B = 0; \quad Pl + m - R_D \cdot 2l = 0.$$

Находим, что $R_D = 0{,}75ql$, а $R_B = 0{,}25ql$.

2. *Определение Q_y и M_z.*

Помещаем начало координат в левое торцевое сечение балки (сечение A). Мысленно рассекая балку на участках AB, BC и CD, отбрасывая каждый раз левую часть и используя метод приведения, находим Q_y и M_z.

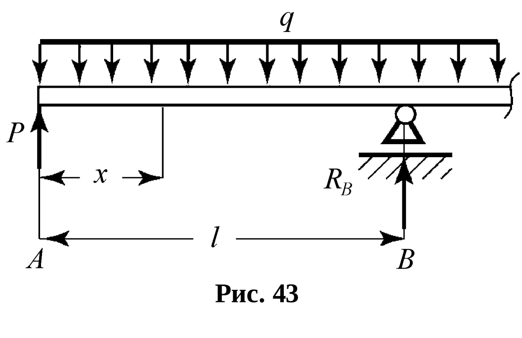


Рис. 43

На участке AB ($0 \le x \le l$) (рис. 43):

$$Q_y = P - qx, \quad \text{или} \quad Q_y = ql - qx,$$

$$M_z = Px - 0{,}5qx^2 \quad \text{или} \quad M_z = qlx - 0{,}5qx^2.$$

Для сечения A ($x_A = 0$): $Q_y = ql$; $M_z = 0$.

Для сечения B ($x_B = l$): $Q_y = 0$; $M_z = -\,0{,}5ql^2$.

Мы идем слева направо и получаем результирующую силу (Q_y), направленную вверх. В соответствии с правилом знака (см. рис. 37) она положительна.

Момент от распределенной нагрузки, расположенной слева от сделанного сечения, равен произведению равнодействующей от этой нагрузки (qx) на расстояние между осью z и направлением действия равнодействующей, т.е. $0{,}5x$. С учетом действия силы P, получаем положительный изгибающий момент M_z (см. рис. 37).

На участке BC ($l \le x \le 2l$) (рис. 44):

$$Q_y = P - qx + R_B \quad \text{или} \quad Q_y = 1{,}25ql - qx;$$

$$M_z = Px - 0{,}5\,qx^2 + R_B(x - l),$$

или

$$M_z = -\,0{,}25ql^2 + 1{,}25qlx - 0{,}5qx^2.$$

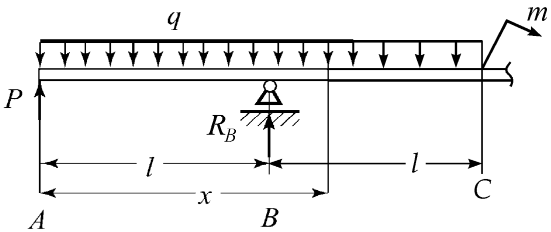


Рис. 44

Для сечения B ($x_B = l$): $Q_y = 0{,}25\,ql$; $M_z = 0{,}5ql^2$.

Для сечения C ($x_C = 2l$): $Q_y = -0{,}75\,ql$; $M_z = 0{,}25ql^2$.

Из выражения для Q_y следует, что для сечения с координатой $x = 1{,}25l$ $Q_y = 0$. Следовательно, согласно зависимости Журавского $\left(\dfrac{dM_z}{dx} = Q_y\right)$, в этом сечении M_z принимает экстремальное значение на данном участке, а именно:

$$M_z = -\,0{,}25ql^2 + 1{,}25ql \cdot 1{,}25l - 0{,}5q(1{,}25l)^2,$$

или $$M_z = 0{,}53ql^2.$$

На участке CD $(2l \le x \le 3l)$ (рис. 45):

$$Q_y = P - 2ql + R_B,$$

или $$Q_y = -\,0{,}75ql;$$

$$M_z = Px - 2ql(x - l) + R_B(x - l) + m,$$

или $$M_z = qlx - 1{,}75ql(x - l) + 0{,}5ql^2.$$

На всем участке CD: $Q_y = -\,0{,}75ql$.

M_z меняется по линейному закону от $0{,}75ql$ (сечение C, $x_C = 2l$) до 0 (сечение C, $x_D = 3l$).

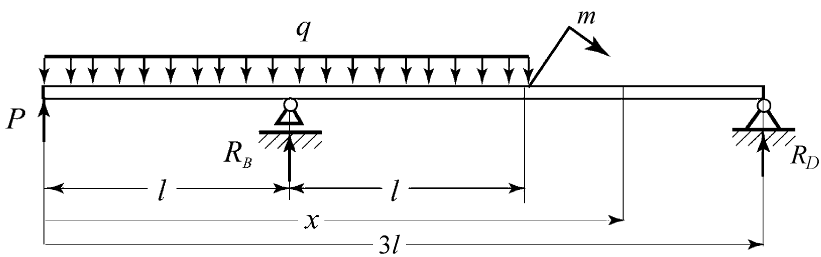


Рис. 45

Эпюры Q_y и M_z приведены на рис. 46.

Из приведенных уравнений для Q_y и M_z следует, что:

– эпюра Q_y имеет скачок (разрыв) в тех сечениях, где приложены сосредоточенные силы, в том числе и реакции опор, скачок равен величине силы;

– эпюра M_z имеет скачок в тех сечениях, где приложены моменты (пары сил), величина скачка равна величине приложенного момента.

3. *Подбор поперечных сечений балок.*

Из эпюры M_z следует, что самое опасное сечение – сечение C. В этом сечении имеется максимальный момент

$$M_z = 0{,}75ql^2, \quad Q_y = -\,0{,}75ql.$$

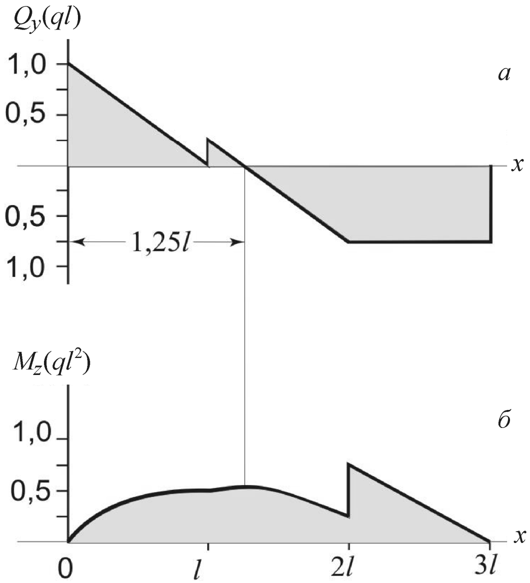


Рис. 46

Согласно (7.18)

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_z|}{W_z} \le [\sigma],$$

откуда

$$W_z \ \ge \frac{|M_z|}{[\sigma]},$$

т.е.

$$\frac{M_z}{[\sigma]} = \frac{0{,}75 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 4}{120 \cdot 10^6} = 1{,}25 \cdot 10^{-3} \ \text{м}^3 = 1250 \ \text{см}^3 .$$

А. Подбор круглого сечения:

$$W_z = \frac{\pi D^3}{32} \ge 1250 \ \text{см}^3 ;$$

$$D \ge \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 1250}{\pi}} = 23{,}35 \ \text{см} .$$

Принимаем $D = 24$ см.

Б. Подбор прямоугольного сечения:

$$W_z = \frac{bh^2}{6}; \quad \text{для} \quad h = 2b \quad W_z = \frac{h^3}{12}; \quad h \ge \sqrt[3]{1250 \cdot 12} = 24{,}66 \ \text{см} .$$

Принимаем h = 25 см; b = 12,5 см.

В. Подбор сечения из двух швеллеров. Для одного швеллера $W_z = 625$ см^3.

Из сортамента прокатной стали (ГОСТ 8240-72) выпишем два номера швеллеров, W_z которых наиболее близки к 625 см^3: $W_z = 601$ см^3 для № 36 и $W_z = 761$ см^3 для № 40.

Если выбрать швеллер № 36, то максимальные напряжения будут превышать допустимые почти на 4 %.

Выбираем швеллер № 40, схематизированный профиль которого представлен на рис. 47. Геометрические характеристики швеллера: h = 40 см, b = 11,5 см, d = 0,80 см, t = 1,35 см, $J_z = 15\ 220$ см^4, $W_z = 761$ см^3, $S_z\left(y = \dfrac{h}{2}\right) = 444$ см^3, $F = 61{,}5$ см^2.

4. *Определение* σ *в опасном сечении балки.*

Согласно (7.18) $\sigma_{\max} = \dfrac{|M_z|}{W_z}$;

$$\sigma_{\max} = \frac{0{,}75 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 4}{2 \cdot 761 \cdot 10^{-6}} \approx 98{,}6 \text{ МПа}.$$

Максимальные напряжения возникают в точках уровня II ($y = 0{,}5h$) (рис. 48, a), наиболее удаленных от нейтральной оси z. Согласно эпюре M_z, сжатые волокна расположены выше оси z. Напряжения σ распределены по линейному закону согласно (7.11) и в точках I уровня ($y = 0{,}5h - t$) будут равны:

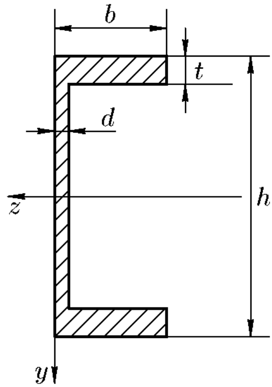


Рис. 47

$$\sigma_{(y=0{,}5h-t)} = \frac{M_z}{J_z}(0{,}5h - t),$$

или

$$\sigma_{(y=18{,}65)} =$$

$$= \frac{0{,}75 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 4}{15220 \cdot 2 \cdot 10^{-8}} \cdot 18{,}65 \cdot 10^{-2} \cong 92 \text{ МПа}.$$

Эпюра σ представлена на рис. 48, *б*.

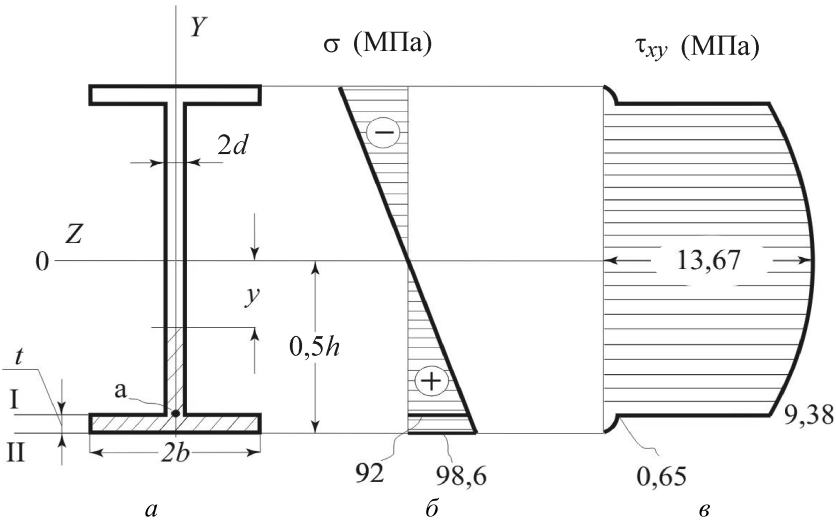


Рис. 48

5. *Определение касательных напряжений в опасном сечении балки.*

Согласно (7.15) закон распределения τ_{xy} определяется $S_z(y)$, так как Q_y, J_z и $b(y)$ в сечении постоянны, за исключением уровня I (см. рис. 48, *а*), где ширина сечения меняется скачкообразно от величины $2d$ до $2b$, обуславливая соответствующее изменение τ_{xy}.

В точках нулевого уровня (y = 0) касательные напряжения равны:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z(y=0)}{J_z b(y)} = \frac{0{,}75 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 888 \cdot 10^{-6}}{3044 \cdot 10^{-7} \cdot 16 \cdot 10^{-3}} = 13{,}67 \text{ МПа}.$$

Здесь удвоенные значения $S_z(y=0)$, J_z, b_y соотвественно равны $888 \cdot 10^{-6}$ м^3, $30440 \cdot 10^{-7}$ м^4 и $16 \cdot 10^{-3}$ м, обусловлены формой поперечного сечения, составленного из профилей двух швеллеров.

Для определения τ_{xy} в точках уровня y необходимо рассчитать $S_z(y)$ (статический момент заштрихованной площади, лежащей ниже уровня y) (см. рис. 48, *а*).

Из определения статического момента площади ($S_z = \int\limits_F ydF$) следует, что искомая величина $S_z(y)$ равна:

$$S_z(y) = S_z(y=0) - S_z(0-y),$$

где $S_z(0-y)$ – статический момент площади, ограниченной уровнями 0 и y (площади прямоугольника шириной $2d$ и высотой y).

Можно показать, что статический момент пощади относительно оси равен произведению этой площади на расстояние от центра тяжести площади до оси.

Следовательно,

$$S_z(0-y) = 2yd \cdot 0{,}5y = y^2 d\ ,$$

а

$$S_z(y) = \left(888 - 0{,}8y^2\right) \cdot 10^{-6}\ \text{м}^3\ .$$

Касательные напряжения уменьшаются по параболическому закону с ростом y и для уровня I ($y_{\mathrm{I}} = 0{,}5h - t$) равны:

$$\tau_{xy} = \frac{Q_y S_z(y = 0{,}5h - t)}{J_z 2d};$$

$$\tau_{xy} = \frac{0{,}75 \cdot 5 \cdot 10^4 \cdot 2}{3044 \cdot 10^{-7} \cdot 16 \cdot 10^{-3}}\left[888 - 0{,}8(18{,}65)^2\right] \cdot 10^{-6} = 9{,}38\ \text{МПа}\ .$$

На этом уровне касательные напряжения уменьшаются скачкообразно, за счет изменения ширины сечения. Второе значение для τ_{xy} (τ'_{xy}) равно:

$$\tau'_{xy} = \frac{9{,}38 \cdot d}{b} = \frac{9{,}38 \cdot 0{,}8}{11{,}5} = 0{,}65\ \text{МПа}\ .$$

В точках уровня II касательные напряжения отсутствуют, так как $S_z(y = 0{,}5h) = 0$.

Очевидно, что между уровнями I и II касательные напряжения также уменьшаются по параболическому закону. Эпюра касательных напряжений представлена на рис. 48, *в*.

6. *Анализ напряженного состояния в точках I уровня.*

В точках I уровня необходимо провести анализ напряженного состояния, так как в этих точках наряду с довольно существенными нормальными напряжениями (σ = 92 МПа) действуют касательные напряжения ($\tau_{xy} = 9{,}38$ МПа).

Вырежем вокруг одной из точек уровня I (например, точка а, см. рис. 48, *а*) элементарный куб, грани которого перпендикулярны осям *x*, *y* и *z* (рис. 49, *а*).

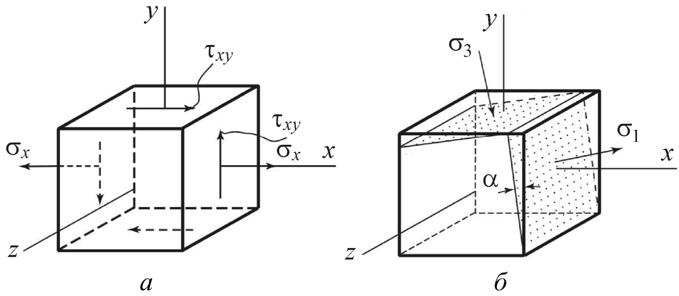


Рис. 49

Учтем, что решая задачу, мы двигались слева направо, отбрасывали левую часть балки и приводили все силовые факторы в сечение, принадлежащее правой части. Из решения следует, что в плоскостях, перпендикулярных оси *x*, действуют растягивающие нормальные напряжения $\sigma = 92$ МПа и касательные напряжения $\tau_{xy} = 9{,}38$ МПа, направленные так же, как и результирующие силы Q_y.

Используя формулу (3.6), находим главные напряжения:

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{\sigma_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2},$$

или

$$\sigma_{\substack{\max\\ \min}} = \frac{92}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{92}{2}\right)^2 + (9{,}38)^2}.$$

Получаем: $\sigma_{\max} = 92{,}9$ МПа; $\sigma_{\min} = -0{,}9$ МПа. Следовательно, в точке а

$$\sigma_1 = 92{,}9 \text{ МПа}, \quad \sigma_2 = 0, \quad \sigma_3 = -0{,}9 \text{ МПа}.$$

Из (3.5) получаем значение для угла α, определяющего положение главных площадок:

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y} = \frac{2 \cdot 9{,}38}{92} \cong 0{,}20;$$

$$2\alpha = 11°20', \ \ \alpha = 5°40'.$$

Грань, перпендикулярную оси x, необходимо повернуть против часовой стрелки вокруг оси z, чтобы найти положение первой главной площадки (рис. 49, *б*).

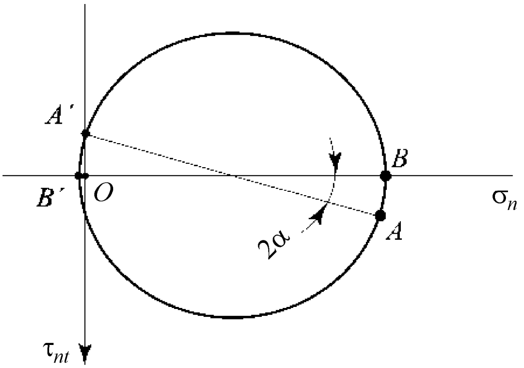


Рис. 50

Графический анализ напряженного состояния в точке а представлен круговой диаграммой Мора (рис. 50). Координаты точек A (σ_n = 92МПа, τ_{nt} = 9,38 МПа) и A' (σ_n = 0, τ_{nt} = − 9,38 МПа), лежащих на противоположных концах диаметра окружности, в определенном масштабе представляют нормальные и касательные напряжения, действующие на взаимно перпендикулярных площадках. Из графика видно, что отрезок OB представляет напряжение σ_1 = 92,9 МПа, а отрезок OB' – напряжение σ_3 = − 0,9 МПа.

Площадку, перпендикулярную оси x, необходимо повернуть против часовой стрелки на угол $\alpha = 5°40'$, чтобы определить первую главную плоскость.

По первой теории прочности ($\sigma_{экв} = \sigma_1$) эквивалентное напряжение в точках уровня II равно 98,6 МПа, а в точках уровня I − 92,9 МПа.

Следовательно, точки уровня II опаснее точек уровня I. Так как $\sigma_{экв}$ = 98,6 < 120 МПа (допускаемое напряжение), прочность конструкции обеспечена.

8. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО БРУСА

Сложное сопротивление возникает при одновременном появлении нескольких простых видов деформаций: растяжения или сжатия, кручения и изгиба в различных сочетаниях.

8.1. Общий случай сложного сопротивления. Нормальные и касательные напряжения

Рассмотрим прямоугольное поперечное сечение бруса, в котором под воздействием внешних нагрузок возникли все шесть внутренних силовых факторов: N, Q_y, Q_z, M_x, M_y, M_z (рис. 51).

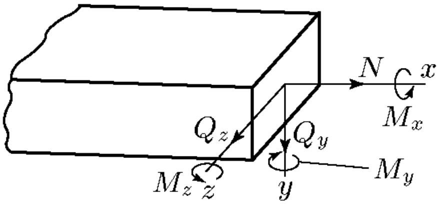


Рис. 51

Воспользуемся принципом независимости действия сил и учтем действие каждого фактора в отдельности. Задачу решаем в левой системе координат $x-y-z$, начало которой совмещаем с центром тяжести поперечного сечения.

Внутренняя сила N вызывает растяжение. Нормальные напряжения, обусловленные N, распределены равномерно в поперечном сечении бруса и согласно (2.1):

$$\sigma(N) = \frac{N}{F}.$$

Плоскость действия изгибающего момента M_y (плоскость $x-z$) содержит главную центральную ось z. Следовательно, M_y вызывает плоский чистый изгиб бруса вокруг оси y. Нормальные напряжения, возникающие при этом изгибе, равны:

$$\sigma(M_y) = -\frac{M_y}{J_y} z .$$

Положительный момент M_y вызывает в точках с отрицательными координатами z растяжение, т. е. положительные напряжения, и наоборот, в точках с положительными координатами z – отрицательные напряжения (рис. 52). Этим фактом объясняется знак «минус» в выражении для $\sigma(M_y)$.

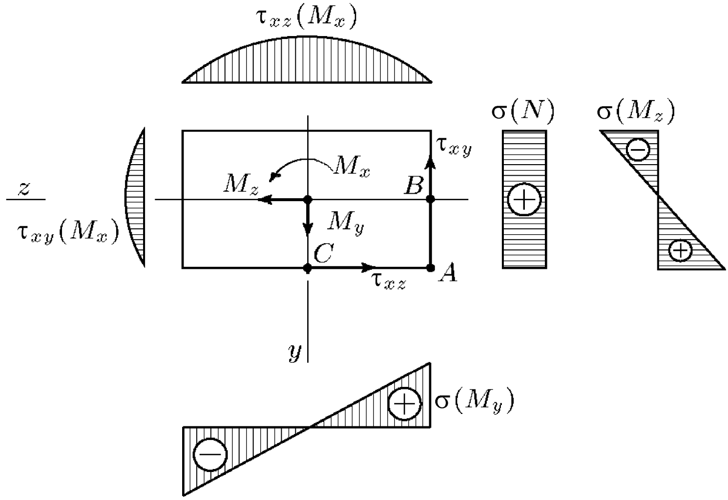


Рис. 52

В плоскости действия момента M_z (плоскость $x - y$) находится главная центральная ось y. Аналогично рассуждая, получаем, что нормальные напряжения, обусловленные действием момента M_z, равны:

$$\sigma(M_z) = \frac{M_z}{J_z} y .$$

При одновременном действии N, M_y и M_z получаем:

$$\sigma(N,\ M_y,\ M_z) = \sigma(N) + \sigma(M_y) + \sigma(M_z) ,$$

или
$$\sigma = \frac{N}{F} \mp \frac{M_y}{J_y} z \pm \frac{M_z}{J_z} y . \qquad (8.1)$$

Нашли выражение (8.1) в левой системе координат (верхние знаки). Аналогично рассуждая, можно получить выражение для σ в правой системе координат (нижние знаки).

Эпюры нормальных напряжений, возникающих под действием N, M_y и M_z, представлены на рис. 52.

Поперечные силы Q_y и Q_z вызывают касательные напряжения в поперечном сечении $\tau_{xy}(Q_y)$ и $\tau_{xz}(Q_z)$ соответственно (деформация сдвига). Крутящий момент M_x вызывает деформацию кручения вокруг оси x и появление касательных напряжений $\tau_{xt}(M_x)$ в плоскости $y - z$.

Очевидно, что при одновременном действии Q_y, Q_z и M_x касательные напряжения в точках поперечного сечения определятся выражением:

$$\overline{\tau_{xt}}(Q_y, Q_z, M_x) = \overline{\tau_{xt}}(Q_y) + \overline{\tau_{xt}}(Q_z) + \overline{\tau_{xt}}(M_x)\,. \tag{8.2}$$

Касательные напряжения τ_{xy} рассчитываются по формуле (7.15). Для расчета напряжений τ_{xz} в формуле (7.15) индексы y меняются на z, индексы z – на y. Однако в большинстве практических случаев $\tau_{xy}(Q_y)$ и $\tau_{xz}(Q_z)$ значительно меньше касательных напряжений $\tau_{xt}(M_x)$, обусловленных крутящим моментом. По этой причине, как правило, ограничиваются подсчетом $\tau_{xt}(M_x)$ по формулам (6.26) и (6.27).

Эпюры касательных напряжений $\tau_{xy}(M_x)$ и $\tau_{xz}(M_x)$ в точках контура сечения представлены на рис. 52.

Проанализируем напряженное состояние в точках A, B и C. Одна из них будет самой опасной.

В точке A имеем одноосное растяжение (рис. 53, *а*), так как касательное напряжение равно нулю, а нормальное напряжение согласно (8.1) равно

$$\sigma = \frac{N}{F} - \frac{M_y}{J_y} z_A + \frac{M_z}{J_z} y_A,$$

или
$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{|M_y|}{W_y} + \frac{M_z}{W_z}.$$

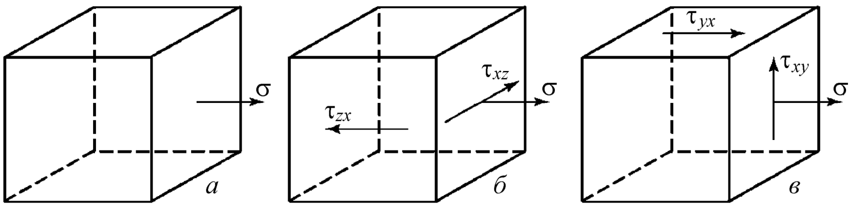


Рис. 53

Положительное напряжение σ в точке *A* – самое большое в поперечном сечении.

В точке *C* имеем двухосное напряженное состояние (рис. 53, *б*). Нормальное напряжение
$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{J_z} y_C,$$
или
$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_z}{W_z}.$$

Касательное напряжение $\tau_{xy}(Q_y)$ согласно (7.15) равно нулю. Касательным напряжением $\tau_{xz}(Q_z)$, которое согласно (7.16) равно:
$$\tau_{xz} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{F},$$
пренебрегаем.

Касательное напряжение, обусловленное M_x, согласно (6.26) равно:
$$\tau_{xz} = \frac{M_x}{\alpha h b^2}.$$

Нормальное напряжение в точке *C* меньше, чем в точке *A,* но наличие касательного напряжения может сделать эту точку более опасной, чем точка *A*.

В точке *B* также имеем двухосное напряженное состояние (рис. 53, *в*).

Нормальное напряжение

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{|M_y|}{W_y}.$$

Касательное напряжение, обусловленное моментом M_x, согласно (6.27) равно:

$$\tau_{xy} = \eta \frac{M_x}{\alpha h b^2}.$$

Касательное напряжение $\tau_{xz}(Q_z)$ согласно (7.15) равно нулю. Касательное напряжение $\tau_{xy}(Q_y)$ согласно (7.16) равно:

$$\tau_{xy} = \frac{3}{2}\frac{Q_y}{F}.$$

Этим напряжением пренебрегаем.

Видно, что касательное напряжение τ_{xy} в точке B меньше, чем напряжение τ_{xz} в точке C. Однако нормальное напряжение может быть больше, чем в точке C, если $\frac{|M_y|}{W_y} > \frac{|M_z|}{W_z}$.

Для решения вопроса о наиболее опасной точке необходимо в рамках выбранной теории прочности вычислить эквивалентное напряжение для всех трех точек. Та точка, для которой эквивалентное напряжение максимально, является наиболее опасной.

Расчет прочности ведется по $\sigma_{\text{экв}}$ в наиболее опасной точке. Условие прочности будет удовлетворено, если:

$$\sigma_{\text{экв}} \le [\sigma].$$

8.2. Косой изгиб

Косым называется изгиб, при котором силовая плоскость не содержит главной оси поперечного сечения. Косой изгиб может рассматриваться как частный случай сложного сопротивления, когда $N = 0$ и $M_x = 0$.

Рассмотрим прямолинейный брус длиной l прямоугольного поперечного сечения, защемленный одним концом и нагруженный силой P (рис. 54, *а*). Размеры поперечного сечения $h \times b$ ($h > b$). Плоскость действия силы P (силовая плоскость) образует с плоскостью $x - z$ угол α.

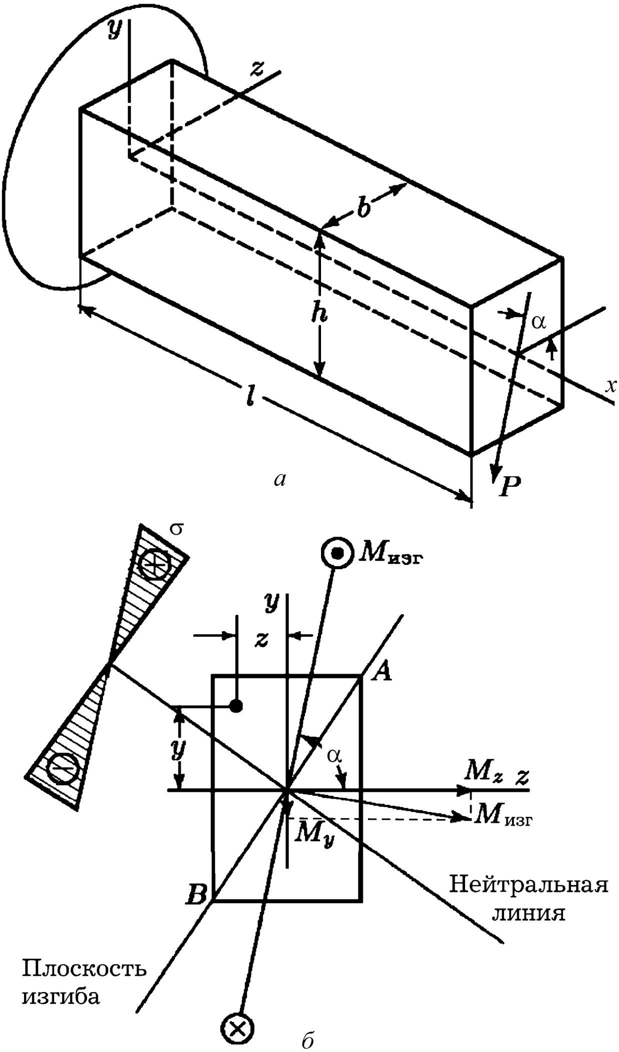


Рис. 54

Очевидно, что самое опасное сечение – сечение заделки, где изгибающий момент $M_{\text{изг}}$ равен Pl. Разложим изгибающий момент в сечении заделки на составляющие моменты относительно осей y и z (рис. 54, *б*):

$$M_y = -M_{\text{изг}} \cos\alpha = -Pl \cos\alpha\,,$$

$$M_z = M_{\text{изг}} \sin\alpha = Pl \sin\alpha\,.$$

Нормальное напряжение в точке, имеющей координаты y и z, согласно (8.1) равно:

$$\sigma = -\frac{M_y}{J_y} z + \frac{M_z}{J_z} y\,. \tag{8.3}$$

Полагая $\sigma = 0$, найдем уравнение нейтральной линии:

$$y = -\left(\frac{J_z}{J_y} \operatorname{ctg}\alpha\right) z\,. \tag{8.4}$$

Если бы $J_z = J_y$, то нейтральная линия была бы перпендикулярна плоскости изгибающего момента. Но в нашем случае $J_z > J_y$ и, следовательно, нейтральная линия несколько повернута в сторону оси минимального момента инерции, т.е. оси y (рис. 54, *б*).

Брус изгибается не в плоскости $M_{\text{изг}}$, а в плоскости, перпендикулярной нейтральной линии, где жесткость на изгиб будет меньше. Таким образом, реализуется косой изгиб.

Эпюра нормальных напряжений в сечении [уравнение (8.3)] линейна, так как представляет сумму двух линейных функций. Максимальное напряжение возникает в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии.

Полученные выражения (8.3) и (8.4) справедливы для бруса произвольного поперечного сечения при условии, что y и z – главные центральные оси. В случае прямоугольного профиля $J_z = \dfrac{bh^3}{12}$, $J_y = \dfrac{hb^3}{12}$, и уравнения (8.3) и (8.4) примут вид:

$$\sigma = \left(\frac{12Pl}{hb^3}\cos\alpha\right)z + \left(\frac{12Pl}{bh^3}\sin\alpha\right)y\,,$$

$$y = -\left(\frac{h^2}{b^2}\operatorname{ctg}\alpha\right)z\,.$$

Наиболее удаленные точки

$$A\left(y_A = \frac{h}{2};\; z_A = \frac{b}{2}\right) \text{ и } B\left(y_B = -\frac{h}{2};\; z_B = -\frac{b}{2}\right).$$

В точке A напряжение

$$\sigma = \frac{6Pl}{hb^2}\cos\alpha + \frac{6Pl}{bh^2}\sin\alpha\,.$$

В точке B напряжение

$$\sigma = -\frac{6Pl}{hb^2}\cos\alpha - \frac{6Pl}{bh^2}\sin\alpha\,.$$

8.3. Внецентренное растяжение и сжатие

Внецентренное растяжение (или *сжатие*) возникает тогда, когда равнодействующая внешних сил смещена относительно оси бруса и остается ей параллельной.

Пусть брус, размеры которого представлены на рис. 54, нагружен в торцевом сечении растягивающей силой P.

Точка приложения силы имеет координаты y_0 и z_0.

Все поперечные сечения бруса равноопасны, так как в них действуют одни и те же внутренние силовые факторы. Это

$$N = P,\; M_y = -Pz_0,\; M_z = Py_0\,.$$

Нормальные напряжения в произвольной точке с координатами (y, z) согласно (8.1) равны:

$$\sigma = \frac{P}{F} - \frac{M_y}{J_y}z + \frac{M_z}{J_z}y = 0\,. \qquad (8.5)$$

Полагая σ = 0, найдем уравнение нейтральной линии:

$$\frac{1}{F} + \frac{z_0}{J_y}z + \frac{y_0}{J_z}y = 0\,.$$

Нейтральная линия не проходит через начало координат. Ее положение не зависит от величины силы и определяется только координатами ее приложения.

Максимальные напряжения возникают в точках, наиболее удаленных от нейтральной линии. В нашем случае (прямоугольное поперечное сечение) это точка A (рис. 55).

Напряжение для точки A $\left(y_A = \dfrac{h}{2},\ z_A = \dfrac{b}{2}\right)$ равно:

$$\sigma = \frac{P}{bh} + \frac{Pz_0 12}{hb^3}\frac{b}{2} + \frac{Py_0 12h}{bh^3 2},$$

или

$$\sigma = P\left(\frac{1}{bh} + \frac{6z_0}{hb^2} + \frac{6y_0}{bh^2}\right).$$

Эпюра σ и нейтральная линия представлены на рис. 55.

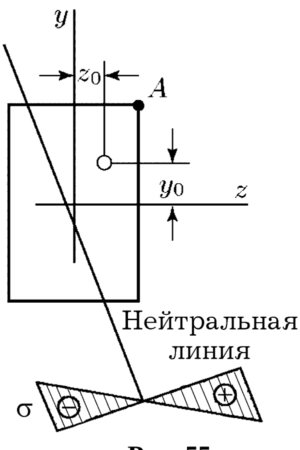


Рис. 55

9. ЭНЕРГЕТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ СЕЧЕНИЙ БРУСА

9.1. Работа внешних сил и потенциальная энергия при растяжении, изгибе, кручении и сложном нагружении

При *статическом нагружении,* когда нагрузка возрастает медленно от нуля до своего конечного значения, считается, что вся работа внешних сил (A) переходит в потенциальную энергию упругой деформации нагруженного тела (U), т.е.

$$A = U.$$

Для определения потенциальной энергии выделим из бруса длиной l элементарный участок длиной dx. В случае одновременного растяжения, кручения и изгиба в торцевых сечениях элемента возникают шесть внутренних силовых факторов, которые будем рассматривать как внешние по отношению к нему. Определим их работу. Важно отметить, что каждый фактор вызывает такие перемещения, на которых остальные не совершают работы. Так, например, нормальная сила N удлиняет элемент на $\Delta(dx)$, но на этом перемещении работа совершается только этой силой, что дает возможность рассмотреть вклад в потенциальную энергию бруса каждого фактора в отдельности. Уже отмечали, что касательные напряжения, обусловленные силами Q_y и Q_z, в большинстве случаев много меньше, чем напряжения, вызванные другими факторами. Поэтому в настоящем рассмотрении пренебрежем работой сил Q_y и Q_z.

При растяжении путь силы N равен удлинению элемента $\Delta(dx)$. Между N и $\Delta(dx)$ согласно (2.5) существует пропорциональная зависимость. Следовательно, работа (dA_p) силы N на перемещении $\Delta(dx)$ равна:

$$dA_p = dU_p = 0{,}5N\Delta(dx).$$

Исключим $\Delta(dx)$, используя выражение (2.5). Получим

$$dU_p = 0{,}5\frac{N^2}{EF}dx.$$

Общая потенциальная энергия бруса при растяжении определяется как сумма потенциальных энергий его отдельных элементов. Таким образом,

$$U_p = \int_0^l \frac{N^2}{2EF} dx . \qquad (9.1)$$

При кручении момент M_x совершает работу на угловом перемещении ($d\varphi$) торцевого сечения элемента. Между M_x и $d\varphi$ согласно (6.28) существует пропорциональная зависимость. Следовательно, работа ($dA_к$) крутящего момента M_x на угловом перемещении $d\varphi$ равна:

$$dA_к = dU_к = 0{,}5 M_x d\varphi .$$

Подставим $d\varphi$, используя выражение (6.28). Получим

$$dU_к = 0{,}5 \frac{M_x^2}{GJ_к} dx .$$

Общая энергия бруса при кручении ($U_к$) равна:

$$U_к = \int_0^l \frac{{M_x}^2}{2GJ_к} dx . \qquad (9.2)$$

При изгибе торцевые сечения элемента взаимно поворачиваются на угол $d\theta$ вокруг оси z под действием момента M_z или вокруг оси y под действием момента M_y. Из выражения (7.8) следует, что между моментами M_z (или M_y) и $d\theta$ существует пропорциональная зависимость. Отсюда работа ($dA_{изг,\,z}$) изгибающего момента M_z на угловом перемещении $d\theta$ равна:

$$dA_{изг,\,z} = dU_{изг,\,z} = 0{,}5 M_z d\theta .$$

Работа момента M_y ($dA_{изг,\,y}$) равна:

$$dA_{изг,\,y} = dU_{изг,\,y} = 0{,}5 M_y d\theta .$$

Учтем, что $\rho d\,\theta = dx$ (см. рис. 38), и исключим $\frac{1}{\rho}$, используя выражение (7.8).

Получим

$$dU_{\text{изг}, z} = 0{,}5 \frac{M_z^{\ 2}}{EJ_z} dx\,.$$

Для всего бруса потенциальная энергия изгиба вокруг оси z равна:

$$U_{\text{изг}, z} = \int_0^l \frac{M_z^{\ 2}}{2EJ_z} dx\,. \qquad (9.3)$$

Соответственно потенциальная энергия изгиба вокруг оси y для всего бруса равна:

$$U_{\text{изг}, y} = \int_0^l \frac{M_y^{\ 2}}{2EJ_y} dx\,. \qquad (9.4)$$

При одновременной реализации растяжения, кручения и изгиба общая потенциальная энергия бруса будет равна сумме потенциальных энергий, обусловленных каждым силовым фактором в отдельности, т.е.

$$U = \int_0^l \frac{N_x^{\ 2}}{2EF} dx + \int_0^l \frac{M_x^{\ 2}}{2GJ_{\text{к}}} dx + \int_0^l \frac{M_y^{\ 2}}{2EJ_y} dx + \int_0^l \frac{M_z^{\ 2}}{2EJ_z} dx. \qquad (9.5)$$

9.2. Теорема Кастильяно

Рассмотрим упругое тело, нагруженное произвольной системой сил и закрепленное таким образом, что его смещение как жесткого целого исключено (рис. 56).

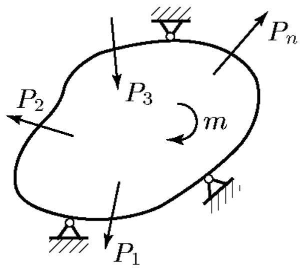


Рис. 56

Пусть потенциальная энергия, накопленная телом, равна U. Очевидно, что U является функцией силовых факторов, приложенных к телу, т.е.

$$U = U(P_1,\ \ldots,\ P_n,\ m)\,.$$

Дадим одной из сил, например P_n, приращение dP_n. Тогда тело получает приращение энергии $dU = \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n$. Общая энергия тела теперь будет равна:

$$U + \frac{\partial U}{\partial P_n} dP_n . \tag{9.6}$$

Изменим порядок приложения сил. Сначала приложим к телу силу dP_n. В точке приложения этой силы возникает малое перемещеие, проекция которого на направление силы dP_n равна $d\delta_n$. Очевидно, что работа силы dP_n будет равна $0{,}5\, dP_n\, d\delta_n$. Приложим теперь всю систему внешних сил. В отсутствии силы dP_n потенциальная энергия тела приобрела бы значение *U*. Однако теперь будет совершена дополнительная работа силы dP_n на перемещении δ_n (проекция полного перемещения точки приложения силы dP_n на ее направление). Эта дополнительная работа равна $dP_n \delta_n$.

В итоге при обратном порядке нагружения тела получаем, что его потенциальная энергия равна:

$$U + dP_n \delta_n + 0{,}5 dP_n d\,\delta_n . \tag{9.7}$$

Приравнивая выражения (9.6) и (9.7) и пренебрегая произведением $0{,}5\, dP_n\, d\delta_n$, как величиной высшего порядка малости, получаем:

$$\delta_n = \frac{\partial U}{\partial P_n} . \tag{9.8}$$

Полученный результат можно сформулировать следующим образом: *частная производная от потенциальной энергии тела по силе равна проекции перемещения точки приложения этой силы на ее направление.*

Очевидно, что все рассуждения можно повторить, сообщая приращение не силе, а моменту. В этом случае нужно оперировать не линейным перемещением δ_n, а угловым перемещением θ_n в точке приложения момента в направлении его действия, т.е.

$$\theta_n = \frac{\partial U}{\partial m_n} . \tag{9.9}$$

Таким образом, силу P_n в выражении (9.8) можно рассматривать как некоторый обобщенный силовой фактор. В этом случае величина δ_n должна рассматриваться как *обобщенное перемещение*, т.е. геометрический параметр, на котором обобщенный силовой фактор совершает работу.

9.3. Интеграл Мора

Теорема Кастильяно дает возможность определять перемещение только точек приложения внешних сил и только в направлении этих сил. На практике же возникает необходимость определять перемещение любых точек нагружаемого тела в любом направлении.

Для этого в точке, перемещение которой нас интересует, прикладывают фиктивную силу Ф в интересующем нас направлении. Затем составляют выражение для потенциальной энергии тела с учетом силы Ф. Дифференцируя энергию по Ф, получаем выражение, в котором Ф необходимо положить равной нулю. Таким образом, находят искомое перемещение.

Для бруса, нагруженного системой сил (рис. 57), определим вертикальное перемещение точки A.

Приложим в точке A вертикально направленную силу Ф. Внутренние силовые факторы в поперечных сечениях бруса изменятся на величины, зависящие от Ф. Очевидно, что все дополнительные величины будут пропорциональны силе Ф. Следовательно,

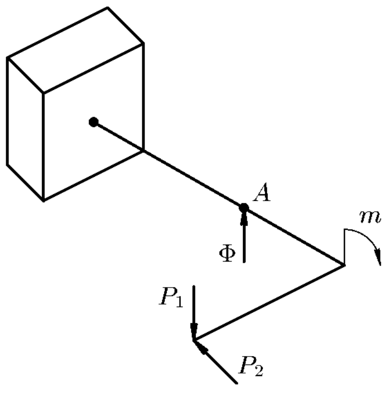


Рис. 57

$$N = N_p + N_1\Phi, \quad M_x = M_{xp} + M_{x1}\Phi,$$
$$M_y = M_{yp} + M_{y1}\Phi, \quad M_z = M_{zp} + M_{z1}\Phi, \qquad (9.10)$$

где N_p, M_{xp} и т.д. – силовые факторы, которые возникают под действием заданной нагрузки, а N_1, M_{x1} и т.д. – коэффициенты пропорциональности, зависящие от положения рассматриваемого сечения. Если снять систему внешних сил и положить Ф = 1, то

$$N = N_1, \;\; M_x = M_{x1}, \;\; M_y = M_{y1}, \;\; M_z = M_{z1}.$$

Следовательно, N_1, ..., M_{z1} представляют внутренние силовые факторы, возникающие в поперечных сечениях бруса под действием единичной силы, приложенной в интересующей нас точке.

Потенциальная энергия бруса согласно (9.5) с учетом (9.10) равна:

$$U = \int_0^l \frac{\left(N_p + N_1\Phi\right)^2}{2EF}dx + \int_0^l \frac{\left(M_{xp} + M_{x1}\Phi\right)^2}{2GJ_k}dx + $$
$$+ \int_0^l \frac{\left(M_{yp} + M_{y1}\Phi\right)^2}{2EJ_y}dx + \int_0^l \frac{\left(M_{zp} + M_{z1}\Phi\right)^2}{2EJ_z}dx.$$

Дифференцируем это выражение по Ф и, полагая Ф = 0, находим перемещение точки A:

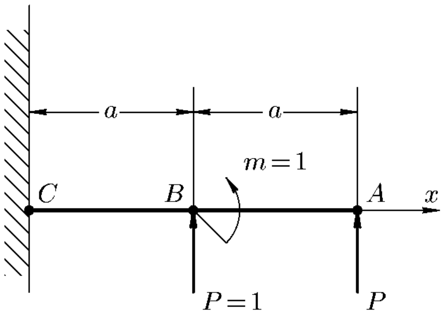
$$\delta_A = \frac{\partial U}{\partial \Phi}_{\Phi=0} = \int_0^l \frac{N_p N_1}{EF}dx + \int_0^l \frac{M_{xp}M_{x1}}{GJ_k}dx + $$
$$+ \int_0^l \frac{M_{yp}M_{y1}}{EJ_y}dx + \int_0^l \frac{M_{zp}M_{z1}}{EJ_z}dx. \qquad (9.11)$$

Полученные интегралы носят имя Мора. Для определения угла поворота сечения необходимо в сечении приложить момент, равный единице, и заменить в выражении (9.11) силовые факторы, возникающие под действием единичной силы, силовыми факторами, обусловленными единичным моментом.

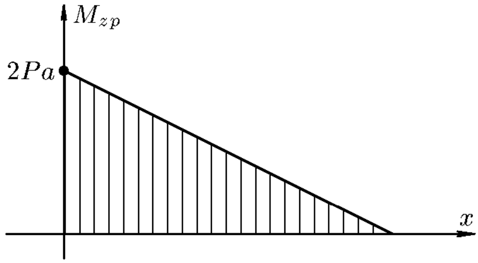
Пример 6. Балка длиной $2a$ нагружена силой P (рис. 58, a). Жесткость при изгибе вокруг оси z – EJ_Z. Определить вертикальное перемещение точки B и угол поворота сечения B.

Приложим в точке B единичную силу $P_B = 1$ для определения вертикального перемещения точки B и единичный момент $m = 1$ для определения угла поворота сечения B.

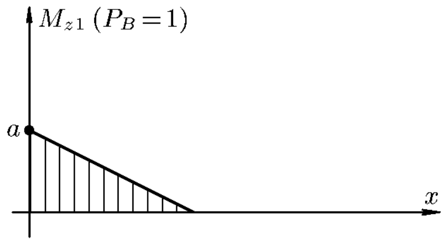
а



б



в



г

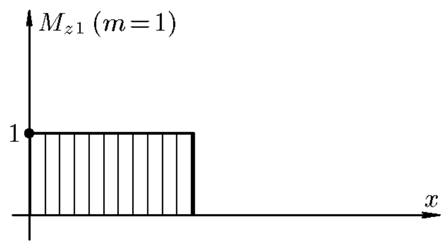


Рис. 58

Решаем задачу, отсчитывая координату сечения от точки A.

На участке AB $(0 \le x \le a)$:

$$M_{zp} = Px,$$

$$M_{z1}(P_B = 1) = 0,$$

$$M_{z1}(m = 1) = 0.$$

На участке BC $(a \le x \le 2a)$:

$$M_{zp} = Px,$$

$$M_{z1}(P_B = 1) = x - a,$$

$$M_{z1}(m = 1) = 1.$$

Эпюры функций M_{zp}, $M_{z1}(P_B = 1)$ и $M_{z1}(m = 1)$ представлены на рис. 58, *б*, *в*, *г*.

Вертикальное перемещение точки B (δ_B) согласно (9.11) равно:

$$\delta_B = \frac{1}{EJ_z}\int_a^{2a} Px(x-a)\,dx = \frac{5Pa^3}{6EJ_z}.$$

Угол поворота сечения B (θ_B) равен:

$$\theta_B = \frac{1}{EJ_z}\int_a^{2a} Px\,dx = \frac{3Pa^2}{2EJ_z}.$$

Ответы получены со знаком «плюс». Следовательно, точка B перемещается вверх, а сечение B поворачивается против часовой стрелки.

10. ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ ТОНКОСТЕННЫЕ ОБОЛОЧКИ

10.1. Определения и исходные положения

Оболочки, срединная поверхность которых (геометрическое место точек, равноотстоящих от обеих поверхностей оболочек) представляет собой поверхность вращения, называются осесимметричными.

При расчете будем исходить из того, что нагрузка, действующая на оболочку, также осесимметрична. В этом случае все внутренние силы зависят только от длины дуги, измеренной вдоль образующей тела вращения.

Так как оболочка тонкостенна, можно принять, что напряжения распределены равномерно по толщине оболочки. Теория, построенная на этом допущении, называется *безмоментной теорией оболочек*, так как при равномерном распределении напряжений по толщине оболочки отсутствует ее изгиб.

10.2. Определение напряжений

Рассмотрим симметричную оболочку толщиной δ (рис. 59), нагруженную внутренним давлением q. Сечение оболочки плоскостью, проходящей через ось, называется *меридиональным*. Радиус кривизны дуги меридиана срединной поверхности в точке A обозначим через ρ_m (рис. 59, *а*). Отрезок нормали OA может рассматриваться как образующая конической поверхности, нормальной к срединной поверхности оболочки. Отрезок $OA = \rho_t$ является радиусом кривизны нормального сечения, перпендикулярного к дуге меридиана. Оба радиуса (ρ_m и ρ_t) в общем случае зависят от угла θ между нормалью и осью симметрии.

Парой меридиональных сечений, которые образуют между собой угол $d\varphi$ и парой конических сечений, нормальных к срединной поверхности оболочки (рис. 59, *б*), выделим из оболочки элемент со сторонами dS_1, dS_2, представленный на рис. 59, *в*.

В силу осевой симметрии дуга dS_2 является элементом окружности. Радиус ρ_t постоянен на длине dS_2. Радиус ρ_m меняется на длине

dS_1, но, учитывая малость выделенного элемента, примем его на длине dS_1 постоянным. На гранях элемента возникают нормальные напряжения. Напряжение, направленное по касательной к дуге меридиана, называется *меридиональным* и обозначается σ_m, а направленное по касательной к элементу окружности dS_2 называется *окружным* и обозначается σ_t. Напряжения, умноженные на соответствующие площади граней элемента, дают силы $\sigma_m\,\delta\,dS_2$ и $\sigma_t\,\delta\,dS_1$.

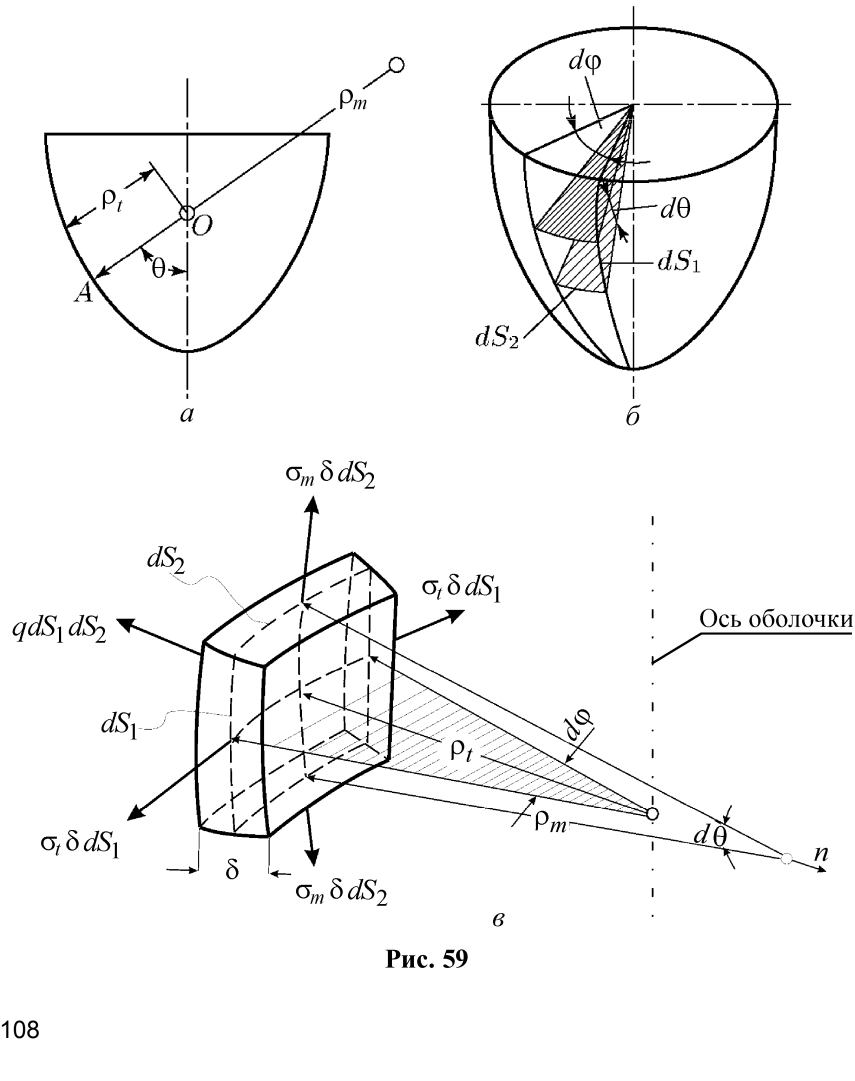


Рис. 59

Касательные напряжения на гранях элемента отсутствуют, так как грани лежат в плоскостях симметрии для оболочки и системы нагружающих сил. В двух других гранях касательные напряжения равны нулю в силу закона парности касательных напряжений.

На выделенный элемент действует равнодействующая, равная qdS_1dS_2. Проецируя все силы на нормаль n, получим уравнение равновесия для выделенного элемента:

$$qdS_1dS_2 - 2\sigma_m \delta dS_2 \sin\frac{d\theta}{2} - 2\sigma_t \delta dS_1 \sin\frac{d\varphi}{2} = 0.$$

Так как $d\varphi$ и $d\theta$ очень малы, то

$$\sin\frac{d\theta}{2} \approx \frac{d\theta}{2} \quad \text{и} \quad \sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2},$$

и уравнение примет вид:

$$qdS_1dS_2 - \sigma_m \delta dS_2 d\theta - \sigma_t \delta dS_1 d\varphi = 0.$$

Учитывая, что $d\theta = \dfrac{dS_1}{\rho_m}$, $d\varphi = \dfrac{dS_2}{\rho_t}$, получаем уравнение Лапласа:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q}{\delta}. \qquad (10.1)$$

В уравнение (10.1) входят две неизвестные: σ_m и σ_t. Для решения задачи необходимо рассмотреть равновесие части оболочки, отсеченной коническим нормальным сечением (рис. 60).

Проецируя все силы на ось оболочки, получаем:

$$2\pi\sigma_m r\delta \sin\theta = Q, \qquad (10.2)$$

где Q – осевая равнодействующая давления на отсеченную часть оболочки.

Из уравнения (10.2) определяется меридианальное напряжение σ_m, после чего из уравнения Лапласа находится напряжение σ_t.

Напряжение надавливания между слоями оболочки (радиальное напряжение) имеет вели-

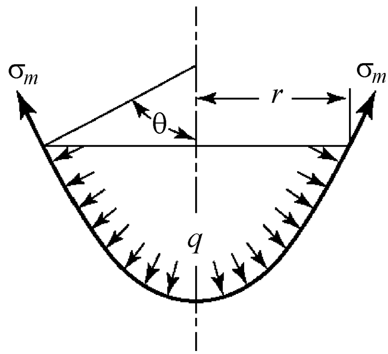


Рис. 60

чину порядка q, в то время как σ_m и σ_t согласно уравнению (10.1) имеют величины порядка $q\dfrac{\rho_m}{\delta}$ и $q\dfrac{\rho_t}{\delta}$ соответственно. Таким образом, можно пренебречь радиальным напряжением и считать напряженное состояние в оболочке двухосным.

При решении практических задач для определения величины Q удобно пользоваться двумя теоремами, которые примем без доказательства.

Теорема 1. Если на какую-либо поверхность действует равномерно распределенное давление, то независимо от формы поверхности проекция равнодействующей сил давления на заданную ось равна произведению давления на площадь проекции поверхности на плоскость, нормальную к заданной оси.

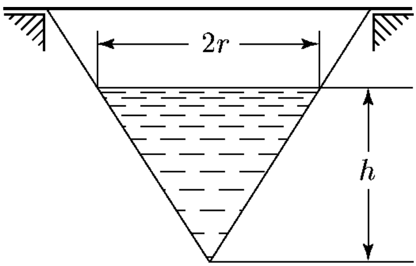


Рис. 61

Теорема 2. Если на какую-либо поверхность действует давление жидкости (рис. 61), то вертикальная составляющая сил давления жидкости равна весу жидкости в объеме, расположенном над поверхностью.

Согласно первой теореме равнодействующая Q в уравнении (10.2) равна (см. рис. 60):

$$Q = q\,\pi\,r^2.$$

Согласно второй теореме вертикальная составляющая сил давления жидкости на коническую поверхность (рис. 61) равна:

$$Q = 1/3\,\pi\,r^2\,h\,\gamma,$$

где γ – удельный вес жидкости.

Пример 7. Сферическая оболочка радиусом R и толщиной δ находится под действием внутреннего давления q.

Определить напряжения, возникающие в оболочке.

Для сферической оболочки

$$\rho_m = \rho_t = R\,.$$

По условиям полной симметрии

$$\sigma_m = \sigma_t .$$

Согласно уравнению (10.1):

$$\sigma_m = \sigma_t = \frac{qR}{2\delta}.$$

Напряженное состояние двухосное:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{qR}{2\delta}, \quad \sigma_3 = 0 .$$

Пример 8. Цилиндрический сосуд с днищами (рис. 62, *а*) находится под действием внутреннего давления q. Радиус цилиндра равен R, толщина стенки – δ. Определить напряжения в стенке цилиндра.

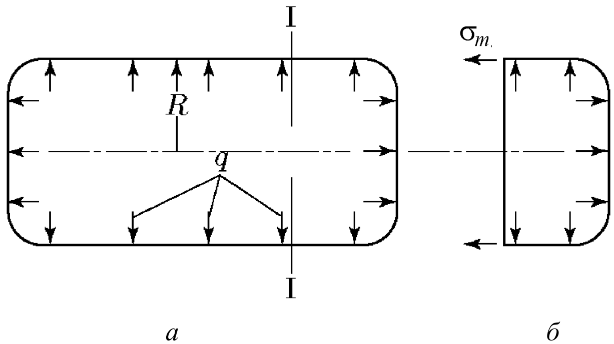


Рис. 62

Отсекаем поперечным сечением I – I часть цилиндра (рис. 62, *б*) и составляем для нее уравнение равновесия. Согласно первой теореме равнодействующая (Q) сил внутреннего давления на днище будет равна

$$Q = \pi R^2 q.$$

Эта сила уравновешивается меридианальными напряжениями, действующими в поперечном сечении цилиндрической оболочки

$$\sigma_m 2\pi R\delta = \pi R^2 q.$$

Таким образом,

$$\sigma_m = \frac{R}{2\delta} q .$$

Для цилиндра $\rho_m = \infty$, $\rho_t = R$. Из формулы (10.1) находим

$$\sigma_t = \frac{R}{\delta} q .$$

Полученный результат свидетельствует о том, что максимальное напряжение в цилиндрической оболочке вдвое больше напряжения в сферической оболочке того же радиуса и той же толщины. Понятно, что сферическая форма оболочки более рациональна для содержания газа с высоким давлением.

Пример 9. Конический сосуд, геометрические размеры которого представлены на рис. 63, *а*, заполнен жидкостью с удельным весом γ. Допустимое напряжение – $[\sigma]$. Рассчитать напряжения в сосуде, построить эпюры σ_m и σ_t и определить толщину сосуда, используя третью теорию прочности.

Нормальным коническим сечением (вершина конуса в точке A) отсекаем нижнюю часть конической оболочки высотой x (рис. 63, *г*) и составляем для нее уравнение равновесия:

$$2\pi r_x \delta \sigma_m \cos\alpha = Q ,$$

где Q – равнодействующая давления жидкости на отсеченную часть оболочки. Согласно теореме 2, Q равна весу жидкости в объеме, расположенном над поверхностью отсеченной части конуса. Этот объем равен сумме объема отсеченного конуса высотой x и объема цилиндра радиусом r_x и высотой ($h - x$). Таким образом, получаем

$$Q = \gamma\left(\pi r_x^2 \frac{1}{3} x + \pi r_x^2 (h - x)\right).$$

Учитывая, что $r_x = x \operatorname{tg}\alpha$, получаем выражение для σ_m:

$$\sigma_m = \frac{\gamma \cdot \operatorname{tg}\alpha}{2\delta\cos\alpha}\left(-\frac{2}{3}x^2 + xh\right).$$

Максимального значения σ_m достигает для сечения с координатой $x = 0{,}75h$:

$$\sigma_m\big|_{x=0{,}75h} = \frac{3\operatorname{tg}\alpha}{16\delta\cos\alpha}\gamma h^2.$$

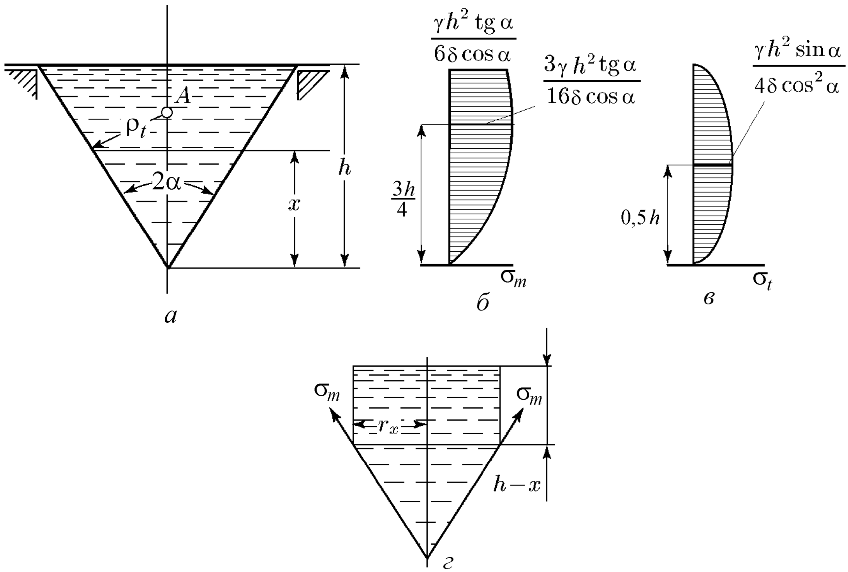


Рис. 63

Для сечения с координатой $x = h$:

$$\sigma_m|_{x=h} = \frac{\operatorname{tg}\alpha}{6\delta\cos\alpha}\gamma h^2.$$

Эпюра σ_m представлена на рис. 63, *б*.

Запишем уравнение Лапласа:

$$\frac{\sigma_m}{\rho_m} + \frac{\sigma_t}{\rho_t} = \frac{q(x)}{\delta}.$$

В нашем случае $\rho_m = \infty$, а $q(x)$ − гидростатическое давление жидкости, т. е. $q(x) = \gamma(h - x)$.

Радиус кривизны ρ_t равен:

$$\rho_t = \frac{r_x}{\cos\alpha} = \frac{x\operatorname{tg}\alpha}{\cos\alpha} = x\sin\alpha\frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Получаем выражение для σ_t в виде

$$\sigma_t = \frac{\gamma(h-x)x}{\delta} \sin\alpha \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Максимального значения окружное напряжение достигает для $x = \frac{h}{2}$ (посередине высоты конуса):

$$\sigma_t\left(x = \frac{h}{2}\right) = \frac{\gamma h^2}{4\delta} \sin\alpha \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

Эпюра σ_t представлена на рис. 63, *в*.

Из анализа эпюр σ_m и σ_t очевидно, что наиболее опасными будут точки сечения, где σ_t принимает максимальное значение, т.е. посередине высоты конического сосуда. В этих точках $\sigma_1 = \sigma_t$, $\sigma_2 = \sigma_m$, $\sigma_3 = 0$. Условие прочности при использовании третьей теории прочности запишется следующим образом:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_t - 0 = \sigma_t \le [\sigma] \quad \text{или} \quad \sigma_t = \frac{\gamma h^2}{4\delta} \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha} \le [\sigma].$$

Следовательно,

$$\delta = \frac{\gamma h^2}{4[\sigma]} \frac{\sin\alpha}{\cos^2\alpha}.$$

11. ТОЛСТОСТЕННЫЕ ТРУБЫ

11.1. Дифференциальные уравнения равновесия и совместности деформаций

Рассмотрим толстостенную трубу, находящуюся под действием внутреннего давления P (рис. 64).

Решаем задачу в цилиндрической системе координат x, r, φ.

Деформированное состояние трубы будет осесимметричным, т.е. каждая точка будет перемещаться только в направлении радиуса и параллельно оси трубы x, причем эти перемещения не зависят от полярного угла φ.

Для трубы со свободными торцами все сечения трубы, перпендикулярные к ее оси, остаются плоскими, иначе говоря, радиальные перемещения зависят только от радиуса, а осевые – только от x. В других случаях это утверждение верно для сечений, достаточно удаленных от торцов (принцип Сен-Венана).

Вырежем из цилиндра двумя перпендикулярными к его оси плоскостями, расстояние между которыми dx, кольцо (см. рис. 64). Двумя осевыми плоскостями и двумя концентрическими цилиндрическими поверхностями выделим из кольца элемент в форме криволинейного шестигранника (рис. 65). Размеры этого шестигранника:

$$dr, \quad dx, \quad rd\varphi \quad \text{и} \quad (r + dr)d\varphi.$$

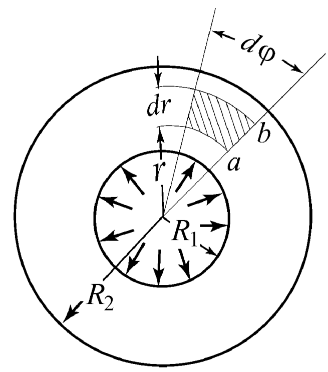


Рис. 64

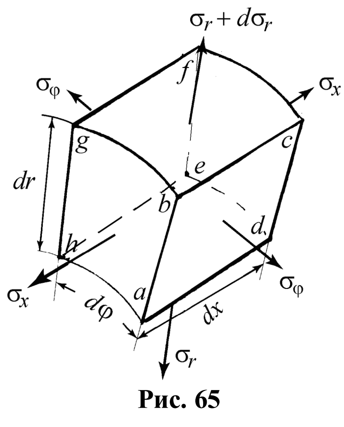


Рис. 65

В осевых сечениях цилиндра (плоскости *abcd* и *efgh*) по условиям симметрии касательные напряжения отсутствуют и действуют только нормальные напряжения σ_φ, называемые *окружными*. В поперечных сечениях цилиндра (плоскости *abgh* и *cdef*) могут существовать нормальные напряжения σ_x (например, при наличии у трубы днищ). Эти напряжения предполагаются неизменяемыми как по оси, так и по радиусу цилиндра. Касательные напряжения в поперечных сечениях отсутствуют, так как плоскости этих сечений не искривляются и точки сечений перемещаются только в радиальном и осевом направлениях. Поскольку площадки *abcd* и *cdef* свободны от касательных напряжений, от этих напряжений будут свободны цилиндрические поверхности *adeh* и *bcfg*. Напряжение на поверхности *adeh* обозначим через σ_r и назовем его *радиальным*. При переходе от радиуса r к $r + dr$ (от поверхности *adeh* к поверхности *bcfg*) напряжение σ_r получит приращение $d\sigma_r$.

Проецируя усилия, действующие на элемент, на направление биссектрисы угла $d\varphi$ и принимая $\sin\frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$ ($d\varphi$ мал), получим следующее дифференциальное уравнение равновесия:

$$(\sigma_r + d\sigma_r)(r + dr)d\varphi\, dx - \sigma_r r d\varphi\, dx - \sigma_\varphi dr\, dx\, d\varphi = 0$$

или, пренебрегая малыми величинами высшего порядка, получаем выражение:

$$\sigma_r - \sigma_\varphi + \frac{d\sigma_r}{dr} r = 0 . \qquad (11.1)$$

Остальные уравнения равновесия элемента удовлетворяются тождественно.

Рассмотрим деформации того же элемента. Обозначим через u радиальное перемещение точки, находящейся на расстоянии r от оси (точки a и h на рис. 66).

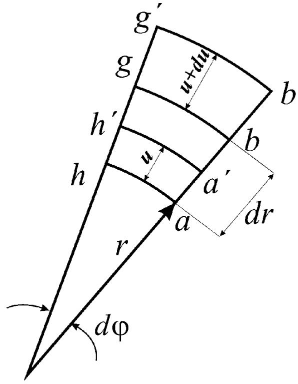


Рис. 66

Дуга *ah* займет положение $a'h'$ после нагружения трубы. Относительное удлинение дуги *ah* равно:

$$\varepsilon_\varphi = \frac{(r+u)d\varphi - rd\varphi}{rd\varphi} = \frac{u}{r}. \tag{11.2}$$

Точка b после деформации займет положение b', ее перемещение есть $u + du$. Новая длина элемента ab $(a'b')$ будет равна $dr + du$, а его относительное удлинение:

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}. \tag{11.3}$$

Дифференцируя выражение (11.2), получим

$$\frac{d\varepsilon_\varphi}{dr} + \frac{\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r}{r} = 0. \tag{11.4}$$

Соотношение (11.4) называется *уравнением совместности деформаций*.

11.2. Определение напряжений и перемещений в толстостенной трубе

Напряжения в толстостенной трубе могут быть выражены через деформации по формулам закона Гука (4.4), в которых индексы y, z заменены индексами r и φ:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_r + \sigma_\varphi)\right],\\
\varepsilon_r &= \frac{1}{E}\left[\sigma_r - \mu(\sigma_\varphi + \sigma_x)\right],\\
\varepsilon_\varphi &= \frac{1}{E}\left[\sigma_\varphi - \mu(\sigma_x + \sigma_r)\right].
\end{aligned} \tag{11.5}$$

Из первого уравнения системы (11.5) следует:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + \mu(\sigma_r + \sigma_\varphi). \tag{11.6}$$

Из последних двух уравнений (11.5) получаем:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\varphi) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x,\\
\sigma_\varphi &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\varphi + \mu\varepsilon_r) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x.
\end{aligned} \tag{11.7}$$

Подставляя сюда ε_φ и ε_r из выражений (11.2) и (11.3), получим:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r}\right) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x,$$
$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr}\right) + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x. \quad (11.8)$$

Используя соотношения (11.8), запишем уравнение равновесия (11.1) в перемещениях:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du}{dr} - \frac{u}{r^2} = 0. \quad (11.9)$$

Уравнение (11.9) – *линейное однородное дифференциальное* уравнение второго порядка типа Эйлера. Как известно, его частные решения имеют вид

$$u = r^n. \quad (11.10)$$

Подставляя выражение (11.10) в уравнение (11.9), получаем после сокращения на r^{n-2} характеристическое уравнение:

$$n^2 - 1 = 0.$$

Корням этого уравнения $n_1 = 1$, $n_2 = -1$ соответствуют частные решения r и $\frac{1}{r}$. Общее решение найдем, умножив эти частные решения на постоянные интегрирования C_1 и C_2 и затем сложив их:

$$u = C_1 r + \frac{C_2}{r}. \quad (11.11)$$

Подставляя выражение (11.11) в формулы (11.8), находим:

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\mu) - C_2\frac{1-\mu}{r^2}\right] + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x,$$
$$\sigma_\varphi = \frac{E}{1-\mu^2}\left[C_1(1+\mu) + C_2\frac{1-\mu}{r^2}\right] + \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x. \quad (11.12)$$

Постоянные C_1 и C_2 определяем из следующих граничных условий: при $r = R_1$ $\sigma_r = -P$; при $r = R_2$ $\sigma_r = 0$, откуда

$$C_1 = \frac{(1-\mu)PR_1^2}{E(R_2^2 - R_1^2)} - \mu\frac{\sigma_x}{E},$$

$$C_2 = \frac{(1+\mu)PR_1^2R_2^2}{E(R_2^2 - R_1^2)}.$$

Подставляя C_1 и C_2 в формулы (11.12), получаем окончательные выражения для радиальных и окружных напряжений:

$$\sigma_r = \frac{R_1^2 P}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 - \frac{R_2^2}{r^2}\right),$$
$$\sigma_\varphi = \frac{R_1 P}{R_2^2 - R_1^2}\left(1 + \frac{R_2^2}{r^2}\right). \tag{11.13}$$

На рис. 67 представлены эпюры радиальных и окружных напряжений.

Согласно формуле (11.6) осевое напряжение будет постоянно по толщине стенки и равно:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x + 2\mu\frac{PR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{11.14}$$

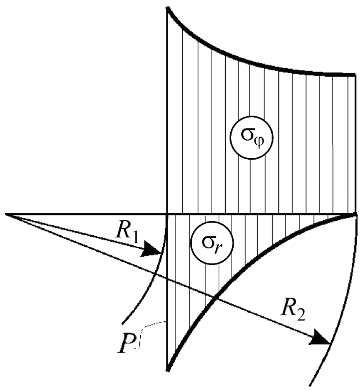


Рис. 67

Следовательно, полученное решение строго верно в тех случаях, когда к торцам трубы приложены равномерно распределенные растягивающие или сжимающие внешние силы (в частном случае эти силы могут быть равны нулю). Равнодействующую внутренних сил в поперечном сечении обозначим через N. Площадь поперечного сечения трубы равна $\pi(R_2^2 - R_1^2)$. Если труба имеет днища, растягивающая сила N равна равнодействующей давления на дно, площадь которого есть πR_1^2. В этом случае осевые напряжения будут равны:

$$\sigma_x = \frac{N}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \quad \text{или} \quad \sigma_x = \frac{PR_1^2}{R_2^2 - R_1^2}, \tag{11.15}$$

а относительное осевое удлинение трубы согласно (11.5):

$$\varepsilon_x = \frac{PR_1}{R_2^2 - R_1^2}(1-2\mu)\frac{1}{E}\,. \tag{11.16}$$

В открытой по концам трубе (например, ствол орудия во время выстрела) $\sigma_x = 0$, поэтому:

$$\varepsilon_x = -2\mu\frac{PR_1}{R_2^2 - R_1^2}\,. \tag{11.17}$$

Рассмотрим теперь радиальное перемещение в цилиндре. Подставляя значения C_1 и C_2 в уравнение (11.11), находим:

$$u = \frac{(1-\mu)R_1^2 P}{E(R_2^2 - R_1^2)}r + \frac{(1+\mu)PR_1^2 R_2^2}{E(R_2^2 - R_1^2)r} - \frac{\mu\sigma_x}{E}r\,. \tag{11.18}$$

Если осевая сила отсутствует, то $\sigma_x = 0$ и в этом случае:

$$u = \frac{(1-\mu)R_1^2 P}{E(R_2^2 - R_1^2)}r + \frac{(1+\mu)PR_1^2 R_2^2}{E(R_2^2 - R_1^2)r}\,. \tag{11.19}$$

Если цилиндр имеет днища, σ_x определяется согласно выражению (11.15) и в этом случае:

$$u = \frac{(1-2\mu)R_1^2 P}{E(R_2^2 - R_1^2)}r + \frac{(1+\mu)R_1^2 R_2^2 P}{Er(R_2^2 - R_1^2)}\,. \tag{11.20}$$

12. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖИМАЕМОГО БРУСА. ПРОДОЛЬНЫЙ ИЗГИБ БРУСА

12.1. Понятие об устойчивости

Известны понятия устойчивого, неустойчивого и безразличного равновесия. Они могут относиться как к положению тела, так и к форме тела. Однако имеется существенное различие между устойчивостью положения тела и устойчивостью формы равновесия тела. Классическим примером равновесия положения тела является положение шарика на криволинейной поверхности (рис. 68). Шарик 1 занимает устойчивое положение равновесия: при выводе его из этого положения он будет стремиться вернуться в него. Шарик 2 находится в неустойчивом состоянии, так как при малейшем смещении утратит исходное положение равновесия. Шарик 3 на горизонтальной поверхности находится в положении безразличного равновесия. При рассмотрении устойчивости положения тела само тело считается абсолютно твердым.

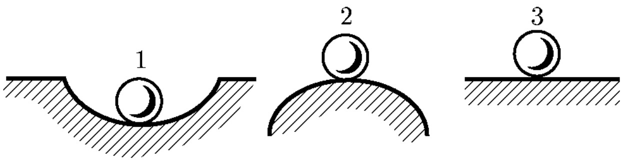


Рис. 68

Каждая конструкция под воздействием внешних сил деформируется, принимая ту или иную форму, которую называют *формой равновесия конструкции*, имея в виду равновесие, установившееся между внешними и внутренними силами системы. Принятая конструкцией равновесная форма для надежной эксплуатации должна быть устойчивой, т. е. при воздействии временных незначительных дополнительных нагрузок должна обладать способностью противостоять этим случайным воздействиям и восстанавливаться. Эксплуатация конструкции, форма равновесия которой не является устойчивой, весьма опасна, так как самая ничтожная причина вызовет нарушение формы, т.е. деформацию, которая приведет к разрушению конструкции.

Устойчивость формы равновесия зависит от нагрузок, приложенных к телу. Прямолинейная форма равновесия сжатого стержня; круговая форма равновесия тонкостенного кольца, сжатого равномерно распределенной по его контуру нагрузкой; цилиндрическая форма равновесия скручиваемого тонкостенного цилиндра и другие формы могут быть устойчивыми или неустойчивыми в зависимости от величины прикладываемой нагрузки. При определенных значениях нагрузки (критических нагрузках) исходная форма равновесия конструкции (прямолинейная, круговая, цилиндрическая и др.) перестает быть устойчивой. Происходит потеря устойчивости. Достижение нагрузками критических значений приводит практически к неограниченному росту деформации, т. е. разрушению конструкции.

12.2. Задача Эйлера

Разрушение, вызываемое критическими нагрузками, носит внезапный характер. Отсутствуют внешние признаки приближающейся потери устойчивости. При этом практически мгновенно происходит изменение характера нагружения, приводящего к разрушению конструкции. Так, продольно сжатый прямолинейный брус принимает изгибную форму равновесия. Поэтому явление потери устойчивости сжимаемого бруса называют *продольным изгибом бруса*.

Впервые задачу определения критического значения сжимающей силы прямолинейного призматического бруса решил Леонард Эйлер. Рассмотрим последовательность состояний прямолинейного бруса, изображенного на рис. 69, *а*, под действием сжимающей силы различной величины. На рис. 69, *б* сплошной линией показана устойчивая прямолинейная форма равновесия при сжимающей силе, меньше критической. Штриховой линией показана пробная изгибная деформация бруса, возникающая при приложении дополнительной поперечной нагрузки и не сохраняющаяся после ее снятия, так как сжимающая сила для этого недостаточно велика.

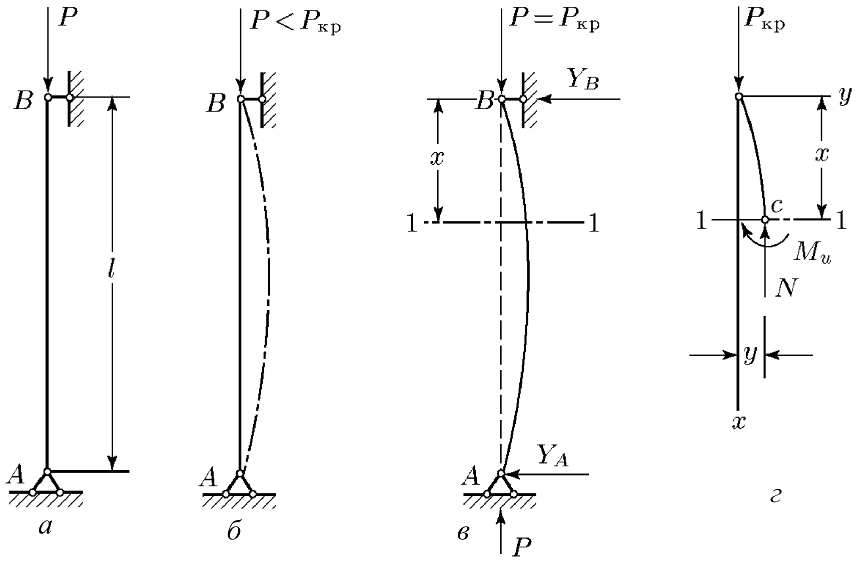


Рис. 69

На рис. 69, *в* показан случай, когда сжимающая сила достигла критического значения. Прямолинейная форма равновесия теперь неустойчива и будет потеряна (пунктирная линия). Она будет заменена на изгибную форму равновесия (показана сплошной линией). Значение силы $P_{кр}$ можно определить, используя уравнения теории изгиба бруса и рассматривая в равновесии отсеченную часть бруса (рис. 69, *г*). Из уравнений равновесия следует, что реакции Y_A и Y_B равны нулю, а кривизна в произвольном сечении связана с действующим моментом в сечении при условии малых прогибов уравнением:

$$\frac{1}{\rho}=\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{M_и}{EJ_{н.л}}, \tag{12.1}$$

где $J_{н.л}$ – момент инерции относительно нейтральной оси при изгибе.

Изгибающий момент в сечении равен $M_и = P_{кр} \cdot y$, где y – прогиб в рассматриваемом сечении 1 – 1.

Можно показать, что y'' и y имеют противоположные знаки, что и должно быть отражено в уравнении упругой линии, т.е.

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -P_{\text{кр}} \frac{y}{EJ_{\text{н.л}}},$$

или

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P_{\text{кр}} \frac{y}{EJ_{\text{н.л}}} = 0. \qquad (12.2)$$

Принимая $\frac{P_{\text{кр}}}{EJ_{\text{н.л}}} = \alpha^2$, получаем линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' + \alpha^2 y = 0, \qquad (12.3)$$

решение которого имеет вид

$$y(x) = A \sin \alpha x + B \cos \alpha x. \qquad (12.4)$$

Здесь A и B – постоянные интегрирования, определяемые из условий закрепления бруса, так называемых граничных или краевых условий.

Прогиб $y = 0$ при $x = 0$. Подставляя эти данные в уравнение прогиба, получаем $B = 0$ и, следовательно,

$$y(x) = A \sin \alpha x,$$

т.е. изогнутая ось бруса является синусоидой. При $x = l$ также $y = 0$, поэтому

$$y(l) = A \sin \alpha l = 0.$$

Константа A, представляющая собой наибольший прогиб бруса, не может быть равна нулю, так как при $A = 0$ возможна только прямолинейная форма равновесия. Поэтому должно выполняться условие $\sin \alpha l = 0$. Отсюда следует, что криволинейные формы равновесия бруса могут существовать, если αl принимает значения π, 2π, ..., $n\pi$. Величина αl не может быть равна нулю, так как это решение соответствует случаю $P_{\text{кр}} = 0$.

Приравнивая $\alpha l = n\pi$ и подставляя $\alpha = \sqrt{\frac{P_{\text{кр}}}{EJ_{\text{н.л}}}}$, получаем

$$P_{\text{кр}} = \frac{n^2 \pi^2 EJ_{\text{н.л}}}{l^2}. \qquad (12.5)$$

Это выражение называется *формулой Эйлера для определения критической силы* $P_{\text{кр}}$ при потери устойчивости прямолинейной формы равновесия сжимаемого бруса. Выпучивание происходит в плоскости наименьшей жесткости, если нет специальных приспособлений, ограничивающих изгиб бруса в этом направлении. Поэтому в формуле Эйлера нужно использовать $J_{\min}$ – меньший из главных центральных моментов инерции поперечного сечения бруса.

Величина критической силы зависит от коэффициента n. Выясним геометрический смысл этого коэффициента. Изогнутая ось бруса является синусоидой, уравнение которой после подстановки $\alpha l = n\pi$ имеет вид

$$y(x) = A\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{12.6}$$

Синусоиды для $n = 1$ и $n = 2$ изображены на рис. 70. Видно, что величина n представляет собой число полуволн синусоиды, по которой изогнется брус. Брус всегда изогнется по наименьшему числу полуволн, допускаемому его опорными устройствами, так как его энергия деформации в этом случае будет минимальна. Поэтому принимаем $n = 1$.

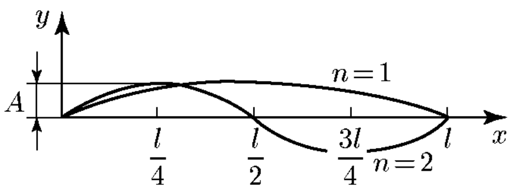


Рис. 70

Только эта первая критическая сила и имеет реальный физический смысл. Таким образом, для шарнирно опертого по концам бруса критическая сила определяется по формуле

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{\min}}{l^2}. \tag{12.7}$$

12.3. Влияние опорных закреплений бруса на критическую силу

Вывод формулы Эйлера (12.5) осуществлен для бруса с шарнирно закрепленными концами. Эта формула имеет универсальный характер и справедлива для любого способа крепления бруса. Применим эту формулу для определения критической силы бруса с заделанными концами (рис. 71). Как видим, число полуволн изогнутой оси в этом случае $n = 2$, и, следовательно, критическая сила при данных опорных устройствах равна

$$P_{\text{кр}} = \frac{4\pi^2 EJ_{\text{min.}}}{l^2}. \qquad (12.8)$$

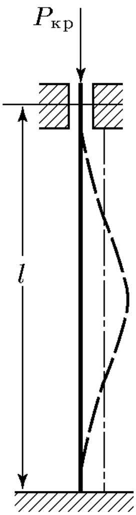


Рис. 71

Этот результат можно переписать в виде

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min.}}}{(0{,}5l)^2}. \qquad (12.9)$$

Рассмотрим пример определения критической силы в случае, когда брус изгибается не по целому числу полуволн синусоиды (рис. 72) – брус, защемленный одним концом и шарнирно опертый другим.

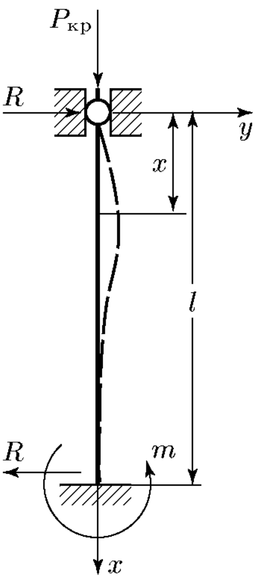


Рис. 72

Данный случай представляет собой статически неопределимую систему. Со стороны шарнирной опоры возникает горизонтальная реакция опоры R. Изгибающий момент в произвольном сечении бруса будет равен

$$M(x) = Rx - P_{\text{кр}}y,$$

а дифференциальное уравнение упругой линии будет иметь вид

$$EJy'' = Rx - P_{\text{кр}}y, \text{ или } \quad y'' + \alpha^2 y = \frac{Rx}{EJ}.$$

Общее решение этого уравнения имеет вид

$$y(x) = A\sin\alpha x + B\cos\alpha x + \frac{Rx}{P_{\text{кр}}}.$$

Используя условия на концах бруса, выразим постоянные A и B через R.

При $x = 0$ прогиб $y = 0$, следовательно, $B = 0$.

При $x = l$ угол поворота сечения равен нулю, поэтому $y'(l) = 0$. Из этого условия получаем

$$A = \frac{R}{P_{\text{кр}} \alpha \cos \alpha l},$$

и уравнение изогнутой оси приобретает следующий вид:

$$y(x) = \frac{R}{P_{\text{кр}}} \left(x - \frac{\sin \alpha x}{a \cos \alpha x} \right).$$

Условие $y(l) = 0$ будет выполнено, если

$$l - \frac{\sin \alpha l}{a \cos \alpha l} = 0.$$

Отсюда получаем следующее трансцендентное разрешающее уравнение для определения величины α:

$$\operatorname{tg} \alpha l = \alpha l.$$

Наименьший корень этого уравнения определяет первую критическую силу. Наименьший, отличный от нуля, корень этого уравнения

$$\alpha l = 4{,}493 = 1{,}43\,\pi.$$

Принимая $\alpha l = 1{,}43\,\pi$, получаем следующее выражение для критической силы:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{\min.}}{(0{,}7l)^2}. \qquad (12.10)$$

Проведя подобный вывод формулы для критической силы применительно к брусу, защемленному с одной стороны (рис. 73), получаем следующее выражение:

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E J_{\min.}}{(2l)^2}. \qquad (12.11)$$

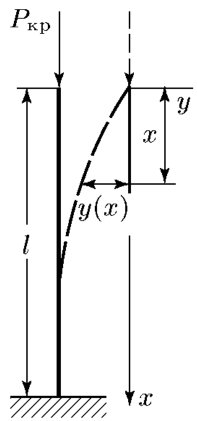


Рис. 73

Сопоставляя формулы критической силы для бруса, закрепленного различным образом, легко видеть, что все они имеют одинаковое строение. Обобщая их, запишем формулу Эйлера в виде

$$P_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EJ_{\text{min.}}}{(\mu l)^2}.$$

Здесь $\mu = \frac{1}{n}$ – величина, обратная числу полуволн n синусоиды, по которой изогнется брус. Постоянная μ называется *коэффициентом приведения длины*, а произведение μl – *приведенной длиной бруса*. Случай шарнирного закрепления концов бруса называется *основным*. Таким образом, критическая сила для любого случая закрепления бруса может быть вычислена по формуле для основного случая с заменой действительной длины бруса его приведенной длиной.

12.4. Пределы применимости формулы Эйлера

Формула Эйлера описывает упругое поведение материала под нагрузкой. Это следует из того факта, что в нее входит константа упругости E, и в записи уравнения изогнутой оси использовано условие малых перемещений. Таким образом, применение ее ограничено предельным напряжением $\sigma_{\text{пц}}$, т.е. в тех случаях, когда потеря устойчивости наступает в упругой области деформирования материала:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{P_{\text{кр}}}{F} = \frac{\pi^2 EJ_{\min}}{F(\mu l)^2} \le \sigma_{\text{пц}}.$$

Используя соотношение $J = Fi^2$, где i – наименьший радиус инерции поперечного сечения бруса, запишем это условие так:

$$\sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 Ei^2}{(\mu l)^2} \le \sigma_{\text{пц}}, \quad \text{или} \quad \sigma_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} \le \sigma_{\text{пц}}. \tag{12.12}$$

Безразмерная величина λ называется *гибкостью бруса* и равна:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i}. \tag{12.13}$$

Гибкость бруса является обобщенной геометрической характеристикой бруса, учитывающей соотношение между его поперечными размерами и длиной. С учетом гибкости бруса условие применимости формулы Эйлера запишется так:

$$\lambda \geq \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\text{пц}}}}.$$

Так для конструкционной малоуглеродистой стали ($\sigma_{\text{пц}} = 210$ МПа и $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ МПа) формулой Эйлера можно пользоваться лишь при гибкости бруса большей, чем $\lambda \geq 3{,}14\sqrt{\dfrac{2{,}1 \cdot 10^5}{210}} \approx 100.$

12.5. Устойчивость сжатого бруса при напряжениях, превышающих предел пропорциональности

При напряжениях, превышающих предел пропорциональности, формула Эйлера дает завышенные значения критической силы и поэтому не может быть использована для расчета. В то же время при напряжении, равном пределу текучести материала $\sigma_{\text{т}}$, расчет на устойчивость сжимаемого бруса перестает быть актуальным, поскольку определяющим становится расчет на прочность. Этому состоянию отвечают малые значения гибкости бруса. На рис. 74 представлена обобщенная диаграмма предельного состояния сжимаемого бруса в зависимости от его гибкости. Для средних значений гибкости, отвечающих диапазону изменения напряжения от $\sigma_{\text{т}}$ до $\sigma_{\text{пц}}$, критическую силу обычно определяют по линейной зависимости, предложенной профессором Петербургского института путей сообщения Ф. Ясинским (1902 г.):

$$\sigma_{\text{кр}} = \alpha - b\lambda, \tag{12.14}$$

где λ – гибкость, а a и b – величины, зависящие от материала бруса. Например, для стали Ст. 3 и λ, лежащей в пределах от 40 до 100, можно принять $a = 330$ МПа и $b = 1{,}44$ МПа.

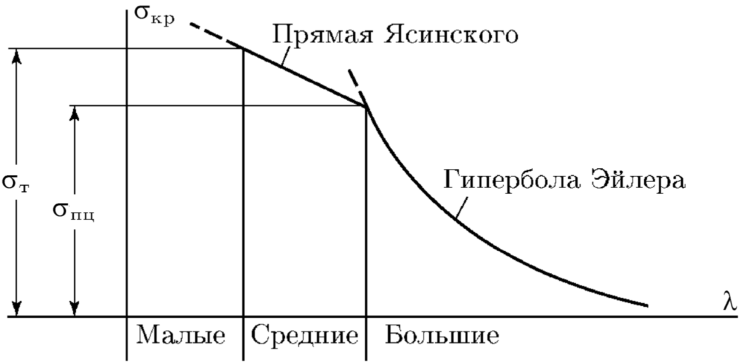


Рис. 74

Эта формула получена в результате обработки значительного числа экспериментов.

13. РАСЧЕТЫ ЗА ПРЕДЕЛАМИ УПРУГОСТИ

Рассмотренные расчеты конструкций осуществлялись на основе предположения, что в конструкции недопустимы пластические деформации. Если в опасной точке напряжение близко к пределу текучести материала, то во всех остальных точках напряжения могут быть значительно ниже предела текучести материала, т.е. материал конструкции в основном оказывается недогруженным.

С ростом нагрузок материал во все большем количестве точек будет переходить в пластическое состояние, и этот процесс будет продолжаться до тех пор, пока пластическая деформация не охватит достаточно большой объем конструкции. При этом перемещение точек конструкции достигает таких значений, что нарушится нормальное функционирование конструкции. Такое состояние называется *предельным*, а нагрузки, соответствующие предельному состоянию, называются *предельными*.

Допускаемая нагрузка определяется делением предельной нагрузки на коэффициент запаса прочности. Определенная таким образом допускаемая нагрузка всегда больше допускаемой нагрузки, определенной по методу допускаемых напряжений.

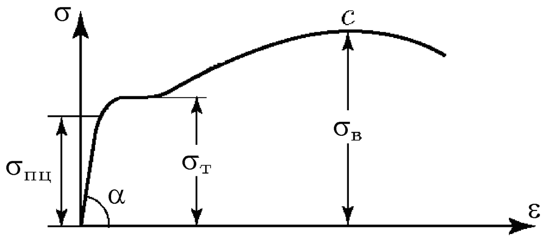


Рис. 75

Расчет по предельному состоянию предполагает, что зависимость между напряжением и деформацией перестает быть линейной и становится более сложной, определяемой видом диаграммы растяжения (рис. 75). Предполагается, что пластические деформации ограничены малыми величинами, ибо, в противном случае, возникшие в конструкции деформации приведут к нарушению нормального ее функционирования. Связь между напряжением и деформацией задается функцией $\sigma = f(\varepsilon)$ диаграммы растяжения, схематизированной для целей расчета. Например, диаграмму растяжения малоуглеродистой стали можно представить диаграммой, состоящей из двух прямолинейных участков (рис. 76). До предела текучести (участок OA) имеет место обычная линейная зависимость между напряжением и деформацией, а дальше, когда напряжение становится равным пределу текучести, напряжение не зависит от деформации (участок AB). Такой материал называется *упругоидеально-пластичным*, или просто *идеально-пластичным*. Такая схематизация имеет исключительно важное значение, поскольку она достаточно точно отражает поведение конструкционных материалов, диаграммы деформирования которых имеют площадки текучести.

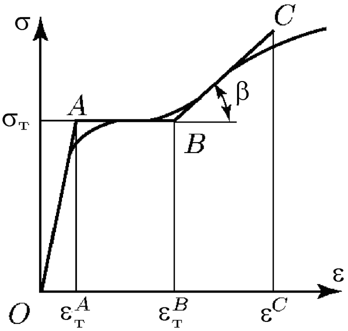


Рис. 76

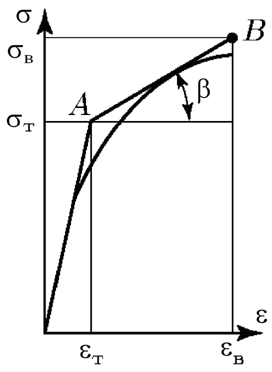


Рис. 77

В тех случаях, когда диаграмма растяжения не имеет явно выраженной площадки текучести, ее можно аппроксимировать двумя прямыми, как показано на рис. 77. Прямая AB характеризует участок упрочнения. Разрушение происходит при напряжении $\sigma_в$. Использование в расчете вместо диаграммы, приведенной на рис. 77, диаграммы идеально-пластичного материала (см. рис. 76) позволяет получить результат с запасом прочности. Поэтому диаграмма идеально-пластичного материала лежит в основе расчетов конструкций по нагрузкам, исчерпывающим их несущую способность.

Пример 10. Система из трех стержней одинакового поперечного сечения нагружена силой P (рис. 78, *а*). Определить по методу предельного состояния и методу допускаемых напряжений предельную нагрузку $P'_{пр}$ и $P''_{пр}$.

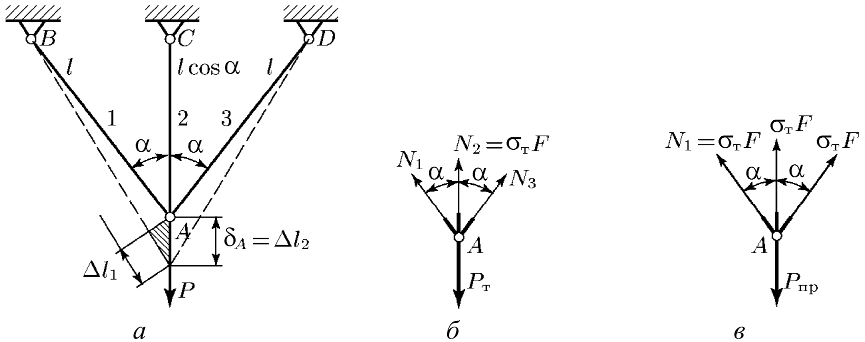


Рис. 78

При малых значениях силы P во всех стержнях системы возникают упругие деформации, а усилия в стержнях определяются обычными методами раскрытия статической неопределимости с использованием условий равновесия и совместности деформации отдельных элементов системы:

$$N_1 = N_3 = \frac{P\cos^2\alpha}{1+2\cos^3\alpha}; \quad N_2 = \frac{P}{1+2\cos^3\alpha}.$$

При возрастании силы P напряжения в стержне 2 быстрее достигнут предела текучести, так как $N_1 < N_2$, и материал среднего стержня потечет раньше, чем боковых. Полагая

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{F} = \sigma_т,$$

находим предельную нагрузку при расчете по допускаемым напряжениям (рис. 78, *б*):

$$P'_{пр} = \sigma_т F\left(1+2\cos^3\alpha\right).$$

При нагрузке $P_т$ происходит исчерпание несущей способности лишь среднего стержня. Боковые стержни, оставаясь в упругом состоянии, препятствуют развитию пластической деформации среднего стержня. Дальнейшее увеличение нагрузки P не приведет к увеличению напряжения в среднем стержне, как следует из диаграммы идеально-пластического материала, и приведет к росту напряжений в боковых стержнях, пока те не достигнут значения $\sigma_т$. С этого момента дальнейшее возрастание нагрузки P невозможно, поскольку приводит к неограниченному перемещению точек конструкции, т. е. система превращается в геометрически изменяемую. Для рассматриваемой стержневой системы предельная нагрузка определяется из условия равновесия узла A, когда в каждом стержне возникает нормальная сила, равная $\sigma_т F$ (рис. 78, *в*):

$$P''_{пр} = \sigma_т F(1 + 2\cos\alpha).$$

При всех значениях α, не равных 0° и 90°, имеем $P_{пр} > P_т$, т.е. расчет по предельному состоянию дает большую предельную нагрузку, чем по допускаемым напряжениям.

Обратим внимание на тот факт, что расчет по предельному состоянию системы, приведенной на рис. 78, *а*, позволяет не учитывать статическую неопределимость системы. Таким образом, переход материала в каких-либо связях в пластическое состояние выключает эти связи, что приводит к снижению степени статической неопределимости и, в конечном итоге, к превращению конструкции в механизм. В этой связи возможны два способа определения предельной нагрузки – кинематический и статический.

Пример 11. Определить предельную нагрузку для системы трех стержней (см. пример 10), если диаграмма растяжения материала стержней аппроксимируется двумя прямыми (см. рис. 77).

Уравнение упругого участка диаграммы

$$\sigma = E\varepsilon \text{ при } \sigma < \sigma_т.$$

Для участка упрочнения

$$\sigma - \sigma_т = E_т(\varepsilon - \varepsilon_т) \text{ при } \sigma > \sigma_т,$$

где $E_т$ – модуль упрочнения, равный $\operatorname{tg}\beta$.

Предельной будем считать нагрузку разрушения среднего стержня. Это произойдет, когда деформация среднего стержня ε_2 станет равной $\varepsilon_в$, а напряжение – $\sigma_в$. К моменту обрыва среднего стержня боковые стержни получат деформацию

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{\text{в}} \cos^2 \alpha .$$

Напряжение при этом в боковых стержнях будет равно

$$\sigma_1 = \sigma_{\text{т}} + E_{\text{т}} (\varepsilon_{\text{в}} \cos^2 \alpha - \varepsilon_{\text{т}}),$$

если $\varepsilon_{\text{в}} \cos^2 \alpha > \varepsilon_{\text{т}}$, или

$$\sigma_1 = E\varepsilon_{\text{в}} \cos^2 \alpha,$$

если $\varepsilon_{\text{в}} \cos^2 \alpha < \varepsilon_{\text{т}}$.

Предельная нагрузка $P''_{\text{пр}}$, определяемая из условия равновесия узла A, для этих двух случаев будет равна:

$$P''_{\text{пр}} = F\left[(1 + 2\cos\alpha)(\sigma_{\text{т}} - E_{\text{т}}\varepsilon_{\text{т}}) + E_{\text{т}}\varepsilon_{\text{в}}(1 + 2\cos^3\alpha)\right],$$

или

$$P''_{\text{пр}} = F\left[2E\varepsilon_{\text{в}} \cos^3\alpha + \sigma_{\text{т}} + E_{\text{т}}(\varepsilon_{\text{в}} - \varepsilon_{\text{т}})\right].$$

Пример 12. Рассмотрим упругопластический изгиб бруса. Балка на двух опорах нагружена в середине пролета сосредоточенной силой P (рис. 79). Предположим, что поперечное сечение балки имеет две оси симметрии, одна из которых расположена в плоскости действия нагрузки, и что диаграммы растяжения и сжатия материала одинаковы. Кроме того, при определении предельного значения силы P будем пренебрегать, как и при расчете по допускаемым напряжениям, касательными напряжениями в поперечных сечениях балки.

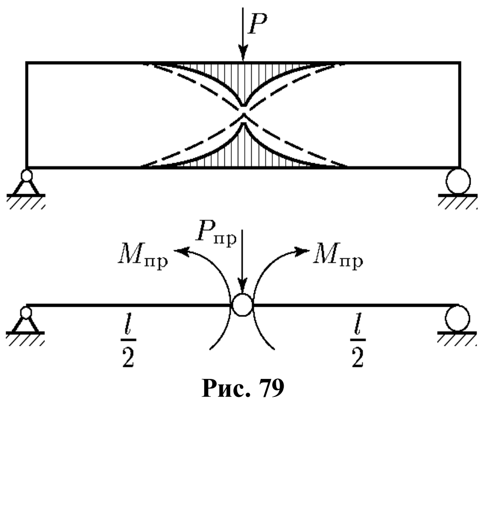


Рис. 79

При расчете по допускаемым напряжениям предельным будет такое значение силы $P = P_{\text{т}}$, при котором в наиболее удаленных от нейтральной оси волокнах опасного сечения балки нормальные напряжения достигнут предела текучести материала. Предельное значение изгибающего момента при расчете по допускаемым напряжениям $M_{\text{т}} = \sigma_{\text{т}} W_z$. Из этого условия определяется предельное значение нагрузки для рассматриваемой балки: $P_{\text{т}} = 4\sigma_{\text{т}} \dfrac{W_z}{l}$. Но при этой нагрузке несущая способность балки не исчерпана. При дальнейшем увеличении нагрузки напряжения в крайних волокнах согласно диаграмме идеально-пластического тела остаются постоянными и равными $\sigma_{\text{т}}$, несмотря на рост деформации, а растут напряжения в соседних точках, пока они не достигнут величины $\sigma_{\text{т}}$. В результате в балке появятся две пластические зоны (см. рис. 79), которые по мере роста нагрузки будут распространяться как по направлению к нейтральной линии сечения, так и в обе стороны от места их возникновения.

В поперечном сечении балки характер распределения напряжений будет изменяться от линейного к упругопластическому и полностью пластическому (рис. 80). При идеальной пластичности материала в поперечном сечении (рис. 80, *в*) дальнейший рост напряжений в пластической области невозможен, хотя деформации могут расти неограниченно при постоянных напряжениях, т. е. две части балки начнут поворачиваться друг относительно друга вокруг центра пластической области, который называется *пластическим шарниром*, под действием предельного момента

$$M_{\text{пр}} = 2\int\limits_{\frac{F}{2}} \sigma_{\text{т}} y dF = 2\sigma_{\text{т}} S_z ,$$

где S_z – статический момент половины площади сечения относительно его нейтральной линии.

В случае балки прямоугольного поперечного сечения

$$M_{\text{пр}} = 2\sigma_{\text{т}} S_z = \frac{\sigma_{\text{т}} b h^2}{4} \quad \text{или} \quad P_{\text{пр}} = \frac{\sigma_{\text{т}} b h^2}{l} ,$$

где b − основание, а h − высота.

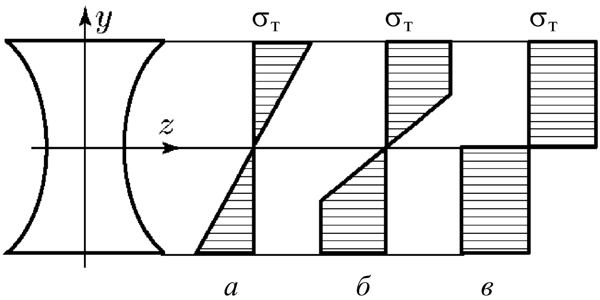


Рис. 80

Предельная нагрузка $P_{\text{т}}$ при расчете этой же балки по допускаемым напряжениям в опасной точке в случае прямоугольного сечения равна

$$P_{\text{т}} = 4\sigma_{\text{т}} \frac{W_z}{l} = \frac{2}{3}\left(\frac{\sigma_{\text{т}} b h^2}{l}\right),$$

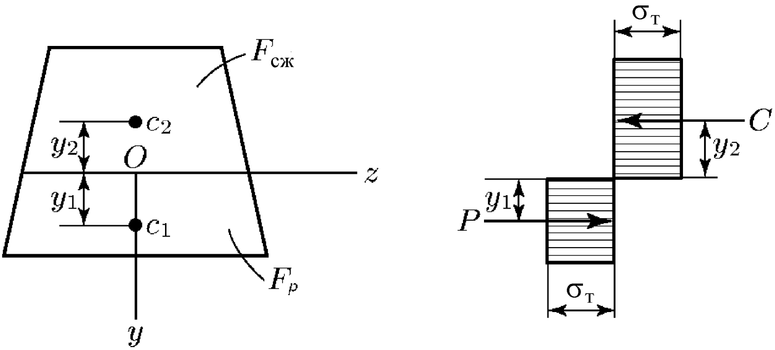
т.е. в 1,5 раза меньше, чем при расчете по предельному состоянию.

Если принять одинаковый запас прочности, то расчет по нагрузкам, исчерпывающим несущую способность, дает в 1,5 раза большую допускаемую нагрузку, чем расчет по допускаемым напряжениям в опасной точке.

Если поперечное сечение балки несимметрично относительно оси z, например имеет трапециевидную форму (рис. 81, *а*), распределение напряжений в сечении будет с увеличением нагрузки меняться так, как показано на рис. 81, *б*. Положение нейтральной линии может быть определено с помощью уравнения равновесия $N = 0$, отражающее тот факт, что равнодействующая элементарных нормальных сил, распределенных по поперечному сечению, должна быть равна нулю:

$$N = \int_F \sigma_{\text{т}} dF = 0\,.$$

Из этого уравнения следует, что при расширении зоны, захваченной пластическим деформированием, нейтральная линия будет смещаться от центральной оси и при достижении предельной нагрузки будет делить площадь сечения F на две равные части $F_p = F_{\text{сж}}$.



а *б*

Рис. 81

В этом случае предельный момент легко определить как сумму моментов растягивающих (*P*) и сжимающих (*C*) сил, сосредоточенных в центрах тяжести соответствующих частей, относительно нейтральной линии, как показано на рис. 81, *б*:

$$M_{пр} = Py_1 + Cy_2 = 0{,}5F\sigma_т(y_1 + y_2).$$

14. КОНЦЕНТРАЦИЯ НАПРЯЖЕНИЙ. ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ МАТЕРИАЛОВ К КОНЦЕНТРАЦИИ НАПРЯЖЕНИЙ

Концентрацией напряжений называется увеличение напряжений в малых областях, примыкающих к местам с резким изменением формы поверхности тела, размеров его сечения или с локализованной неоднородностью материала внутри тела. Реальные конструкции всегда имеют зоны, в которых проявляется локальная концентрация напряжений. Пример таких концентраторов приведен на рис. 82. Это – корень зуба шестерни (рис. 82, *а*), шпоночный паз вала (рис. 82, *б*), резьба болта (рис. 82, *в*), уступ вала (рис. 82, *г*), заклепочное или болтовое соединение (рис. 82, *д*), сварное соединение (рис. 82, *е*) и др. В местах концентрации напряжений локальные напряжения часто во много раз превышают номинальные напряжения, т.е. определенные без учета эффекта концентрации напряжений. Степень концентрации напряжений зависит от вида нагружения, типа материала, размера и геометрической формы концентратора.

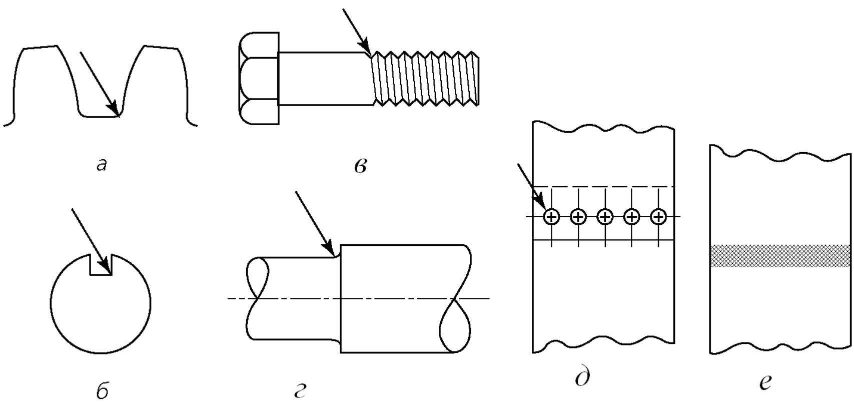


Рис. 82

Концентраторы напряжений можно разделить на локальные и размытые. К локальным будем относить те, в которых объем области, занятой материалом с повышенными напряжениями, пренебрежимо мал по сравнению со всем объемом нагруженного тела. В случае размытых концентраторов напряжений объем, занятый материалом с повышенными напряжениями, составляет значительную часть всего объема нагруженного тела. Таким образом, при локальной концентрации напряжений общие размеры и форма всего нагруженного тела не будут существенно меняться в случае текучести материала в зоне концентрации, тогда как при размытой концентрации напряжений они существенно изменяются. Например, малые отверстия и скругления малого радиуса считаются обычно весьма локальными концентраторами напряжений, а крюки, шарнирные соединения серег с проушинами относятся к размытым концентраторам напряжений. Последствия влияния различных концентраторов напряжений на материал в хрупком и пластичном состояниях при статическом и циклическом нагружении в виде коэффициентов концентрации напряжений представлены в табл. 2.

Таблица 2

Тип концентратора напряжений	Нагружение	Тип материала	Вид разрушения	Коэффициент концентрации напряжений
Размытый	Статическое	Пластичный	Большая область текучести	K_σ
Размытый	Статическое	Хрупкий	Хрупкое разрушение	α_σ
Размытый	Циклическое	Любой	Усталостное разрушение	K_f
Локальный	Статическое	Пластичный	Перераспределение напряжений без разрушения	1
Локальный	Статическое	Хрупкий	Хрупкое разрушение	α_σ
Локальный	Циклическое	Любой	Усталостное разрушение	K_f

В последнем столбце таблицы в качестве коэффициентов концентрации напряжений указаны величины K_σ, α_σ и K_f.

K_σ – эффективный коэффициент концентрации напряжений в пластической области, равный отношению максимального действующего напряжения с учетом перераспределения напряжений за счет пластического деформирования и номинального напряжения $\sigma_{н}$ для ослабленного сечения без учета концентрации напряжения; α_σ – теоретический коэффициент концентрации напряжений, применимый только для упругой области нагружения. Концентрация напряжений при циклическом нагружении учитывается с помощью эффективного коэффициента концентрации напряжений K_f или K_σ.

Коэффициенты концентрации напряжений определяются различными методами. Из экспериментальных методов наибольшее применение нашел метод фотоупругости при исследовании моделей, изготовленных из оптически активных материалов. Просвечивание деформированных моделей поляризованным светом позволяет количественно охарактеризовать распределение напряжений в теле и рассчитать коэффициенты концентрации напряжений. В последние годы расчетный метод конечных элементов в значительной степени потеснил метод фотоупругости.

Наиболее наглядно концентрацию напряжений иллюстрирует распределение напряжений в растягиваемой полосе с центральным эллиптическим отверстием (рис. 83).

Решение было получено Инглисом в 1913 г. Точки наибольшей концентрации напряжений находятся на концах большой оси эллиптического отверстия. Напряжения в этих точках равны:

$$\sigma_{y\,\max} = \sigma_{н}\left(1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}\right), \tag{14.1}$$

где a – размер большей полуоси эллипса; ρ – радиус кривизны вершины эллипса.

Таким образом, коэффициент концентрации напряжений равен $1 + 2\sqrt{\frac{a}{\rho}}$. Для круглого отверстия при $a = \rho$ максимальная концентрация напряжений равна трем. Для вытянутого эллипса с увеличением отношения $\frac{a}{\rho}$ повышается концентрация напряжений.

Для трещины концентрация напряжений будет весьма значительной. В то же время при достижении предела текучести появляется локальная текучесть, которая приводит к перераспределению напряжений и, как следствие, к снижению концентрации напряжений.

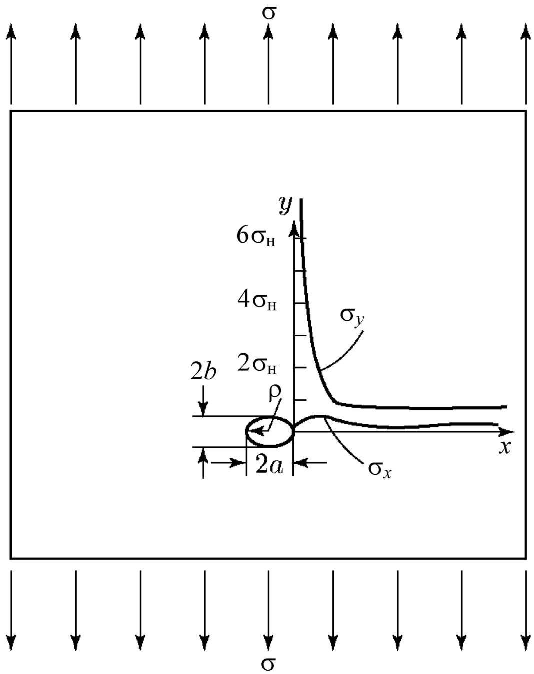


Рис. 83

Обычно в зоне концентрации напряжений усложняется и характер напряженного состояния. Например, в окрестности краевых симметричных надрезов или центрального отверстия при осевом растяжении пластинки напряженное состояние становится двухосным.

Рассмотрим распределение напряжений в растягиваемом цилиндрическом образце с кольцевой выточкой. На рис. 84, *а* показаны эпюры главных осевых σ_l, радиальных σ_r и окружных σ_t растягивающих напряжений, действующих в опасном наименьшем сечении в упругой области нагружения.

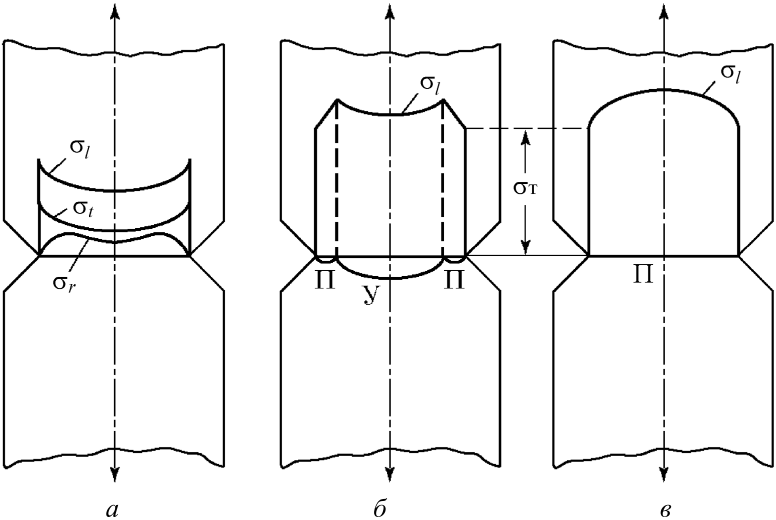


Рис. 84

Во внутренних точках сечения возникает трехосное растяжение, а в периферийных – двухосное. Установим характер распределения напряжений в упругопластической области, считая, что материал – идеально-пластический на поверхности выточки с пределом текучести $\sigma_т$, и используя условие текучести в соответствии с третьей теорией прочности. В этом случае в контурных точках сечения $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_l - \sigma_r = \sigma_l = \sigma_т$, т.е. на всех стадиях деформирования напряжения σ_l не превышают предела текучести материала. Во внутренних точках $\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_l - \sigma_r = \sigma_т$, и при увеличении нагрузки в пластически деформированной зоне П напряжение $\sigma_l = \sigma_т + \sigma_r$ возрастает (эпюра на рис. 84, *б*). При неограниченной пластичности материала пластическая деформация пройдет по всему сечению при увеличении напряжений σ_l с приближением к оси образца (эпюра на рис. 84, *в*). Таким образом, концентрация напряжений в пластичном материале может привести к увеличению несущей способности детали, которая будет определяться эпюрой σ_l:

$$P = \int_F \sigma_l dF. \qquad (14.2)$$

В хрупком материале разрушение наступает, когда напряжение σ_l в контурных точках сечения (σ_{max}) достигает предела прочности материала. Снижение номинальной прочности образца с надрезом по сравнению с прочностью гладкого образца соответствует коэффициенту концентрации напряжений в упругой области, т.е. теоретическому коэффициенту концентрации напряжений. Для многих случаев концентрации напряжений решения можно найти в справочниках по концентрации напряжений.

Критерием чувствительности материала к концентрации напряжений является эффективный коэффициент концентрации напряжений K_σ, равный отношению предела прочности гладкого образца $\sigma_в$ к условному пределу прочности надрезанного образца $\sigma_{вн}$. Условный предел прочности надрезанного образца равен отношению предельной нагрузки, выдерживаемой образцом с надрезом, к площади наименьшего сечения образца. Следует отметить, что эффективный коэффициент концентрации напряжений является условной характеристикой, поскольку зависит не только от свойств материала, но и геометрии образца, и способа его нагружения. Поэтому результаты испытания надрезанных образцов не могут быть непосредственно перенесены на конструкцию произвольной формы и размеров с концентраторами различной формы.

При наличии концентрации напряжений существенно снижается деформация образца по сравнению с деформацией гладкого образца. Это связано с локализацией деформации у концентратора напряжений. Одновременно происходит изменение характера напряженного состояния у концентратора от осевого растяжения к объемному растяжению и снижению в связи с этим τ_{max}, что в конечном счете приводит к охрупчиванию материала конструкции.

Наибольшую опасность концентрация напряжений представляет при нагружении конструкции циклически изменяющимися напряжениями. Связано это с тем, что уровень номинальных напряжений, как правило, существенно ниже предела текучести материала, и поэтому эффективный коэффициент концентрации напряжений K_σ близок к теоретическому и экспериментально находится как отношение

$$K_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_{-1\text{к}}}, \qquad (14.3)$$

$$K_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{\tau_{-1\text{к}}}, \qquad (14.4)$$

где $\sigma_{-1\text{к}}$ и $\tau_{-1\text{к}}$ – пределы выносливости, определенные по номинальным напряжениям для образцов, имеющих концентрацию напряжений и такие же размеры поперечного сечения, как и у гладкого образца.

Часто используется приближенная оценка эффективного коэффициента концентрации напряжений по формулам:

$$K_{\sigma} = 1 + q(\alpha_{\sigma} - 1), \qquad (14.5)$$

$$K_{\tau} = 1 + q(\alpha_{\tau} - 1), \qquad (14.6)$$

где q – коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений.

Так, для высокопрочных легированных сталей значения q близки к единице. Для конструкционных сталей q = 0,6 ÷ 0,8, причем более прочным сталям соответствуют большие значения q.

Для многих конструкционных материалов при долговечности менее 1000 циклов, когда реализуются условия малоциклового нагружения, эффективный коэффициент концентрации напряжений равен единице. С увеличением долговечности материала растет эффективный коэффициент концентрации напряжений.

Наиболее острым концентратором напряжений является трещина. Испытание образцов с исходной трещиной позволяет наиболее жестко провести оценку чувствительности материала к концентратору напряжений. На основе испытания образцов с исходной трещиной развивается механика разрушения, рассматривающая поведение материала с исходной трещиной и позволяющая количественно оценивать сопротивление материала разрушению. В этих испытаниях определяются такие характеристики трещиностойкости материала, как критический коэффициент интенсивности напряжений K_{1c} (вязкость разрушения), критическое раскрытие в вершине трещины δ_c, инвариантный J_c-интеграл (упругопластическая вязкость разрушения), диаграмма усталостного разрушения.

15. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ

Большинство деталей машин в рабочих условиях испытывают переменные напряжения, циклически изменяющиеся во времени. Они возникают в детали от изменения нагрузки, а также в связи с изменением положения их сечений по отношению к постоянной нагрузке (например, вращение детали). Опыт показывает, что при переменных напряжениях после некоторого числа циклов нагружения может наступить внезапное разрушение детали. Это явление называется *усталостью материалов*. Различают два вида усталости: многоцикловое усталостное разрушение, характеризуемое повреждением и разрушением материала за большое число циклов нагружения (более 10^5) при напряжениях, меньших предела текучести материала, и малоцикловая усталость, которая наблюдается при относительно малом числе циклов (порядка $10^3 - 10^5$), когда действующие напряжения вызывают упругопластические деформации, что характерно для высоконапряженных конструкций. Различие условий накопления повреждений и разрушения при много- и малоцикловой усталости определяет необходимость раздельного их рассмотрения.

15.1. Многоцикловая усталость. Основные понятия и определения

Особенность *многоцикловой усталости* заключается в том, что предшествующие разрушению повреждения происходят в условиях очень малых или в отсутствии циклических макропластических деформаций. Разрушение при этом имеет хрупкий характер. Начальное повреждение и разрушение связаны с наличием пластических деформаций в отдельных микрообъемах, что обусловлено неоднородностью структуры реальных материалов. Можно выделить три стадии этого процесса: накопление микроскопических повреждений до образования первых макротрещин; развитие одной или нескольких трещин; развитие разрушения с разделением тела на части. Обычно эти три стадии хорошо отражаются в картине усталостного излома: наличие зоны зарождения трещины, как правило, около концентратора напряжений, зоны ее распространения (гладкая притертая зона) и зоны «долома». Число циклов до разрушения зависит от характеристики цикла нагружения. Законы изменения переменных напряжений могут быть различными, но все их можно представить в форме простейших гармоник синусоиды или косинусоиды. На рис. 85, *а* показано периодическое изменение напряжений во времени от наибольшего $\sigma_{\max}$ до наименьшего $\sigma_{\min}$ и обратно. Любой цикл напряжений может быть представлен средним напряжением $\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2}$, амплитудой переменного напряжения $\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}$ и коэффициентом асимметрии цикла $R = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}}$.

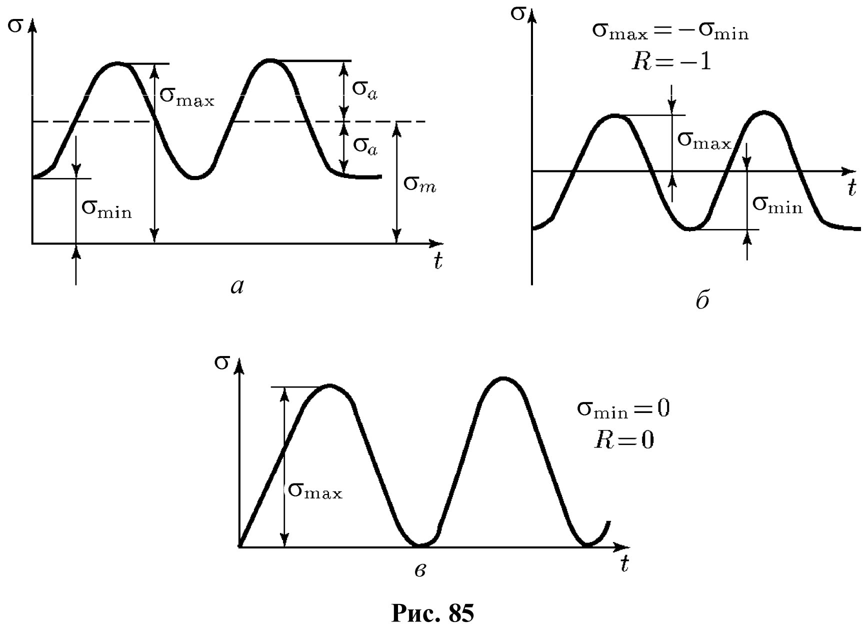


Рис. 85

Развитие усталостного разрушения идет особенно интенсивно при изменении знака напряжений. Наиболее опасным является симметричный цикл нагружения (рис. 85, *б*). Поэтому чаще всего испытания на усталость проводят при симметричном цикле нагружения, когда $R = -1$. Такой цикл обозначается R_{-1}. Симметричный цикл осуществляется, как правило, при нагружении образца по схеме так называемого кругового изгиба: цилиндрический образец вращается в плоскости действия постоянной изгибающей нагрузки, прикладываемой по схеме чистого или поперечного изгиба. При этом напряжения в периферийных точках сечения образца изменяются по синусоидальному закону. Широко используется также пульсирующий, или отнулевой цикл нагружения (рис. 85, *в*), легко реализуемый при испытании на пульсаторах.

Результаты испытаний представляются в виде кривых усталости, отражающих зависимость числа циклов до полного разрушения N_k от максимального по модулю напряжения цикла $|\sigma|_{\max}$ при заданном R_σ (рис. 86, *а*). Кривые усталости, построенные в логарифмических координатах $\lg|\sigma|_{\max} - \lg N_k$, имеют вид ломанных линий с характерными точками перелома и более наглядны (рис. 86, *б*). Левая ветвь кривой усталости ограничена сверху уровнем временного сопротивления $\sigma_\text{в}$. По мере уменьшения уровня $\sigma_{\max}$ возрастает число циклов до разрушения (циклическая долговечность). Важнейшей характеристикой многоцикловой усталости является *предел выносливости* σ_R – наибольшее напряжение цикла, при котором не происходит разрушения после произвольно большого или заданного числа циклов нагружения (асимптота, на которую выходит кривая *1* на рис. 86). Многие цветные и черные металлы при повышенных температурах и коррозионном воздействии не имеют горизонтального участка на кривой усталости (кривая *2* на рис. 86). В этом случае определяют предел ограниченной выносливости, который соответствует определенной базе испытания $10^7 - 10^8$ циклов. При наличии горизонтального участка испытания ограничиваются продолжительностью 10^7 циклов.

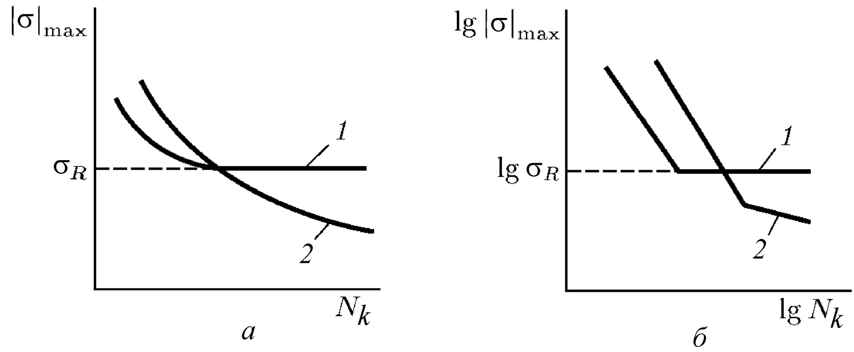


Рис. 86

Испытания на усталость могут проводиться не только при нагружении образца по схеме чистого или поперечного изгиба, но и по схеме растяжения-сжатия и кручения. Результаты экспериментов показывают, что предел выносливости одного и того же материала при растяжении и кручении меньше предела выносливости при изгибе:

$$(\sigma_{-1})_p = (0{,}7 \div 0{,}8)\cdot\sigma_{-1} \quad \text{и} \quad \tau_{-1} = (0{,}4 \div 0{,}7)\cdot\sigma_{-1}.$$

Была установлена приближенная связь между пределом выносливости σ_{-1} и временным сопротивлением материала $\sigma_в$: для стали $\sigma_{-1} \approx 0{,}5\sigma_в$, для цветных металлов $\sigma_{-1} = (0{,}25 \div 0{,}5)\sigma_в$.

Кривые усталости при $R_\sigma = -1$ описываются уравнением

$$\sigma_a^m \cdot N_k = (1{,}75\cdot\sigma_в)^m \quad \text{или} \quad \sigma_a^m \cdot N_k = \sigma_{-1}^m N_0, \qquad (15.1)$$

где $\sigma_в$ – временное сопротивление; N_0 – число циклов, соответствующее точке перелома кривой усталости в координатах $\lg\sigma_a - \lg N_k$; m – параметр, характерный для данного материала.

15.2. Зависимость предела выносливости от степени асимметрии цикла. Диаграмма предельных циклов

Результаты испытаний при различных R обобщаются построением диаграммы предельных циклов, точки которой отвечают пределам выносливости σ_R. Примером такой диаграммы является диаграмма предельных амплитуд цикла в координатах $\sigma_a - \sigma_m$ (рис. 87), где точка *A* соответствует пределу выносливости σ_{-1}, а точка *B* – временному сопротивлению $\sigma_в$. Внутри области, ограниченной координатными осями σ_a и σ_m и кривой предельных циклов, не происходит разрушения при неограниченном числе циклов нагружения. За пределами этой области может происходить разрушение после определенного числа циклов нагружения. Как видим, увеличение σ_m приводит к уменьшению предельной амплитуды σ_a.

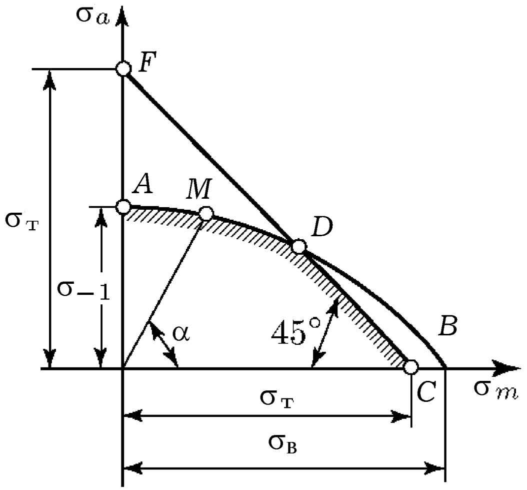


Рис. 87

Обычно диаграмма предельных амплитуд для расчетных целей схематизируется путем замены криволинейной диаграммы прямолинейными участками.

Из всей области рабочих напряжений исключают ту область, где максимальные напряжения $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$ превосходят предел текучести материала. Для этого через точку *C*, соответствующую пределу текучести на диаграмме, проводят прямую *CF* под углом 45° (см. рис. 87), уравнение которой

$$\sigma_{max} = \sigma_m + \sigma_a = \sigma_т . \qquad (15.2)$$

Начальный участок диаграммы обычно заменяют прямой, проходящей через две точки A и E, соответствующие симметричному предельному циклу ($\sigma_a = \sigma_{-1}$, $\sigma_m = 0$) и предельному отнулевому циклу ($\sigma_a = \sigma_m = \dfrac{\sigma_0}{2}$). Уравнение этой прямой имеет вид:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \cdot \sigma_m , \qquad (15.3)$$

где ψ_σ − коэффициент чувствительности к асимметрии цикла, который изменяется в пределах от 0,1 до 0,3.

Ломаная линия *ADC* (рис. 88) ограничивает область безопасной работы конструкции на участке *AD* уравнением (15.3) и на участке *DC* − уравнением (15.2).

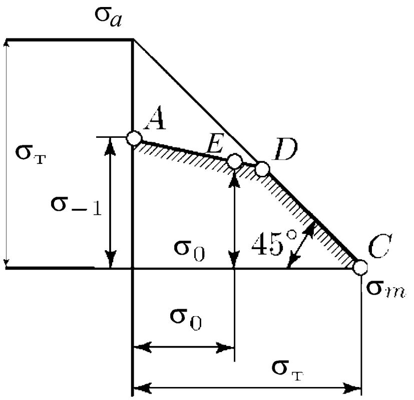


Рис. 88

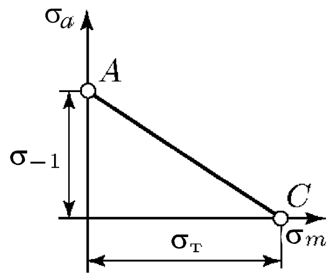


Рис. 89

Соединение точек A и C прямой линией (рис. 89) максимально ограничивает область безопасных рабочих напряжений, что идет в запас прочности. Уравнение этой прямой имеет вид:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_{-1}} + \frac{\sigma_m}{\sigma_т} = 1 . \qquad (15.4)$$

15.3. Факторы, влияющие на предел выносливости

Среди факторов, оказывающих существенное влияние на усталостную прочность, следует отметить концентрацию напряжений, состояние поверхности, абсолютные размеры детали (масштабный фактор), воздействие окружающей среды и ряд других факторов.

Влияние концентратора напряжений учитывается с помощью эффективного коэффициента концентрации напряжений K_σ, представляющего собой отношение предела выносливости образца диаметром d без концентратора к пределу выносливости (в номинальных напряжениях) такого же образца с концентрацией напряжений, характеризуемой коэффициентом концентрации в упругой области α_σ. Коэффициент K_σ увеличивается с ростом α_σ до некоторого значения, а затем остается практически постоянным. Часто используется выражение $K_\sigma = 1 + q\,(\alpha_\sigma - 1)$, где q – коэффициент чувствительности к концентрации напряжений, меняется от 0 до 1.

Влияние чистоты поверхности на предел выносливости оценивается коэффициентом K_F, равным отношению предела выносливости образца с заданной обработкой поверхности (σ_{-1}) к пределу выносливости такого же образца, но с тщательно шлифованной или полированной поверхностью:

$$K_F = \frac{(\sigma_{-1})}{\sigma_{-1}}, \quad K_F \le 1. \tag{15.5}$$

На рис. 90 приведена зависимость коэффициента K_F от предела прочности $\sigma_\text{в}$ материала для различных видов обработки поверхности.

Влияние абсолютных размеров изделия оценивается с помощью коэффициента $\varepsilon_d = \dfrac{(\sigma_{-1})_d}{(\sigma_{-1})_{d0}}$, где $(\sigma_{-1})_d$ – предел выносливости изделия размером d и $(\sigma_{-1})_{d0}$ – предел выносливости стандартного образца размером d_0 = 7–10 мм. Коэффициент ε_d изменяется в пределах 0,4 ÷ 1. Масштабный эффект проявляется только, когда имеется значительный градиент напряжений.

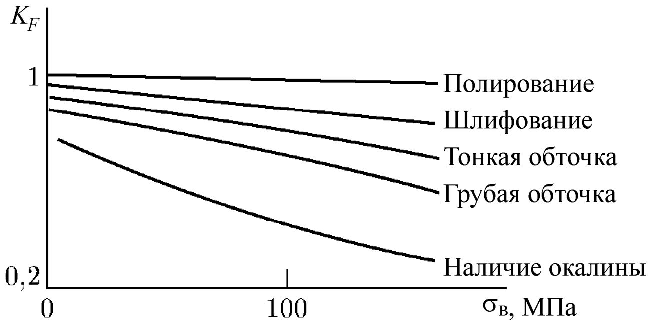


Рис. 90

Экспериментально было показано, что частота изменений напряжений вплоть до 10^4 циклов/мин практически не сказывается на пределе выносливости материала.

При циклическом нагружении с повышением температуры предел выносливости σ_{-1}, как правило, снижается, а при понижении температуры – возрастает. Для стали при температуре до 300 °С предел выносливости практически не изменяется, а выше 300 °С снижается на 15–20 % на каждые 100 °С повышения температуры. При понижении температуры с 20 до −196 °С предел выносливости для некоторых сталей увеличивается более, чем вдвое. Форма кривой усталости при повышении температуры часто изменяется: горизонтальный участок, существовавший при низких и комнатных температурах, переходит в наклонный. Поэтому при повышенных температурах приходится оценивать лишь предел ограниченной выносливости, отнесенный к определенной базе испытания. С повышением температуры, как правило, происходит снижение концентрации напряжений вследствие роста локальной пластической деформации.

Большое влияние на усталостную прочность оказывает коррозионная среда, существенно снижающая предел выносливости металла по сравнению с пределом выносливости в атмосферных условиях. В некоторых случаях отмечается снижение предела выносливости в коррозионной среде до 70–80 %. Причиной такого резкого снижения предела выносливости являются коррозионные повреждения поверхности, вызывающие значительную концентрацию напряжений. Влияние самой концентрации напряжений на выносливость углеродистых сталей зависит от агрессивности среды. Чем выше относительная агрессивность среды, тем меньше влияние концентрации напряжений. Например, предел выносливости гладких образцов из стали 45 на базе $N = 2 \cdot 10^7$ циклов составляет на воздухе 520 МПа, в воде – 155 МПа, в 3 %-м растворе NaCI – 115 МПа, а предел выносливости образцов с концентраторами напряжений – 165, 135 и 105 МПа соответственно. При одновременном действии на металл циклической нагрузки и коррозионной среды частота циклов может существенно влиять на скорость разрушения металлов. Связано это с тем, что для одного и того же числа циклов действие коррозионной среды продолжается в течение большего времени при меньшей частоте циклов. Иллюстрация этого положения представлена на рис. 91: *1*, *2*, *3* – кривые усталости, полученные, соответственно, на воздухе при частоте 1410 циклов/мин, в 3 %-м растворе NaCI при частоте 1410 циклов/мин и 3 %-м растворе NaCI при частоте 60 циклов/мин. Видно, что снижение частоты циклов с 1410 до 60 в минуту значительно уменьшает долговечность стали 35 в 3 %-м растворе NaCI.

Характерной особенностью коррозионной усталости является отсутствие истинного предела выносливости, т.е. кривые коррозионной усталости не имеют горизонтального участка (кривые *2* и *3* на рис. 91). Интенсивность снижения разрушающего напряжения определяется относительной коррозионной активностью системы деформируемый металл − среда.

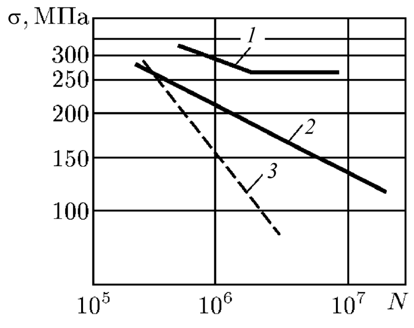


Рис. 91

Снижение предела выносливости вследствие коррозии может быть учтено в расчете введением коэффициента $\beta_к$, равного отношению предела выносливости $(\sigma_{-1})_к$ материала в коррозионной среде к пределу выносливости σ_{-1} материала на воздухе:

$$\beta_к = \frac{(\sigma_{-1})_к}{(\sigma_{-1})}. \qquad (15.6)$$

15.4. Расчет на прочность

При переменных нагрузках обычно производится поверочный расчет на прочность, основывающийся на схематизированной диаграмме предельных амплитуд цикла $\sigma_a - \sigma_m$ (рис. 92), построенной без учета влияния целого ряда факторов на усталостную прочность.

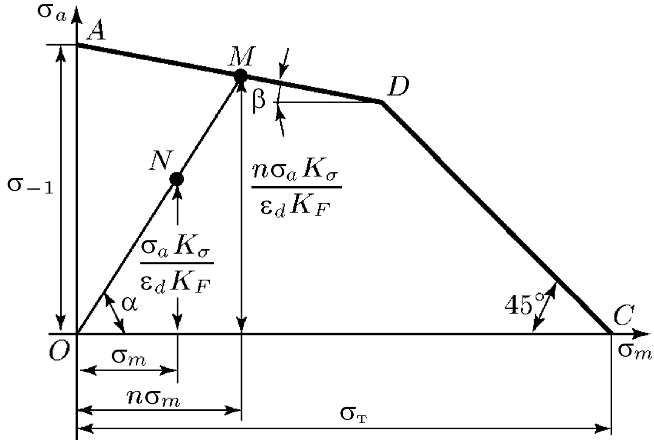


Рис. 92

Принято влияние концентрации напряжений, состояния поверхности и масштабного фактора относить к амплитудной составляющей цикла.

Таким образом, если задан рабочий режим детали, характеризуемый переменным напряжением σ_a и постоянным средним напряжением σ_m, то цикл в стандартном образце, равнопрочном данной детали, будет определяться средним напряжением

$$(\sigma_m) = \sigma_m \tag{15.7}$$

и переменным напряжением

$$(\sigma_a) = \frac{\sigma_a K_\sigma}{\varepsilon_d K_F}. \tag{15.8}$$

При пропорциональном увеличении нагрузок на деталь будут возрастать пропорционально постоянная и переменная составляющие напряжения, определяемые выражениями (15.7) и (15.8), пока не будут достигнуты предельные значения $(\sigma_m)_{\text{пр}}$ и $(\sigma_a)_{\text{пр}}$.

Значения $(\sigma_m)_{\text{пр}}$ и $(\sigma_a)_{\text{пр}}$ определяются по диаграмме предельных напряжений (см. рис. 92) координатами точки пересечения луча, проведенного из начала координат под углом α с ломаной *ADC* (точка *M*). При этом

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{(\sigma_a)_{\text{пр}}}{(\sigma_m)_{\text{пр}}} = \frac{\sigma_a K_\sigma}{(\sigma_m \varepsilon_d K_F)}. \tag{15.9}$$

Запас прочности n_σ находится как отношение:

$$n_\sigma = \frac{(\sigma_m)_{\text{пр}}}{(\sigma_m)}; \quad n_\sigma = \frac{(\sigma_a)_{\text{пр}}}{(\sigma_a)} \tag{15.10}$$

или графически как отношение отрезков:

$$n_\sigma = \frac{|OM|}{|ON|}.$$

Два аналитических выражения для запаса прочности определяются из совместного решения уравнения прямых участков *AD* и *DC*, соответственно,

$$(\sigma_a)_{\text{пр}} = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \cdot (\sigma_m)_{\text{пр}} \quad \text{и} \quad (\sigma_a)_{\text{пр}} + (\sigma_m)_{\text{пр}} = \sigma_T$$

и значения

$$(\sigma_a)_{\text{пр}} = \frac{n_\sigma \sigma_a K_\sigma}{\varepsilon_d K_F},$$

откуда получаем два решения для n_σ

$$n_{\sigma 1} = \frac{\sigma_{-1}}{\sigma_a \dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_d K_F} + \psi \sigma_m} \tag{15.11}$$

и

$$n_{\sigma 2} = \frac{\sigma_{\text{т}}}{\sigma_a \dfrac{K_\sigma}{\varepsilon_d K_F} + \sigma_m}. \tag{15.12}$$

Из двух значений n_σ, определяемых формулами (15.11) и (15.12), искомым запасом прочности будет меньшее значение.

16. МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА МАТЕРИАЛОВ

Расчет на прочность, жесткость и устойчивость элементов конструкций производится с участием механических характеристик материала, из которого изготовлена конструкция, а также с учетом условий ее нагружения. Это относится не только к виду напряженного состояния в элементе конструкции, но и к характеру ее нагружения. Все многообразие условий работы конструкций и характера их нагружения может быть сведено к четырем основным:

- однократное статическое нагружение, характеризуемое медленным возрастанием нагрузки и/или деформации, приводящим к разрушению конструкции за относительно короткий промежуток времени;
- длительное статическое нагружение элементов конструкции, на результат которого существенное влияние оказывают время и температура;
- нагружение при циклически изменяющихся напряжениях, приводящее к усталостному разрушению материала;
- ударное нагружение.

Чтобы оценить способность материала сопротивляться деформированию и разрушению в заданных условиях нагружения, необходимо провести испытания образцов этого материала именно в этих условиях и определить его механические свойства.

Рассмотрим особенности поведения материалов и определения их механических характеристик при различных условиях нагружения.

16.1. Однократное статическое нагружение

В разд. 2 и 6 было показано, как определяются основные механические характеристики материала при статическом растяжении, сжатии и кручении цилиндрических образцов. Такие механические свойства материала, как предел текучести $\sigma_т(\sigma_{0,2})$, временное сопротивление (предел прочности) $\sigma_в$, относительное удлинение δ и относительное поперечное сужение ψ являются базовыми и определяются для всех материалов, хотя при эксплуатации материал таких условий нагружения практически не испытывает. Это связано с тем, что определяемые при статическом растяжении механические свойства материала дают наиболее полное представление о его работоспособности при других условиях нагружения, они просты и экономичны (практически все лаборатории, которые исследуют материалы на прочность, располагают необходимым оборудованием для испытания образцов на растяжение), и накоплена значительная база данных по различным материалам, которая представлена в справочниках по конструкционным материалам.

В ряде случаев в расчетах используется диаграмма $S = f(\psi)$, которая лишена недостатков диаграммы деформирования $\sigma = f(\varepsilon)$. Здесь S – истинное напряжение, равное отношению нагрузки к текущей площади поперечного сечения F; ψ – относительное поперечное сужение.

Материалы в хрупком состоянии при растяжении разрушаются путем отрыва с характерным хрупким кристаллическим изломом при практическом отсутствии пластической деформации. Материалы в пластичном состоянии, как правило, имеют характерный вид излома в форме конуса и чашечки в месте образования шейки (при испытании на растяжение цилиндрического образца), когда превалирующая роль принадлежит касательным напряжениям.

Испытания на сжатие связаны с определенными методическими трудностями и не получили широкого распространения. Нагружение образца осуществляется в специальном приспособлении, обеспечивающем строгую параллельность торцевых поверхностей. Тем не менее при испытании длинных образцов сложно обеспечить соосность нагружения, и возможна потеря продольной устойчивости образца. При испытании коротких образцов образуется бочкообразная форма вследствие трения на торцах образца. При испытании пластичного материала определяют сопротивление начальным пластическим деформациям – предел текучести при сжатии $(\sigma_{0,2})_C$ – максимальное напряжение, при котором достигается остаточная деформация, равная 0,2 % или 0,002 начальной длины образца. Целесообразно испытывать при сжатии такие хрупкие материалы, как чугун, керамика и др. Причем предел прочности хрупких материалов при сжатии $\sigma_{вс}$, определяемый как отношение максимальной нагрузки, выдерживаемой образцом, к начальной площади поперечного сечения, может быть значительно выше, чем при растяжении. Разрушение при сжатии происходит от максимальных касательных напряжений по наклонным плоскостям (под углом $\approx 45°$). Хрупкие материалы, как правило, значительно лучше работают на сжатие, чем на растяжение. Например, у чугуна предел прочности при сжатии в среднем в три раза больше, чем при растяжении.

Испытание на кручение в связи с особенностью напряженного состояния в точках образца, а именно чистого сдвига, когда равны максимальные нормальные и касательные напряжения, позволяет выявить минимальное сопротивление материала хрупкому или пластическому разрушению. Это удобно проанализировать по излому образца. При пластическом разрушении образца от максимальных касательных напряжений поверхность излома перпендикулярна оси образца. При хрупком разрушении образца от максимальных нормальных напряжений излом представляет собой винтовую поверхность. Изломы образцов из малоуглеродистой стали и чугуна, испытанных на кручение, иллюстрируют различный характер их разрушения.

Испытания на изгиб часто используются для оценки механических свойств материалов в хрупком или малопластическом состоянии, при воздействии коррозионной среды (коррозии под напряжением), а также для оценки пластичности и качества сварных соединений. Испытание на изгиб воспроизводит характерные для многих конструктивных элементов условия механического нагружения и позволяет выявить свойства поверхностных слоев, наиболее напряженных при изгибе.

Чаще всего образцы нагружают по схемам так называемого трехточечного (рис. 93, *а*) и четырехточечного (рис. 93, *б*) изгиба. Результаты испытания на изгиб представляются в виде диаграммы $P-f$, где P – изгибающая нагрузка; f – стрела прогиба образца. Характерные диаграммы изгиба для хрупких (малопластичных) и пластичных материалов приведены на рис. 94. Для хрупких материалов последняя точка диаграммы соответствует разрушению практически без остаточных деформаций. По разрушающей нагрузке определяют предел прочности материала при изгибе $\sigma_{\text{в}}^{\text{изг}}$.

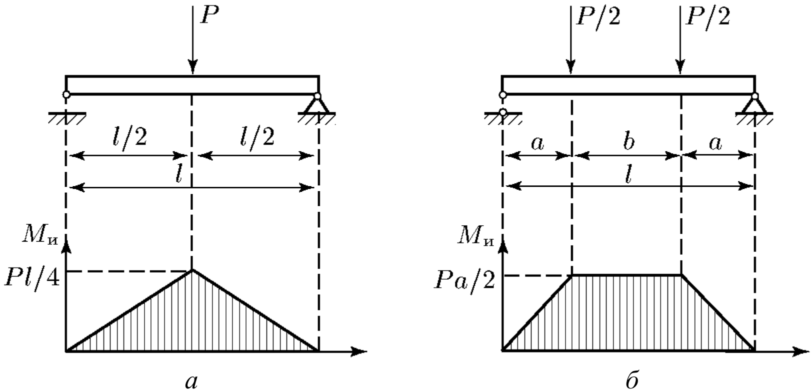


Рис. 93

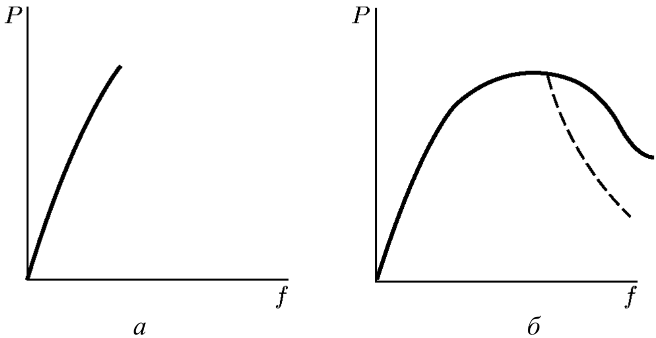


Рис. 94

Пластичные материалы, как правило, невозможно довести до разрушения: образец изгибается до состояния, когда его части располагаются параллельно друг другу.

При испытании пластичных материалов можно определить сопротивление материала начальным пластическим деформациям, воспользовавшись методикой, аналогичной применяемой при растяжении для определения соответствующих характеристик, без учета пластического перераспределения напряжений в процессе изгиба. Допуски на величину деформации при определении $\sigma_{\text{пц}}^{\text{изг}}$, $\sigma_{0,05}^{\text{изг}}$ и $\sigma_{0,2}^{\text{изг}}$ задаются по величине стрелы прогиба *f*, связанной линейной зависимостью с относительным удлинением крайнего растянутого волокна в изогнутом образце.

Для примера рассмотрим определение условного предела текучести при изгибе $\sigma_{0,2}^{\text{изг}}$ на основе диаграммы $P-f$. В упругой области нагружения $f = A\varepsilon_{\max}$, где A определяется размерами образца и схемой нагружения. Принимается, что остаточный прогиб $f_{0,2}$ при определении условного предела текучести равен $f_{0,2} = A \cdot 0{,}002$, поскольку остаточная деформация $\varepsilon_{\max}$ должна быть равна 0,2 %, как и при растяжении. Зная $f_{0,2}$, можно определить нагрузку $P_{0,2}$ по диаграмме, используя закон упругой разгрузки, и подсчитать соответствующий изгибающий момент $M_{0,2}$. Тогда для данного случая условный предел текучести

$$\sigma_{0,2}^{\text{изг}} = \frac{M_{0,2}}{W_{\text{н.л}}}. \tag{16.1}$$

Обычно $\sigma_{0,2}^{\text{изг}}$ на 18–20 % выше, чем $\sigma_{0,2}$ при растяжении, так как не учитываются пластическое перераспределение напряжений и влияние возникающих при разгрузке остаточных напряжений.

Для оперативной оценки свойств материала на производстве используется *испытание на твердость*. Под твердостью материала понимают его способность оказывать сопротивление проникновению в него другого, более твердого тела – индентора. Метод испытания на твердость относится к неразрушающим методам контроля материала. Показатель твердости тесно связан с показателями прочности и пластичности материала и зависит от конкретных условий проведения испытаний. И хотя характеристики твердости не используются непосредственно при расчете конструкций, они нашли широкое применение для оценки свойств материала.

Для определения твердости металлов используют несколько способов испытания. Наибольшее применение получили методы определения твердости по Бринеллю (*HB*), Роквеллу (*HR*) и Виккерсу (*HV*). Во всех случаях о величине твердости судят по величине полученного отпечатка. Различие заключается в виде используемого индентора и уровня прикладываемой к нему нагрузки. Выбор метода часто определяется твердостью испытываемого материала. В испытаниях по Бринеллю в поверхность испытываемой детали вдавливается стальной шарик или шарик из твердого сплава. Число твердости *HB* (*HBW* − при применении шарика из твердого сплава) равно отношению силы вдавливания шарика P к площади поверхности полученного отпечатка (рис. 95). При определении твердости стали используется закаленный шарик диаметром D = 10 мм при силе P = 30 кН:

$$HB = \frac{2P}{\pi D(D - \sqrt{D^2 - d^2})}. \qquad (16.2)$$

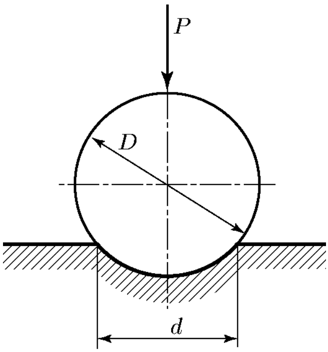


Рис. 95

Метод Бринелля применяется для металлов и сплавов, твердость которых не превышает 450 (650) единиц. При большей твердости испытываемого материала наблюдается деформация индентора (шарика), что приводит к искажению получаемых результатов. Для сталей существует связь между числом твердости и временным сопротивлением, выражаемая следующим образом:

$$\sigma_{в} \approx 0{,}36 \cdot HB.$$

Аналогичная пропорциональная связь существует и для цветных металлов.

По методу Роквелла в поверхность исследуемой детали вдавливается алмазный конус с углом при вершине 120° или стальные шарики диаметром 1,588 мм (1/16") и 3.175 мм. Если в качестве индентора используется алмазный конус при нагрузках 60, 150 и 100 кгс, определяемая твердость обозначается соответственно *HRA*, *HRC* и *HRD*. Если в качестве индентора при тех же нагрузках используются стальные шарики, определяемая при этом твердость обозначается *HR* (*B, E, F, G, H, K*). Выбор индентора и нагрузки связан в основном с твердостью испытываемого материала. Мерой твердости является глубина проникновения индентора, которая выражается в условных единицах. Для испытания тонких материалов используется метод Роквелла при малых нагрузках (Супер-Роквелл).

В испытаниях по Виккерсу производится вдавливание в испытываемый объект алмазного наконечника, имеющего форму квадратной пирамиды с углом между противоположными гранями 136°. Число твердости по Виккерсу определяется делением нагрузки P в кгс на площадь боковой поверхности получившегося пирамидального отпечатка F в мм^2. Применяются нагрузки 5, 10, 20, 30, 50 и 100 кгс. Нагрузка выбирается в зависимости от толщины и твердости испытываемого материала. С помощью оптической системы с большой точностью измеряется диагональ отпечатка d. Далее по таблицам находят число твердости или подсчитывают по формуле $HV = \frac{P}{F} = \frac{1{,}8544P}{d^2}$. Для этого метода, отличающегося высокой точностью измерения диагонали отпечатка, очень важна чистота поверхности образца, которая должна быть достаточно высокой. Важную роль играет также время выдержки под нагрузкой. При обозначении числа твердости по Виккерсу обязательно указывается время выдержки, например 540HV20/30 обозначает число твердости 540, полученное при нагрузке 20 кгс, действующей в течение 30 с.

Определение твердости по Виккерсу является более совершенным, чем определение ее методами Бринелля и Роквелла. К числу основных преимуществ указанного метода следует отнести: полное геометрическое подобие отпечатков в зависимости от прилагаемой нагрузки, т.е. независимость измеренной твердости от величины используемой нагрузки при испытании; возможность определения твердости на азотированных, цементированных поверхностях, а также на тонких листовых материалах; хорошее совпадение значений твердости по Виккерсу и Бринеллю в пределах 100–450 единиц.

16.2. Длительное статическое нагружение

При длительном статическом нагружении появляется новый фактор воздействия на материал − время. При обычных комнатных температурах этот фактор практически не оказывает заметного влияния на поведение материала. Однако при повышенных температурах влияние его может быть значительным. При повышенных температурах в условиях длительного статического нагружения проявляются такие эффекты, как ползучесть металла, релаксация напряжений, непосредственно связанная с ползучестью, и длительная прочность или разрушение в результате ползучести металла. Современное состояние знаний не позволяет теоретически надежно предсказать характеристики поведения материала в условиях длительного статического нагружения. Корреляция между свойствами материала при ползучести и его механическими характеристиками, определенными при комнатной температуре, по-видимому, мала или вовсе отсутствует. Поэтому данные испытаний при комнатной температуре и эмпирические методы экстраполяции этих данных трудно использовать для прогнозирования поведения при ползучести в ожидаемых эксплуатационных условиях. Рассмотрим поведение металлических материалов в условиях длительного статического нагружения.

Ползучестью называется процесс нарастания остаточной деформации во времени при постоянных нагрузке или напряжении и температуре. Фактически все существующие материалы в той или иной степени обладают свойствами ползучести. Различают низко- и высокотемпературную ползучесть. При низких температурах скорость ползучести быстро затухает.

Для практического применения материалов наибольшее значение имеет высокотемпературная ползучесть в интервале температур $(0{,}4 \div 0{,}7)\ T_{пл}$, где $T_{пл}$ – температура плавления металла, когда скорость ползучести длительное время остается постоянной и находится в пределах $(10^{-2} \div 10)$ %/ч.

При испытании на ползучесть регистрируется кривая ползучести в координатах «полная деформация $\varepsilon(t)$ (или остаточная деформация $\varepsilon_c(t)$) – время t» (рис. 96). В момент нагружения образец приобретает мгновенную деформацию $\varepsilon_0(\sigma)$, которая в зависимости от уровня напряжения σ будет упругой или упругопластической. С течением времени $\varepsilon(t)$ возрастает.

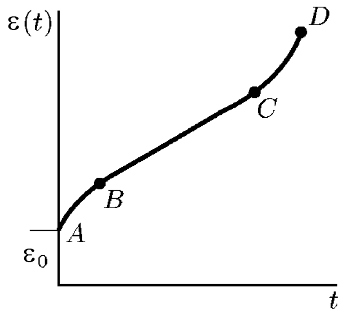


Рис. 96

Разность между полной и мгновенной деформациями в любой момент времени называется *деформацией ползучести* $\varepsilon_c(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon_0$.
Кривая ползучести $\varepsilon(t)$ в общем случае имеет три участка: AB – участок с постоянно уменьшающейся скоростью ползучести (первая стадия − стадия неустановившейся ползучести); BC − участок с постоянной (минимальной) скоростью ползучести $\dot{\varepsilon}_{c\min}$ (вторая стадия − стадия установившейся ползучести); CD − участок ускоренной ползучести, заканчивающийся либо хрупким изломом, либо вязким разрушением образца, сопровождающимся образованием шейки (третья стадия).

Рассмотренная кривая ползучести характеризует процесс ползучести металлических сплавов, остающихся относительно стабильными в течение эксперимента. Если же в металле происходят структурные изменения, то вид кривой ползучести может существенно измениться. С инженерной точки зрения применение нестабильных материалов при длительном нагружении нежелательно, и важным преимуществом стабильных материалов является наличие четко выраженной второй стадии.

С увеличением напряжения и температуры скорость пластической деформации возрастает, а продолжительность каждой стадии уменьшается. При жестких условиях испытания кривая ползучести может иметь только некоторые из трех участков. На рис. 97 представлены кривые ползучести сплава ХН56ВМКЮ при $T = 900$ °С. Все три участка можно различить лишь при двух уровнях напряжения.

Наибольшее практическое значение имеет поведение материала на установившейся стадии ползучести, где скорость ползучести минимальна и постоянна. Минимальная скорость ползучести $\dot{\varepsilon}_{\min}$ зависит от величины напряжения и уровня температуры. Зависимость между $\dot{\varepsilon}_{\min}$ и напряжением σ часто аппроксимируется степенной функцией

$$\dot{\varepsilon}_{\min} = B\sigma^n, \tag{16.3}$$

где показатель ползучести n и коэффициент ползучести B – постоянные, характерные для данного материала. Эта зависимость оказалась очень удобной для использования в расчетах, и значения постоянных B и n были получены для широкого круга материалов.

Из приведенного выражения следует линейная зависимость между логарифмами минимальной скорости ползучести и напряжения:

$$\lg \dot{\varepsilon}_{c\min} = \lg B + n \lg \sigma .$$

Параметры этого уравнения $\lg B$ и n определяются путем обработки методом наименьших квадратов ряда экспериментальных значений $\lg \dot{\varepsilon}_{c\min}$ и $\lg \sigma$.

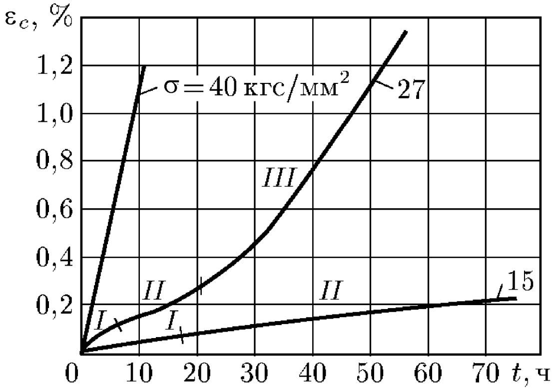


Рис. 97

Чем большая серия кривых ползучести при различных постоянных уровнях напряжений и неизменной температуре будет использована для построения прямой в координатах $\lg \dot{\varepsilon}_{c\min} - \lg \sigma$, тем большая достоверность будет достигнута при определении параметров B и n, характеризующих ползучесть материала.

Зависимость между $\dot{\varepsilon}_{c\min}$ и абсолютной температурой T хорошо описывается показательным законом

$$\dot{\varepsilon}_{c\min} = Ce^{-\frac{\gamma}{T}}, \tag{16.4}$$

где C и γ – постоянные.

Логарифмируя левую и правую часть выражения (16.4), получаем линейную зависимость $\ln \dot{\varepsilon}_{c\min}$ от $\frac{1}{T}$:

$$\ln \dot{\varepsilon}_{c\,\min} = \ln C - \frac{\gamma}{T_1}.$$

Для определения параметров этой зависимости ($\ln C$ и γ) ряд экспериментальных значений $\ln \dot{\varepsilon}_{c\,\min}$ и $\dfrac{1}{T}$ из испытаний на ползучесть при постоянном напряжении и различных уровнях температуры также обрабатывается по методу наименьших квадратов.

Кривые ползучести для заданной температуры при различных напряжениях часто рассматриваются как подобные, когда любая кривая может быть получена из другой умножением ее ординат на величину, являющуюся функцией напряжения, т.е. $\varepsilon_c = \Omega(t) \cdot f(\sigma)$. Для степенной зависимости деформации ползучести от напряжения получаем зависимость вида:

$$\varepsilon_c = \Omega(t) \cdot \sigma^n, \qquad (16.5)$$

где функция $\Omega(t)$ имеет вид одной из кривых ползучести.

Отметим, что в реальных условиях ползучесть, как правило, протекает при изменяющихся напряжениях и температурах, и для описания соответствующих процессов используются технические теории ползучести на базе характеристик, полученных при постоянных напряжениях и температуре.

Обычно для оценки сопротивления материала ползучести получают серию кривых ползучести по результатам испытания образцов при различных постоянных уровнях напряжения. Обрабатывая эту серию кривых ползучести, можно определить константы и параметры аналитических зависимостей соответствующих теорий ползучести и определить пределы ползучести. Сущность технических теорий ползучести состоит в выборе основных переменных, определяющих процесс ползучести, и установлении функциональных зависимостей между ними. В соответствии с этим различают три основные технические теории ползучести: старения, течения и упрочнения.

Согласно теории *старения* при определенной температуре существует постоянная зависимость между деформацией ползучести, напряжением и временем:

$$\varepsilon_c = f(\sigma,\ t).$$

Теория *течения* устанавливает связь между скоростью пластической деформации, напряжением и временем:

$$\dot{\varepsilon}_c = f(\sigma,\ t).$$

По теории *упрочнения* (в простейшей форме) в качестве основных переменных принимаются пластическая деформация, скорость пластической деформации и напряжение. Время в явном виде в эту зависимость не входит:

$$\dot{\varepsilon}_c = f(\sigma,\ \varepsilon_c).$$

Наиболее часто используются следующие аналитические зависимости между параметрами в различных теориях ползучести:

по теории старения

$$\varepsilon_c = \sigma^n \Omega(t); \tag{16.6}$$

по теории течения

$$\dot{\varepsilon}_c = B\sigma^n; \tag{16.7}$$

по теории упрочнения

$$\dot{\varepsilon}_c \varepsilon_c^{\beta} = \alpha\sigma^{\nu}. \tag{16.8}$$

Как видим, все они представляют степенную зависимость между деформацией и напряжением, что хорошо согласуется с результатами испытания образцов.

Сопоставление материалов по их сопротивлению ползучести часто проводится с помощью условной характеристики, называемой *пределом ползучести.* Существуют два определения для предела ползучести. Первое относится к случаю относительно непродолжительной работы материала при высоких уровнях напряжения и температуры, когда существенную роль играют процессы, происходящие на первой стадии ползучести, например работа лопаток авиационных газовых турбин. В соответствии с первым определением *пределом ползучести* называется напряжение, при котором остаточная деформация в условиях длительного статического нагружения достигает определенной величины за заданный промежуток времени, равный времени эксплуатации детали (например, 0,1 % за 300 ч) при температуре *T*. Второе определение относится к случаю длительной работы конструкции в стационарных условиях при относительно невысоких напряжении и температуре, когда первой стадией ползучести практически можно пренебречь, а учитывать только деформацию ползучести, накапливаемую на второй стадии с постоянной скоростью, например работа лопаток паровой турбины тепловой станции. В соответствии со вторым определением *пределом ползучести* называется напряжение, при котором скорость ползучести на установившейся стадии $\dot{\varepsilon}_{c\min}$ равна заданной величине (например, 10^{-8} ч$^{-1}$) при температуре T. Отметим, что предел ползучести является не только характеристикой материала, но учитывает также фактор времени.

Предел ползучести рекомендуется определять при допусках на удлинение от 0,1 до 1 % при длительности испытания от 50 до 10000 ч. Если предел ползучести определяется по скорости ползучести, то общая продолжительность испытания должна составлять не менее 2000–3000 ч, при условии продолжительности прямолинейного участка кривой ползучести не менее 500 ч. Скорость ползучести определяется по формуле

$$\dot{\varepsilon}_c = \frac{\Delta l}{l_0 \Delta t}, \tag{16.9}$$

где Δl – абсолютное приращение длины образца за время Δt; l_0 – расчетная длина.

Порядок определения условного предела ползучести следующий: испытывают серию образцов (не менее четырех) при данной температуре и трех-четырех уровнях напряжения. Количество образцов в серии должно обеспечивать задаваемую точность определения предела ползучести. Результатом испытаний являются первичные кривые ползучести в координатах «деформация ε_c – время t» (рис. 98, *а*). В случае нахождения предела ползучести по заданной деформации при обработке первичных кривых ползучести определяются величины относительных деформаций, соответствующих заданной длительности, например 10 000 ч. Затем по найденным величинам деформации строится график зависимости напряжения σ от деформации ε_c (рис. 98, *б*), из которого по заданному допуску (например, 1 % деформации) находится значение искомого напряжения.

В случае определения предела ползучести по заданной скорости ползучести на основании обработки первичных кривых ползучести находят средние скорости ползучести на прямолинейных участках каждой кривой. Затем строят график зависимости логарифма напряжения σ от логарифма скорости ползучести $\dot{\varepsilon}_c$ (рис. 98, *в*). Эта зависимость в логарифмической системе координат изображается прямой, что позволяет легко определить напряжение, соответствующее заданной скорости ползучести $\dot{\varepsilon}_c$. Эти способы позволяют находить искомое напряжение с погрешностью, не превышающей 5 МПа.

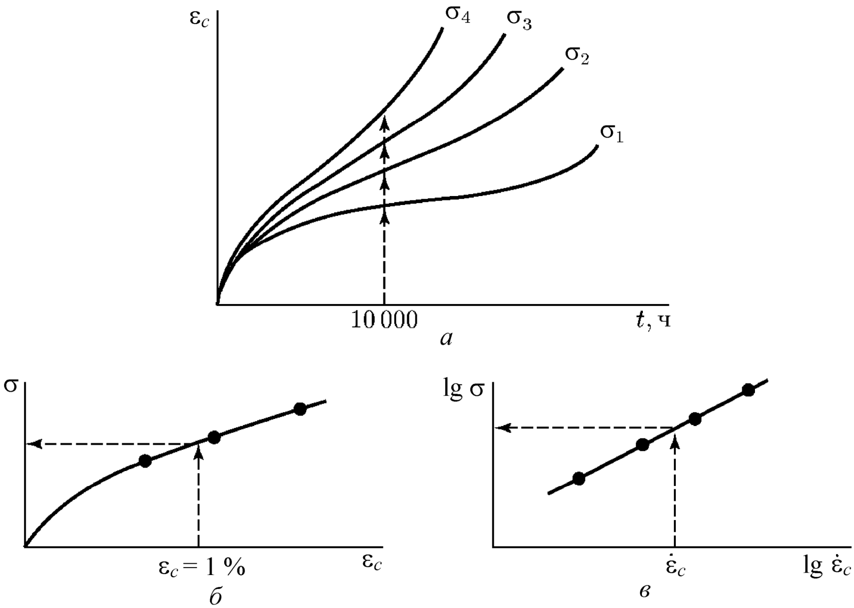


Рис. 98

При определении предела ползучести по деформации ползучести в обозначение этой величины указывается допуск на деформацию, время и температура испытания, например $\sigma^{700}_{0,2/100}$ – предел ползучести при допуске на деформацию 0,2 % за 100 ч испытания при температуре 700 °С. Пример обозначения предела ползучести при скорости ползучести $1 \cdot 10^{-5}$ %/ч и температуре 600 °С – $\sigma^{600}_{1 \cdot 10^{-5}}$.

Суть расчета конструкции на ползучесть заключается в том, что деформация деталей не будет превышать допустимого уровня, при котором нарушится конструктивная функция, т.е. взаимодействие узлов, за весь срок эксплуатации конструкции. При этом должно выполняться условие

$$\varepsilon_c = k \cdot \sigma^n \le [\varepsilon_c],$$

разрешив которое, получаем уровень рабочих напряжений. Обратим внимание на тот факт, что при расчете на ползучесть речь не идет о недопущении разрушения конструкции. Решается лишь задача недопущения чрезмерной ее деформации. Например, деформация ползучести лопаток авиационной газовой турбины, работающих при температурах до 1200 °С, не нарушит условий работы турбины за весь срок ее эксплуатации.

Релаксацией напряжений называется процесс самопроизвольного снижения напряжений в детали во времени при неизменной начальной деформации. Она является следствием деформации ползучести, протекающей в детали в условиях постоянно снижающихся напряжений. Релаксацию можно наблюдать на примере ослабления затяжки болтов фланцевых соединений, работающих при высоких температурах.

Испытания образцов на релаксацию напряжений проводят на тех же испытательных машинах и в тех же условиях, что и испытания образцов на ползучесть. Различие заключается в том, что после приложения начальной полной нагрузки обеспечивается неизменность начальной деформации во времени. Это достигается путем периодического снижения нагрузки на образце по мере нарастания в нем деформации ползучести. Уравнение релаксации напряжений имеет вид:

$$\varepsilon(0) = \varepsilon_e + \varepsilon_c = \text{const} \quad \text{или} \quad \frac{\sigma(0)}{E} = \frac{\sigma(t)}{E} + \varepsilon_c(t) = \text{const}, \qquad (16.10)$$

где ε_e – упругая часть деформации, соответствующая напряжению $\sigma(t)$; $\varepsilon_c(t)$ – деформация ползучести, нарастающая во времени при снижающихся напряжениях. Таким образом, релаксация напряжений является частным случаем ползучести при изменяющемся напряжении.

Увеличение деформации ползучести ε_c приводит к снижению упругой деформации, причем скорость снижения напряжений во времени зависит от скорости деформации ползучести:

$$\frac{d\varepsilon(0)}{dt} = \frac{d\sigma(t)}{Edt} + \dot{\varepsilon}_c(t) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{d\sigma(t)}{dt} = -\dot{\varepsilon}_c(t) \cdot E . \qquad (16.11)$$

Можно получить аналитическую зависимость изменения напряжений во времени в явном виде, подставив функцию $\dot{\varepsilon}_c$, например, по теории течения [уравнение (16.7)] в уравнение (16.11). Ниже приведена эта зависимость:

$$\sigma(t) = \sigma(0)\left[1 + (n-1)\sigma(0)^{n-1} E\Omega(t)\right]^{-\frac{1}{n-1}} \qquad (16.12)$$

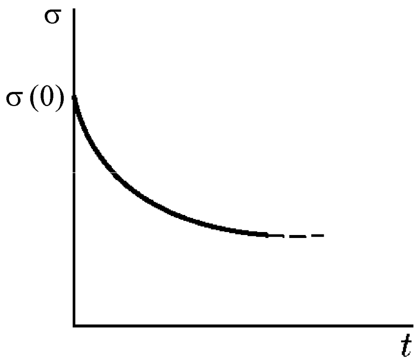


Рис. 99

Результаты испытаний на релаксацию напряжений и расчетов представляются в виде кривой релаксации напряжений в координатах $\sigma - t$ (рис. 99). Сравнение теоретических кривых релаксации напряжений, полученных с применением различных теорий ползучести, с экспериментальной является способом проверки технических теорий ползучести.

Как уже отмечалось, процесс ползучести завершается разрушением материала. Сопротивление материала такому разрушению называется *длительной прочностью.* Время до разрушения (долговечность) t_p зависит от величины напряжения и температуры.

Испытания на длительную прочность проводятся аналогично испытаниям образцов на ползучесть и на тех же испытательных машинах. Отличие заключается в том, что в испытаниях на длительную прочность не интересуются изменением деформации образца в процессе его нагружения постоянной нагрузкой, а фиксируют лишь время до его разрушения и деформацию при разрушении. Экспериментальная зависимость t_p от напряжения σ при заданной температуре отражается в виде кривой длительной прочности в логарифмических координатах $\lg\sigma - \lg t_p$, которую обычно представляют в виде ломаной линии, состоящей из двух прямых (рис. 100). Точка перелома соответствует переходу от вязкого разрушения к хрупкому. Вязкое разрушение наблюдается при больших напряжениях, а хрупкое – при малых напряжениях в условиях высоких температур, когда длительное пребывание материала при высоких температурах способствует его охрупчиванию вследствие воздействия окружающей среды. Иногда в указанных координатах кривая длительной прочности имеет вид прямой, что соответствует одному из указанных видов разрушения.

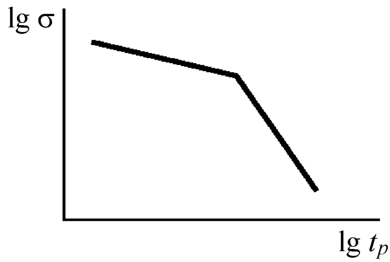


Рис. 100

Таким образом, во всем диапазоне напряжений или на отдельных участках этого диапазона связь между σ и t_p хорошо аппроксимируется уравнением

$$t_p = A \cdot \sigma^{-m}, \tag{16.13}$$

где A и m – постоянные, зависящие от свойств материала. Экспериментально было установлено, что в диапазоне вязкого разрушения, константы материала при ползучести n и разрушении m равны. Тогда произведение $\dot{\varepsilon}_{\min} = B\sigma^n$ и $t_p = A \cdot \sigma^{-m}$ будет равно постоянной величине $\dot{\varepsilon}_{\min}\, t_p = AB = \text{const}$. Таким образом, зная скорость ползучести и константы материала A и B, можно определить время до разрушения t_p.

Зависимость времени до разрушения одновременно от уровня напряжений и температуры дает кинетическая теория разрушения, развитая Журковым на основе экспериментов, проведенных на широком классе материалов (металлах, галлоидных соединениях, полимерах, стеклах) в большом диапазоне изменения долговечности, температуры и напряжений. Была установлена следующая зависимость:

$$t_p = t_0 \cdot \exp\left[\frac{U_0 - \gamma\sigma}{kT}\right], \tag{16.14}$$

где σ – напряжение при растяжении; T – абсолютная температура; t_0, U_0, γ – постоянные, определяемые экспериментально и зависящие от физико-химической природы твердого тела и его структуры; k – постоянная Больцмана.

Часто при сопоставлении материалов по их сопротивлению длительному разрушению используется механическая характеристика – *предел длительной прочности*, определяемый как напряжение, вызывающее разрушение при температуре T за определенное время $t_э$, равное времени эксплуатации детали. Обозначается предел длительной прочности как σ_t^T и находится по кривой длительной прочности (рис. 101).

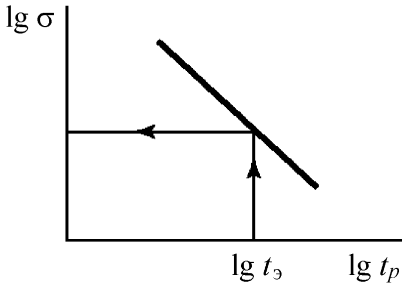


Рис. 101

В испытаниях на длительную прочность также определяют характеристики пластичности: относительные удлинение и сужение образца при разрушении, дающие информацию о деформационной способности материала. Это особенно важно для большинства материалов, применяемых в энергомашиностроении, когда пластичность снижается от 10−15 % при малой долговечности до 1−2 % при сроках службы $10^5 - 2 \cdot 10^5$ ч.

Процесс ползучести следует рассматривать как процесс накопления повреждений, приводящий к полному разрушению материала, когда происходит исчерпание деформационной способности материала. За меру повреждения можно принять отношение $\frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k}$, где ε_i – накопленная деформация ползучести при заданном режиме нагружения и продолжительности эксплуатации, ε_k – деформация разрушения при заданном режиме нагружения. Тогда кривые ползучести фактически отражают условия накопления повреждений материала во времени. Такой подход используется для оценки состояния материала элементов энергооборудования, на которых проводят эксплуатационные измерения ползучести (например, в трубах паропроводов современных энергоблоков), оценивая по величине накопленной деформации степень поврежденности и определяя долю исчерпания заданного ресурса.

В технической литературе часто встречается термин *«замедленное разрушение»*. Этим термином характеризуется длительное разрушение, наблюдаемое в условиях, близких к условиям заданной деформации, когда происходит релаксация напряжений, сопровождаемая затухающей ползучестью. Накопление повреждений и исчерпание пластичности в этих условиях может привести со временем к разрушению даже при снижающихся напряжениях.

16.3. Поведение материала при циклически изменяющихся напряжениях

В разд. 15 были рассмотрены методы определения механических свойств материала при циклически изменяющихся напряжениях и их использовании при расчете на прочность в условиях многоцикловой усталости. Дополнительно отметим, что при рассмотрении закономерности усталостного разрушения металлических материалов представляется целесообразным разделение процесса на две стадии: стадию зарождения трещины и стадию ее распространения до полного разрушения. Стадия зарождения первой макротрещины определяется по допуску – появлению заметной трещины длиной 0,3–0,5 мм. Отношение числа циклов до появления первой магистральной трещины N_T к числу циклов до полного разрушения образца N_K обычно составляет величину, равную 0,9 при испытании гладких образцов на круговой изгиб.

При испытании образцов с концентратором напряжений

$$\frac{N_T}{N_K} = 0{,}3 \div 0{,}5 .$$

Для некоторых материалов это отношение может быть значительно меньше. Например, при испытании образцов из стали 45 при $(\alpha_\sigma = 5)$ было установлено, что $N_K = 25 N_T$. Таким образом, в образцах с концентратором напряжений трещина появляется на ранней стадии процесса усталостного разрушения. Основную часть усталостной долговечности при этом составляет процесс распространения усталостной трещины.

На первой стадии при внешнем стационарном нагружении макроскопическое напряженно-деформированное состояние остается неизменным. На второй стадии при внешне стационарном нагружении изменяется напряженно-деформированное состояние в образце при распространении трещины.

В последние годы большое внимание уделяется изучению кинетики роста усталостных трещин на основе подходов механики разрушения. Возникшая усталостная трещина (или любой другой начальный дефект конструкции) будет расти при дальнейшем циклическом нагружении до тех пор, пока не достигнет критического размера, после чего в соответствии с законами механики разрушения начнется быстрое катастрофическое разрушение. Как правило, время роста возникшей усталостной трещины до критического размера составляет значительную часть времени полезного использования конструкции.

Для оценки скорости роста усталостной трещины до критической величины предложено много различных моделей. Было показано, что скорость роста усталостной трещины $\frac{da}{dN}$ зависит от размаха циклических напряжений $\Delta\sigma$, длины трещины a и некоторого параметра C, зависящего от свойств материала $\frac{da}{dN} = f(\Delta\sigma,\ a,\ C)$. Наиболее часто используется формула Париса:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K)^m, \tag{16.15}$$

где ΔK – размах коэффициента интенсивности напряжений $(K_{\max} - K_{\min})$, определяемый по формуле: $\Delta K = \Delta\sigma \cdot \sqrt{\pi a}$; C и m – постоянные материала. С ростом трещины увеличивается напряжение и размах коэффициента интенсивности напряжений. Скорость роста трещины $\frac{da}{dN}$ характеризуется наклоном кривых зависимости a от N, получаемых экспериментально при испытании образцов в условиях постоянного размаха циклической нагрузки ΔP. Соответствующие значения ΔK вычисляются по размаху действующей нагрузки и среднему значению длины трещины на каждом интервале с помощью формулы для коэффициента интенсивности напряжений, соответствующей заданной геометрии испытываемого образца с трещиной. Результаты такой обработки приведенных на рис. 102 кривых роста усталостной трещины a при различных пульсирующих растягивающих нагрузках ΔP в стали Ni–Mo–V при частоте 1800 цикл/мин представляются в виде отдельных точек на рис. 103 зависимости скорости роста трещины $\frac{da}{dN}$ от размаха коэффициента интенсивности напряжений ΔK. Следует отметить, что обработка всех кривых на рис. 102 дает единственную кривую на рис. 103, описываемую уравнением Париса, где m – наклон прямой, изображающей зависимость $\lg\frac{da}{dN}$ от $\lg\Delta K$, а C – эмпирический параметр, который зависит от свойств материала.

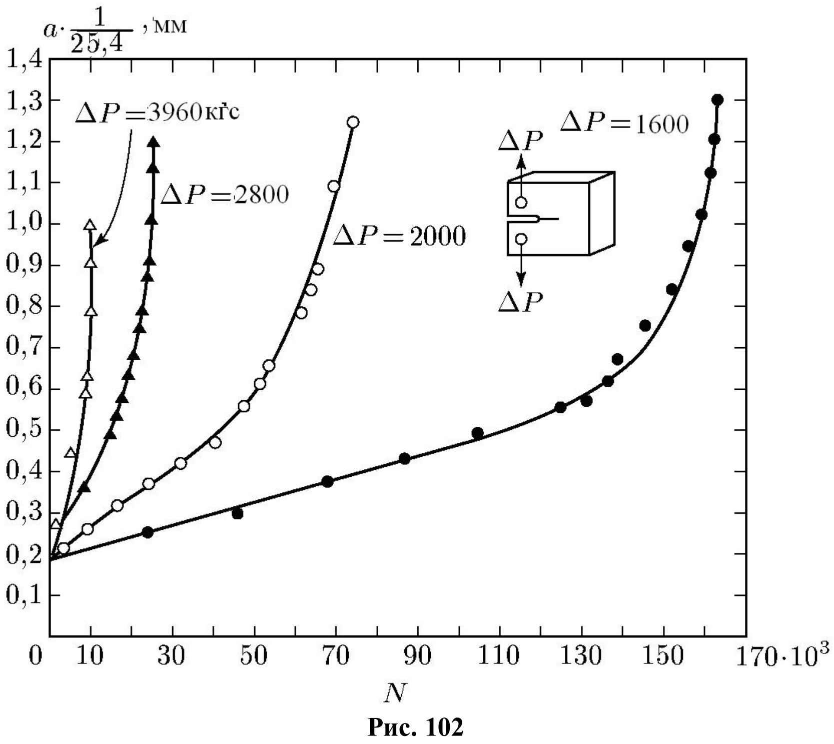


Рис. 102

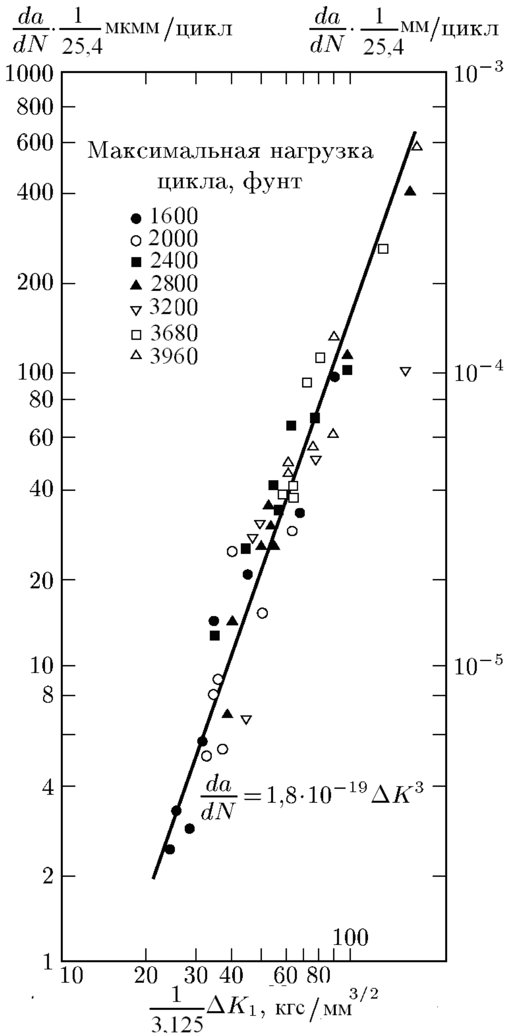


Рис. 103

Таким образом, при известных значениях C и m длина трещины после N циклов нагружения может быть подсчитана по формуле:

$$a_N = a_i + \int C(\Delta K)^m dN, \qquad (16.16)$$

где a_i – начальная длина трещины; N – полное число циклов нагружения. Зная критический коэффициент интенсивности напряжений материала K_{1C} (вязкость разрушения), определяемый при однократном статическом нагружении, можно найти циклическую долговечность конструкции с начальной трещиной длиной a_i.

Исследование *малоцикловой усталости* и разработка соответствующих методов расчета представляют интерес для таких изделий, как лопатки и роторы авиационных газовых турбин, топливные элементы и баки атомных реакторов, роторы и корпуса паровых турбин, в которых изредка действуют большие механические нагрузки и температурные перепады, особенно на переходных режимах работы, способствующие накоплению больших деформаций и разрушению за несколько сотен или тысяч циклов. Анализ типичной кривой усталости, построенной во всем диапазоне изменения напряжений (рис. 104), показывает, что в диапазоне изменения числа циклов от $\frac{1}{4}$ до 10^3 усталостная прочность почти постоянна и близка к пределу прочности материала $\sigma_в$. Это выражается в том, что кривая усталости в указанном диапазоне, в котором материал циклически пластически деформируется, идет почти горизонтально. В этой области пластического поведения материала гораздо точнее определять его усталостную долговечность в виде функции амплитуды циклической деформации, а не в виде функции циклического напряжения. Зависимость напряжения от деформации при этом графически изображается петлей гистерезиса, показанной на рис. 105.

Закономерности циклического упругопластического деформирования и разрушения устанавливаются по результатам испытаний образцов при однородном напряженном состоянии – растяжении-сжатии или кручении тонкостенных трубок. Обычно испытания проводятся при постоянных от цикла к циклу максимальных деформациях (жесткое нагружение) или нагрузках (мягкое нагружение) с требуемой амплитудой цикла.

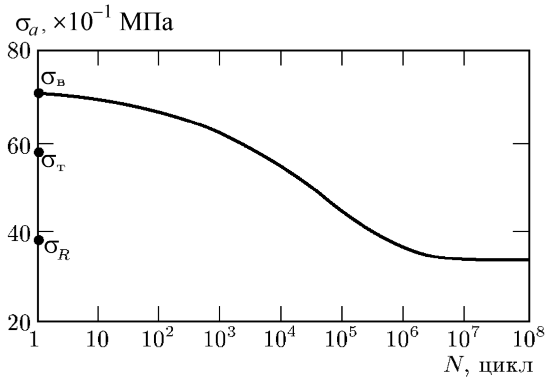


Рис. 104

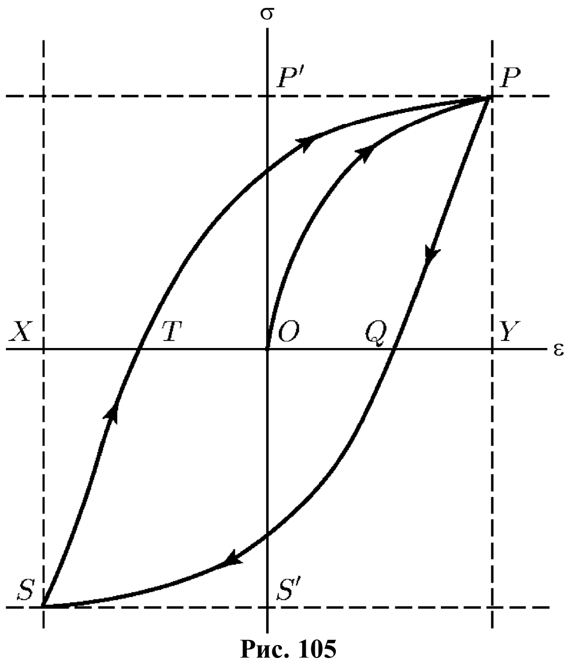


Рис. 105

Установлено, что у большинства материалов при циклическом деформировании в пластической области зависимость напряжения от деформации значительно меняется. Некоторые материалы упрочняются, а некоторые разупрочняются, что схематично показано на рис. 106 для условия нагружения с заданной деформацией (жесткое нагружение). Для циклически упрочняющегося материала характерно уменьшение ширины петли гистерезиса и увеличение циклического напряжения (рис. 106, *а*), для циклически разупрочняющегося материала характерно расширение петли гистерезиса и снижение циклического напряжения (рис. 106, *б*). Эти изменения обычно происходят на первых циклах деформирования. Затем петли гистерезиса стабилизируются, так что в остальной области больших значений долговечности при постоянной заданной амплитуде деформации амплитуда напряжения остается практически постоянной. Эта амплитуда пластической деформации или амплитуда полной деформации за цикл нагружения определяют малоцикловую долговечность материала.

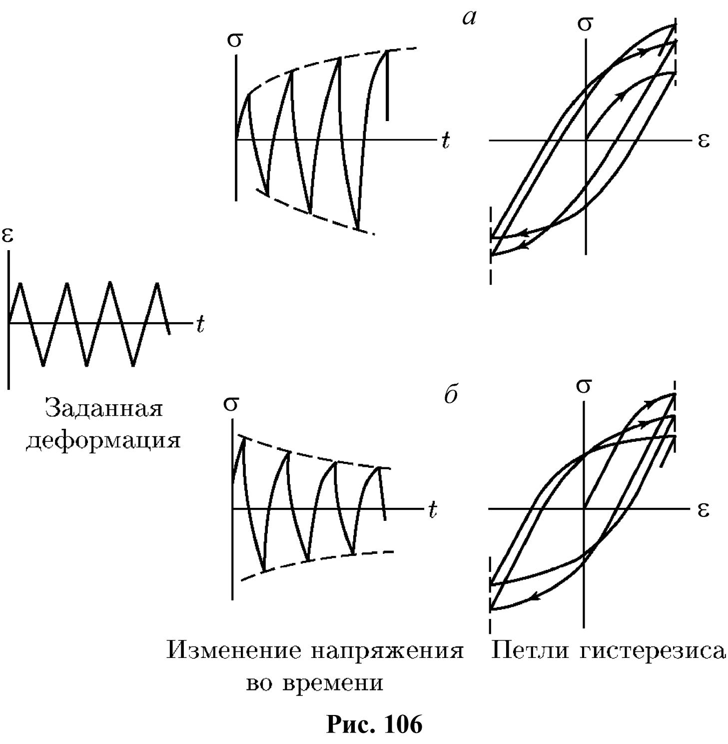


Рис. 106

При мягком нагружении может происходить одностороннее накопление деформации от цикла к циклу, при жестком – это исключено. Накопление повреждений и характер разрушения связаны с указанными особенностями процесса деформации.

Одностороннее накопление деформации растяжения приводит к так называемому квазистатическому разрушению, когда образуется шейка, и деформация достигает критического значения $\varepsilon_{\text{кр}}$, соответствующего истинному удлинению при разрыве.

Циклическое изменение деформации, характеризуемое шириной петли гистерезиса, определяет усталостное повреждение и разрушение. При жестком нагружении экспериментальным путем получена зависимость Коффина–Менсона, характеризующая условие малоцикловой усталости:

$$\delta \cdot N_k^{0,5} = C, \tag{16.17}$$

где δ – размах пластической деформации за цикл; N_k – число циклов до разрушения; C – параметр, характерный для данного материала. Принимается, что условие Коффина–Менсона должно удовлетворять случаю статического растяжения, для которого $N_k = \dfrac{1}{4}$ и $\delta = \varepsilon_{\text{кр}}$. Тогда для C получаем:

$$C = \delta \cdot N_k^{0,5} = \frac{\varepsilon_{\text{кр}}}{2} = \frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-\psi_k}, \tag{16.18}$$

где $\varepsilon_{\text{кр}}$ – истинная деформация при статическом разрыве; ψ_k – относительное поперечное сужение при разрыве.

Обычно результаты испытаний на малоцикловую усталость графически изображаются в виде зависимости логарифма амплитуды деформации или размаха деформации от логарифма числа циклов до разрушения. Причем было показано, что долговечность в большей степени определяется полной деформацией, а не пластической, особенно в области больших значений долговечности из диапазона малоцикловой усталости.

Малоцикловая усталость зависит от частоты нагружения и формы цикла, поскольку пластическая деформация развивается во времени, что особенно заметно при повышенных температурах.

Например, долговечность алюминиевого сплава Д16Т уменьшилась в 3,5 раза при понижении частоты с 2000 до 15 цикл/м.

Малоцикловое разрушение может быть вызвано не только действием переменных нагрузок, но и повторными тепловыми воздействиями. Напряжения в детали при ее нагреве возникают в том случае, если ограничена температурная деформация или имеет место неравномерный нагрев (охлаждение) тела. Такие напряжения называются *термическими*, а разрушение, вызванное знакопеременной пластической деформацией, являющейся следствием циклических изменений температуры, называется *термической усталостью.*

Термическая усталость – разновидность неизотермической малоцикловой усталости. Анализ многочисленных экспериментальных данных показывает, что сопротивление материалов термической усталости в значительной степени зависит от условий проведения испытаний: температурного режима, жесткости нагружения, формы и длительности термического цикла.

Существуют и различия в накоплении повреждений при механической малоцикловой усталости и термической усталости. На рис. 107 приведены данные, полученные при механическом деформировании образцов из нержавеющей стали при постоянных температурах от 350 до 500 °С и при деформировании полностью закрепленных образцов при циклически изменяющейся температуре от 200 до 500 °С со средним значением температуры цикла 350 °С.

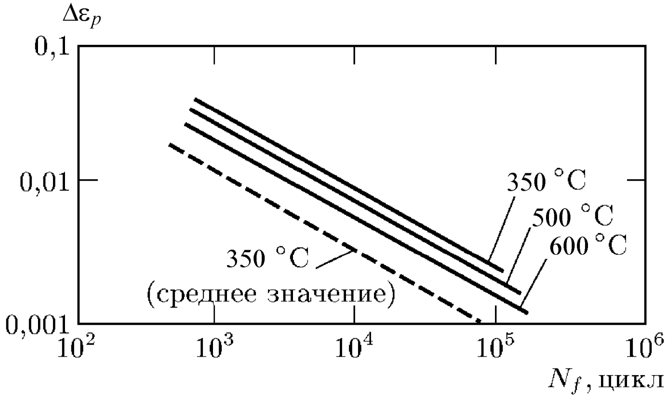


Рис. 107

Приведенные результаты показывают, что при одинаковом размахе пластической деформации число циклов до разрушения в случае циклического изменения температуры гораздо меньше, чем при циклическом механическом воздействии, хотя даже в одном случае образцы испытывались при температуре на 100 °С выше максимальной температуры 500 °С при ее циклическом изменении.

16.4. Ударное нагружение

Ударное или импульсное нагружение имеет место при столкновении конструкций или при внезапном приложении силы. В зависимости от скорости приложения нагрузки ударное нагружение может рассматриваться как квазистатическое или ударное. В случае ударного нагружения необходимо учитывать не только величину нагрузки, но и время, в течение которого она достигает конечного значения, и импульс, представляющий собой площадь под кривой зависимости нагрузки от времени. При действии ударных или импульсных нагрузок не только повышаются напряжения по сравнению с квазистатическим нагружением, но и могут значительно меняться свойства материала – возрастают предел текучести и предел прочности материала и снижается его пластичность, т. е. происходит охрупчивание материала.

Обычные ударные испытания образцов, осуществляемые на маятниковых копрах, призваны оценить склонность материала к хрупкому разрушению и относятся по своим скоростным показателям (скорость удара 5–7 м/с) к квазистатическому нагружению. Далее будет рассмотрено поведение металлических материалов при квазистатическом ударном нагружении. Метод основан на разрушении при изгибе образца с концентратором в виде надреза одним ударом маятника копра. В результате испытания определяют полную работу, затраченную при ударе на разрушение образца (работу удара) K, и ударную вязкость KC. Под ударной вязкостью следует понимать работу удара, отнесенную к начальной площади поперечного сечения образца в месте концентратора. В зависимости от вида концентратора (U- или V-образный надрез) ударная вязкость обозначается как KCU или KCV. Обычно испытывается призматический образец квадратного сечения 10×10 мм и длиной 55 мм с краевым надрезом глубиной 2 мм в середине образца.

На рис. 108 представлена схема нагружения образца при испытании его на удар.

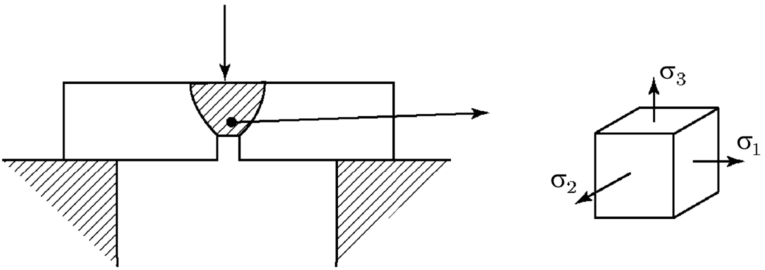


Рис. 108

В зоне концентрации напряжений происходит локализация деформации, и возникает объемное растяжение, вследствие стеснения деформации в поперечном направлении. Это в сочетании с высокой скоростью деформирования (порядка 10^2 1/с) способствует проявлению хрупкости материала. Хотя ударная вязкость как свойство материала носит условный характер, она оказалась весьма чувствительной к особенностям структуры материала и механического его поведения. Например, различие в комплексе свойств при деформировании и разрушении мелко- и крупнозернистого железа четко выявляется ударной вязкостью, тогда как статические характеристики этого не отражают (табл. 3).

Таблица 3

Структура железа	$\sigma_т$, МПа	$\sigma_в$, МПа	δ, %	ψ, %	*KCV*, МДж/м^2
Мелкозернистая	268	375	35,3	72,2	1310
Крупнозернистая	185	345	36,9	66,7	260

Испытанию на удар подвергаются практически все материалы. При поставках металла ударная вязкость является настолько же обязательной характеристикой металла, как $\sigma_т$, $\sigma_в$ и δ. Она характеризует способность материала сопротивляться хрупкому разрушению (поглощать энергию удара за счет пластического деформирования) при заданной температуре испытания.

Ударная вязкость металла существенно зависит от температуры испытания. Это особенно относится к металлам и сплавам с о. ц. к. решеткой, состояние которых изменяется с понижением температуры от вязкого к хрупкому. Для металла в хрупком состоянии характерны низкие значения ударной вязкости, мало изменяющиеся в широком диапазоне изменения температуры (так называемое «нижнее плато» значений ударной вязкости). При вязком состоянии характерны высокие значения ударной вязкости («верхнее плато»). Переход из одного состояния в другое происходит в определенном температурном интервале – температурном интервале хрупко-вязкого перехода.

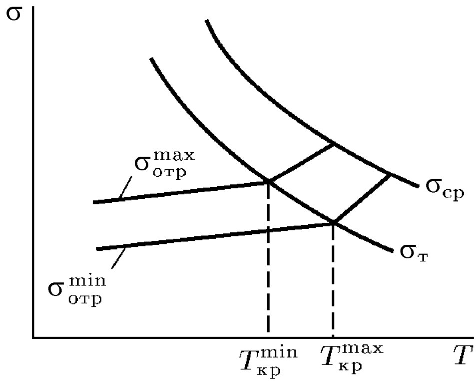


Рис. 109

Для объяснения перехода металлов из хрупкого состояния в пластичное привлекается известная схеме А.Ф. Иоффе, которая учитывает особенности деформирования и разрушения металлических материалов: возможность разрушения путем отрыва (хрупкий характер разрушения) и путем среза (вязкий характер разрушения). Отмечается слабая зависимость сопротивления отрыву $\sigma_{\text{отр}}$ от температуры при значительном разбросе этой характеристики и существенное снижение сопротивления течению $\sigma_{\text{т}}$ и сопротивления срезу $\sigma_{\text{ср}}$ с повышением температуры (рис. 109). Указанное изменение характеристик прочности и пластичности предопределяет суммарное изменение ударной вязкости, например *KCV*, в зависимости от температуры в весьма жестких условиях нагружения, когда довольно четко выявляется так называемая критическая температура хрупкости, или температура хрупко-вязкого перехода $T_{кр}$.

У разных материалов проявляются свои особенности хрупко-вязкого перехода: скачкообразный переход при определенной температуре $T_{кр}$ (рис. 110, *а*); наличие области разброса *KCV* в пределах экстремальных значений, определяющей интервал хрупко-вязкого перехода $T_{кр}^{min} - T_{кр}^{max}$ (рис. 110, *б*); суженная область разброса *KCV* в определенном интервале температур (рис. 110, *в*). Хрупко-вязкий переход проявляется в изменении характера излома от хрупкого к вязкому, который также происходит в определенном температурном интервале.

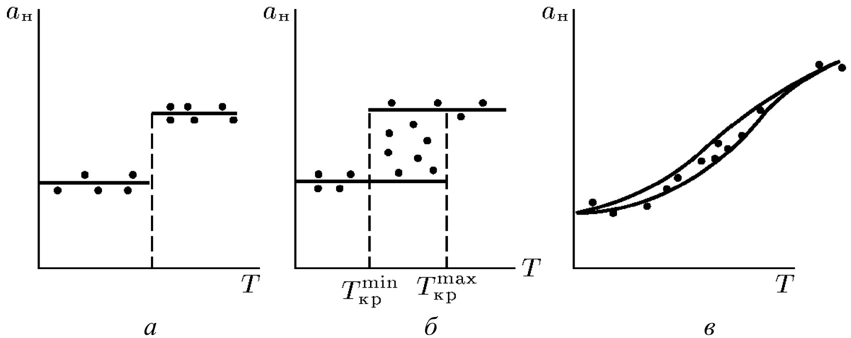


Рис. 110

В качестве критерия для определения $T_{кр}$ обычно используются сразу два показателя: уровень ударной вязкости *KCV* в зависимости от предела текучести материала и процент вязкой фазы в изломе. Например, для материалов энергетического оборудования $T_{кр}$ обусловлена определенным уровнем *KCV* для конкретного $\sigma_т$ материала и не менее 50 % вязкой фазы в изломе при температуре $T_{кр}$ + 30 °С. Следует отметить, что критическая температура хрупко-вязкого перехода – одна из основных комплексных механических характеристик малоуглеродистых и низколегированных сталей. Следует добиваться использования материала в температурной области, где проявляется вязкий характер его разрушения.

17. ВЛИЯНИЕ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ НА МЕХАНИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ КОНСТРУКЦИОННЫХ МАТЕРИАЛОВ

Конструкционные материалы, применяемые для изготовления машин и установок, под воздействием окружающей среды могут существенно изменять свою структуру и механические свойства. Это воздействие может быть связано с влиянием температуры, электромагнитных полей, облучения или же вызвано протеканием физико-химических процессов, химических и электрохимических реакций на поверхности твердого тела и в его объеме. Учет влияния окружающей среды является необходимым условием при обосновании прочности и надежности элементов конструкций современной техники.

17.1. Влияние температуры

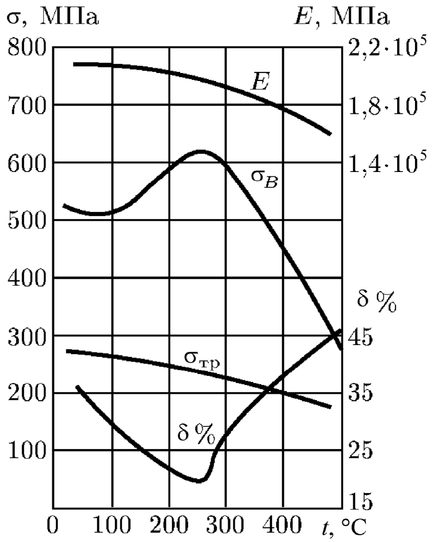


Рис. 111

Влияние температуры на механические характеристики материала, определенные при однократном статическом нагружении, в общем виде выявить не удается, хотя некоторые закономерности можно установить. Так, на рис. 111 показаны зависимости от температуры величин E, $\sigma_в$, $\sigma_т$ и δ для малоуглеродистых сталей в интервале температур $0 \div 500$ °C.

На кривой зависимости δ от температуры заметен участок, когда удлинение образца при разрыве с повышением температуры уменьшается, а при дальнейшем повышении температуры пластические свойства стали восстанавливаются при падении прочностных показателей. Это явление называется *охрупчиванием*. В легированных сталях это явление не наблюдается. Наиболее заметное изменение механических свойств с ростом температуры отмечается при температурах выше 300 °С.

17.2. Коррозионное воздействие окружающей среды

Коррозией называется разрушение металлов, вызванное химическим или электрохимическим взаимодействием их с коррозионной средой. Коррозия представляет собой сложный процесс, зависящий от множества факторов, включающих в себя условия окружающей среды, ее концентрацию, температуру, структуру металла и др. Можно выделить следующие типы коррозии: непосредственно химическое воздействие, электрохимическую коррозию, щелевую коррозию, межкристаллитную коррозию, водородное повреждение, коррозионное растрескивание под напряжением и др. В зависимости от условий окружающей среды, нагружения и функционального назначения детали любая из видов коррозии может явиться причиной преждевременного разрушения.

Непосредственное химическое воздействие. Это наиболее распространенный вид коррозии, при котором поверхность детали корродирует более или менее равномерно, в результате чего происходит постепенное разрушение материала и уменьшение размеров неповрежденного воспринимающего нагрузку сечения. Скорость такой коррозии оценивается по результатам лабораторных испытаний образцов и измеряется в единицах г/(м$^2\cdot$год) или мм/год. При испытании образцов тщательно определяют изменение их веса и размера. Неблагоприятные последствия непосредственного химического воздействия могут быть уменьшены следующим образом: подбором соответствующих окружающей среде материалов; применением гальванопокрытий; плакирования; нанесением покрытий или покраски для предохранения материала; изменением по возможности окружающей среды и т. д.

Электрохимическая коррозия. Электрохимическая коррозия происходит, когда два разнородных металла образуют электрическую цепь, замыкаемую жидким или пленочным электролитом или коррозионной средой. В этих условиях разность потенциалов между разнородными металлами создает электрический ток, проходящий через электролит, который и приводит к коррозии в первую очередь анода или менее благородного металла пары. Чем больше ток, тем интенсивнее коррозия. Защита от электрохимической коррозии осуществляется путем подбора невзаимодействующих пар металлов, электрической изоляцией одного из разнородных металлов от другого, обеспечением малого отношения площади поверхности катода к площади поверхности анода, введением ингибиторов для уменьшения агрессивности коррозионной среды, другими методами.

Щелевая коррозия. Щелевая коррозия представляет собой существенно локализованный процесс ускоренной коррозии в щелях, трещинах и других дефектах малого объема, где корродирующий металл контактирует с неподвижным раствором. Для уменьшения интенсивности щелевой коррозии или для предотвращения ее необходимо ликвидировать трещины и щели.

Межкристаллитная коррозия. Локальные воздействия на уязвимые места у границ зерен называются *межкристаллитной коррозией*. Это может быть связано с концентрацией примесей по границам зерен. В частности, этому подвержены аустенитные стали после нагрева до 510 ÷ 790 °С. С целью минимизации восприимчивости аустенитных нержавеющих сталей к межкристаллитной коррозии возможно понижение содержания углерода менее, чем до 0,03 %, или могут быть добавлены стабилизаторы для получения более однородной структуры сплава. Восприимчивыми к межкристаллитной коррозии являются также алюминиевые, магниевые, медные и цинковые сплавы в неблагоприятных условиях.

Водородное охрупчивание. *Водородным охрупчиванием* называется проникновение водорода в металл, в результате чего образуются хрупкие гидриды. Механизм водородного охрупчивания до конца еще не выяснен. Водородному охрупчиванию подвержены в разной степени практически все металлы.

На рис. 112 показано, как изменяется диаграмма статического изгиба образцов из стали 10ХН2М с острым надрезом при разном содержании водорода V_{H_2} (см^3 на 100 г металла): *1* – 5,77; *2* – 3,74; *3* – 1,65; *4* – 0,95 (P – поперечная сила, f – стрела прогиба).

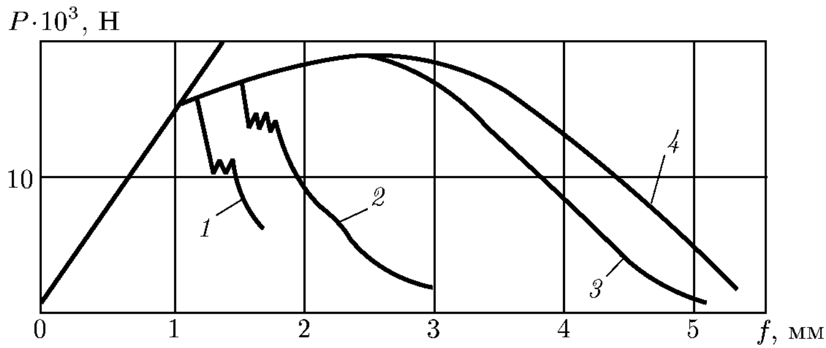


Рис. 112

Видно, что водород практически не оказывает влияние на сопротивление пластической деформации и смещает начало образования трещины в область малых деформаций, а также уменьшает работу распространения трещины. Водород также способствует замедленному разрушению под влиянием длительного действия растягивающих напряжений. С повышением скорости деформации хрупкость сталей уменьшается и при больших скоростях совсем не проявляется. Аналогично влияет и понижение температуры. Чувствительность к водородной хрупкости возрастает с увеличением прочности стали. Снижения водородного охрупчивания можно добиться удалением водорода с помощью «высушивания» при относительно низких температурах в течение нескольких часов. Охрупчивающее действие водорода при содержании его до 8–10 $см^3$ в большинстве случаев является обратимым процессом, т. е. после низкотемпературного отжига пластичность образцов восстанавливается вследствие десорбции водорода из металла.

Серьезную опасность в атомной энергетике представляет водородная хрупкость сплавов циркония, применяемых для изготовления оболочек твэлов и труб технологических каналов. Водородное охрупчивание циркониевых сплавов проявляется в существенном снижении ударной вязкости (в 4–6 раз при 20 °С), хотя временное сопротивление и относительное удлинение мало зависят от содержания водорода до концентрации порядка 0,05 %.

Коррозионное растрескивание под напряжением. Этот вид разрушения проявляется как образование множества трещин в металле под влиянием одновременно действующего растягивающего напряжения и коррозионной среды и характерен для различных сплавов. Уровни напряжений, при которых происходит коррозионное растрескивание, значительно ниже предела текучести материала, так что причиной разрушения могут быть и остаточные напряжения. На растрескивание под напряжением оказывают влияние величина напряжения, состав сплава, окружающая среда и температура. Трещины растут до критического размера, после чего наступает внезапное и катастрофическое разрушение в соответствии с законами механики разрушения. Скорость роста коррозионной трещины хорошо подчиняется уравнению Париса

$$\frac{dl}{dt} = CK^n, \qquad (17.1)$$

где l – длина трещины; t – время; K – коэффициент интенсивности напряжений, зависящий от длины трещины и уровня напряжений; C и n – константы, зависящие от свойств материала и коррозионной среды. Очевидно, есть наибольшее значение коэффициента интенсивности напряжений в условиях плоской деформации в коррозионной среде, при котором трещина не растет – K_{1scc}. Предотвратить коррозионное растрескивание под напряжением можно, понижая напряжение ниже предельного значения, выбирая наилучший сплав для данной среды, изменяя состав окружающей среды путем снижения ее агрессивности.

17.3. Влияние поверхностно-активных веществ

Существует группа эффектов, связанная с понижением свободной поверхностной энергии твердого тела при воздействии поверхностно-активных веществ (эффект Ребиндера). В зависимости от состава твердого тела, окружающей среды, структуры твердого тела, температуры, характера напряженного состояния эффект Ребиндера может проявляться в разных формах. Наиболее распространенными и важными формами его проявления являются пластифицирование и возникновение хрупкости.

Пластифицирование заключается в уменьшении сопротивления пластическому деформированию, понижении предела текучести и деформационного упрочнения при однократном статическом нагружении. Этот эффект наблюдается при деформировании олова, алюминия, свинца в растворах органических поверхностно-активных веществ, например пластифицирование монокристалла олова в растворе олеиновой кислоты в вазелиновом масле (рис. 113). Кривая *1* – диаграмма деформирования в чистом вазелиновом масле, кривая *2* – в 0,2%-м вазелиновом растворе олеиновой кислоты (C_{17} $H_{33}COOH$).

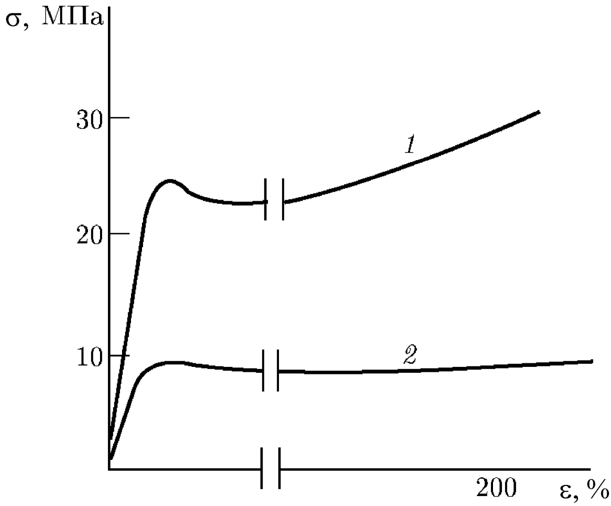


Рис. 113

Возникновение хрупкости – резкое снижение пластичности и прочности – связано обычно с действием жидкой среды, сходной с твердым телом по своей молекулярной природе. Для металлов такими средами являются определенные жидкие металлы. Например, латунь и цинк становятся хрупкими в присутствии ртути, медь – в присутствии жидкого висмута. Рис. 114 иллюстрирует эффект возникновения хрупкости при растяжении монокристаллов цинка: кривая *1* – диаграмма деформации на воздухе, кривая *2* – в присутствии ртути. Стрелками отмечен момент разрыва.

Отметим характерные особенности эффекта Ребиндера:

- избирательность действия только данной среды на данный металл;

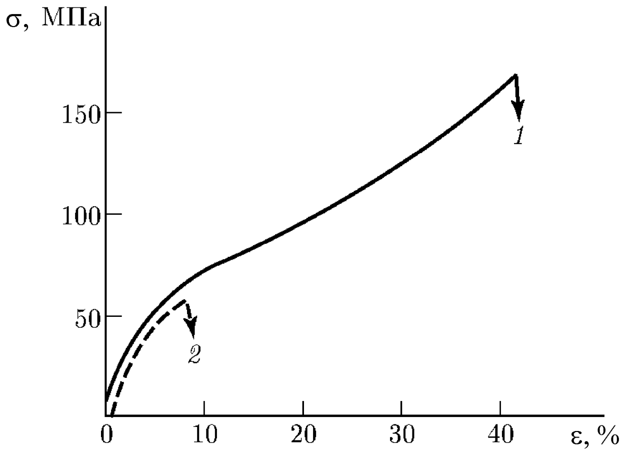


Рис. 114

- проявление эффекта при очень малом количестве поверхностно-активных веществ;
- немедленное проявление эффекта при смачивании поверхности;
- обратимость влияния поверхностно-активных веществ – после их удаления с поверхности тела его механические свойства восстанавливаются;
- проявление эффекта при наличии растягивающих напряжений.

17.4. Влияние облучения на механические свойства материалов

Облучение оказывает существенное влияние на механические свойства конструкционных материалов. Их изменение в значительной степени определяется характером взаимодействия дислокационной структуры материала со сложным комплексом возникающих радиационных дефектов.

По мере накопления радиационных повреждений твердость материалов растет, заметно увеличивается предел текучести и в меньшей степени временное сопротивление. Значения предела текучести и временного сопротивления сближаются, а относительное удлинение и ударная вязкость снижаются, что свидетельствует об охрупчивании материала. Кроме этих изменений происходит повышение критической температуры хрупкости – сдвиг ее в область более высоких температур на 150–200 °С. Эффект радиационного упрочнения наблюдается во всех нержавеющих сталях аустенитного класса и высоконикелевых сплавах. В результате облучения при температурах до 400 °С повышаются прочностные и снижаются пластические свойства этих материалов при температурах испытаний до 350–400 °С. При температурах испытания свыше 500 °С прочностные характеристики восстанавливаются, однако пластичность этих материалов резко снижается. Этот эффект получил название высокотемпературного радиационного охрупчивания хромоникелевых сталей и высоконикелевых сплавов.

Радиационное упрочнение сталей ферритно-мартенситного класса типа Х13 происходит при температурах облучения до 350 °С. При этом нейтронное облучение значительно повышает критическую температуру хрупкости (на 100–250 °С). Увеличение температуры облучения и температуры послерадиационных испытаний свыше 450–500 °С приводит к снятию эффекта радиационного упрочнения. На рис. 115 на примере нормализованной стали (0,24 % С, 0,13 % Si, 0,55 % Mn) показаны приращения предела текучести $\Delta\sigma$ и критической температуры хрупкости $\Delta T_{кр}$ с увеличением интенсивности облучения φ металла нейтронами. Наблюдаемые изменения свойств обусловлены образованием комплексных дефектов. Эти дефекты не являются стабильными и при повышении температуры отжигаются.

Облучение существенно активизирует коррозионные процессы в металлах за счет радиолизного эффекта. При температуре около 300 °С скорость коррозии перлитных и нержавеющих сталей, сплавов циркония при облучении возрастает в 1,2–4,4 раза.

Наиболее стойкими против высокотемпературного радиационного охрупчивания являются стали, легированные молибденом, ниобием и бором.

Результатом облучения может быть и радиационное распухание материалов, т.е. увеличение его объема или уменьшение его плотности. Это явление обнаружено практически во всех металлах и сплавах при облучении их в диапазоне температур 0,3–0,5 $T_{пл}$ не только нейтронами, но и другими частицами. Распухание обусловлено образованием в металлах и сплавах под действием облучения вакансионных пор, что приводит к появлению в детали конструкции дополнительных напряжений. Зависимость радиационного распухания от флюенса и температуры облучения имеет вид:

$$\frac{\Delta V}{V} = A + B\Phi^{n(T)} \exp\left(-\frac{Q}{RT}\right), \tag{17.2}$$

где Φ – флюенс нейтронов; Q – энергия активации; R – газовая постоянная; A и B – константы; n – показатель степени, зависящий от материала; T – абсолютная температура.

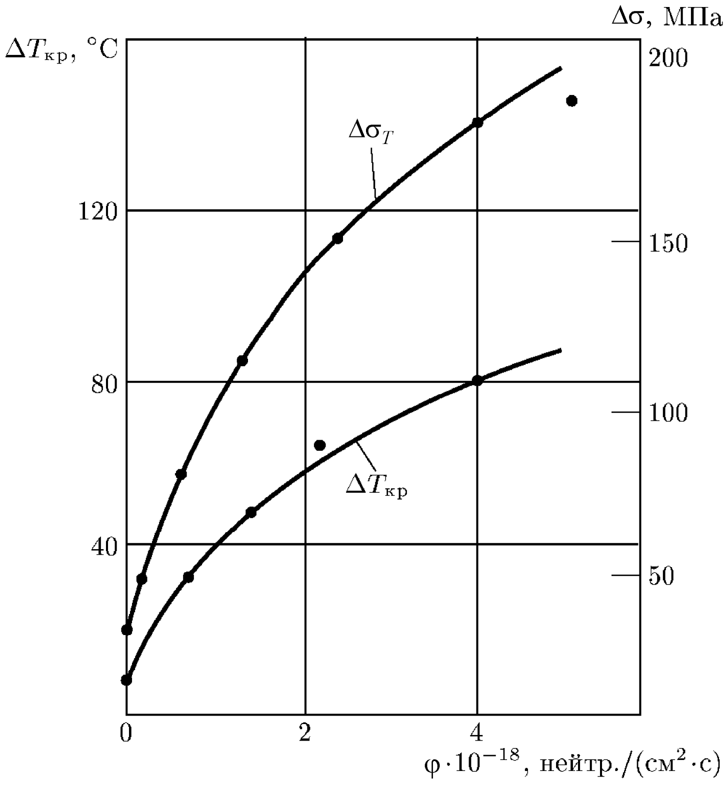


Рис. 115

17.5. Фотопластический эффект у фотопроводников

Этот эффект заключается в том, что сопротивление фотопроводников пластическому деформированию при освещении их электрическим светом возрастает, поскольку направленный поток электронов в проводнике служит препятствием для движущихся дислокаций. На рис. 116 показано влияние освещения на сопротивление пластическому деформированию при растяжении кристалла CdS с постоянной скоростью. Пунктиром показана диаграмма в отсутствие освещения. При включении света (стрелка на рис. 116 направлена вверх) требуется увеличение напряжений для поддержания постоянной скорости деформирования, т. е. наблюдается упрочнение. Если свет выключается (стрелка на рис. 116 направлена вниз), то фотопластический эффект исчезает. Таким образом, упрочнение наблюдается только при наличии освещения.

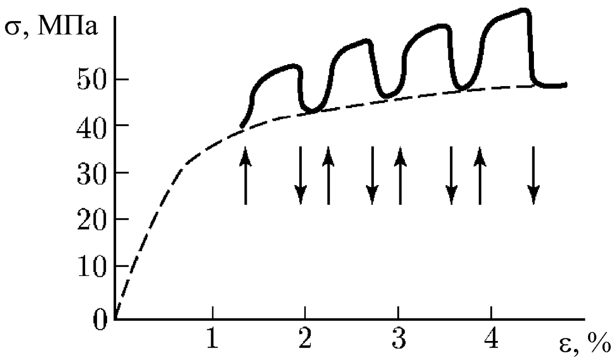


Рис. 116

Список рекомендуемой литературы

1. *Феодосьев В.И.* Сопротивление материалов. М.: Наука, 1986.

2. *Сапунов В.Т.* Классический курс сопротивления материалов в решениях задач: Учеб. пособие. М.: ЭДИТОРИАЛ УРСС, 2002.

3. *Беляев Н.М.* Сборник задач по сопротивлению материалов. М.: Наука, 1970.

Евгений Николаевич Пирогов
Владимир Юрьевич Гольцев

СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

Учебное пособие

Редактор *М.В. Макарова*
Оригинал-макет изготовлен *С.В. Тялиной*

Подписано в печать 05.09.2008. Формат 60×84 1/16.
Уч.-изд. л. 12,25 Печ. л. 12,5. Тираж 150 экз. Изд. № 1/49. Заказ № 1-2055

Московский инженерно-физический институт (государственный университет).
115409, Москва, Каширское ш., 31

Типография издательства «Тровант».
г. Троицк Московской области