

2 85-5
126

2 85-5
126-3

**МОСКОВСКИЙ
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

Л. Б. Окунь

ВВЕДЕНИЕ В КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

Тексты лекций

МОСКВА 1984

2 85-5/126-3

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО
ОБРАЗОВАНИЯ СССР

МОСКОВСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНЖЕНЕРНО-ФИЗИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

Л. Б. Окунь

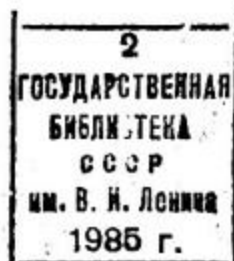
ВВЕДЕНИЕ В КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

Тексты лекций

Москва 1984

О к у н ь Л. Б. Введение в калибровочные теории: Тексты лекций. — М.: Изд. МИФИ, 1984. — 88 с.

"Введение в калибровочные теории" содержат текст пяти лекций, прочитанных на школе физиков ОИЯИ ЦЕРН в Таворе (Чехословакия, 5 — 18 июня 1983 г.). Темы лекций: калибровочная инвариантность электромагнитного и слабого взаимодействий, хиггсы и суперсимметричные частицы. Кроме лекций, в работе содержится Приложение, включающее в себя препринты и отрывки избранных статей В. Фока, Ф. Лондона, О. Клейна и Г. Вейля, в которых была введена и развита идея калибровочной инвариантности.



© Московский инженерно-физический институт, 1984 г.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Лекция 1. Калибровочная инвариантность в электромагнитном взаимодействии	5
1.1. Классическая электродинамика классических частиц	5
1.2. Электродинамика полей	6
1.3. Об этимологии и ранней истории калибровочной инвариантности	7
1.4. Физический смысл калибровочной инвариантности в электродинамике	9
Лекция 2. Калибровочная инвариантность в слабом взаимодействии	13
2.1. $SU(2)$ игрушечная модель	13
2.2. $SU(2) \times U(1)$ полуигрушечная электрослабая модель	15
2.3. $SU(2) \times U(1)$ электрослабое взаимодействие	16
2.4. О ранней истории промежуточных бозонов	18
Лекция 3. Нарушение калибровочной инвариантности. Хиггсы	19
3.1. Минимальная модель	20
3.2. Свойства хиггса в минимальной модели	21
3.3. Юкавские взаимодействия в минимальной модели	23
3.4. Чем плоха минимальная модель?	24
Лекция 4. Расширения	25
4.1. Дополнительные калибровочные бозоны	25
4.2. Дополнительные фермионы	26
4.3. Дополнительные хиггсы	27
4.4. Голдстоны и псевдоголдстоны	29
Лекция 5. Букварь-самоучитель по низкоэнергетической суперсимметрии	31
5.1. Проблема иерархии	31
5.2. Суперчастицы	32
5.3. Вершины и константы связи	33
5.4. Примеры реакций и распадов	34
5.5. Примеры массовых формул	37
5.6. О роли гравитации в $N=1$ локальной суперсимметрии (супергравитации)	38
Литература	38
Приложение. Калибровочные теории с 1919-го по 1938 г. Репринты и отрывки избранных статей В. Фока, Ф. Лондона, О. Клейна и Г. Вейля	41

ПРЕДИСЛОВИЕ

Калибровочно-инвариантные взаимодействия являются динамическим базисом современной теории элементарных частиц. Более половины из 10^4 статей, ежегодно публикуемых в области физики элементарных частиц, так или иначе имеют дело с калибровочной инвариантностью. Некоторые разделы здесь стали почти столь же классическими, как геометрия Эвклида.

В этих лекциях я стремился быть настолько элементарным, насколько это возможно. Я старался также, чтобы лекции дополняли лекции по калибровочным теориям, прочитанные на предыдущих школах ЦЕРН и ЦЕРН-ОИЯИ (Б. Де Вит, 1982; С. Ярлског, 1981; Л. Майани, 1980,...). В результате я не затронул некоторые хорошо известные темы и ограничился фрагментарной библиографией. (Довольно обширный список работ может быть найден, например, в книгах [1,2].) С другой стороны, я специально остановился на некоторых старых статьях, избранные репринты которых содержатся в Приложении к этим лекциям.

Из-за недостатка места опущены в письменном тексте лекций некоторые вопросы, которые обсуждались во время лекций:

1. Современные и будущие опыты с W - и Z -бозонами.
2. КХД и глюон-глюонные столкновения.
3. Великое объединение и электрическая нейтральность атомов.
4. Калибровочные фантазии о новых далекодействующих силах.

Лекция 1. КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

1.1. Классическая электродинамика классических частиц

Начнем с уравнений Максвелла:

$$\partial_\mu F_{\mu\nu} = j_\nu,$$

$$\partial_\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0,$$

где

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} F_{\rho\sigma}.$$

Четырехмерный потенциал A_μ не входит в эти уравнения явным образом. Он входит лишь через тензор напряженности поля $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu.$$

Потенциал A_μ определен с точностью до градиентного преобразования, которое обычно называют калибровочным преобразованием. Действительно, легко видеть, что тензор $F_{\mu\nu}$ не меняется, когда $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$, где $f = f(x, y, z, t)$.

Сохранение электрического заряда необходимо для того, чтобы имели место уравнения Максвелла и калибровочная инвариантность. Из антисимметрии $F_{\mu\nu}$ следует, что $\partial_\mu \partial_\nu F_{\mu\nu} = 0$ и, следовательно, из первого уравнения Максвелла $\partial_\mu j_\mu = 0$. Как известно, уравнения Максвелла следуют из лагранжиана

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} + j_\mu A_\mu.$$

На первый взгляд, этот лагранжиан не инвариантен относительно калибровочного преобразования. Однако возникающее при этом преобразовании дополнительное слагаемое $j_\mu \partial_\mu f$ в силу сохранения тока может быть записано в виде дивергенции:

$$j_\mu \partial_\mu f = \partial_\mu (f j_\mu)$$

и (при достаточно хорошем поведении функции $f(x, y, z, t)$ на бесконечности) отброшено.

1.2. Электродинамика полей

В теории поля ток j_μ выражается через заряженные поля (в квантовой механике — через волновые функции заряженных частиц). Рассмотрим токи полей со спином 1/2 и 0:

$$j_\mu = e \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad \text{— для поля Дирака,}$$

$$j_\mu = ie [\varphi^* (\partial_\mu \varphi) - (\partial_\mu \varphi^*) \varphi] \quad \text{— для поля Клейна — Гордона.}$$

(Проверьте, что эти токи сохраняются.) Теперь вещество и излучение описываются на равной основе лагранжианом Дирака:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + j_\mu A_\mu + i \bar{\psi} \hat{\partial} \psi - m \bar{\psi} \psi,$$

где $\bar{\psi} \hat{\partial} \psi = \frac{1}{2} [\bar{\psi} \gamma_\mu (\partial_\mu \psi) - (\partial_\mu \bar{\psi}) \gamma_\mu \psi].$

Этот лагранжиан можно переписать, используя ковариантную ("длинную") производную $D_\mu = \partial_\mu - ie A_\mu$:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + i \bar{\psi} \hat{D} \psi - m \bar{\psi} \psi.$$

Аналогично, лагранжиан для скалярного поля¹ выражается через D_μ

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + (D_\mu \varphi)^* (D_\mu \varphi) - M^2 \varphi^* \varphi = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^2 + (\partial_\mu \varphi)^* (\partial_\mu \varphi) + ie [\varphi^* (\partial_\mu \varphi) - (\partial_\mu \varphi^*) \varphi] A_\mu + e^2 \varphi^* \varphi A^2 - M^2 \varphi^* \varphi.$$

"Короткая" производная ∂_μ и 4-потенциал A_μ входят в лагранжиан только через D_μ и $F_{\mu\nu}$. Заметьте, что и $F_{\mu\nu}$ можно выразить через коммутатор длинных производных. Рассмотрим произведение $\frac{i}{e} [D_\mu, D_\nu] R$, где R — некоторая (вообще говоря, тензорная) функция заряженных полей:

$$\begin{aligned} \frac{i}{e} [D_\mu, D_\nu] R &= \frac{i}{e} [(\partial_\mu - ie A_\mu)(\partial_\nu - ie A_\nu) - (\partial_\nu - ie A_\nu)(\partial_\mu - ie A_\mu)] R = \\ &= \frac{i}{e} (-ie) [\partial_\mu (A_\nu R) - A_\nu \partial_\mu R - \partial_\nu (A_\mu R) + A_\mu \partial_\nu R] = \\ &= (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) R. \end{aligned}$$

¹ Обратите внимание на квадратичный по A член $e^2 \varphi^* \varphi A^2$, присутствия которого требует калибровочная инвариантность.

В последнем выражении подразумевается, что производные действуют на A , но не на R . Таким образом, в операторном смысле

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{e} [D_\mu, D_\nu].$$

В теории поля (и в квантовой механике) калибровочное преобразование меняет не только потенциал электромагнитного поля, но также и заряженные поля. Рассматривая действие длинной производной, легко увидеть, что она инвариантна, если калибровочное преобразование состоит из двух частей:

$$\psi_i \rightarrow \psi_i e^{ieQ_i f}; A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f.$$

1.3. Об этимологии и ранней истории калибровочной инвариантности

Согласно словарю Вебстера, слово gauge (калибр) происходит из старого нормано-французского языка. Это слово имеет несколько значений:

1. Стандартная мера или шкала измерений.
2. Размеры, емкость, толщина и т.д.
3. Любое приспособление для измерения, например, толщины провода, размеров детали, количества жидкости в сосуде, давления пара и т.д.

К этому можно добавить:

4. В электродинамике gauge (калибровка) — это фазовый множитель, на который умножается амплитуда заряженного поля (или волновая функция заряженной частицы) и градиент которой добавляется к электромагнитному потенциалу.

На других языках соответствующие слова также имеют все упомянутые значения: Eich (немецкий), jauge (французский), калибр (русский), калибар (сербско-хорватский), калибър (болгарский), kalibr (чешский, словенский), kaliber (польский, датский, норвежский), ijk (голландский), calibro (итальянский), calibre (испанский), mått (шведский), mertek (венгерский), chuân (вьетнамский), хэмжээ (монгольский). К сожалению, я не могу воспроизвести китайский и японский иероглифы и потому приведу здесь лишь их транскрипцию: [segi] и [gezi].

На рис. 1 приведен пример калибра, который используется для определения диаметра труб. Очевидно, что трубы не инвариантны относительно такого рода калибров.



Рис. 1

Почему же в теоретической физике используют термин "калибровочная инвариантность" для обозначения симметрии, которая совершенно определенно не является калибровочной инвариантностью?

Термин "Eichinvarianz" был предложен в 1919 г. Вейлем в рамках попытки (неудачной) геометризовать электромагнитное взаимодействие и построить таким образом единую теорию гравитации и электромагнетизма, так сказать "Обобщенную общую теорию относительности". В то время Вейль использовал термин "Eichinvarianz" как синоним масштабной инвариантности (Maßstabinvarianz).

С наступлением эры квантовой механики Фок в 1926 г. изобрел уравнение Клейна — Фока — Гордона (после Клейна, но до Гордона), открыл, что это уравнение инвариантно относительно преобразования, и назвал это преобразование градиентным:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial f}{\partial x_\mu}; \quad \psi \rightarrow \psi e^{ie f}.$$

Заметим, что если опустить i , то фазовый множитель станет масштабным множителем. Это наблюдение было сделано в 1927 г.

Лондоном, который таким образом связал фазово-градиентное преобразование с калибровочным преобразованием Вейля.

В 1929 г. Вейль опубликовал статью "Электрон и гравитация", в которой инвариантность относительно фазово-градиентного преобразования была сформулирована как общий принцип. Он назвал его калибровочной инвариантностью (Eichinvarianz).

Отметим, что все упомянутые статьи были посвящены конструированию единой теории электромагнетизма и гравитации (в статье Фока рассматривалась пятимерная теория Калуцы — Клейна). Реально важные и непреходящие открытия, сделанные в этих статьях (например, вейлевские спиноры), рассматривались их авторами как побочные и малосущественные по сравнению с их великой целью. Интересно, что останется от наших великих и супервеликих объединений через полвека?

1.4. Физический смысл калибровочной инвариантности в электродинамике

Физический смысл калибровочной инвариантности в электродинамике, взятой самой по себе, не кажется в настоящее время особенно глубоким.

Например, даже очень маленькая масса фотона m_γ (например, такая, что $1/m_\gamma \sim 10^{11}$ см) разрушила бы калибровочную инвариантность, но все проявления электродинамики на Земле, включая все точнейшие тесты квантовой электродинамики, были бы не затронуты этим.

Рассмотрим теперь перенормируемость квантовой электродинамики. Здесь калибровочная инвариантность не является ни необходимой, ни достаточной. С одной стороны, перенормируемость не разрушается, если $m_\gamma \neq 0$. С другой стороны, перенормируемость была бы разрушена, если бы в лагранжиане присутствовал член, отвечающий взаимодействию с полем аномального магнитного момента: $\mu \bar{\psi} \sigma_{\mu\nu} \psi F_{\mu\nu}$, несмотря на явную калибровочную инвариантность этого члена. (Перенормируемость нарушается, так как размерность μ равна m^{-1} .) В действительности, фундаментальную роль в электродинамике играет сохранение электромагнитного тока (сохранение электрического заряда). Без сохранения электрического заряда был бы невозможен закон Кулона и было бы невозможно существование безмассового фотона (см. [1] и содержащиеся там ссылки). К сожалению, сохра-

нение электрического заряда проверено экспериментально с точностью на 10 порядков худшей, чем та точность, с которой проверено сохранение барионного заряда:

$$\tau (\pi \rightarrow \rho + \text{нейтральные частицы}) \geq 10^{22} \text{ лет.}$$

Желательны новые, более точные опыты.

В книгах по классической электродинамике термин "калибровочная" (градиентная) инвариантность впервые, насколько я смог установить, появился в 1941 г. в первом издании "Теории поля" Ландау и Лифшица. Эта книга содержала специальный параграф (§ 16) "Градиентная инвариантность". Но, конечно, свобода в выборе потенциала использовалась задолго до этого. В этом отношении физики немного напоминают персонажа Мольера из известной комедии "Мещанин во дворянстве", который внезапно осознал, что всю жизнь говорил прозой.

Выбор потенциала подобен выбору системы координат (см., например, [2]). Имеется глубокая аналогия между калибровочной инвариантностью в электродинамике с ее свободой локального выбора фазы и общекоординатной инвариантностью в общей теории относительности с ее свободой локального выбора координатной системы. В обоих случаях имеет место своеобразное "локальное самоуправление".

Упомянем здесь некоторые калибровочные условия, широко используемые в литературе:

$$\begin{aligned} \partial_\mu A_\mu &= 0 && \text{(лоренцева калибровка),} \\ A_0 &= 0 && \text{(гамильтонова калибровка),} \\ \vec{\nabla} \vec{A} &= 0 && \text{(кулонова калибровка),} \\ A_3 &= 0 && \text{(аксиальная калибровка),} \\ x_\mu A_\mu &= 0 && \text{(калибровка фиксированной точки).} \end{aligned}$$

Эта последняя калибровка была введена Фоком [4, 5] и была использована как мощный теоретический инструмент Швингером в его книге "Частицы, источники и поля" [6]. Легко проверить, что потенциал

$$A_\mu = \int_0^1 \lambda d\lambda \, x_\nu F_{\nu\mu}(\lambda x)$$

удовлетворяет условию $x_\mu A_\mu = 0$ и что $\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu = F_{\mu\nu}$.

Если ввести единичные векторы времениподобный τ_μ и пространственноподобный ρ_μ , то гамильтоново, кулоново и аксиальное условия могут быть записаны в ковариантной форме:

$$\tau A = 0 \quad (\text{гамильтоново}),$$

$$\partial A - (\tau \partial)(\tau A) = 0 \quad (\text{кулоново}),$$

$$\rho A = 0 \quad (\text{аксиальное}).$$

Во многих случаях калибровочная инвариантность может быть использована для получения оценок сечений и вероятностей распада, что называется на обороте конверта. Рассмотрим, например, рассеяние фотона фотоном (рис. 2) в пределе, когда частота фотона ω мала по сравнению с массой электрона m : $\omega \ll m$. В силу калибровочной инвариантности эффективный лагранжиан этого процесса имеет вид

$$\mathcal{L}_{eff} \sim \alpha^2 F_{\mu\nu}^2 m^{-4}.$$

Здесь $\alpha = 1/137$ и фактор m^{-4} определяется размерными соображениями ($[\mathcal{L}] = [m^4]$, $[F_{\mu\nu}] = [m^2]$). Теперь учтем, что сечение σ имеет размерность $[m^{-2}]$ и что оно пропорционально квадрату эффективного лагранжиана (амплитуды). Тогда чисто размерные аргументы дают

$$\sigma = a \alpha^4 \omega^6 m^{-8},$$

где a — безразмерный коэффициент "порядка единицы". Долгие расчеты в рамках КЭД дают

$$a = \frac{139 \cdot 56}{\pi \cdot 5 \cdot 90^2} \approx 0,06.$$

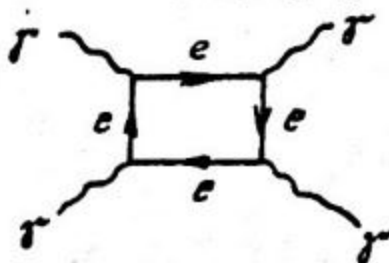


Рис. 2

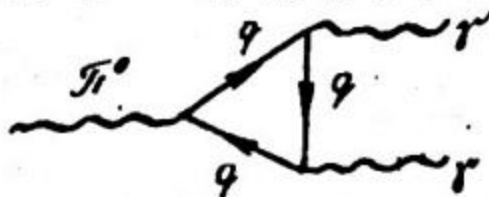


Рис. 3

Другой пример — распад $\pi^0 \rightarrow 2\gamma$ (рис. 3). Эффективный лагранжиан в этом случае

$$\mathcal{L}_{eff} \sim \alpha \frac{\varphi_\pi}{f_\pi} F \tilde{F},$$

где φ_π — волновая функция пиона, $a f_\pi \approx 130 \text{ МэВ}$ — знаменитый параметр, характеризующий частичное сохранение аксиального тока. Размерные соображения дают нам вероятность распада в виде

$$\Gamma = a \alpha^2 m_\pi^3 f_\pi^{-2},$$

где снова a — "порядка единицы". Точные расчеты дают

$$a = 1/32\pi \approx 0,01.$$

Продолжим обсуждение более общих аспектов калибровочной инвариантности. Часто в учебниках и лекционных записках можно прочесть, что калибровочная инвариантность электронного лагранжиана требует существования фотонного поля. Преобразование $\psi \rightarrow e^{ie f} \psi$ свободного электронного лагранжиана дает дополнительный член $ie(\partial_\mu f) \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$. Чтобы поглотить его, требуется член $ie A_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ и член, описывающий свободное фотонное поле.

Некоторые теоретики возражают против этого, предлагая не вводить A_μ , а поручить ее роль производной скалярного поля φ и преобразовывать $\varphi \rightarrow \varphi + f$. Чтобы быть инвариантным относительно этого преобразования, лагранжиан не должен содержать члена $(\partial_\mu \varphi)^2$, а поле φ входит только в член взаимодействия $ie(\partial_\mu \varphi) \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$. Однако вследствие сохранения векторного тока это взаимодействие фиктивно. Так что поле φ напоминает улыбку кота без кота. По существу, мы имеем теорию свободных электронов, которая калибровочно инвариантна. Таким образом, только нетривиальная реализация калибровочной инвариантности требует существования фотонов.

Я не знаю, кто первый сделал это замечание, так как слышал его от Огиевского, Полубаринова, Вайнштейна и Хрипловича.

Мы могли бы вообще не рассматривать поле φ , а сразу же избавиться от члена $ie(\partial_\mu f) \bar{\psi} \gamma_\mu \psi$, используя сохранение тока $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ и отбрасывая член в лагранжиане, представляющий собой дивергенцию $ie \partial_\mu (f \bar{\psi} \gamma_\mu \psi)$. Ведь именно так и поступают в классической электродинамике при преобразовании $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu f$ (см. начало этой лекции).

Уместно закончить эту лекцию вопросом: "Если калибровочная инвариантность настолько несущественна, то почему она так существенна?" Ответ на этот вопрос заключается в том, что фотон не является единственной калибровочной частицей. Калибровочная симметрия электродинамики абелева, $U(1)$. Другие взаимодействия имеют неабелевы группы симметрии, $SU(2)$, $SU(3)$, ... Они более глубокие и налагают более жесткие ограничения.

Лекция 2. КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В СЛАБОМ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ

2.1. $SU(2)$ игрушечная модель

Многие важные свойства калибровочной теории слабого взаимодействия воспроизводятся упрощенной моделью, обладающей калибровочной симметрией $SU(2)$.

Начнем с изотопического дублета безмассовых фермионов:

$$\psi = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

с электрическими зарядами $Q_\alpha = +1/2$ и $Q_\beta = -1/2$. Гиперзаряд (средний электрический заряд) такого дублета равен нулю и мы можем забыть о нем и калибровать только изотопическую группу $SU(2)$.

Калибровочные поля W_μ^+ , W_μ^- , W_μ^0 образуют изотопический триплет, причем поле W_μ^0 играет роль фотона, который взаимодействует с электрическим зарядом $Q = T_3$. Определим 2×2 матрицу W_μ :

$$W_\mu \equiv \frac{1}{2} \tau^a W_\mu^a \equiv \frac{1}{2} \vec{\tau} \vec{W}_\mu,$$

где τ^a — три матрицы Паули.

Квинтэссенцией модели является предположение, что лагранжиан инвариантен относительно неабелевого калибровочного преобразования:

$$\psi \rightarrow \psi' = S \psi,$$

$$W_\mu \rightarrow W_\mu' = S W_\mu S^\dagger - \frac{i}{e} (\partial_\mu S) S^\dagger,$$

где $S = e^{ie f} \equiv \exp(i e f \vec{\tau} / 2)$.

Сравнивая это с абелевым электромагнитным случаем, где

$$S = e^{ie Q f},$$

видим, что числовая функция f заменилась матрицей f : вместо одной скалярной функции имеем три, $\vec{f}$, и вместо одного $U(1)$ -

генератора, Q , три $SU(2)$ -генератора $\frac{1}{2}\vec{\tau}$. Теперь ковариантная производная — это матрица:

$$D_\mu = \partial_\mu - ieW_\mu.$$

Тензор напряженности поля — тоже матрица:

$$G_{\mu\nu} \equiv \frac{1}{2}\tau^a G_{\mu\nu}^a \equiv \frac{1}{2}\vec{\tau} \vec{G}_{\mu\nu}.$$

В том же операторном смысле, что и в абелевом случае, $G_{\mu\nu}$ определяется коммутатором:

$$G_{\mu\nu} = \frac{i}{e} [D_\mu, D_\nu] = (\partial_\mu W_\nu - \partial_\nu W_\mu) - ie[W_\mu, W_\nu].$$

Последнее слагаемое равно нулю в абелевом случае, но оно очень важно в неабелевом случае. Легко проверить, что при калибровочном преобразовании

$$G_{\mu\nu} \rightarrow G'_{\mu\nu} = S G_{\mu\nu} S^\dagger.$$

Калибровочно инвариантный лагранжиан имеет вид:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu} G_{\mu\nu} + \bar{\psi} \hat{D} \psi.$$

Заметьте, что

$$\frac{1}{2} \text{Tr} G_{\mu\nu} G_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \vec{G}_{\mu\nu} \vec{G}_{\mu\nu}.$$

Это выражение содержит не только билинейные члены (W^2), но и трилинейные (W^3) и quadriлинейные (W^4) (рис. 4). Наличие этих нелинейных взаимодействий является замечательной чертой не только нашей игрушечной модели, но и стандартной электро-слабой теории, калибровочная группа которой $SU(2) \times U(1)$.

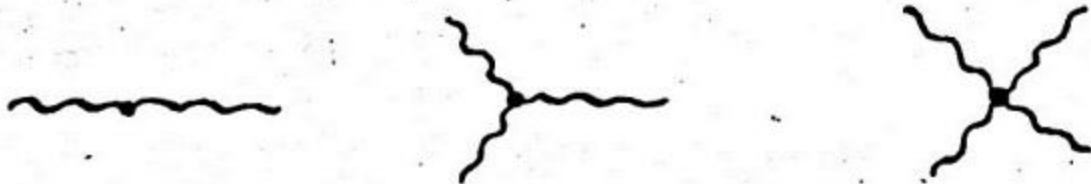


Рис. 4

2.2. $SU(2) \times U(1)$ полуигрушечная электрослабая модель

Учтем теперь тот факт, что в природе изотопические дублеты имеют ненулевой гиперзаряд:

$$Q = T_3 + Y,$$

и рассмотрим, так сказать, полуигрушечную модель, в которой фермионный дублет состоит из двух частиц:

$$\psi = \begin{pmatrix} \nu \\ e \end{pmatrix}.$$

Здесь $Q_\nu = 0$, $Q_e = -1$, $Y = -1/2$.

Теперь должны быть прокалиброваны не только изоспин, но и гиперзаряд, и калибровочная группа, $SU(2) \times U(1)$ будет иметь четыре калибровочных поля (W^+ , W^- , W^0 , B^0) и две константы связи (g_2 и g_1):

$$D_\mu = \partial_\mu - ig_2 \vec{T} \vec{W}_\mu - ig_1 Y B_\mu^0.$$

Отношение g_1 и g_2 определяет так называемый слабый угол (угол Вайнберга):

$$\tan \theta_W = g_1/g_2, \quad \cos \theta_W = g_2/\bar{g}, \quad \sin \theta_W = g_1/\bar{g},$$

где $\bar{g} = \sqrt{g_1^2 + g_2^2}$.

Две линейных суперпозиции

$$A = B^0 \cos \theta_W + W^0 \sin \theta_W,$$

$$Z = -B^0 \sin \theta_W + W^0 \cos \theta_W$$

описывают фотон и Z -бозон соответственно. Легко проверить, что

$$\begin{aligned} g_2 T_3 W^0 + g_1 Y B^0 &= \bar{g} \cos \theta_W \sin \theta_W (T_3 + Y) A + \\ &+ \bar{g} (T_3 \cos^2 \theta_W - Y \sin^2 \theta_W) Z = \\ &= \bar{g} \cos \theta_W \sin \theta_W Q A + \bar{g} (T_3 - Q \sin^2 \theta_W) Z. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$e = \bar{g} \cos \theta_W \sin \theta_W = g_2 \sin \theta_W,$$

где $e^2 = 4\pi\alpha$.

Константа взаимодействия Z -бозона с частицей, имеющей заряд Q и проекцию изоспина T_3 , равна $\frac{e}{\sin \theta_W \cos \theta_W} (T_3 - Q \sin^2 \theta_W)$.

Важно подчеркнуть, что все эти формулы справедливы, когда симметрия $SU(2) \times U(1)$ не нарушена. Они справедливы также и в том случае, когда симметрия $SU(2) \times U(1)$ разрушена до $U(1)_{em}$.

В случае ненарушенной $SU(2) \times U(1)$, когда T_3 и Y сохраняются в отдельности, W° и B° более предпочтительны, чем A и Z , поскольку W° принадлежит представлению $SU(2)$, а $B^\circ - U(1)$. Рассмотрение A и Z — это первый шаг на пути признания того обстоятельства, что в природе симметрия $SU(2) \times U(1)$ нарушена и только $U(1)_{em}$ не нарушена. Это нарушение делает $W^\pm$ и Z -бозоны массивными и только фотон остается безмассовым.

2.3. $SU(2) \times U(1)$ электрослабое взаимодействие

Для построения реалистической теории следует принять во внимание несколько экспериментальных фактов:

- 1) нам известны три поколения фундаментальных фермионов — лептонов и кварков;
- 2) слабые взаимодействия не сохраняют четность; только левоспиральные состояния входят в заряженный слабый ток;
- 3) кварки и по крайней мере некоторые из лептонов не безмассовы;
- 4) токовые кварки являются суперпозициями кварковых состояний, имеющих определенные массы;
- 5) W и Z — тяжелые.

Начнем с того, что введем левые и правые фермионы:

$$\psi_{L,R} = \frac{1}{2} (1 \pm \gamma_5) \psi.$$

В соответствии с 2) предположим, что правые фермионы ψ_R являются $SU(2)$ -синглетами, а левые ψ_L — $SU(2)$ -дублетами. В каждом поколении имеются два дублета:

ν_{eL}	$\nu_{\mu L}$	$\nu_{\tau L}$
e_L	μ_L	τ_L
u_L	c_L	t_L
d'_L	s'_L	b'_L

Здесь d', s', b' получены из d, s, b унитарным преобразованием Кобаяши — Маскавы, имеющим четыре свободных параметра: три угла и фазу. Заметьте, что вследствие различных изоспинов левые и правые компоненты одной и той же частицы имеют различные значения гиперзаряда. Отложим до следующей лекции обсуждение механизма, дающего массы калибровочным бозонам и фермионам. Здесь я расскажу только о том, как были предсказаны массы W -и Z -бозонов.

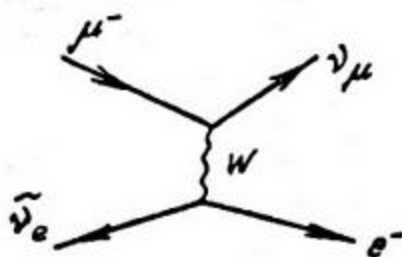


Рис. 5

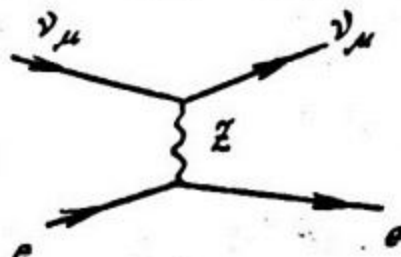


Рис. 6

Из рис. 5, описывающего распад мюона, легко найти соотношение между константой эффективного четырехфермионного взаимодействия G_{μ} , калибровочной константой g_2 и массой W -бозона m_W :

$$\frac{G_{\mu}}{\sqrt{2}} = \frac{g_2^2}{8m_W^2}.$$

Вероятность распада мюона выражается через G_{μ} и массу m_{μ} хорошо известным образом:

$$\Gamma_{\mu} = \frac{G_{\mu}^2 m_{\mu}^5}{192 \pi^3}.$$

Если подставить в это выражение экспериментальные значения Γ_{μ} и m_{μ} то получится:

$$G_{\mu} = (1,16632 \pm 0,00002) \cdot 10^{-5} \text{ ГэВ}^{-2}$$

(см. Particle Properties Data Booklet, April 1982, p. 67). Отсюда следует, что

$$m_W = \left(\frac{g_2^2}{4\sqrt{2} G_{\mu}} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sin \theta_W} \left(\frac{\pi \alpha}{\sqrt{2} G_{\mu}} \right)^{1/2} \simeq \frac{37,3}{\sin \theta_W} \text{ ГэВ}.$$

Эффективное четырехфермионное взаимодействие нейтральных токов обусловлено обменом Z -бозонами (см. рис. 6, описывающий $\nu_e e$ -рассеяние). Соответствующее сечение имеет вид

$$G_{\nu_e e} = \frac{G_F \rho^2}{\pi} \left[\left(-\frac{1}{2} + \sin^2 \theta_W \right)^2 + \frac{1}{3} \sin^4 \theta_W \right] \delta.$$

Здесь $\delta = (\rho_e + \rho_\nu)^2$, а параметр $\rho = m_W^2 / m_Z^2 \cos^2 \theta_W$. В стандартной электрослабой теории $\rho = 1$. По экспериментальным данным, согласно Data Booklet, $\rho = 0,992 \pm 0,020$.

Параметр $\sin^2 \theta_W$ входит в выражение и других реакций, индуцированных нейтральными токами: νN -рассеяние, $e N$ -рассеяние, включая слабое взаимодействие атомных электронов с атомными ядрами, μN -рассеяние и аннигиляцию $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$. Из всех этих процессов, согласно Data Booklet, среднее экспериментальное значение $\sin^2 \theta_W = 0,224 \pm 0,019$. Это приводит к массам $m_W = 77,9 \pm 1,7$ ГэВ; $m_Z = 88,8 \pm 1,4$ ГэВ.

В 1983 г. W - и Z -бозоны были открыты UA1 и UA2 коллаборациями ЦЕРН.

2.4. О ранней истории промежуточных бозонов

Неабелева электрослабая теория явилась результатом слияния нескольких основных "притоков", среди них:

1. Экспериментальные исследования слабых взаимодействий;
2. Калибровочная инвариантность электродинамики.
3. Спонтанное нарушение симметрий в статистической физике.
4. Понятие изоспина, введенное Гейзенбергом в 1932 г.
5. Идея Юкавы (1935г.) о том, что обмен мезонами дает как ядерные силы, так и β -распад.

В 1981 году Сесилия Ярлског [7] обратила внимание широкой физической аудитории на статью, опубликованную в 1938 г. Оскаром Клейном. По существу, в этой статье электрослабая теория развивалась на основе калибровочной изотопической инвариантности.

Теория содержала два изотопических дублета: p, n и u, d , и три векторных частицы: γ , W^+ (B в обозначении Клейна) и $W^-(\bar{B})$ с калибровочно инвариантными нелинейными взаимодействиями.

виями между ними (типа W^3 и W^4). Единственной калибровочной константой теории был электрический заряд. Была упомянута также возможность нейтральных токов, взаимодействующих с Z -бозонами (которые обозначались C).

Свою теорию Клейн разрабатывал в рамках пятимерного мира Калуцы — Клейна, пытаясь объединить гравитационное, электромагнитное и ядерное взаимодействия. К сожалению, он не проводил четкой грани между сильным и слабым взаимодействием и не высказал никаких суждений о величинах масс B -, $\tilde{B}$ - и C -бозонов. Создается впечатление, что он считал, что эти бозоны играют одновременно две роли: роль W^+ , W^- и Z^0 и одновременно роль π^+ , π^- , π^0 или, вернее, ρ^+ , ρ^- , ρ^0 . Более того, он не был вполне последователен, пытаясь описать электромагнитное взаимодействие нуклонов и лептонов, не вводя при этом гиперзаряд. Судя по формулам, его поле C соответствует W^0 , а его поле A соответствует B^0 . Но его уравнения для нелинейных напряженностей заряженных калибровочных полей абсолютно правильны.

Теорию Клейна прочно забыли, и современные неабелевы теории берут свое начало от знаменитой статьи Янга и Миллса (1954г.). Когда эта статья появилась, Оскару Клейну было шестьдесят лет. В 1953 — 1965 годах он был членом Комитета по Нобелевским премиям. Он умер в 1977 году. К сожалению, я ничего не знаю о том, как О. Клейн реагировал на возрождение его идей.

Я благодарен Сесилии Ярлског, приславшей мне свою статью и ксероксовую копию статьи Клейна, которая воспроизведена в Приложении к этим лекциям.

Лекция 3. НАРУШЕНИЕ КАЛИБРОВОЧНОЙ ИНВАРИАНТНОСТИ. ХИГГСЫ

Как мы обсуждали в предыдущей лекции, электрослабая калибровочная симметрия сильно нарушена в природе. Фундаментальную роль в этом нарушении приписывают гипотетическим бесспиновым частицам, называемым хиггсовыми бозонами или Хиггсами. Было бы наверное правильней называть хиггсовые частицы хиггсонами, подобно фермионам и бозонам. Но слово "хиггсон" звучит несколько странно, что-то вроде "сын Хигга". С другой стороны, не менее странно выглядит, скажем, и такое заглавие недавней статьи в Nuclear Physics: "Радиационные поправки

к рождению Хиггса". Поэтому в этих лекциях я буду называть хиггсовы бозоны не Хиггсами, а хиггсами, с малой буквы "х".

3.1. Минимальная модель

Начнем с минимальной модели, содержащей один изотопический дублет скалярных бозонов

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}.$$

Часть лагранжиана, содержащая поле φ , имеет вид:

$$\mathcal{L}_\varphi = |D_\mu \varphi|^2 - \lambda^2 (|\varphi|^2 - \frac{1}{2} \eta^2)^2 - \sum_{i,k} (f_{ik} \bar{\psi}_{iL} \psi_{kR} \varphi + \text{H.c.}).$$

Член $|D_\mu \varphi|^2$ описывает свободное распространение поля φ и его взаимодействие с калибровочными полями. Здесь $D_\mu = \partial_\mu - i g_2 \frac{\sigma}{2} W_\mu - i g_1 \frac{Y}{2} B_\mu$, где g_2 и g_1 — калибровочные константы связи $SU(2)$ и $U(1)$, $W_\mu = \vec{W}_\mu \cdot \vec{\sigma}/2$.

Член $-\lambda^2 (|\varphi|^2 - \frac{1}{2} \eta^2)^2$ описывает нелинейное самодействие φ . Константа связи λ безразмерна, а константа η имеет размерность массы.

В третьем члене f_{ik} — это безразмерные юкавские константы связи, их индексы i, k относятся к ароматам лептонов и кварков; H.c. означает эрмитово сопряженный член.

Самым главным является знак минус перед $|\eta|^2$: он ведет к спонтанному нарушению калибровочной симметрии. В результате поле φ приобретает ненулевое вакуумное среднее $\langle \varphi \rangle = \frac{1}{2} \eta$. Посредством члена $|D_\mu \varphi|^2$ это дает массы первоначально безмассовым W - и Z -бозонам, а посредством юкавских взаимодействий — массы лептонам и кваркам.

Такое спонтанное происхождение масс частиц гарантирует, что при достаточно высоких импульсах $q \gg \eta$ всеми этими массами можно пренебречь и на достаточно малых расстояниях царит ненарушенная калибровочная симметрия.

В отсутствие спонтанного нарушения мы имели бы четыре скалярных поля: $\varphi = (\varphi^+, \varphi^0)$, $\bar{\varphi} = (\varphi^-, \bar{\varphi}^0)$. Электрически нейтральные компоненты φ^0 и $\bar{\varphi}^0$ являются взаимно ортогональными суперпозициями двух реальных полей:

$$\varphi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1^0 + i \varphi_2^0),$$

$$\tilde{\varphi}^0 = \frac{1}{\sqrt{2}} (\varphi_1^0 - i \varphi_2^0).$$

В результате спонтанного нарушения симметрии три из этих полей:

$$\varphi^+, \varphi^-, \varphi_2^0$$

становятся продольными компонентами трех (теперь уже) массивных векторных бозонов W^+ , W^- , Z^0 . Остается "в живых" лишь одно скалярное поле

$$\chi = \varphi_1^0 - \eta.$$

Поле χ описывает нейтральный хиггс с массой $m_H = 2\lambda\eta$.

Подробное описание того, как в результате спонтанного нарушения симметрии векторные поля "съедают" три из четырех скалярных полей дано, например, в книге [1].

3.2. Свойства хиггса в минимальной модели

Чтобы предсказать m_H , мы должны знать η и λ . Найти η легко. Действительно, $m_W = g_2 \hbar / \sqrt{2}$, значит $\eta = (2\sqrt{2} G)^{1/2} \approx 174$ ГэВ. Но величина λ неизвестна.

Если λ мала, $\lambda^2 \ll \alpha$, m_H может быть близко к своему нижнему пределу вблизи 10 ГэВ. Хиггс с массой несколько десятков ГэВ может рождаться на рр-коллайдере ЦЕРНа и на Тэватроне, сопровождая рождение W - и Z -бозонов или на ЛЭП в реакции, предложенной Иоффе и Хозе:

$$e^+ e^- \rightarrow ZH.$$

Вероятность такого хиггсового тормозного излучения порядка нескольких десятых процента для $m_H \approx 10$ ГэВ и резко уменьшается с ростом массы хиггса. Основные каналы распада легкого хиггса: $H \rightarrow b\bar{b}$, $H \rightarrow c\bar{c}$, $H \rightarrow \tau\bar{\tau}$. Очень большой интерес представляет распад на два глюона: $H \rightarrow g\bar{g}$, идущий через петли тяжелых кварков (рис. 7).

Легкий хиггс является своеобразным "счетчиком" тяжелых кварков, поскольку амплитуда его взаимодействия с двумя глюонами пропорциональна числу кварков q с массами m_q , которые достаточно велики. В петле могут быть не только кварки, но и

другие цветные тяжелые частицы, если они существуют (кваркино?).

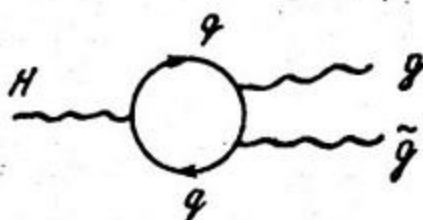


Рис. 7

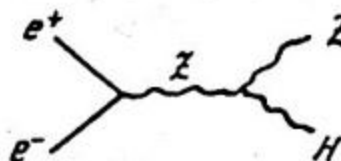


Рис. 8

Обратный процесс, $g\tilde{g} \rightarrow H$, является примером реакции глюон-глюонного слияния. Реакция рождения легких хиггсов посредством глюон-глюонного слияния на $p\bar{p}$ - или (будущих) pp -коллайдерах имеет довольно большое сечение, $\sigma \approx 10^{-35} \text{ см}^2$. К сожалению, трудно найти рожденный таким образом легкий хиггс в стое фоновых событий.

Если $\lambda^2 > 4\pi\alpha$, то H может быть тяжелей, чем W . Действительно, $m_H \sim m_W$ при $\lambda = 1/4$. Хиггс с $m_H \sim m_W$ мог бы быть обнаружен на ЛЭП II. Сечение процесса $e^+e^- \rightarrow ZH$ (рис. 8), согласно оценкам, должно быть примерно на порядок меньше, чем сечение процесса $e^+e^- \rightarrow W^+W^-$ (рис. 9). Так, на ЛЭП II при $\sqrt{s} \approx 200 \text{ ГэВ}$

$$\sigma(e^+e^- \rightarrow ZH) \approx 0,5 \sigma_{\text{точечное}},$$

$$\sigma_{\text{точечное}} = \frac{4\pi}{3} \frac{\alpha^2}{s} = \frac{87 \text{ нб}}{s(\text{ГэВ}^2)},$$

где $\sigma_{\text{точечное}}$ — стандартное сечение электромагнитного процесса $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ в низшем порядке теории возмущений (рис. 10). Здесь $\sqrt{s}$ — полная энергия в системе центра масс.

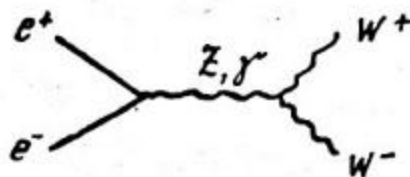


Рис. 9

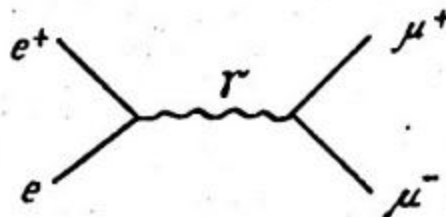


Рис. 10

Если $\lambda^2 \gg 4\pi\alpha$, то $m_H \gg m_W$. Тяжелый хиггс, скажем, с $m_H > 2m_W$ трудно родить (для этого нужны ускорители типа УНК или SSC), но легко зарегистрировать. Его рождение будет часто сопровождаться Z - или W -бозоном, и он должен распадаться на пару Z - или пару W . Таким образом, "автограф" такого тяжелого хиггса — три промежуточных бозона. Эксперименты UA1 и UA2 показали, что чем тяжелее частица, тем четче выделяются ее распады с большими p_t . Три промежуточных бозона, рожденных в одном столкновении, были бы по выражению М.Б. Волошина, настоящим фейерверком. Если бы оказалось, что $\lambda \gg 1$ и $m_H > 1$ ТэВ, то мы имели бы по-настоящему сильное взаимодействие в хиггсовом секторе и в секторе W - и Z -бозонов (у их продольных компонент).

3.3. Юкавские взаимодействия в минимальной модели

Тот же дублет скаляров, который дает массы W - и Z -бозонов, может давать также и массы фермионам. В качестве примера рассмотрим кварки первого поколения: u и d . Их правые компоненты u_R и d_R — изотопические синглеты. Их левые компоненты u_L и d_L образуют изотопический дублет, который мы обозначим Q_L :

$$Q_L = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}.$$

Юкавское взаимодействие d_R -кварка имеет вид

$$f_d (\bar{Q}_L d_R \varphi + \bar{d}_R Q_L \bar{\varphi}).$$

Здесь $\varphi^i = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \end{pmatrix}$, $\bar{\varphi}_i = (\bar{\varphi}^+, \bar{\varphi}^0)$, $i = 1, 2$. Юкавское взаимодействие u_R -кварка включает зарядово-сопряженный изотопический дублет φ_c :

$$f_u (\bar{Q}_L u_R \varphi_c + \bar{u}_R Q_L \bar{\varphi}_c),$$

где

$$\varphi_c^i = \delta^{i\kappa} \tilde{\varphi}_\kappa = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi}^0 \\ -\varphi^- \end{pmatrix}, \quad i, \kappa = 1, 2, \quad \tilde{\varphi}_\kappa = (\varphi^-, \tilde{\varphi}^0).$$

Использование φ_c необходимо из-за требования сохранения заряда и изотопического спина. (В приведенных выше выражениях тильда ($\sim$) означает зарядовое сопряжение, а черточка ($-$)

означает эрмитово сопряжение скалярного поля; антисимметричный тензор ϵ^{ik} , поднимая изотопический индекс, позволяет работать с античастицами как с частицами. Вакуумное среднее скалярного поля $\langle \varphi \rangle = \eta$ дает массы u - и d -кваркам: $m_u = f_u \eta$, $m_d = f_d \eta$. Таким же образом получают массы лептоны первого поколения: $m_e = f_e \eta$, $m_\nu = f_\nu \eta$, а также фермионы второго и третьего поколений.

В рамках нескольких поколений возникают не только диагональные массовые члены типа $m_u \bar{u}u$, $m_\mu \bar{\mu}\mu$, $m_e \bar{e}e$, но и недиагональные типа $m_{uc} \bar{u}c + m_{uc}^* \bar{c}u$, $m_{em} \bar{e}\mu + m_{em}^* \bar{\mu}e$. Они возникают при юкавских взаимодействиях с участием фермионов различных поколений типа $f_{e\mu} \bar{e}\mu \varphi + f_{e\mu}^* \bar{\mu}e \varphi^*$. Именно эти недиагональные массы ответственны за перемешивание поколений в матрице Кобаяши — Маскавы, описывающей заряженные токи. Дело в том, что когда массовая матрица приводится к диагональному виду, появляются недиагональные токи. Мнимые части недиагональных масс являются в рамках минимальной модели единственным источником нарушения CP.

3.4. Чем плоха минимальная модель?

Мы видим, что скалярные поля ответственны за большое число фундаментально важных явлений и величин. Теоретики импортируют из "Скалярландии" все массы, все углы смешивания, нарушение CP. Поэтому открытие "Скалярландии" экспериментаторами следует рассматривать как задачу № 1.

В то же время минимальная модель, которую мы рассматривали в двух последних лекциях, очевидно, очень далека от совершенства. Слишком много параметров в ней произвольны, не фиксированы априорными правилами. Некоторые из них фиксированы апостериори экспериментальными данными, другие все еще совершенно свободны.

В калибровочном секторе две произвольных калибровочных константы связи: g_1 и g_2 . Нарушение четности вносится в модель "снаружи", когда постулируется, что левые спиноры образуют изотопические дублеты, в то время как правые спиноры живут поодиночке в виде синглетов. Величина скалярного конденсата не предсказывается, неизвестна константа скалярного самодействия λ , а с ней и масса хиггса. Неизвестен принцип, определяющий набор юкавских констант связи. Незнание нами этого принципа

особенно ощущается в вопросе о массах нейтрино (не говоря уже о массе t -кварка). Нет никаких оснований думать, что нейтрино безмассовы. Вместе с тем, мы не понимаем, почему они такие легкие, т.е. почему их юкавские константы так малы.

Только экспериментаторы могут вытащить физику из этой "долины вздохов".

Лекция 4. РАСШИРЕНИЯ

В ожидании новых экспериментальных открытий теоретики продолжают конструировать модели, расширяющие стандартную модель в различных направлениях. Эти модели содержат дополнительные калибровочные бозоны, фермионы и хиггсы. Некоторые из этих моделей содержат нарушенные глобальные симметрии и голдстоуновские бозоны, т.е. безмассовые бесспиновые частицы, возникающие при спонтанном нарушении глобальных симметрий. (Назовем эти частицы голдстоунами, а не голдстоунами, так как первое название с его суффиксом "он" больше похоже на названия других частиц и частицеподобных объектов, таких, например, как фотон, протон и солитон.) В этой лекции кратко рассмотрены некоторые из расширенных моделей.

4.1. Дополнительные калибровочные бозоны

Чтобы ввести дополнительные калибровочные бозоны, нужно расширить калибровочную группу. Наиболее изученный (А. Салам, И. Пати, Р. Маршак, Р. Мохapatра, Г. Сеньянович и многие другие) пример — это лево-правосимметричная группа

$$SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1),$$

которая содержит, наряду с нашими, левыми, промежуточными бозонами W_L^+ , W_L^- и Z_L , три дополнительных бозона: W_R^+ , W_R^- , Z_R , которые взаимодействуют с дублетами правых фермионов и синглетами левых фермионов. В пределе ненарушенной симметрии модель $L-R$ симметрична, и несохранение четности в ней возникает в результате спонтанного нарушения симметрии. Нарушение делает W_R -бозоны тяжелее W_L -бозонов, так что $\delta \equiv (m_{WL}/m_{WR})^2 \ll 1$. Кроме того, в результате нарушения возникает перемешивание

W_L и W_R - бозонов с малым углом смешивания ζ , так что не только тяжелые, но и легкие W -бозоны приобретают взаимодействие с правыми фермионными токами. Мы знаем из β -распада, что δ и ζ малы. Согласно стандартной модели поляризация электронов в разрешенных β -переходах $P_\beta = -\beta = -v/c$, где v — скорость электрона, а c — скорость света. В $SU(2)_L \times SU(2)_R \times U(1)$ модели $P_\beta = -\beta(1-2\delta^2)$, если $\zeta=0$, и $P_\beta = -\beta(1-2\zeta^2)$, если $\delta=0$. В общем случае, когда $\zeta \neq 0$ и $\delta \neq 0$, поляризация P_β различна для переходов Ферми и переходов Гамова — Теллера, так что отношение $R = P_\beta(F)/P_\beta(GT)$ не равно единице. Согласно последним измерениям, $P_\beta = -\beta$ с точностью $\sim 4\%$ для переходов Ферми и $\sim 1\%$ — для переходов Гамова — Теллера (ван Клинка и сотр. [8]).

Ограничения $M_{W_R} \gtrsim 380 - 450$ ГэВ дают недавние измерения спектра позитронов в распаде поляризованных и неполяризованных мюонов (J. Carr et al. — Phys. Rev. Lett., 51, 627 (1983)). С гораздо более высокой точностью поиски правых токов смогут быть осуществлены в будущем на электрон-протонном коллайдере HERA. Поиски рождения тяжелых калибровочных бозонов включены в программы Тэватрона и УНК.

4.2. Дополнительные фермионы

Другой класс моделей, в которых четность нарушается спонтанно, — так называемые вектороподобные модели. Эти модели содержат наряду с известными, "нашими" фермионами дополнительные наборы так называемых зеркальных фермионов, относительно которых обычно предполагают, что они значительно тяжелее "наших" фермионов. Если предположить, что зеркальные и обычные фермионы имеют одинаковую массу, то придется заключить, что у зеркальных фермионов имеются свои фотоны, глюоны и промежуточные бозоны (см. [9] и имеющиеся там ссылки). В вектороподобных моделях весь "грех" нарушения четности можно отнести целиком к фермионному (и скалярному) сектору, так что калибровочные бозоны в нем участия не принимают. Некоторые теоретики рассматривают это как достоинство.

4.3. Дополнительные хиггсы

Существуют модели, в которых u - и d -кварки получают свои массы от двух различных хиггсовых дублетов. В этом случае имеется пять физических хиггсов: H^+ , H^- , H^0 , $H^{0'}$, $H^{0''}$. Заряженные хиггсы должны рождаться парами, электромагнитно:

$$e^+e^- \rightarrow \gamma \rightarrow H^+H^-.$$

Экспериментальные поиски этого процесса на коллайдере ПЕТРА исключили существование легких заряженных хиггсов с $m_H < 14$ ГэВ (см. недавний обзор [10]). Дополнительные хиггсы следует искать также среди продуктов распада W - и Z -бозонов:

$$Z \rightarrow H^+H^-, \quad Z \rightarrow H^0H^{0'}, \quad W^\pm \rightarrow H^\pm H^0.$$

Особенно интересна реакция

$$e^+e^- \rightarrow Z \rightarrow W^\pm H^\mp,$$

где Z — виртуален. Дело в том, что вершина ZWH зануляется в теориях, в которых все скалярные мультиплеты — дублеты. Открытие этого процесса сигнализировало бы о существовании скалярного мультиплета (или мультиплетов) с изоспином, большим $1/2$ (Иогансен, Уральцев, Хозе).

Нейтрино может иметь дираковский массовый член

$$m \bar{\nu} \nu = m (\bar{\nu}_L \nu_R + \bar{\nu}_R \nu_L),$$

возникающий из юкавского члена

$$f_\nu (\bar{L}_L \nu_R \varphi_c + \bar{\nu}_R L_L \bar{\varphi}_c),$$

так что $m = f_\nu \varphi_c$. Здесь $L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$, а скалярное поле φ_c было обсуждено выше.

Но нейтрино, в принципе, может иметь и майорановскую массу. Для левого нейтрино майорановский массовый член, если выразить его через вейлевские спиноры, имеет вид

$$m_L \nu_L^\alpha \nu_L^\beta \epsilon_{\alpha\beta} + \text{эрмитово сопряженный}.$$

Здесь $\alpha, \beta = 1, 2$ — спинорные индексы, а $\epsilon_{\alpha\beta}$ — антисимметричный тензор. Член дираковской массы превращает ν_L в ν_R (рис. 11 а); член майорановской массы превращает ν_L в $\bar{\nu}_R$ (рис. 11 б) и потому нарушает сохранение лептонного заряда. Такой майорановский член может быть порожден изотопическим триплетом хиггсов ϕ с тремя компонентами: ϕ^0 , ϕ^+ , ϕ^- . (Заметьте, что послед-



Рис. 11

няя частица имеет двойной заряд.) Взаимодействие этого триплета с лептонами имеет вид:

$$f'_\nu (e_L e_L \bar{\Phi}^- + \frac{1}{\sqrt{2}} (e_L \nu_L + \nu_L e_L) \bar{\Phi}^- + \nu_L \nu_L \bar{\Phi}^0) + \text{H. c.}$$

При этом ненулевую массу нейтрино $m_L = f'_\nu \langle \Phi \rangle$ дает ненулевое вакуумное среднее $\langle \Phi^0 \rangle = \langle \Phi \rangle$.

Экспериментально m_L электронного нейтрино ν_e не больше 30 эВ. (Новый опыт группы ИТЭФ снова дает ненулевую массу ν_e : $m_{\nu_e} \approx 30 \text{ эВ} \pm \text{несколько эВ}$. Однако пока нет независимых измерений со сравнимой точностью, которые бы подтвердили (или опровергли) этот результат.) При $\langle \Phi \rangle \sim \langle \Phi \rangle \sim 10^2 \text{ ГэВ}$ это означает, что f'_ν , $f'_\nu \ll 10^{-10}$. Не существует понимания, почему эти юкавские константы должны быть так малы.

Другая возможность, которая активно обсуждается, заключается в том, что ν_L безмассово ($m_L = 0$), а ν_R очень массивно ($m_R \geq 10^{11} \text{ ГэВ}$). Если предположить, что ν_L и ν_R перемешиваются дираковской массой m , где $m \geq 1 \text{ ГэВ}$, то массовая матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 0 & m \\ m & m_R \end{pmatrix}.$$

В этом случае масса легчайшего массового собственного состояния $\mu \sim m^2/m_R$.

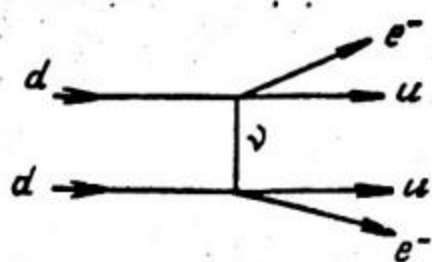


Рис. 12

Майорановские нейтрино должны приводить к двойному β -распаду (рис. 12) и, вообще, иметь сложную форму нейтринных осцилляций. Оба эти явления — объекты тщательных поисков, но пока без каких-либо положительных результатов.

Вернемся к обсуждению скалярных бозонов. Имея несколько скаляр-

ных мультиплетов, можно сконструировать модели, в которых CP нарушается не (только) юкавскими константами, а (и) в хиггсовом секторе. Механизм этого нарушения может быть либо явным (комплексные константы нелинейного взаимодействия между скалярами), либо спонтанным. В последнем случае лагранжиан CP-инвариантен, все константы связи действительны, а конденсаты — вакуумные средние скалярных полей — комплексны и, следовательно, CP — неинвариантен.

Если единственный источник нарушения CP — это хиггсов сектор, то можно показать (см. [11, 12]), что дипольный момент нейтрона d_n должен несколько превышать $e \cdot 10^{-25}$ см. Это заключение находится на грани противоречия с экспериментальными данными. Кроме того, в этом случае заряженные хиггсы должны быть довольно легкими ($m_H \leq 10$ ГэВ), что, как мы уже видели, тоже не подтверждается опытом. Заметим, что если CP нарушается спонтанно и вакуум характеризуется фазовым множителем $e^{i\theta}$, то возможен и комплексно-сопряженный вакуум с $e^{-i\theta}$. Значит, необходимо рассматривать вакуумные домены с чередующимися знаками CP нарушающей фазы. Эти домены должны отделяться друг от друга очень тонкими и очень массивными стенами, которые должны были серьезно повлиять на космологическую историю Вселенной.

4.4. Голдстоны и псевдоголдстоны

Итак, бесспиновые бозоны, сопровождающие нарушение локальной симметрии, называют хиггсами. Хиггсы массивны. Бесспиновые бозоны, сопровождающие нарушение глобальной симметрии, называют голдстонами. Голдстоны безмассовы. Если спонтанно нарушенная симметрия с самого начала была приближенной (была нарушена явно или квантовыми аномалиями), то голдстон становится псевдоголдстоном, имеющим ненулевую массу.

Примером составных (неэлементарных) псевдоголдстонов являются пионы. Они возникают в результате динамического нарушения глобальной киральной изотопической инвариантности КХД. Эта инвариантность приближенная, поскольку массы u - и d -кварков хотя и малы, но все же не равны нулю. Если бы u - и d -кварки были безмассовы, пионы тоже были бы безмассовы. За исключением пионов и их $SU(3)$ -родственников — К-мезонов и η -мезонов — никакие другие (псевдо) голдстоны на опыте не наблю-

дались. Пока они живут только на страницах теоретических статей. Назовем лишь некоторые из этих гипотетических частиц: аксион, арион, майорон, фамилон, технипион.

Аксион [13 — 18] отвечает глобальной киральной $u(1)$ -симметрии в кварковом секторе; арион [19 — 20] — глобальной киральной $u(1)$ -симметрии в лептонном секторе; фамилон [21 — 23] — так называемой горизонтальной симметрии, связывающей между собой фермионы различных поколений; майорон [24, 25] — глобальному сохранению лептонного заряда. Предполагается, что эти частицы возникают при спонтанном нарушении соответствующей глобальной симметрии. Технипионы [26, 27] — это псевдо-голдстоны, которые создаются динамическим нарушением глобальной изотопической киральной симметрии гипотетического техниквиевого взаимодействия (техникварков с техниглюонами).

Взаимодействие голдстона φ с соответствующим током j_μ (сохранение которого нарушено) описывается взаимодействием $\frac{1}{V}(\partial_\mu \varphi) j_\mu$. Константа V имеет размерность массы и характеризует энергетический масштаб, на котором нарушена глобальная симметрия.

Из отсутствия на опыте распада: $K^+ \rightarrow \pi^+ + \text{фамилон}$ можно заключить [21 — 23], что для глобальной горизонтальной симметрии между d -, s -, b -кварками $V \gtrsim 10^{10}$ ГэВ. Несколько более низкий предел для V в случае горизонтальной e, μ, τ -симметрии может быть получен из отсутствия распада $\mu \rightarrow e + \text{фамилон}$.

Обмен безмассовыми голдстонами должен давать дальнodelствующие силы. Эти силы были бы особенно интересны в случае диагональных вершин, переводящих фермион в самого себя. Такие диагональные вершины приводили бы к низкоэнергетическим дальнodelствиям между частицами стабильного вещества. Легко видеть, что векторная часть диагональной вершины $\bar{\psi} \gamma_\mu \psi$ дает нулевой вклад, так как $\partial_\mu \bar{\psi} \gamma_\mu \psi = 0$. Ненулевой вклад дала бы аксиально-векторная часть вершины $\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$.

В статическом пределе

$$\frac{1}{V}(\partial_\mu \varphi)(\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi) = \frac{1}{V}(\vec{\partial} \varphi)(\bar{\psi} \vec{\sigma} \psi),$$

где ∂_μ — четырехимпульс голдстона (например, ариона), а $\vec{\partial}$ — его пространственная часть. Статический потенциал, обусловленный обменом виртуальным арионом, похож на потенциал между двумя магнитными моментами, обусловленный обменом виртуальным фотоном [19, 20]:

$$\frac{(\vec{q} \vec{\sigma})(\vec{q} \vec{\sigma})}{V^2 q^2} \Rightarrow \frac{\sigma_i \sigma_k}{V^2} \left(\frac{\delta_{ik}}{r^3} - \frac{3 r_i r_k}{r^5} \right).$$

В недавнем опыте [28] проверялась независимость отношения частот прецессии ядерных спинов двух изотопов ртути от дополнительного магнитного поля, заэкранированного ферромагнитным экраном, который мог бы служить источником арионного поля, если арионы существуют. Идея опыта была основана на том, что арионно-магнитные моменты ядер не пропорциональны их магнитным моментам. Отрицательный результат эксперимента дает

$$V_e V_q > 10^8 \text{ ГэВ}^2.$$

Здесь индекс e относится к электрону, а индекс q к u - и d -кваркам. Этот отрицательный результат не был неожиданным. Дело в том, что астрофизические ограничения на V_e гораздо более жесткие. Оценивая поток энергии, который испускался бы внутренними областями Солнца и красных гигантов в виде арионов, можно заключить, что $V_e > 10^6 \text{ ГэВ}$ (Солнце), $V_e > 10^9 \text{ ГэВ}$ (красные гиганты). Ненаблюдение аксионов и арионов может означать, что или нет спонтанного нарушения соответствующих глобальных симметрий или нарушение происходит на очень малых расстояниях (скажем, при $10^{10} - 10^{11} \text{ ГэВ}$).

Лекция 5. БУКВАРЬ-САМОУЧИТЕЛЬ ПО НИЗКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ СУПЕРСИММЕТРИИ

5.1. Проблема иерархии

Одна из наиболее фундаментальных проблем, упомянутых в предыдущей лекции, — это проблема масштаба масс или, как ее обычно называют, проблема иерархии. Что определяет величину массы W -бозона? Феноменологический ответ: константа Ферми G_F . Но что в теории определяет величину этой константы? Ответ: величина вакуумного среднего скалярного поля χ . Что определяет величину χ ? Что определяет масштаб масс скалярного сектора?

Если рассмотреть вклад в массовый член скалярного поля, даваемый диаграммой на рис. 13, то легко увидеть, что он квадратично расходится. В перенормируемой теории отсутствует естест-

венная величина обрезания этой расходимости. Первое место, где она может быть обрезана извне, — это так называемая масса Планка m_{Pl} . (Как известно, $m_{Pl} \approx G_N^{-1/2} \approx 10^{19}$ ГэВ, где G_N — знаменитая константа гравитационного взаимодействия, константа Ньютона. При импульсах порядка m_{Pl} гравитационное взаимодействие должно стать сильным.) Но в этом случае мы имели бы $\hbar \sim m_{Pl}$ и $G_F \sim G_N$, в то время как на опыте $G_N/G_F \sim 10^{-34}$. Это исчезающее малое отношение, эта иерархия масштабов является вызовом теоретикам.



Рис. 13

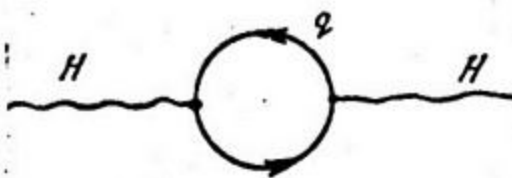


Рис. 14

Возможный способ избежать беспосадочного полета к массе Планка предоставляет достаточно точная компенсация между бозонной петлей и фермионной петлей (рис. 13 и 14 соответственно). Чтобы добиться такой компенсации, необходима своеобразная симметрия между бозонами и фермионами.

Другая физическая величина, которая, по-видимому, требует бозон-фермионных компенсаций, это так называемый космологический член — тензор энергии-импульса вакуума. В этом случае компенсация должна быть фантастически точной.

Простейший вариант бозон-фермионной симметрии представляет собой так называемая $N = 1$ -суперсимметрия ($N = 1$ СУСИ), в которой у каждой из известных частиц имеется по суперпартнеру.

5.2. Суперчастицы

Мы будем использовать для обозначения суперпартнеров известных частиц суффикс "ино" и украшать соответствующую букву (супер) шляпкой или (супер) тильдой. (Шляпка, может быть, более удобна, чем тильда, поскольку последняя обычно используется в литературе для обозначения античастиц.)

Начнем с "ино" со спином, равным нулю, а именно с лептино и кваркино, которые часто называют слептонами и скварками:

$e \rightarrow \hat{e}$	(еино, или электрино, или сэлектрон);
$\mu \rightarrow \hat{\mu}$	(мюино, или смю, смюон); $\tau \rightarrow \hat{\tau}$ (тауино, стау);
$\nu_e \rightarrow \hat{\nu}_e$	(е-нюино, е-сню); $\nu_\mu \rightarrow \hat{\nu}_\mu$ (мю-нюино, мю-сню);
$\nu_\tau \rightarrow \hat{\nu}_\tau$	(тау-нюино, тау-сню);
$u \rightarrow \hat{u}$	(уино, u -скварк); $d \rightarrow \hat{d}$ (дино, d -скварк);
$s \rightarrow \hat{s}$	(сино, s -скварк); $c \rightarrow \hat{c}$ (цино, c -скварк);
$b \rightarrow \hat{b}$	(бино, b -скварк); $t \rightarrow \hat{t}$ (тино, t -скварк, стоп).

Обратимся теперь к "ино" со спином, равным 1/2:

голдстино $\hat{G}$ (от так называемого суперголдстоуновского эффекта);

хиггсино $\hat{H}$ (иногда называемое схиггс) и несколько калибрино:

фотино $\hat{\gamma}$ (другое обозначение λ_γ);
 глюино $\hat{g}$ (другое обозначение λ_g);
 вино $\hat{W}$ (другие обозначения λ_W, w);
 зино $\hat{Z}$ (другие обозначения λ_Z, z).

Особую роль в современных теоретических моделях играет суперпартнер гравитона, гравитино, частица со спином 3/2, часто обозначаемая символом $\lambda_{3/2}$.

5.3. Вершины и константы связи

Простые оценки сечений или ширин распада для процессов с участием "ино" удобно производить, глядя на соответствующие фейнмановские графики. Вот простой рецепт, как рисовать вершины в таких графиках.

Нарисуйте обычную вершину, например $ee\gamma$ (рис. 15а). Начертите все линии одинаково (потому что в дальнейшем бозоны и фермионы поменяются местами). Увенчайте какую-либо пару частиц супершляпками (рис. 15б). Сохраните обычную константу связи. Рис. 15,б изображает вершину электрон-электрино-фотино с $e^2 = 4\pi\alpha$.

Некоторые другие примеры:

1. Вершина кварк-кваркино-глюино (рис. 16) $g_s^2 = 4\pi\alpha_s$, где α_s — константа связи КХД.

2. Вершины $W\hat{e}\hat{\nu}$, $\hat{W}\hat{e}\hat{\nu}$, $\hat{W}\hat{e}\hat{\nu}$ (рис. 17),

$$g_W^2 = 4\pi\alpha_W = 4\pi\alpha / \sin^2\theta_W.$$

3. Испускание голдстино электрино (сэлектроном) (рис. 18). В этом случае безразмерная константа связи $f_e = (m_e^2 - (-m_e^2))/m_s$, где m_s — масштаб нарушения СУСИ. Согласно Моде-83 $m_s \approx 10^{11}$ ГэВ.

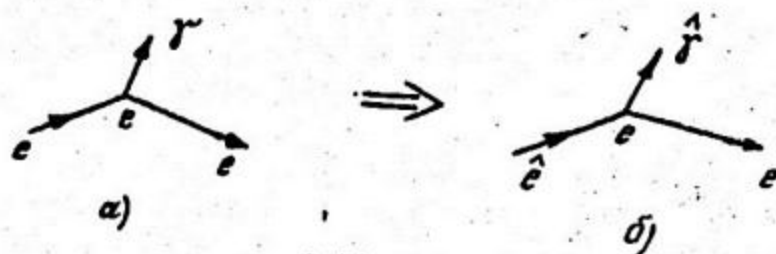


Рис. 15

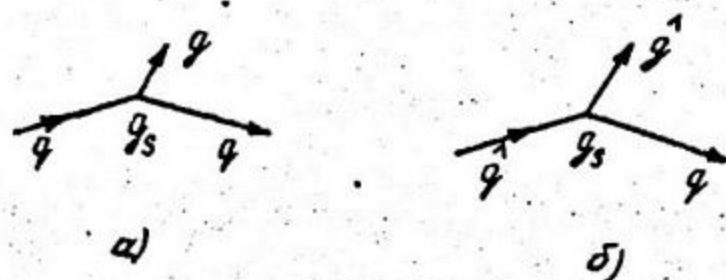


Рис. 16



Рис. 17

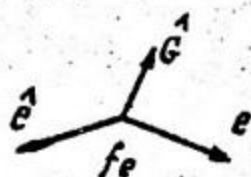


Рис. 18

5.4. Примеры реакций и распадов

Для того чтобы построить более сложную фейнмановскую диаграмму, соедините вершины, сохраняя непрерывность линий "ино". Вот несколько примеров.

1. Образование глюино в реакции слияния двух глюонов (рис. 19). Отметим, что цветовой заряд глюино больше, чем цветовой заряд кварка. Поэтому сечение рождения пары глюино должно быть больше, чем сечение рождения пары кварков с той же массой: $\sigma(gg \rightarrow \tilde{g}\tilde{g}) : \sigma(gg \rightarrow q\bar{q}) = 81:7$.

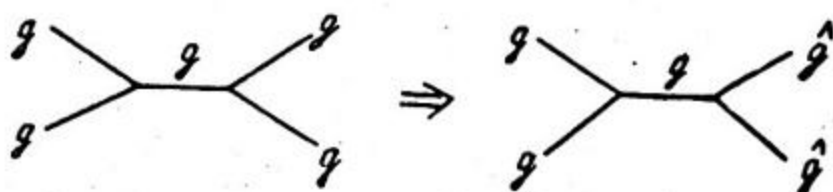
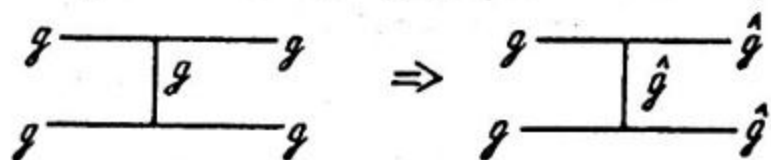


Рис. 19

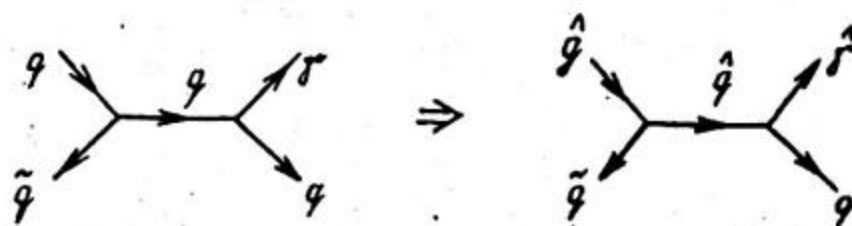


Рис. 20

2. Распад глюино на фотино и адроны (рис. 20): $\hat{g} \rightarrow \gamma + q\bar{q}$ (адроны).

3. Взаимодействие фотино с кварком может привести к рождению глюино, если энергия фотино достаточно велика: $\hat{\gamma} q \rightarrow \hat{g} q$ (рис. 21). Соответствующее сечение

$$\sigma \sim \alpha \alpha_s \delta m_{\hat{q}}^{-4},$$

где $m_{\hat{q}}$ — масса кваркино, которое в этом процессе виртуально.

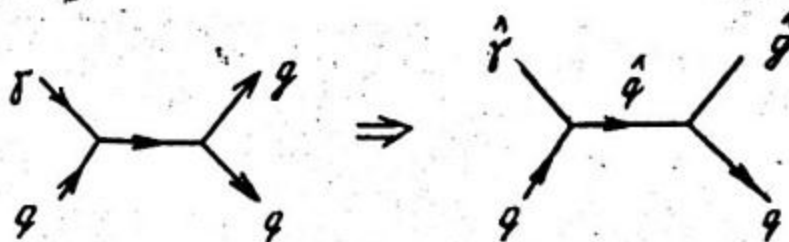


Рис. 21

Другая возможность — упругое рассеяние (рис. 22) с $\sigma \sim \alpha^2 s m_{\hat{g}}^{-4}$. Отрицательные результаты эксперимента beam dump, проведенного коллаборацией CHARM, можно интерпретировать следующим образом [29]: $m_{\hat{g}} \gtrsim 2$ ГэВ, $m_{\hat{g}} \gtrsim 100$ ГэВ.

Очень большой интерес представляют поиски глюино на $p\bar{p}$ -коллайдере. Если глюино тяжелые, их сигнал — большие недостающие P_T без сопровождающих лептонов.

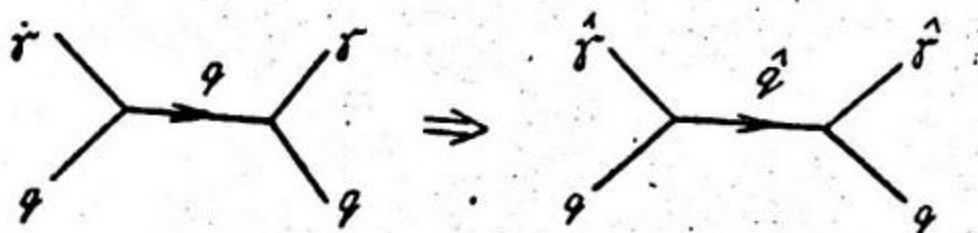


Рис. 22

4. Распады W (и Z) на "ино", если последние достаточно легкие (рис. 23).

5. Распады $\hat{W}$ и $\hat{Z}$ (рис. 24): $W \rightarrow \hat{g} + \text{адроны}$, $\hat{W} \rightarrow \gamma + \text{адроны}$, $\hat{Z} \rightarrow \hat{g} + \text{адроны}$.

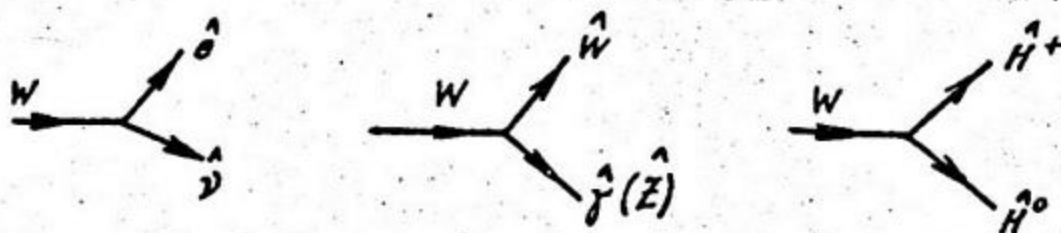


Рис. 23

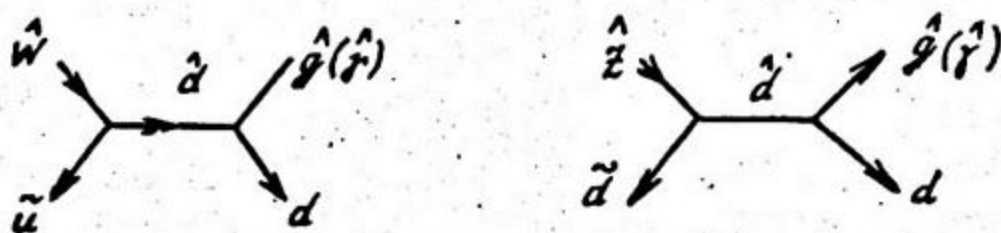


Рис. 24

6. Распады $\hat{\nu}$: $\hat{\nu} \rightarrow \hat{g} \nu$ (рис. 25), $\hat{\nu} \rightarrow \nu \hat{g}$ (рис. 26), $\hat{\nu} \rightarrow \hat{g} e^- + \text{адроны}$ (рис. 27). Заметим, что вероятность первого из этих процессов (нюино $\rightarrow$ голдстино + нейтрино) - порядка $m_{\hat{g}}^5 / m_{\hat{\nu}}^4$.

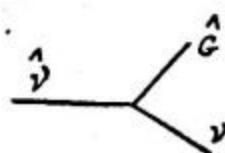


Рис. 25

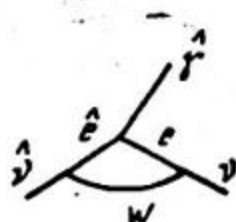
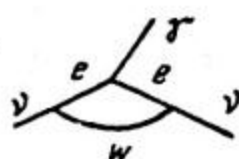


Рис. 26

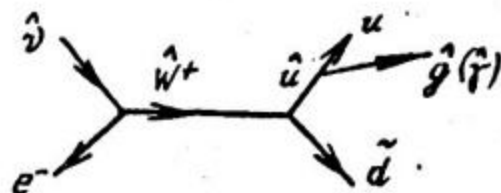
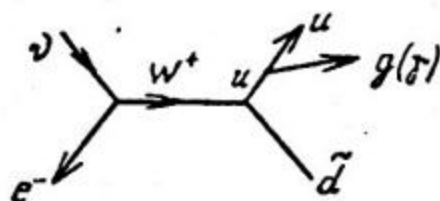


Рис. 27

5.5. Примеры массовых формул

Никто не знает достоверно, чему равны массы "ино". Ниже приведены предсказания из нескольких недавних препринтов:

$$m_{\hat{g}} = |m_{3/2} \pm m_g|,$$

$$m_W = \frac{1}{2} |m_{3/2} \pm \sqrt{m_{3/2}^2 + 4m_W^2}|,$$

$$m_{\hat{H}} = \sqrt{m_H^2 + 4m_{3/2}^2}.$$

Все эти формулы включают $m_{3/2}$ — массу гравитино. Можно думать, что $300 \text{ ГэВ} \approx m_{3/2} \approx 50 \text{ ГэВ}$.

Отметим, что перемешивание $\hat{H}$ хиггсина с викино ($\hat{W}$ и $\hat{Z}$) может быть весьма существенным. Перемешивание $\hat{H}^+ \leftrightarrow \hat{W}^+$ дает два хиггвино. Перемешивание $\hat{H}^0 \leftrightarrow \hat{Z}^0$ дает два хиггзино.

Не исключено, что некоторые из "ино" очень легкие: $m_{\hat{g}} \gtrsim 2 \text{ ГэВ}$, $m_{\hat{g}} \gtrsim 0,2 \text{ ГэВ}$.

Б.6. О роли гравитино в $N=1$ локальной суперсимметрии (супергравитации)

Взаимодействие поперечных компонент гравитино должно быть чрезвычайно слабым, поскольку вершины пропорциональны $E/m_{\rho\ell}$, где E — энергия гравитино.

Вершины испускания и поглощения продольных компонент гравитино пропорциональны $E^2/m_{3/2}m_{\rho\ell}$ и могли бы быть доступны наблюдению, если бы $E/m_{3/2} \gg 1$. В этом случае они выступали бы в форме голдстино, $\tilde{G}$.

Предположение, что $m_{3/2}m_{\rho\ell} \sim m_W^2$ противоречит приведенным массовым формулам, поскольку в этом случае "ино" почти вырождены по массам со своими обычными "близнецами": $m_{\tilde{e}} = m_e$ и т.д.

В противоположность этому, предположение, что $m_{3/2} \sim m_W$ в настоящее время не встречает возражений. Это предположение дает для масштаба нарушения суперсимметрии $m_S \sim (m_{3/2}m_{\rho\ell})^{1/2} \sim (m_W m_{\rho\ell})^{1/2} \sim 10^{11}$ ГэВ. В этом случае как поперечные, так и продольные компоненты гравитино практически ненаблюдаемы при энергиях ускорителей. И тем не менее, гравитино играет очень важную роль!

Эта лекция основана на препринтах [30 — 33], которые составляют не больше капли в море литературы по СУСИ.

Л и т е р а т у р а

1. Л.Б.Окунь. Лептоны и кварки. — М.: Наука, 1981.
L.B.Okun. Leptons and Quarks. — North-Holland, 1982.
2. А.А.Славнов, Л.Д.Фаддеев. Введение в квантовую теорию калибровочных полей. — М.: Наука, 1981.
A.A.Slavnov, L.D.Faddeev. Introduction to quantum Theory of gauge fields. — North-Holland, 1981.
3. Л.Д.Ландау, Е.М.Лифшиц. Теория Поля. — Л.: Наука, 1975.
4. В.А.Фок. Собственное время в классической и квантовой механике. — Известия АН СССР. Серия физики, 1937, ОМФН, с.551-568.
5. В.А.Фок. Работы по квантовой теории поля. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1957, с. 150-165.

6. J.Schwinger. Particles, Sources and Fields. Addison-wesley. 1970, v. 1, ch. 3, .1.
7. C.Jarlskog.-Physica Scripta, 24, 867-872 (1981).
8. J. van Klinken et al.-Phys.Rev.Lett., 50, 94 (1983).
9. L.B.Okun. On a search for mirror particles. Preprint ITEP-149 (1983).
10. S.Yamada. Search for new particles. Preprint DESY 83-100 (November 1983).
11. S.Weinberg.-Phys.Rev.Lett., 37, 657 (1976).
12. А.А.Ансельм, Н.Г.Уральцев.-ЯФ, 30, 465 (1979).
13. S.Weinberg.-Phys.Rev.Lett., 40, 223 (1978).
14. P.Wilczek.-Phys.Rev.Lett., 40, 279 (1978).
15. А.Р.Мятнишкин.-ЯФ, 31, 497 (1980).
16. M.Dine, P.Fishler, M.Srednicki.-Phys.Lett. 104B, 199 (1981).
17. M.B.Wise, H.Georgi, S.Glashow.-Phys.Rev.Lett., 47, 402 (1981).
18. M.A.Shifman, A.I.Vainshtein, V.I.Zakharov.-Nucl.Phys. B166, 493 (1980).
19. А.А.Ансельм, Н.Г.Уральцев.-Phys.Lett., 114B, 39; 161 (1982).
20. А.А.Ансельм.-Письма в ЖЭТФ, 36, 46 (1982).
21. G.B.Gelmini, S.Nussinov, T.Yanagida.-Nucl.Phys., B219, 31 (1983).
22. А.А.Ансельм, Н.Г.Уральцев.-ЖЭТФ, 84, 1961 (1983).
23. P.Wilczek.-Phys.Rev.Lett., 49, 1549 (1982).
24. Y.Chikashige, R.N.Mohapatra, R.D.Peccei.-Phys.Lett., 98B, 265 (1981);-Phys.Rev.Lett., 45, 1926 (1980).
25. G.B.Gelmini, M.Roncadelli.-Phys.Lett., 99B, 411 (1981).
26. M.E.Peskin.-Nucl.Phys., B175, 197 (1980).
27. J.Preskill.-Nucl.Phys., B177, 21 (1980).

28. В.Б.Александров, А.А.Ансельм, В.В.Павлов, Р.М.Умарходжаев.
-ЕЭТФ, 85, 1890 (1983).
 29. CHARM Collaboration.-Phys.Lett., 121B, 429 (1983).
 30. R.Barbieri, S.Ferrara.-CERN TH 3547.
 31. R.Barbieri, N.Cabbibo, L.Maiani, S.Petrarca.-IFPD, March
1983.
 32. J.Ellis, J.Hagelin, D.Nanopoulos, M.Srednicki.-CERN TH
3527, SLAC/PUB-3094 (1983).
 33. R.Barnet, K.Lackner, H.Haber.-SLAC PUB-3066 (1983).
-

Калибровочные теории с 1919-го по 1938-й г.
Репринты и отрывки из избранных статей В. Фока, Ф. Лондона,
О. Клейна, Г. Вейля

Supplement. Gauge Theories: from 1919 till 1938.
Reprints and Excerpts of Selected Papers by V.Fock, F.London,
O. Klein and H.Weyl

1. H.Weyl. Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie.
Annalen der Physik 59, 101-133 (1919) (excerpts: p.p.101,
114-115).
2. O.Klein. Quantum Theorie und fünfdimensionale Relativitäts-
theorie.
Zeitschrift für Physik 37, 895-906 (1926) (excerpts: p.p.
895, 904-906).
3. V.Fock. Über die invarianten Form der Wellen- und der
Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt.
Zeitschrift für Physik 39, 226-232 (1926).
4. F.London. Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl.
Zeitschrift für Physik 42, 375-389 (1927) (excerpts: p.p.
375-379, 388, 389).
5. H.Weyl. Electron und Gravitation. I.
Zeitschrift für Physik 56, 330-352 (1929) (excerpts:
p.p. 330-333, 348, 349).
6. O.Klein. On the Theory of charged Fields, in "New Theories
in Physics". Conference organized in collaboration with the
International Union of Physics and the Polish Intellectual
Co-operation Committee. Warsaw, May, 30th - June 3rd, 1938.

ANNALEN DER PHYSIK

VIERTE FOLGE. BAND 59.

1. Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie; von H. Weyl.

Kap. I. Geometrische Grundlage.

Einleitung. Um den physikalischen Zustand der Welt an einer Weltstelle durch Zahlen charakterisieren zu können, muß 1. die Umgebung dieser Stelle auf *Koordinaten* bezogen sein und müssen 2. gewisse *Maßeinheiten* festgelegt werden. Die bisherige Einsteinsche Relativitätstheorie bezieht sich nur auf den ersten Punkt, die Willkürlichkeit des Koordinatensystems; doch gilt es, eine ebenso prinzipielle Stellungnahme zu dem zweiten Punkt, der Willkürlichkeit der Maßeinheiten, zu gewinnen. Davon soll im folgenden die Rede sein.

Die Welt ist ein vierdimensionales Kontinuum und läßt sich deshalb auf vier Koordinaten x_0, x_1, x_2, x_3 beziehen. Der Übergang zu einem anderen Koordinatensystem $\bar{x}_i$ wird durch stetige Transformationsformeln

$$(1) \quad x_i = f_i(\bar{x}_0, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) \quad (i = 0, 1, 2, 3)$$

vermittelt. An sich ist unter den verschiedenen möglichen Koordinatensystemen keines ausgezeichnet. Die Relativkoordinaten dx_i eines zu dem Punkte $P = (x_i)$ unendlich benachbarten $P' = (x_i + dx_i)$ sind die Komponenten der infinitesimalen Verschiebung $\overrightarrow{PP'}$ (eines „Linienelementes“ in P). Sie transformieren sich beim Übergang (1) zu einem anderen Koordinatensystem $\bar{x}_i$ linear:

$$(2) \quad dx_i = \sum_k \alpha_k^i d\bar{x}_k;$$

α_k^i sind die Werte der Ableitungen $\partial f_i / \partial \bar{x}_k$ im Punkte P . In der gleichen Weise transformieren sich die Komponenten ξ^i irgendeines *Vektors* in P . Mit einem die Umgebung von P bedeckenden Koordinatensystem ist ein „Achsenkreuz“ in P verknüpft, bestehend aus den „Einheitsvektoren“ e_i mit den Komponenten $\delta_i^0, \delta_i^1, \delta_i^2, \delta_i^3$:

$$\delta_i^k = \begin{cases} 0 & (i \neq k) \\ 1 & (i = k) \end{cases}.$$

An seine Stelle aber trat bei Berücksichtigung der Gravitation der Gegensatz von elektromagnetischem Feld („Materie im weiteren Sinne“, wie Einstein sagt) und Gravitationsfeld; er zeigt sich am deutlichsten in der Zweiteilung der Hamiltonschen Funktion, welche der Einsteinschen Theorie zugrunde liegt.¹⁾ Auch dieser Zwiespalt wird durch unsere Theorie überwunden. Der Integrand der Wirkungsgröße $\int \mathfrak{W} dx$ muß eine aus der Metrik entspringende skalare Dichte $\mathfrak{W}$ sein, und die Naturgesetze sind zusammengefaßt in dem Hamiltonschen Prinzip: Für jede infinitesimale Änderung δ der Weltmetrik, die außerhalb eines endlichen Bereichs verschwindet, ist die Änderung

$$\delta \int \mathfrak{W} dx = \int \delta \mathfrak{W} dx$$

der gesamten Wirkungsgröße $= 0$ (die Integrale erstrecken sich über die ganze Welt oder, was auf dasselbe hinauskommt, über einen endlichen Bereich, außerhalb dessen die Variation δ verschwindet). Die Wirkungsgröße ist in unserer Theorie notwendig eine reine Zahl; anders kann es ja auch nicht sein, wenn ein Wirkungsquantum existieren soll. Von $\mathfrak{W}$ werden wir annehmen, daß es ein Ausdruck 2. Ordnung ist, d. h. aufgebaut ist einerseits aus den g_{ik} und deren Ableitungen 1. und 2. Ordnung, andererseits aus den φ_i und deren Ableitungen 1. Ordnung. Das einfachste Beispiel ist die Maxwellsche Wirkungsdichte I. Wir wollen aber in diesem Kapitel keinen speziellen Ansatz für $\mathfrak{W}$ zugrunde legen, sondern untersuchen, was sich allein aus dem Umstande erschließen läßt, daß $\int \mathfrak{W} dx$ ein koordinaten- und eichinvariantes Integral ist. Wir bedienen uns dabei einer von F. Klein angegebenen Methode.²⁾

Folgerungen aus der Invarianz der Wirkungsgröße. a) *Eichinvarianz.* Erteilen wir den die Metrik relativ zu einem Bezugssystem beschreibenden Größen φ_i , g_{ik} beliebige unendlich kleine Zuwächse $\delta \varphi_i$, δg_{ik} und bedeutet $\mathfrak{K}$ ein endliches Weltgebiet, so ist es der Effekt der partiellen Integration, daß das Integral der zugehörigen Änderung $\delta \mathfrak{W}$ von $\mathfrak{W}$ über das Gebiet $\mathfrak{K}$ in zwei Teile zerlegt wird: ein Divergenzintegral und ein

1) Vgl. Einstein, Hamiltonsches Prinzip und allgemeine Relativitätstheorie, Sitzungsber. d. Preuß. Akad. d. Wissensch. 1916. p. 1111.

2) Nachr. d. Ges. d. Wissensch. zu Göttingen, Sitzung vom 19. Juli 1918.

Eine neue Erweiterung der Relativitätstheorie.

Integral, dessen Integrand nur noch eine lineare Kombination von $\delta \varphi_i$ und δg_{ik} ist:

$$(8) \quad \int \delta \mathfrak{M} dx = \int \frac{\partial (\delta v^k)}{\partial x_k} dx + \int (w^i \delta \varphi_i + \frac{1}{2} \mathfrak{M}^{ik} \delta g_{ik}) dx. \quad \{\mathfrak{M}^{ki} = \mathfrak{M}^{ik}\}$$

Dabei sind w^i , δv^i die Komponenten je einer kontravarianten Vektordichte, $\mathfrak{M}^i_k$ aber die einer gemischten Tensordichte 2. Stufe (im eigentlichen Sinne). Die Komponenten δv^i sind lineare Kombinationen von

$$\delta \varphi_i, \delta g_{ik} \text{ und } \delta g_{ik,r} : \left\{ g_{ik,r} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_r} \right\}.$$

Wir drücken jetzt zunächst aus, daß $\int \mathfrak{M} dx$ sich nicht ändert, wenn die Eichung der Welt infinitesimal abgeändert wird. Ist $\alpha = 1 + \pi$ das Eichverhältnis zwischen ursprünglicher und abgeänderter Eichung, so ist π ein den Vorgang charakterisierendes infinitesimales Skalarfeld, das willkürlich vorgegeben werden kann. Bei diesem Prozeß erfahren die Fundamentalgrößen die Zuwächse

$$(9) \quad \delta g_{ik} = \pi \cdot g_{ik}, \quad \delta \varphi_i = - \frac{\partial \pi}{\partial x_i}.$$

Substituieren wir diese Werte in δv^k , so mögen die Ausdrücke

$$(10) \quad \delta^k(\pi) = \pi \cdot \delta^k + \frac{\partial \pi}{\partial x_a} \cdot h^k{}_a$$

hervorgehen. Die Variation (8) des Wirkungsintegrals muß für (9) verschwinden: so formulieren wir die Tatsache der Eichinvarianz.

$$\int \frac{\partial \delta^k(\pi)}{\partial x_k} dx + \int \left(-w^i \frac{\partial \pi}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \mathfrak{M}^{ik} \pi \right) dx = 0.$$

Formt man den ersten Term des zweiten Integrals noch durch partielle Integration um, so kann man statt dessen schreiben:

$$(11) \quad \int \frac{\partial (\delta^k(\pi) - \pi w^k)}{\partial x_k} dx + \int \pi \left(\frac{\partial w^i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \mathfrak{M}^i_i \right) dx = 0.$$

Daraus ergibt sich zunächst die Identität

$$(12) \quad \frac{\partial w^i}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \mathfrak{M}^i_i = 0$$

in der aus der Variationsrechnung bekannten Weise: wäre diese Ortsfunktion an einer Stelle (x_i) von 0 verschieden, etwa

Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie.

Von Oskar Klein in Kopenhagen.

(Eingegangen am 28. April 1926.)

Auf den folgenden Seiten möchte ich auf einen einfachen Zusammenhang hinweisen zwischen der von Kaluza¹⁾ vorgeschlagenen Theorie für den Zusammenhang zwischen Elektromagnetismus und Gravitation einerseits und der von de Broglie²⁾ und Schrödinger³⁾ angegebenen Methode zur Behandlung der Quantenprobleme andererseits. Die Theorie von Kaluza geht darauf hinaus, die zehn Einsteinschen Gravitationspotentiale g_{ik} und die vier elektromagnetischen Potentiale φ_i in Zusammenhang zu bringen mit den Koeffizienten γ_{ik} eines Linienelementes von einem Riemannschen Raum, der außer den vier gewöhnlichen Dimensionen noch eine fünfte Dimension enthält. Die Bewegungsgleichungen der elektrischen Teilchen nehmen hierbei auch in elektromagnetischen Feldern die Gestalt von Gleichungen geodätischer Linien an. Wenn dieselben als Strahlungsgleichungen gedeutet werden, indem die Materie als eine Art Wellenausbreitung betrachtet wird, kommt man fast von selbst zu einer partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung, die als eine Verallgemeinerung der gewöhnlichen Wellengleichung angesehen werden kann. Werden nun solche Lösungen dieser Gleichung betrachtet, bei denen die fünfte Dimension rein harmonisch auftritt mit einer bestimmten mit der Planckschen Konstante zusammenhängenden Periode, so kommt man eben zu den oben erwähnten quantentheoretischen Methoden.

§ 1. Fünfdimensionale Relativitätstheorie. Ich fange damit an, eine kurze Darstellung von der fünfdimensionalen Relativitätstheorie zu geben, die sich nahe an die Theorie von Kaluza anschließt, aber in einigen Punkten von derselben abweicht.

Betrachten wir ein fünfdimensionales Riemannsches Linienelement, für welches wir einen vom Koordinatensystem unabhängigen Sinn postulieren. Wir schreiben dasselbe:

$$d\sigma = \sqrt{\sum \gamma_{ik} dx^i dx^k}, \quad (1)$$

wo das Zeichen Σ , wie überall im folgenden, eine Summation über die doppelt vorkommenden Indizes von 0 bis 4 angibt. Hierbei bezeichnen $x^0 \dots x^4$ die fünf Koordinaten des Raumes. Die 15 Größen γ_{ik} sind die kovarianten Komponenten eines fünfdimensionalen symmetrischen Tensors. Um von denselben zu den Größen g_{ik} und φ_i der gewöhnlichen Relativitätstheorie zu kommen, müssen wir gewisse spezielle Annahmen machen. Erstens müssen vier der Koordinaten, sagen wir x^1, x^2, x^3, x^4 , stets den gewöhnlichen Zeitraum charakterisieren. Zweitens dürfen die Größen

¹⁾ Th. Kaluza, Sitzungsber. d. Berl. Akad. 1921, S. 966.

²⁾ L. de Broglie, Ann. d. Phys. (10) 3, 22, 1925. Thèse, Paris 1924.

³⁾ E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 79, 361 und 489, 1926.

sich die Wellen nach den Gesetzen der geometrischen Optik ausbreiten. Es mag noch hervorgehoben werden, daß wegen (42) die Beziehungen (44), (45) bei den Koordinatentransformationen (2) invariant bleiben.

Betrachten wir nun auch die Gleichung (24) in dem Falle, wo ω nicht so groß ist, daß wir nur die in ω quadratischen Glieder zu berücksichtigen brauchen. Wir beschränken uns dabei auf den einfachen Fall eines elektrostatischen Feldes. Dann haben wir in kartesischen Koordinaten:

$$\left. \begin{aligned} d\vartheta &= dx^0 - cV dt, \\ ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2. \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

Also ergibt sich:

$$H = \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) - \frac{1}{2c^2} (p_t + eV p_0)^2 + \frac{m^2 c^2}{2} p_0^2. \quad (47)$$

In der Gleichung (24) können wir nun die mit $\begin{Bmatrix} i k \\ r \end{Bmatrix}$ proportionalen Größen vernachlässigen, denn die Dreiindizesymbole sind in diesem Falle nach (17) kleine mit der Gravitationskonstante κ proportionale Größen. Wir bekommen also¹⁾:

$$\Delta U - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{2eV}{c^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial x^0} + \left(m^2 c^2 - \frac{e^2 V^2}{c^2} \right) \frac{\partial^2 U}{\partial x^{02}} = 0. \quad (48)$$

Für U können wir, da V nur von x, y, z abhängt, in Übereinstimmung mit (42) und (45) ansetzen:

$$U = e^{-2\pi i t \left(\frac{x^0}{h} - \nu \right)} \psi(x, y, z). \quad (49)$$

Dies in (48) eingeführt, ergibt:

$$\Delta \psi + \frac{4\pi^2}{h^2} [(h\nu - eV)^2 - m^2 c^4] \psi = 0. \quad (50)$$

Setzen wir noch:

$$h\nu = mc^2 + E, \quad (51)$$

so bekommen wir die von Schrödinger²⁾ gegebene Gleichung, deren stehende Schwingungen bekanntlich Werten von E entsprechen, die mit

¹⁾ Außer durch das Auftreten von x^0 , das ja für die Anwendungen unwesentlich ist, unterscheidet sich diese Gleichung von der Schrödingerschen Gleichung durch die Art, in welcher in (48) die Zeit auftritt. Als eine Stütze für diese Form der Quantengleichung kann angeführt werden, daß dieselbe in dem Fall, wo V harmonisch von der Zeit abhängt, wie man durch eine einfache Störungsrechnung zeigen kann, Lösungen besitzt, die sich in ähnlicher Weise zu der Dispersions-theorie von Kramers verhalten wie die Schrödingerschen Lösungen zu der Quanten-theorie der Spektrallinien. Diese Bemerkung verdanke ich Dr. W. Heisenberg.

²⁾ Schrödinger, l. c.

den aus der Heisenbergschen Quantentheorie berechneten Energiewerten identisch sind. Wie man sieht, ist E in dem Grenzfall der geometrischen Optik gleich der auf gewöhnliche Weise definierten mechanischen Energie. Die Frequenzbedingung besagt, wie Schrödinger hervorgehoben hat, nach (51), daß die zu dem System gehörenden Lichtfrequenzen den aus den verschiedenen Werten der Frequenz ν gebildeten Differenzen gleich sind.

§ 3. **Schlußbemerkungen.** Wie die Arbeiten von de Broglie sind obenstehende Überlegungen aus dem Bestreben entstanden, die Analogie zwischen Mechanik und Optik, die in der Hamiltonschen Methode zum Vorschein kommt, für ein tieferes Verständnis der Quantenerscheinungen auszunutzen. Daß dieser Analogie ein reeller physikalischer Sinn zukommt, scheint ja die Ähnlichkeit der Bedingungen für die stationären Zustände von Atomsystemen mit den Interferenzerscheinungen der Optik anzudeuten. Nun stehen bekanntlich Begriffe wie Punktladung und materieller Punkt schon der klassischen Feldphysik fremd gegenüber. Auch wurde ja öfters die Hypothese ausgesprochen, daß die materiellen Teilchen als spezielle Lösungen der Feldgleichungen aufzufassen sind, welche das Gravitationsfeld und das elektromagnetische Feld bestimmen. Es liegt nahe, die genannte Analogie zu dieser Vorstellung in Beziehung zu bringen. Denn nach dieser Hypothese ist es ja nicht so befremdend, daß die Bewegung der materiellen Teilchen Ähnlichkeiten aufweist mit der Ausbreitung von Wellen. Die in Rede stehende Analogie ist jedoch unvollständig, solange man eine Wellenausbreitung in einem Raum von nur vier Dimensionen betrachtet. Dies kommt schon in der variablen Geschwindigkeit der materiellen Teilchen zum Vorschein. Denkt man sich aber die beobachtete Bewegung als eine Art Projektion auf den Zeitraum von einer Wellenausbreitung, die in einem Raum von fünf Dimensionen stattfindet, so läßt sich, wie wir sahen, die Analogie vollständig machen. Mathematisch ausgedrückt heißt dies, daß die Hamilton-Jacobische Gleichung nicht als Charakteristikeugleichung einer vierdimensionalen, wohl aber einer fünfdimensionalen Wellengleichung aufgefaßt werden kann. In dieser Weise wird man zu der Theorie von Kaluza geführt.

Obwohl die Einführung einer fünften Dimension in unsere physikalischen Betrachtungen von vornherein befremdend sein mag, wird eine radikale Modifikation der den Feldgleichungen zugrunde gelegten Geometrie doch wieder in ganz anderer Weise durch die Quantentheorie nahegelegt. Denn es ist bekanntlich immer weniger wahrscheinlich 47

geworden, daß die Quantenerscheinungen eine einheitliche raumzeitliche Beschreibung zulassen, wogegen die Möglichkeit, diese Erscheinungen durch ein System von fünfdimensionalen Feldgleichungen darzustellen, wohl nicht von vornherein auszuschließen ist¹⁾. Ob hinter diesen Andeutungen von Möglichkeiten etwas Wirkliches besteht, muß natürlich die Zukunft entscheiden. Jedenfalls muß betont werden, daß die in dieser Note versuchte Behandlungsweise, sowohl was die Feldgleichungen als auch die Theorie der stationären Zustände betrifft, als ganz provisorisch zu betrachten ist. Dies kommt wohl besonders in der auf S. 898 erwähnten schematischen Behandlungsweise der Materie zum Vorschein, sowie in dem Umstand, daß die zwei Arten von elektrischen Teilchen durch verschiedene Gleichungen vom Schrödingerschen Typus behandelt werden. Auch wird die Frage ganz offen gelassen, ob man sich bei der Beschreibung der physikalischen Vorgänge mit den 14 Potentialen begnügen kann, oder ob die Schrödingersche Methode die Einführung einer neuen Zustandsgröße bedeutet.

Mit den in dieser Note mitgeteilten Überlegungen habe ich mich sowohl in dem Physikalischen Institut der University of Michigan, Ann Arbor, wie in dem hiesigen Institut für theoretische Physik beschäftigt. Ich möchte auch an dieser Stelle Prof. H. M. Randall und Prof. N. Bohr meinen wärmsten Dank aussprechen.

¹⁾ Bemerkungen dieser Art, die Prof. Bohr bei mehreren Gelegenheiten gemacht hat, haben einen entschiedenen Einfluß auf das Entstehen der vorliegenden Note gehabt.

Über die invariante Form der Wellen- und der Bewegungsgleichungen für einen geladenen Massenpunkt¹⁾.

Von V. Fock in Leningrad.

(Eingegangen am 30. Juli 1926.)

Die Schrödingersche Wellengleichung wird als invariante Laplacesche Gleichung und die Bewegungsgleichungen als diejenigen einer geodätischen Linie im fünfdimensionalen Raum geschrieben. Der überzählige fünfte Koordinatenparameter steht in enger Beziehung zu der linearen Differentialform der elektromagnetischen Potentiale.

In seiner noch nicht veröffentlichten Arbeit bedient sich H. Mandel²⁾ des Begriffes des fünfdimensionalen Raumes, um die Gravitation und das elektromagnetische Feld von einem einheitlichen Standpunkte aus zu betrachten. Die Einführung eines fünften Koordinatenparameters scheint uns zur Aufstellung der Schrödingerschen Wellengleichung sowie der mechanischen Gleichungen in invarianter Form gut geeignet.

1. Spezielle Relativitätstheorie.

Die Lagrangesche Funktion für die Bewegung eines geladenen Massenpunktes ist, in leicht verständlicher Bezeichnungsweise,

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + \frac{e}{c} \mathcal{A} \cdot v - e\varphi, \quad (1)$$

und die entsprechende Hamilton-Jacobische Gleichung (H.P.) lautet:

$$(\text{grad } W)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial W}{\partial t} \right)^2 - \frac{2e}{c} \left(\mathcal{A} \cdot \text{grad } W + \frac{\varphi}{c} \frac{\partial W}{\partial t} \right) + m^2 c^2 + \frac{e^2}{c^2} (\mathcal{A}^2 - \varphi^2) = 0. \quad (2)$$

¹⁾ Die Idee dieser Arbeit ist in einem Gespräche mit Prof. V. Fréedericksz entstanden, dem ich auch manche wertvollen Ratschläge verdanke.

Anmerkung bei der Korrektur. Während diese Notiz im Druck war, ist die schöne Arbeit von Oskar Klein (ZS. f. Phys. 37, 895, 1926) in Leningrad eingetroffen, in welcher der Verfasser zu Resultaten gelangt, die prinzipiell mit denen dieser Notiz identisch sind. Wegen der Wichtigkeit der Resultate dürfte aber vielleicht ihre Ableitung auf einem anderen Wege (Verallgemeinerung eines in meiner früheren Arbeit gebrauchten Ansatzes) von Interesse sein.

²⁾ Der Verfasser hat mir liebenswürdigerweise die Möglichkeit gegeben, seine Arbeit im Manuskript zu lesen.

Analog dem in unserer früheren Arbeit¹⁾ gebrauchten Ansatz setzen wir hier

$$\text{grad } W = \frac{\text{grad } \psi}{\frac{\partial \psi}{\partial p}}; \quad \frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\frac{\partial \psi}{\partial t}}{\frac{\partial \psi}{\partial p}}, \quad (3)$$

wo p einen neuen Parameter von der Dimension des Wirkungsquantums bezeichnet. Nach Multiplikation mit $\left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)^2$ erhalten wir eine quadratische Form

$$Q = (\text{grad } \psi)^2 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t}\right)^2 - \frac{2e}{c} \frac{\partial \psi}{\partial p} \left(\mathfrak{A} \cdot \text{grad } \psi + \frac{\varphi}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}\right) + \left[m^2 c^2 + \frac{e^2}{c^2} (\mathfrak{A}^2 - \varphi^2)\right] \left(\frac{\partial \psi}{\partial p}\right)^2. \quad (4)$$

Wir bemerken, daß die Koeffizienten der nullten, ersten und zweiten Potenz von $\frac{\partial \psi}{\partial p}$ vierdimensionale Invarianten sind. Ferner bleibt die Form Q invariant, wenn man

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} &= \mathfrak{A}_1 + \text{grad } f, \\ \varphi &= \varphi_1 - \frac{1}{c} \frac{\partial f}{\partial t}, \\ p &= p_1 - \frac{e}{c} f \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

setzt, wo f eine willkürliche Funktion der Koordinaten und der Zeit bezeichnet. Die letztere Transformation läßt auch die lineare Differentialform

$$d' \Omega = \frac{e}{m c^2} (\mathfrak{A}_x dx + \mathfrak{A}_y dy + \mathfrak{A}_z dz) - \frac{e}{m c} \varphi dt + \frac{1}{m c} dp \quad (6)$$

invariant²⁾.

Wir wollen nun die Form Q als das Quadrat des Gradienten der Funktion ψ im fünfdimensionalen Raum (R_5) auffassen, und suchen das entsprechende Linienelement. Man findet leicht

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 + (d' \Omega)^2. \quad (7)$$

¹⁾ V. Fock, Zur Schrödingerschen Wellenmechanik, ZS. f. Phys. 38, 26.

²⁾ Das Zeichen d' soll andeuten, daß $d' \Omega$ kein vollständiges Differential ist.

Die Laplacesche Gleichung in R_4 lautet:

$$\Delta \psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - \frac{2e}{c} \left(\mathfrak{A} \cdot \text{grad} \frac{\partial \psi}{\partial p} + \frac{\varphi}{c} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t \partial p} \right) - \frac{e}{c} \frac{\partial \psi}{\partial p} \left(\text{div} \mathfrak{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) + \left[m^2 c^2 + \frac{e^2}{c^2} (\mathfrak{A}^2 - \varphi^2) \right] \frac{\partial^2 \psi}{\partial p^2} = 0. \quad (8)$$

Sie bleibt, ebenso wie (7) und (4), bei Lorentztransformationen und bei Transformationen (5) invariant.

Da die Koeffizienten der Gleichung (8) den Parameter p nicht enthalten, können wir die Abhängigkeit der Funktion ψ von p in Form eines Exponentialfaktors ansetzen, und zwar müssen wir, um Übereinstimmung mit der Erfahrung zu erhalten

$$\psi = \psi_0 e^{2\pi i \frac{p}{h}} \quad (9)$$

setzen¹⁾. Die Gleichung für ψ_0 ist gegenüber Lorentztransformationen, nicht aber gegenüber Transformationen (5), invariant. Die Bedeutung des überzähligen Koordinatenparameters p scheint nämlich gerade darin zu liegen, daß er die Invarianz der Gleichungen in bezug auf die Addition eines beliebigen Gradienten zum Viererpotential bewirkt.

Es sei hier bemerkt, daß die Koeffizienten der Gleichung für ψ_0 im allgemeinen komplex sind.

Nimmt man ferner an, daß diese Koeffizienten von t nicht abhängen, und setzt man

$$\psi_0 = e^{-\frac{2\pi i}{h} (E + mc^2)t} \psi_1, \quad (10)$$

so erhält man für ψ_1 eine zeitfreie Gleichung, welche mit der in unserer früheren Arbeit aufgestellten Verallgemeinerung der Schrödingerschen Wellengleichung identisch ist. Diejenigen Werte von E , für welche eine Funktion ψ_1 existiert, die gewissen Endlichkeits- und Stetigkeitsforderungen genügt, sind dann die Bohrschen Energieniveaus. Aus den soeben angeführten Betrachtungen folgt, daß die Addition eines Gradienten zum Viererpotential keinen Einfluß auf die Energieniveaus ausüben kann. Die beiden mit den Vektorpotentialen $\mathfrak{A}$ und $\bar{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A} - \text{grad} f$ erhaltenen

Funktionen ψ_1 und $\bar{\psi}_1$ würden sich nämlich nur um einen Faktor $e^{\frac{2\pi i e}{ch} f}$ vom absoluten Betrage 1 unterscheiden und folglich (bei sehr allgemeinen Voraussetzungen über die Funktion f) die gleichen Stetigkeitseigenschaften haben.

¹⁾ Das Auftreten des mit der Linearform verbundenen Parameters p in einer Exponentialfunktion konnte vielleicht mit einigen von E. Schrödinger (ZS. f. Phys. 12, 13, 1923) bemerkten Beziehungen im Zusammenhang stehen.

2. Allgemeine Relativitätstheorie.

A. Wellengleichung. Für das Linienelement im fünfdimensionalen Raum setzen wir an:

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= \sum_{i,k=1}^5 \gamma_{ik} dx_i dx_k \\ &= \sum_{i,k=1}^4 g_{ik} dx_i dx_k + \frac{c^2}{m^2} \left(\sum_{i=1}^5 q_i dx_i \right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Hier sind die Größen g_{ik} die Komponenten des Einsteinschen Fundamentaltensors, die Größen q_i ($i = 1, 2, 3, 4$) die durch c^2 dividierten Komponenten des Viererpotentials, also

$$\sum_{i=1}^4 q_i dx_i = \frac{1}{c^2} (\mathfrak{A}_x dx + \mathfrak{A}_y dy + \mathfrak{A}_z dz - \varphi c dt), \quad (12)$$

die Größe q_5 eine Konstante und x_5 der überzählige Koordinatenparameter. Alle Koeffizienten sind reell und von x_5 unabhängig.

Die Größen g_{ik} und q_i hängen nur vom Felde, nicht aber von der Beschaffenheit des Massenpunktes ab; die letztere wird durch den Faktor $\frac{c^2}{m^2}$ repräsentiert. Zur Abkürzung wollen wir aber die von $\frac{c}{m}$ abhängigen Größen $\frac{c}{m} q_i = a_i$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)

$$(13)$$

einführen und folgende Verabredung treffen: bei der Summation von 1 bis 5 wird das Summenzeichen angeschrieben, bei der Summation von 1 bis 4 dagegen unterdrückt.

Mit diesen Bezeichnungen finden wir

$$\gamma_{ik} = g_{ik} + a_i a_k; \quad g_{i5} = 0 \quad (14)$$

$$\gamma = \|\gamma_{ik}\| = a_i^2 g \quad (i, k = 1, 2, 3, 4, 5) \quad (15)$$

$$\left. \begin{aligned} \gamma^{ik} &= g^{ik} \\ \gamma^{5k} &= -\frac{1}{a_5} g^{ik} a_i = -\frac{a^i}{a_5} \\ \gamma^{55} &= \frac{1}{(a_5)^2} \cdot (1 + a_i a^i) \end{aligned} \right\} (i, k, l = 1, 2, 3, 4). \quad (16)$$

Die der Gleichung (8) entsprechende Wellengleichung lautet:

$$\sum_{i,k=1}^5 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{-\gamma} \gamma^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) = 0 \quad (17)$$

oder, ausführlicher geschrieben,

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{a_0} a^i \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i \partial x_0} + \frac{1}{(a_0)^2} (1 + a_i a^i) \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_0^2} = 0. \quad (18)$$

Führt man endlich die Funktion ψ_0 und die Potentiale q_i ein, so läßt sich diese Gleichung schreiben:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{-g} g^{ik} \frac{\partial \psi_0}{\partial x_k} \right) - \frac{4\pi}{h} \sqrt{-1} c e q^i \frac{\partial \psi_0}{\partial x_i} - \frac{4\pi^2 c^2}{h^2} (m^2 + e^2 q_i q^i) \psi_0 = 0. \quad (19)$$

B. Bewegungsgleichungen. Wir wollen nun die Bewegungsgleichungen eines geladenen Massenpunktes als diejenigen einer geodätischen Linie in R_5 aufstellen.

Zu diesem Zwecke müssen wir zunächst die Christoffelschen Klammersymbole berechnen. Wir bezeichnen die fünfdimensionalen Klammersymbole mit $\left\{ \begin{smallmatrix} kl \\ r \end{smallmatrix} \right\}_5$ und die vierdimensionalen mit $\left\{ \begin{smallmatrix} kl \\ r \end{smallmatrix} \right\}_4$. Wir führen ferner die kovariante Ableitung des Viererpotentials ein:

$$A_{ik} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \left\{ \begin{smallmatrix} kl \\ r \end{smallmatrix} \right\}_4 a_r \quad (20)$$

und spalten den Tensor 2 A_{ik} in seinen symmetrischen und antisymmetrischen Teil:

$$\left. \begin{aligned} B_{ik} &= A_{ik} + A_{ki} \\ M_{ik} &= A_{ik} - A_{ki} = \frac{\partial a_i}{\partial x_k} - \frac{\partial a_k}{\partial x_i} \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

Wir haben dann

$$\left. \begin{aligned} \left\{ \begin{smallmatrix} kl \\ r \end{smallmatrix} \right\}_5 &= \left\{ \begin{smallmatrix} kl \\ r \end{smallmatrix} \right\}_4 + \frac{1}{2} (a_k g^{ir} M_{ii} + a_i g^{ir} M_{ik}), \\ \left\{ \begin{smallmatrix} kl \\ 5 \end{smallmatrix} \right\}_5 &= \frac{1}{2 a_0} B_{ik} - \frac{1}{2 a_0} (a_k a^i M_{ii} + a_i a^k M_{ik}), \\ \left\{ \begin{smallmatrix} k 5 \\ 5 \end{smallmatrix} \right\}_5 &= -\frac{1}{2} a^i M_{ik}, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} 5 5 \\ k \end{smallmatrix} \right\}_5 &= 0, \\ \left\{ \begin{smallmatrix} 5 5 \\ 5 \end{smallmatrix} \right\}_5 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

Die Gleichungen der geodätischen Linie in R_4 lauten dann:

$$\frac{d^2 x_r}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} kl \\ r \end{matrix} \right\} \frac{dx_k}{ds} \frac{dx_l}{ds} + \frac{d' \Omega}{ds} g^{ir} M_{il} \frac{dx_l}{ds} = 0, \quad (23)$$

$$\frac{d^2 x_s}{ds^2} + \frac{1}{2a_s} B_{ik} \frac{dx_k}{ds} \frac{dx_l}{ds} - \frac{1}{a_s} \frac{d' \Omega}{ds} a^i M_{il} \frac{dx_l}{ds} = 0. \quad (24)$$

Hier bezeichnet $d' \Omega$, wie früher, die Linearform

$$d' \Omega = a_i dx_i + a_s dx_s. \quad (25)$$

Multipliziert man die vier Gleichungen (23) mit a_r , die fünfte (24) mit a_s und addiert, so erhält man eine Gleichung, die man in der Form

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d' \Omega}{ds} \right) = 0 \quad (26)$$

schreiben kann. Es gilt also

$$\frac{d' \Omega}{ds} = \text{const} \quad (27)$$

Multipliziert man (23) mit $g_{ra} \frac{dx_a}{ds}$ und summiert über r und α , so folgt wegen der Antisymmetrie von M_{ik}

$$\frac{d}{ds} \left(g_{ra} \frac{dx_r}{ds} \frac{dx_a}{ds} \right) = 0 \quad (28)$$

oder, wenn man die Eigenzeit τ durch die Formel

$$g_{ik} dx_i dx_k = -c^2 d\tau^2 \quad (29)$$

einführt,

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{d\tau}{ds} \right)^2 = 0. \quad (30)$$

Die Gleichung (28) oder (30) ist übrigens wegen

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 + (d' \Omega)^2 \quad (31)$$

eine Folge von (26).

Aus dem Gesagten folgt, daß die Gleichung (24) eine Folge von (23) ist; wir können sie also beiseite lassen. Führen wir in (23) die Eigenzeit als unabhängige Veränderliche ein, so kommt der fünfte Parameter ganz zum Fortfall; wir unterdrücken noch das Zeichen 4 am Klammersymbol:

$$\frac{d^2 x_r}{d\tau^2} + \left\{ \begin{matrix} kl \\ r \end{matrix} \right\} \frac{dx_k}{d\tau} \frac{dx_l}{d\tau} + \frac{d' \Omega}{d\tau} g^{ir} M_{il} \frac{dx_l}{d\tau} = 0. \quad (32)$$

Das letzte Glied auf der linken Seite stellt die Lorentzsche Kraft dar. In der speziellen Relativitätstheorie läßt sich die erste dieser Gleichungen schreiben

$$54 \quad m \frac{d}{dt} \frac{dx}{d\tau} + \frac{1}{c} \frac{d' \Omega}{d\tau} \left[\frac{e}{c} (\dot{z} H_y - \dot{y} H_z + \frac{\partial \mathfrak{A}_x}{\partial t}) + e \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right] = 0. \quad (33)$$

Um Übereinstimmung mit der Erfahrung zu erhalten, muß der Faktor der eckigen Klammer den Wert 1 haben. Es gilt also

$$\frac{d' \Omega}{d\tau} = c \quad (34)$$

und

$$ds^2 = 0. \quad (35)$$

Die Bahnen des Massenpunktes sind also geodätische Nulllinien im fünfdimensionalen Raum.

Um die Hamilton-Jacobische Gleichung zu erhalten, setzen wir das Quadrat des fünfdimensionalen Gradienten einer Funktion ψ gleich Null.

$$g^{ik} \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \frac{2}{a_s} \frac{\partial \psi}{\partial x_s} a_i' \frac{\partial \psi}{\partial x_i} + (1 + a_i a_i') \left(\frac{1}{a_s} \frac{\partial \psi}{\partial x_s} \right)^2 = 0. \quad (36)$$

Setzen wir hier

$$m c a_s \frac{\frac{\partial \psi}{\partial x_i}}{\frac{\partial \psi}{\partial x_s}} = \frac{\partial W}{\partial x_i}, \quad (37)$$

und führen wir statt a_i die Potentiale q_i ein, so erhalten wir eine Gleichung

$$g^{ik} \frac{\partial W}{\partial x_i} \frac{\partial W}{\partial x_k} - 2 e c q_i' \frac{\partial W}{\partial x_i} + c^2 (m^2 + c^2 q_i q_i') = 0, \quad (38)$$

die als Verallgemeinerung unserer Gleichung (2), die uns als Ausgangspunkt diente, gelten kann.

Leningrad, Physikalisches Institut der Universität, 24. Juli 1926.

Quantenmechanische Deutung der Theorie von Weyl¹⁾.

Von F. London in Stuttgart.

(Eingegangen am 25. Februar 1927.)

Kap. I. Die Theorie von Weyl.

Kap. II. Die Undulationsmechanik von de Broglie und die Theorie von Weyl.

§ 1. Die Identität von ψ und Weyls Eichstrecke.

§ 2. Nichtintegrabilität schließt Eindeutigkeit nicht aus.

Kap. III. Quantenmechanische Umdeutung der Theorie von Weyl.

Kapitel I. Die Theorie von Weyl.

Die Idee einer „reinen Nahgeometrie“, zuerst von Riemann konzipiert, hat bekanntlich kürzlich durch Weyl eine außerordentlich schöne und einfache Vervollständigung erfahren. Man kann den Riemannschen Raumbegriff betrachten als die Aufhebung des Vorurteils, daß die Krümmungsverhältnisse an einer Stelle des Raumes verbindlich sein müßten für die Krümmung an allen anderen. Um dieser Aussage Riemanns einen Sinn zu geben, war zunächst die Annahme notwendig, daß der Maßstab, welcher an jeder Stelle zur Bestimmung der Koeffizienten g_{ik} der metrischen Fundamentalform

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$$

zur Anwendung gelangt, ein „starrer“ Maßstab sei.

Demgegenüber macht Weyl mit Recht geltend, daß die Annahme eines solchen starren Maßstabes einer radikalen Nahgeometrie zuwider sei, daß nur die Verhältnisse der g_{ik} an einer Stelle, nicht ihre Absolutbeträge, sinngemäß festgelegt werden können, und dementsprechend setzt er für die Änderung dl eines Eichmaßstabes von der Länge l bei einer infinitesimalen Verschiebung dx^i an:

$$dl = l \varphi_i dx^i, \quad (1)$$

wobei die Proportionalitätsfaktoren φ_i Funktionen des Ortes sind, Charakteristika der Maßverhältnisse des Raumes — ähnlich den g_{ik} . Oder, wenn man (1) integriert:

$$l = l_0 e^{\int \varphi_i dx^i} \quad (2)$$

¹⁾ Vorgetragen teilweise auf der Tagung des Gauvereins Württemberg der D. Phys. Ges. Stuttgart, am 18. Dezember 1926; vgl. auch einen vorläufigen zusammenfassenden Bericht in Naturwiss. 15. 187, 1927.

($l_0 = 1$ am Anfang der Verschiebung). Das Eichmaß ist im allgemeinen vom Wege abhängig (nicht integrabel), es sei denn, daß die Größen

$$f_{ik} = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_k}{\partial x^i} \quad (3)$$

verschwinden. Über diese Größen f_{ik} kann man laut ihrer Definition (3) die Identität aussprechen (die Dimensionenzahl der Mannigfaltigkeit sei 4):

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial f_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial f_{li}}{\partial x^k} = 0 \quad i \neq k \neq l, \quad i, k, l = 1, 2, 3, 4. \quad (4)$$

Die formale Übereinstimmung dieser vier Gleichungen mit dem einen System der Maxwellschen Gleichungen

$$\text{rot } \mathfrak{E} + \frac{1}{c} \dot{\mathfrak{H}} = 0, \quad \text{div } \mathfrak{H} = 0,$$

sowie einige weitere formale Analogien haben Weyl zu dem Schluß geführt, die φ_i seien bis auf einen konstanten Proportionalitätsfaktor zu identifizieren mit den Komponenten Φ_i des elektromagnetischen Viererpotentials, die f_{ik} entsprechend mit den elektromagnetischen Feldstärken $\mathfrak{E}, \mathfrak{H}$. In folgerichtiger Ergänzung der geometrischen Deutung der Gravitation durch die variablen Krümmungen des Riemannschen Raumes dachte sich Weyl den noch übrigbleibenden Teil physikalischer Wirkungen, das elektromagnetische Feld, ebenfalls als eine Eigenschaft der Maßverhältnisse des Raumes, charakterisiert durch die Variabilität des Eichmaßes. Es ist also zu schreiben:

$$l = l_0 e^{\alpha \int \varphi_i dx^i} \quad (\alpha = \text{Proportionalitätsfaktor}). \quad (2a)$$

Man wird die ungeheure Kühnheit bewundern, mit welcher Weyl allein auf Grund dieser ganz formalen Zuordnung seine Lehre von der eichgeometrischen Deutung des Elektromagnetismus aufgespürt hat: In der Gravitationstheorie war es eine physikalische Tatsache, das Prinzip der Äquivalenz zwischen träger und schwerer Masse, welche Einstein zu seiner geometrischen Deutung anregte. In der Theorie der Elektrizität dagegen war eine solche Tatsache nicht bekannt: Es bestand keine Veranlassung, an einen universellen Einfluß des elektromagnetischen Feldes auf die sogenannten starren Maßstäbe (bzw. Uhren) zu denken. Ganz im Gegenteil, die Atomuhren z. B. repräsentieren Maßstäbe, deren Unabhängigkeit von der Vorgeschichte durch die Schärfe der Spektrallinien belegt ist, im Widerspruch zu dem nicht integrablen

Maße (2a), welches Weyl im magnetischen Felde annimmt. Es bedurfte wohl einer ungewöhnlich klaren metaphysischen Überzeugung, die Weyl solchen elementarsten Erfahrungen zum Trotz nicht von dem Gedanken abgehen ließ, daß die Natur von diesen schönen ihr gebotenen geometrischen Möglichkeiten Gebrauch machen müsse. Er hielt an seiner Auffassung fest und entzog die eben geschilderten Widersprüche der Diskussion durch eine etwas dunkle Umdeutung des Begriffs „realer Maßangabe“, womit nun allerdings seiner Theorie ihr so prägnanter physikalischer Sinn genommen war und sie dadurch sehr an Überzeugungskraft verlor.

Auf diese abstrakte Ausgestaltung der Theorie brauche ich nicht einzugehen. Ich werde vielmehr zeigen, daß gerade der prägnanten ursprünglichen Fassung der Weylschen Theorie eine noch viel größere Spannkraft innewohnt, als ihr Urheber bereits wirksam gemacht hat, daß man nämlich in ihr nichts geringeres als einen folgerichtigen Weg zur Undulationsmechanik zu erblicken hat, unter deren Gesichtspunkten sie erst eine unmittelbar verständliche physikalische Bedeutung gewinnt.

Kapitel II. Die Undulationsmechanik von de Broglie und die Theorie von Weyl.

Als „Theorie von de Broglie“ bezeichne ich jene noch unvollkommene Vorstufe der Undulationsmechanik, in welcher die Wellenfunktion der Bewegung eines Elektrons (auf welche wir uns hier beschränken)

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h} W(x_i)} \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (5)$$

aus einer vollständigen Lösung W der Hamilton-Jacobischen partiellen Differentialgleichung

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \Phi_i\right) \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi^i\right) = -m_0^2 c^2 \quad (6)$$

hervorgeht, wobei die Integrationskonstanten in bekannter Weise so zu bestimmen sind, daß ψ eine eindeutige Funktion des Raumes, d. h. W additivperiodisch wird, mit einem ganzzahligen Multiplum der Planckschen Konstanten als Periode.

Wenn man Ernst macht mit der radikalen Kontinuumsauffassung der Materie, mit der Auflösung des diskontinuierlich abgegrenzten Elektrons in eine stetig in Raum und Zeit veränderliche Feldgröße, wie es

durch diese de Brogliesche und konsequenter durch die später zu betrachtende Schrödingersche Theorie nahegelegt¹⁾ wird, so gelangt man in eine außerordentliche prinzipielle Schwierigkeit, wenn man untersucht, welchen Sinn man überhaupt metrischen Aussagen innerhalb des Undulationskontinuums beizulegen hat. Denn in diesem schwingenden und fluktuierenden unendlich ausgebreiteten Medium, welches an die Stelle des abgegrenzten Elektrons getreten ist, findet man keine unveränderlichen Diskontinuitäten, keine starren Körper, welche als reproduzierbare Maßstäbe die Festlegung einer Maßbestimmung gestatten könnten.

Ich vertrete durchaus nicht die Auffassung, daß, um von Geometrie im atomaren Gebiete zu reden, eine ausführbare Meßvorschrift angegeben werden müsse; von einer solchen kann ja auch in der Elektronentheorie nicht die Rede sein. Aber wenn man irgend einen definierten Sinn mit einer metrischen Angabe verbinden will, scheint mir, ist das mindeste, was man verlangen kann: die Angabe irgend eines realen Gegenstandes (als „Prototyp“), auf welchen die metrische Aussage bereits bezogen ist: Eines Elektronendurchmessers oder -abstands usw., wengleich eine solche Aussage noch in einem sehr problematischen Zusammenhang zu einer ausführbaren Messung stehen mag.

Aber ein solcher realer Gegenstand ist in dem Undulationskontinuum nicht vorhanden. Der Satz der Identität ist in dem $\pi\alpha\nu\tau\alpha \phi\epsilon\iota$ entstehender und zerfließender Wellen nicht anzuwenden, kein Merkmal im Kontinuum festzuhalten, welches geeignet wäre, ein reproduzierbares Maß zu bilden. Die prinzipielle Lage, in die man hier versetzt ist, wäre völlig hoffnungslos, hätte nicht Weyl in seiner Verallgemeinerung des Riemannschen Raumbegriffs bereits einen Raumtypus geschaffen, in welchem gerade die Nichtreproduzierbarkeit der Eicheinheit als konsequentes Postulat einer radikalen Nabgeometrie vorgesehen ist. War bisher diese Theorie im Weltbild der diskontinuierlichen Elektronentheorie eine überflüssige Belastung, da man ja gerade in den Elektronen reproduzierbare Maßgrößen zu besitzen glaubte, so hat sich jetzt die Sachlage von Grund auf geändert. Man ist geradezu gezwungen, sich

¹⁾ Es sprechen bekanntlich wichtige Gründe dafür, auf welche vor allem von Born und seinen Mitarbeitern hingewiesen wurde, daß der ganze Undulationsformalismus statistisch umzudeuten ist. Insofern die Ladungsdichte als eine statistische Gewichtsfunktion umgedeutet wird, ist es unschwer einzusehen, daß dieselbe Unbestimmtheit hinsichtlich der Anwendbarkeit des Satzes der Identität, auf die wir hier hinweisen, sich hinüber übersetzt. Aber da jene Auffassung zunächst jede Interpretation in Raum und Zeit ablehnt, hat für sie die Beziehung zur Weylschen Raumlehre geringes Interesse.

auf den allgemeinen Weylschen Raumbegriff zurückzuziehen und zu versuchen, ihn auf das Schrödingersche Kontinuum anzuwenden. Da enthüllt sich nun ein einfacher Zusammenhang.

§ 1. Nehmen wir einmal an, wir besäßen bereits einen Maßstab l der sich nach der Weylschen Vorschrift (2a) verändert, und führen ihn im ψ -Felde herum. Und zwar werde er mit der Strömungsgeschwindigkeit der Materie, der Gruppenvierergeschwindigkeit

$$u^i = \frac{dx^i}{d\tau} = \frac{1}{m_0} \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \Phi^i \right) \quad (7)$$

geführt.

Ich behaupte, mit dieser naheliegenden Vorschrift über den Weg wird Weyls Skalar l numerisch identisch mit dem de Broglieschen Feldskalar ψ . Hierzu sind noch zwei Präzisierungen zu treffen:

- In dem Weylschen Eichmaß war noch ein Faktor α unbestimmt gelassen; für diesen mache ich die Hypothese, er sei gleich $\frac{2\pi i e}{hc}$. Also

$$l = l_0 e^{\frac{2\pi i}{h} \int \frac{e}{c} \Phi^i dx^i} \quad (2a)$$

Schließlich noch: ich benutze nicht genau das ψ aus Gleichung (5), sondern das mit dem Faktor $e^{\frac{2\pi i}{h} m_0 c^2 \tau}$ versehene fünfdimensionale ψ , wie es den Vorschlägen von Klein, Fock und Kudar entspricht, wobei unter τ die Eigenzeit¹⁾ zu verstehen ist. Es sei also jetzt

$$\psi = e^{\frac{2\pi i}{h} (W + m_0 c^2 \tau)} \quad (5a)$$

oder

$$= e^{\frac{2\pi i}{h} \left\{ \int \frac{\partial W}{\partial x^i} dx^i + m_0 c^2 \tau \right\}}.$$

Diese Größe ψ ist zu vergleichen mit dem entlang der Strömung des Kontinuums geführten Weylschen Eichmaße (2a). Man erhält:

$$\frac{\psi}{l} = \frac{1}{l_0} e^{\frac{2\pi i}{h} \left\{ \int \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \Phi^i \right) dx^i + m_0 c^2 \tau \right\}},$$

hier sind die dx^i gemäß der durch (7) angegebenen Strömung zu führen:

$$= \frac{1}{l_0} e^{\frac{2\pi i}{h} \left\{ \int \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \Phi^i \right) \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \Phi^i \right) \frac{d\tau}{m_0} + m_0 c^2 \tau \right\}}.$$

¹⁾ Diese Auffassung von τ , die auf Kudar, Ann. d. Phys. 81, 632, 1926, zurückgeht, steht durchaus in Übereinstimmung mit der kürzlich diskutierten Deutung als Winkelkoordinate der Eigenrotationsbewegung des Elektrons (Naturwissenschaften 15, 15, 1927). Denn dieser Drehwinkel ist als eine vom Elektron mitgeführte Uhr anzusehen. Er transformiert sich wie die Eigenzeit.

erfüllen. Es ist vielmehr zu schreiben

$$\frac{dx_k}{dx_0} \equiv \frac{u_k}{c} = \frac{\psi \bar{\psi}}{\rho} \cdot \frac{e}{m_0 c} \left(\frac{\partial W}{\partial x} - \frac{e}{c} \Phi_k \right), \quad (7a)$$

wobei der Faktor

$$\rho = e \psi \bar{\psi} \sqrt{1 + \left(\frac{h}{2\pi i} \right)^2 \frac{\square |\psi|}{m_0^2 c^2 |\psi|}} = e \psi \bar{\psi} \left(1 - \frac{e}{m_0 c^2} \Phi_0 \right) \quad (14)$$

als „Ruhladungsdichte“ abgetrennt ist.

In dieser Bezeichnung erhält man

$$e \Phi_0 = m_0 c^2 \left(1 - \frac{\rho}{e \psi \bar{\psi}} \right) \quad (11a)$$

und die erste Schrödingersche Gleichung lautet in fünfdimensionaler Fassung¹⁾:

$$\sum_1^5 \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right) \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right) = 0. \quad (10a)$$

Wir vergleichen jetzt die Strecke l (13) entlang der Strömung (7a) mit dem Schrödingerschen Skalar ψ . Man erhält für ψ/l

$$\frac{\psi}{l} = \frac{|\psi|}{l_0} e^{\frac{2\pi i}{h} \int \sum_1^5 \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right) dx_i}$$

(7a) ergibt:

$$= \frac{|\psi|}{l_0} e^{\frac{2\pi i}{h} \int \sum_1^5 \frac{\psi \bar{\psi}}{\rho} \frac{e}{m_0 c} \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right) \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right) dx_i + \left(\frac{\partial W}{\partial x_5} - \frac{e}{c} \Phi_5 \right) dx_5},$$

(11a) ergibt:

$$\begin{aligned} &= \frac{|\psi|}{l_0} e^{\frac{2\pi i}{h} \int \frac{\psi \bar{\psi}}{\rho} \frac{e}{m_0 c} \sum_1^5 \left(\frac{\partial W}{\partial x_i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right) \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \Phi_i \right) dx_i} \\ &= \frac{|\psi|}{l_0}. \end{aligned}$$

Letzteres wegen (10a). Man erhält also zunächst nicht $\psi/l = \text{konst.}$, sondern

$$\frac{\psi}{l} = \frac{|\psi|}{l_0}, \quad (8a)$$

¹⁾ Hierbei ist zu beachten, daß Φ_0 seinerseits noch selbst eine erst zu bestimmende Unbekannte ist. Bekanntlich ist es ein noch unverstandenes Wunder, warum das gleiche nicht für die Potentiale $\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3, \Phi_4$ gilt, wie man erwarten müßte. (E. Schrödinger, Ann. d. Phys. 82, 265, 1927.)

$\frac{\partial W}{\partial x_5}$ ist $= m_0 c$ [vgl. (5a)].

welches eine eindeutige Ortsfunktion ist¹⁾. Aber die Potentiale Φ_k sind nur bis auf einen additiven Gradienten physikalisch festgelegt; führe ich statt ihrer

$$\Phi_k^* = \Phi_k - \frac{\hbar c}{2\pi i e} \frac{\partial}{\partial x^k} \ln |\psi|$$

als Potentiale ein, was die elektromagnetischen Feldstärken unberührt läßt, so folgt $\psi/l = \text{konst.}$

Die auf der Resonanz der Wellen beruhende Eindeutigkeit des mit der Strömung mitgeführten Eichmaßes überträgt sich natürlich jetzt ohne weiteres aus der de Broglieschen auf die Schrödingersche Theorie, so daß wir den Überlegungen des 2. Kapitels hier nichts hinzuzufügen haben.

Stuttgart, Physik. Inst. d. techn. Hochschule, 27. Februar 1927.

¹⁾ Man kann diese Beweisführung im Sinne der fünfdimensionalen Geometrie sinngemäßer folgendermaßen aussprechen:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \phi_i \right) \text{ ist parallel dem Fünferstrom } j_i = \frac{e}{m} \psi \bar{\psi} \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \phi_i \right),$$

dx^i soll parallel dem Fünferstrom j^i gewählt werden.

Der Fünferstrom ist orthogonal auf sich selbst ($\sum_1^5 j_i j^i = 0$): also ist j_i auch orthogonal auf dx^i und also $\sum_1^5 \left(\frac{\partial W}{\partial x^i} - \frac{e}{c} \phi_i \right) dx^i = 0$.

Ich verdanke diese schöne Formulierung einer Mitteilung von Herrn A. Landé. Hierbei ist die 5. Komponente des Fünferstroms $j_5 = ec$.

Elektron und Gravitation. I.

Von Hermann Weyl in Princeton, N. J.

(Eingegangen am 8. Mai 1929).

Einleitung. Verhältnis der allgemeinen Relativitätstheorie zu den quantentheoretischen Feldgleichungen des spinnenden Elektrons: Masse, Eichinvarianz, Fernparallelismus. Zu erwartende Modifikationen der Diracschen Theorie. — I. Zweikomponententheorie: Die Wellenfunktion ψ hat nur zwei Komponenten. — § 1. Bindung der Transformation der ψ an die Lorentztransformation des normalen Achsenkreuzes in der vierdimensionalen Welt. Asymmetrie von Zukunft und Vergangenheit, von rechts und links. — § 2. In der allgemeinen Relativitätstheorie wird die Metrik in einem Weltpunkt festgelegt durch ein normales Achsenkreuz. Komponenten von Vektoren relativ zu den Achsen und den Koordinaten. Kovariante Differentiation von ψ . — § 3. Allgemein invariante Fassung der Diracschen Wirkungsgröße, welche für das Wellenfeld der Materie charakteristisch ist. — § 4. Die differentiellen Erhaltungssätze von Energie und Impuls und die Symmetrie des Impulstensors folgen aus der doppelten Invarianz: 1. gegenüber Koordinatentransformation, 2. gegenüber Drehungen des Achsenkreuzes. Impuls und Impulsmoment der Materie. — § 5. Einsteins klassische Gravitationstheorie in der neuen analytischen Formulierung. Gravitationsenergie. — § 6. Das elektromagnetische Feld. Aus der Unbestimmtheit des Eichfaktors in ψ ergibt sich die Notwendigkeit der Einführung der elektromagnetischen Potentiale. Eichinvarianz und Erhaltung der Elektrizität. Das Raumintegral der Ladung. Einführung der Masse. Diskussion und Zurückweisung einer anderen Möglichkeit, in welcher die Elektrizität nicht als Begleitphänomen der Materie, sondern der Gravitation erscheint.

Einleitung.

In dieser Arbeit entwickle ich in ausgeführter Form eine Gravitation, Elektrizität und Materie umfassende Theorie, von der eine kurze Skizze in den Proc. Nat. Acad., April 1929, erschienen ist. Es ist von verschiedenen Autoren der Zusammenhang der Einsteinschen Theorie des Fernparallelismus mit der Spintheorie des Elektrons bemerkt worden*. Trotz gewisser formaler Übereinstimmungen unterscheidet sich mein Ansatz in radikaler Weise dadurch, daß ich den Fernparallelismus ablehne und an Einsteins klassischer Relativitätstheorie der Gravitation festhalte.

Um zweier Gründe willen verspricht die Adaption der Pauli-Diracschen Theorie des spinnenden Elektrons an die allgemeine Relativität zu physikalisch fruchtbaren Ergebnissen zu führen. 1. Die Diracsche Theorie, in welcher das Wellenfeld des Elektrons durch ein Potential ψ mit vier Komponenten beschrieben wird, gibt doppelt zu viel Energieniveaus: man sollte darum, ohne die relativistische Invarianz preiszugeben, zu den zwei Komponenten der Paulischen Theorie zurück-

* E. Wigner, ZS. f. Phys. 53, 592, 1929; u. a.

kehren können. Daran hindert das die Masse m des Elektrons als Faktor enthaltende Glied der Diracschen Wirkungsgröße. Masse ist aber ein Gravitationseffekt; es besteht so die Hoffnung, für dieses Glied in der Gravitationstheorie einen Ersatz zu finden, der die gewünschte Korrektur herbeiführt. 2. Die Diracschen Feldgleichungen für ψ zusammen mit den Maxwell'schen Gleichungen für die vier Potentiale f_p des elektromagnetischen Feldes haben eine Invarianzeigenschaft, die in formaler Hinsicht derjenigen gleicht, die ich in meiner Theorie von Gravitation und Elektrizität vom Jahre 1918 als Eichinvarianz bezeichnet hatte: die Gleichungen bleiben ungeändert, wenn man gleichzeitig

$$\psi \text{ durch } e^{i\lambda} \cdot \psi \text{ und } f_p \text{ durch } f_p - \frac{\partial \lambda}{\partial x_p}$$

ersetzt, unter λ eine willkürliche Ortsfunktion in der vierdimensionalen Welt verstanden. Dabei ist in f_p der Faktor $\frac{e}{ch}$ aufgenommen ($-e$ Ladung des Elektrons, c Lichtgeschwindigkeit, $\frac{h}{2\pi}$ Wirkungsquantum). Auch

die Beziehung dieser „Eichinvarianz“ zum Erhaltungssatz der Elektrizität bleibt unangetastet. Es ist aber ein wesentlicher und für den Anschluß an die Erfahrung bedeutungsvoller Unterschied, daß der Exponent des Faktors, den ψ annimmt, nicht reell, sondern rein imaginär ist. ψ übernimmt jetzt die Rolle, welche in jener alten Theorie das Einsteinsche ds spielte. Es scheint mir darum dieses nicht aus der Spekulation, sondern aus der Erfahrung stammende neue Prinzip der Eichinvarianz zwingend darauf hinzuweisen, daß das elektrische Feld ein notwendiges Begleitphänomen nicht des Gravitationsfeldes, sondern des materiellen, durch ψ dargestellten Wellenfeldes ist. Da die Eichinvarianz eine willkürliche Funktion λ einschließt, hat sie den Charakter „allgemeiner“ Relativität und kann natürlich nur in ihrem Rahmen verstanden werden.

An den Fernparallelismus vermag ich aus mehreren Gründen nicht zu glauben. Erstens sträubt sich mein mathematisches Gefühl a priori dagegen, eine so künstliche Geometrie zu akzeptieren; es fällt mir schwer, die Macht zu begreifen, welche die lokalen Achsenkreuze in den verschiedenen Weltpunkten in ihrer verdrehten Lage zu starrer Gebundenheit aneinander hat einfrieren lassen. Es kommen, wie ich glaube, zwei gewichtige physikalische Gründe hinzu. Gerade dadurch, daß man den Zusammenhang zwischen den lokalen Achsenkreuzen löst, verwandelt sich der Eichfaktor $e^{i\lambda}$, der in der Größe ψ willkürlich bleibt, notwendig

aus einer Konstante in eine willkürliche Ortsfunktion; d. h. nur durch diese Lockerung wird die tatsächlich bestehende Eichinvarianz verständlich. Und zweitens ist die Möglichkeit, die Achsenkreuze an verschiedenen Stellen unabhängig voneinander zu drehen, wie wir im folgenden sehen werden, gleichbedeutend mit der Symmetrie des Energieimpulstensors oder mit der Gültigkeit des Erhaltungssatzes für das Impulsmoment.

Bei jedem Versuch zur Aufstellung der quantentheoretischen Feldgleichungen muß man im Auge haben, daß diese nicht direkt mit der Erfahrung verglichen werden können, sondern erst nach ihrer Quantisierung die Unterlage liefern für die statistischen Aussagen über das Verhalten der materiellen Teilchen und Lichtquanten. Die Dirac-Maxwellsche Theorie in ihrer bisherigen Form enthält nur die elektromagnetischen Potentiale f_p und das Wellenfeld ψ des Elektrons. Zweifellos muß das Wellenfeld ψ' des Protons hinzugefügt werden. Und zwar werden in den Feldgleichungen ψ , ψ' und f_p Funktionen derselben vier Raum-Zeitkoordinaten sein, man wird vor der Quantisierung nicht etwa verlangen dürfen, daß ψ Funktion eines Weltpunktes (t, x, y, z) und ψ' Funktion eines davon unabhängigen Weltpunktes (t', x', y', z') ist. Es ist naheliegend, zu erwarten, daß von den beiden Komponentenpaaren der Diracschen Größe das eine dem Elektron, das andere dem Proton zugehört. Ferner werden zwei Erhaltungssätze der Elektrizität auftreten müssen, die (nach der Quantisierung) besagen, daß die Anzahl der Elektronen wie der Protonen konstant bleibt. Ihnen wird eine zweifache, zwei willkürliche Funktionen involvierende Eichinvarianz entsprechen müssen.

Wir prüfen zunächst die Sachlage in der speziellen Relativitätstheorie daraufhin, ob und inwieweit bereits die formalen Erfordernisse der Gruppentheorie, noch ganz abgesehen von den mit der Erfahrung in Einklang zu bringenden dynamischen Differentialgleichungen, die Erhöhung der Komponentenzahl ψ von zwei auf vier notwendig machen. Wir werden sehen, daß man mit zwei Komponenten auskommt, wenn die Symmetrie von links und rechts aufgehoben wird.

Zweikomponententheorie.

§ 1. Transformationsgesetz von ψ . Führt man im Raume mit den kartesischen Koordinaten x, y, z homogene projektive Koordinaten x_a ein:

$$x = \frac{x_1}{x_0}, \quad y = \frac{x_2}{x_0}, \quad z = \frac{x_3}{x_0},$$

so lautet die Gleichung der Einheitskugel

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0. \quad (1)$$

Projiziert man sie vom Südpol auf die Äquatorebene $x = 0$, die als Träger der komplexen Variablen

$$x + iy = \zeta = \frac{\psi_2}{\psi_1}$$

betrachtet wird, so gelten die Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= \bar{\psi}_1 \psi_1 + \bar{\psi}_2 \psi_2, & x_1 &= \bar{\psi}_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \psi_1, \\ x_2 &= i(-\bar{\psi}_1 \psi_2 + \bar{\psi}_2 \psi_1), & x_3 &= \bar{\psi}_1 \psi_1 - \bar{\psi}_2 \psi_2. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

x_a sind Hermitesche Formen von ψ_1, ψ_2 . Die Variablen ψ_1, ψ_2 sowie die Koordinaten x_a kommen hier nur ihrem Verhältnis nach in Frage. Eine homogene lineare Transformation von ψ_1, ψ_2 (mit komplexen Koeffizienten) bewirkt eine lineare, reelle Transformation unter den Koordinaten x_a : sie stellt eine Kollineation dar, welche die Einheitskugel in sich überführt und auf der Einheitskugel den Drehsinn ungeändert läßt. Es ist leicht zu zeigen und wohl bekannt, daß man auf diese Weise jede derartige Kollineation einmal und nur einmal erhält.

Vom homogenen Standpunkt zum inhomogenen übergehend, fasse man jetzt x_a als Koordinaten in der vierdimensionalen Welt und (1) als die Gleichung des „Lichtkegels“ auf; und man beschränke sich auf solche lineare Transformationen U von ψ_1, ψ_2 , deren Determinante den absoluten Betrag 1 hat. U bewirkt an den x_a eine Lorentztransformation, d. i. eine reelle homogene lineare Transformation, welche die Form

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

in sich überführt. Doch lehren die Formel für x_0 und unsere Bemerkung über die Erhaltung des Drehungssinnes auf der Kugel ohne weiteres, daß wir unter den Lorentztransformationen nur die ein einziges in sich abgeschlossenes Kontinuum bildenden $\mathcal{A}$ bekommen, welche 1. Vergangenheit und Zukunft nicht vertauschen und 2. die Determinante $+1$, nicht -1 , besitzen; diese freilich ohne Ausnahme. Durch $\mathcal{A}$ ist die lineare Transformation U der ψ nicht eindeutig festgelegt, sondern es bleibt ein willkürlicher konstanter Faktor $e^{i\alpha}$ vom absoluten Betrage 1 zur Disposition. Man kann ihn normalisieren durch die Forderung, daß die Determinante von U gleich 1 sei, aber selbst dann bleibt eine Doppeldeutigkeit zurück. An der Einschränkung 1. möchte man festhalten; es ist eine der hoffnungsvollsten Seiten der ψ -Theorie, daß sie der Wesensverschiedenheit von Vergangenheit und Zukunft Rechnung tragen kann. Die Einschränkung 2. hebt die Gleichberechtigung von links und rechts auf.

können, muß man die Koordinaten so spezialisieren, daß die kongrediente Drehung aller Achsenkreuze als eine orthogonale Transformation der Koordinaten erscheint. Dies ist sicher möglich, doch gehe ich hier darauf nicht näher ein.

§ 6. Elektrisches Feld. Wir kommen jetzt zu dem kritischen Teil der Theorie. Meiner Meinung nach liegt der Ursprung und die Notwendigkeit des elektromagnetischen Feldes in folgendem begründet. Die Komponenten ψ_1, ψ_2 sind in Wahrheit nicht eindeutig durch das Achsenkreuz bestimmt, sondern nur insoweit, daß sie noch mit einem beliebigen „Eichfaktor“ $e^{i\lambda}$ vom absoluten Betrag 1 multipliziert werden können. Nur bis auf einen solchen Faktor ist die Transformation bestimmt, welche die ψ unter dem Einfluß einer Drehung des Achsenkreuzes erleiden. In der speziellen Relativitätstheorie muß man diesen Eichfaktor als eine Konstante ansehen, weil wir hier ein einziges, nicht an einen Punkt gebundenes Achsenkreuz haben. Anders in der allgemeinen Relativitätstheorie: jeder Punkt hat sein eigenes Achsenkreuz und darum auch seinen eigenen willkürlichen Eichfaktor; dadurch, daß man die starre Bindung der Achsenkreuze in verschiedenen Punkten aufhebt, wird der Eichfaktor notwendig zu einer willkürlichen Ortsfunktion. Dann ist aber auch die infinitesimale lineare Transformation dE der ψ , welche der infinitesimalen Drehung dQ entspricht, nicht vollständig festgelegt, sondern dE kann um ein beliebiges rein imaginäres Multiplum $i \cdot df$ der Einheitsmatrix vermehrt werden. Zur eindeutigen Festlegung des kovarianten Differentials $\delta\psi$ von ψ hat man also außer der Metrik in der Umgebung des Punktes P ein solches df für jedes von P ausgehende Linienelement $\overrightarrow{PP'} = (dx)$ nötig. Damit $\delta\psi$ nach wie vor linear von dx abhängt, muß

$$df = f_p(dx)^p$$

eine Linearform in den Komponenten des Linienelements sein. Ersetzt man ψ durch $e^{i\lambda} \cdot \psi$, so muß man zugleich, wie aus der Formel für das kovariante Differential hervorgeht, df ersetzen durch $df - d\lambda$.

Dies hat zur Folge, daß zur Wirkungsichte m das Glied

$$\frac{1}{\epsilon} f(\alpha) s(\alpha) = \frac{1}{\epsilon} f(\alpha) \cdot \psi^* S(\alpha) \psi = f_p \cdot \psi^* \mathcal{S}^p \psi \quad (26)$$

zu addieren ist. m bedeutet fortan die so ergänzte Wirkungsgröße. Es herrscht notwendig Eichinvarianz in dem Sinne, daß die Wirkungsgröße ungeändert bleibt, wenn

$$\psi \text{ durch } e^{i\lambda} \cdot \psi, \quad f_p \text{ durch } f_p - \frac{\partial \lambda}{\partial x_p}$$

ersetzt wird, unter λ eine willkürliche Ortsfunktion verstanden. Genau in der durch (26) beschriebenen Weise wirkt nach der Erfahrung das elektromagnetische Potential auf die Materie. Wir sind daher berechtigt, die hier eingeführten Größen f_p mit den Komponenten jenes Potentials zu identifizieren. Der Beweis ist vollkommen, wenn wir zeigen, daß auch umgekehrt das f_p -Feld nach denselben Gesetzen von der Materie beeinflußt wird, welche nach der Erfahrung für das elektromagnetische Potentialfeld gelten.

$$f_{pq} = \frac{\partial f_q}{\partial x_p} - \frac{\partial f_p}{\partial x_q}$$

ist ein eichinvarianter schiefsymmetrischer Tensor und

$$I = \frac{1}{4} f_{pq} f^{pq} \quad (27)$$

die für die Maxwell'sche Theorie charakteristische skalare Dichte. Der Ansatz

$$\mathfrak{h} = m + \alpha I \quad (28)$$

(α eine numerische Konstante) liefert durch Variation der f_p die Maxwell'schen Gleichungen mit

$$-\mathfrak{E}^p = -\psi^* \mathfrak{E}^p \psi \quad (29)$$

als der Dichte des elektrischen Viererstroms.

Die Eichinvarianz steht in engem Zusammenhang mit dem Erhaltungssatz für die Elektrizität. Weil $\mathfrak{h}$ eichinvariant ist, muß $\delta \int \mathfrak{h} dx$ identisch verschwinden, wenn bei festgehaltenen $e^p(\alpha)$ die ψ und f_p gemäß

$$\delta \psi = i\lambda \cdot \psi, \quad \delta f_p = -\frac{\partial \lambda}{\partial x_p}$$

variiert werden; λ ist eine willkürliche Ortsfunktion. Dies liefert eine identisch erfüllte Relation zwischen den materiellen und den elektromagnetischen Gleichungen. Wissen wir, daß die materiellen Gleichungen (im engeren Sinne) gelten, so folgt also daraus

$$\delta \int \mathfrak{h} dx = 0,$$

wenn nur die f_p gemäß der Gleichung $\delta f_p = -\partial \lambda / \partial x_p$ variiert werden. Andererseits folgt aus den elektromagnetischen Gleichungen dasselbe für die infinitesimale Variation $\delta \psi = i\lambda \cdot \psi$ der ψ allein. Wenn $\mathfrak{h} = m + \alpha I$ erhält man beide Male

$$\int \delta \mathfrak{h} \cdot dx = \pm \int \psi^* \mathfrak{E}^p \psi \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x_p} dx = \mp \int \lambda \frac{\partial \mathfrak{E}^p}{\partial x_p} dx.$$

[Eine analoge Sachlage fanden wir vor beim Erhaltungssatz von Energie-impuls und Impulsmoment. Sie verknüpften die materiellen Gleichungen

ON THE THEORY OF CHARGED FIELDS

Report drafted and submitted by O. KLEIN.

I. — INTRODUCTION.

The discovery of the so called heavy electron or mesoton and the role it is supposed to play in nuclear physics for the occurrence of attractive forces at small distances — a role suggested by Yukawa ⁽¹⁾ already before the discovery — would seem to mean a considerable enlargement of the region of applicability of the field concept, which has hitherto been limited by the self energy difficulties. In fact, while electrons could be treated unambiguously only down to distances large compared to the so called radius of the electron, the new particle would seem to present no principal difficulties before one approaches its own « radius », which, due to its larger mass, is about two orders of magnitude smaller than that of the electron. Moreover a characteristic length of just the order of magnitude of the electronic radius is introduced as a « Compton » wave length corresponding to the mass of the new particle, which, as shown by Yukawa, gives the range of the forces due to the corresponding field.

The logical consistency of this enlargement of the field concept would seem to require the removal of the self energy difficulty of the electron at least down to distances approaching the radius of the new particle. Considering the order of magnitude and range of nuclear

⁽¹⁾ Yukawa 1935, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* 17, 48; Yukawa et Sakata 1937, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan* 19, 1084; Yukawa, Sakata et Taketani 1938, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, 20, 319, Yukawa, Sakata, Kobayasi and Taketani, 1938, *Proc. Phys. Math. Soc. Japan*, 20, 720.

forces — the nuclear binding energies being comparable with the rest mass energy of the electron and the range of the forces of the order of the electronic radius — it would not seem unreasonable to assume that a theory explaining nuclear attractions would also account for the rest mass of the electron, the attractive forces required as a compensation of the Coulomb repulsion being of a similar nature as the nuclear forces. A necessary condition for such an explanation — which would mean a removal of at least two orders of magnitude of the point from where the higher frequencies are « cut off » — is that the new forces belonging to the heavy electron field are determined by means of the elementary electric charge in a similar way as the electromagnetic forces, so that no other independent constant than the mass of the new particle will appear in the theory. Here we shall not enter further on the interesting problem as to the uniqueness of such a field theory comprising also the charged fields corresponding to the new particle if the demands of the electronic self energy and those of general invariance are to be satisfied, but we shall show how a theory of this kind may be built up as a consequent generalization of the formal scheme of ordinary field theory. If this theory of the mesoton and its interaction with electromagnetic fields and ordinary particles prove correct, it ought to satisfy automatically the above demands as to the electronic self energy.

For the invariant formulation of the field theory the so called five dimensional representation has proved useful as a very direct and simple means of expressing the fundamental conservation theorems for energy, momentum and electric charge and their relation to space-time translation invariance and gauge invariance. In the original form of that representation, which leads exactly to the Einstein-Maxwell theory of gravitation and electromagnetism, the field quantities are supposed not to contain the new auxiliary coordinate x^0 . The fact that this coordinate appears as the canonical conjugate (apart from a constant factor) to the electric charge suggests, however, as a natural generalization the assumption that the field quantities contain also terms depending upon x^0 and representing charged fields, which resemble those represented by the solutions of the

quantum theoretical wave equations of electric particles ⁽¹⁾. The existence of a smallest quantum of electricity would hereby require — as a classical model later to be replaced by a suitable quantization — a periodicity in x^0 corresponding to the length $L = \frac{he\sqrt{2x}}{c}$ where

h is Planck's quantum of action, c the vacuum velocity of light, e the elementary quantum of electricity and x the Einstein gravitational constant ⁽²⁾. The period being invariant under a gauge transformation of x^0 , this model will satisfy automatically the claim of gauge invariance.

The direct and general way it expresses the fundamental conservation and invariance theorems seems to make this representation a natural starting point for a general quantum field theory comprising also the charged fields, which are supposed to correspond to the mesotons. The field quantities, which may be taken in a form adapted to the demands of a generally relativistic Dirac wave equation in five dimensions ⁽³⁾, would moreover have to satisfy commutation relations corresponding to the Bose-Einstein statistics. While these quantities will represent particles with integer spin, the ordinary elementary particles would have to be represented by Dirac spinor wave functions. But just, as the field quantities contain parts depending upon x^0 representing charged fields and parts without x^0 representing the ordinary electromagnetic and gravitational fields, we shall assume that also the spinors consist of x^0 -free components representing neutral particles (neutron, neutrino) and of x^0 components representing charged particles (proton, electron). Probably the higher harmonics of the Fourier development with respect to x^0 which would correspond to multiply charged particles, have no physical significance. They may be avoided in a similar way as in the theory of electronic spin through the introduction of two-row

⁽¹⁾ Klein, *Nature*, 1926, 118, 516, *Z. f. Phys.*, 1927, 46, 188.

⁽²⁾ Klein, *Nature*, *l. c.*

⁽³⁾ See Schrödinger, 1932, *Berl. Ber.*, p. 105 and Pauli and Solomon, 1932, *Journal de Phys.* (7), 3, 452 and 582.

matrices. This description of charged and neutral particles would be consistent with the way protons and neutrons are treated in Heisenberg's theory of nuclear constitution, the matrix representation just mentioned corresponding to the so called isotopic spin. On the other hand this matrix representation is nearly connected with the gauge transformation.

The theory outlined, which may be derived from a variation principle, the Lagrangian containing as well the spinor as the tensor field quantities, will describe an interaction between the proton, the neutron, the electron and the neutrino through the intermediate of the charged and uncharged fields giving as it would seem a quantitative formulation of the considerations of Yukawa, Kemmer and Bhabha on nuclear fields of force ⁽¹⁾. Especially the theory will contain no new physical constants other than the mass of the mesoton, and the nuclear interactions will, like the electromagnetic forces in the first approximation neglecting all direct gravitational effects-depend upon e^2 .

As to the rest mass of the new particle, which does not appear in the ordinary field equations, it might be introduced by the addition of a term to the Lagrangian without disturbing the invariance. But it is not impossible that a further development of the theory will make this somewhat arbitrary addition superfluous, the mass appearing as some sort of self energy determined by the other lengths entering in the theory.

As a lack of simplicity of the theory it should be mentioned that although the allowed transformations are limited to general four-dimensional co-ordinate transformations and gauge transformations it makes use of invariants and tensors belonging to a general five-dimensional Riemann space. In the older form of the theory, where the physical quantities do not depend upon x^5 , this inconvenience has been avoided by means of a projective treatment ⁽²⁾. Even if it may

⁽¹⁾ Yukawa, *l. c.*; Kemmer, *Proc. Roy. Soc. A*, 166, 127, 1938; Fröhlich, Heitler et Kemmer, *Proc. Roy. Soc. A*, 166, 154, 1937; Bhabha, *Proc. Roy. Soc. A*, 166, 501, 1938.

72 ⁽²⁾ Voir W. Pauli, *Ann. de Phys.*, 1933, 18, 305 et 337.

seem doubtful whether this treatment could be extended to the generalized form of the theory developed below, this lack is probably more formal than real. As to the more or less arbitrary addition (in the field equations for the charged fields) and omission (in the Dirac equations) of mass terms connected with electric charges it may have to do with a real limitation of the theory, these terms being perhaps — as indicated above — related to different stages of the self energy problem. Whether the circumstance that the unitary treatment of gravitational, electromagnetic and charged fields yielded by the theory does not also comprise the spinor particles, the Lagrangian of which is simply added to the common Lagrangian of the fields mentioned, must be regarded as a lack is perhaps doubtful. It should further be emphasized that although gravitational actions will be neglected in the following the structure of the theory is very essentially determined by the circumstance that it fulfils from the outset the claim of general relativity. This indirect effect of gravitation may perhaps be compared with the influence of spin on the constitution of atoms and molecules also in the approximation where all direct effects of the spin momenta are neglected.

II. — MATHEMATICAL TREATMENT OF THE SPINOR PARTICLES.

Turning now to the mathematical formulation of the above remarks we introduce a Riemann metric tensor $\gamma_{\mu\nu}$, μ and ν taking the values 0, 1, 2, 3, 4. Corresponding to the invariance towards general transformations of the space-time co-ordinates $x^1, x^2, x^3, x^4 = ict$ together with that towards the gauge transformation expressed by means of the transformation equation $x^0' = x^0 + \text{arbitrary function of space-time co-ordinates (A)}$, we define this tensor through the following relations

$$\gamma_{00} = 1, \quad \gamma_{0k} = \beta \chi_k, \quad \gamma^{kl} = g^{kl}, \quad k, l = 1, 2, 3, 4 \quad (I)$$

Here the χ_k are certain functions of x^0, x^1, x^2, x^3, x^4 , to be more closely characterized below, β a constant equal to $\sqrt{2\kappa}$ and g^{kl} the 10 contravariant components of the Einstein metric tensor. Further

we introduce a set of generally relativistic Dirac matrices γ_μ satisfying the relations

$$\frac{1}{2} (\gamma_\lambda \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\lambda) = \gamma^{\lambda\nu} \quad (2)$$

and the corresponding quantities $\gamma^\lambda = \gamma^{\lambda\nu} \gamma_\nu$, which fulfil the relations and

$$\frac{1}{2} (\gamma^\lambda \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma^\lambda) = \delta^\lambda_\nu \quad (3)$$

and

$$\frac{1}{2} (\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \gamma^{\mu\nu}$$

The γ_μ and the γ^μ may be taken as linear combinations of 5 ordinary constant Dirac matrices $\epsilon_0, \epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3, \epsilon_4$ satisfying the relations

$$\frac{1}{2} (\epsilon_\lambda \epsilon_\nu + \epsilon_\nu \epsilon_\lambda) = \delta_{\lambda\nu} \quad (4)$$

and since $\gamma_{00} = 1$, we may put

$$\gamma_0 = \epsilon_0 \quad (5)$$

Further it follows from the definition of the γ^λ that

$$\gamma_0 = \gamma_{0\nu} \gamma^\nu = \gamma^0 + \beta \chi_k \gamma^k$$

or

$$\gamma_0 = \epsilon_0 - \beta \chi_k \gamma^k \quad (6)$$

where the summation with respect to k goes from 1 to 4.

We shall now consider the following expression

$$\gamma^\rho \psi_{;\rho} - \varphi_{;\rho} \gamma^\rho \psi \quad (7)$$

well-known from the Lagrangian leading to the generally relativistic form of Dirac's wave equations, the summation with respect to ρ being here extended from 0 to 4, where

$$\psi_{;\rho} = \frac{\partial \psi}{\partial x^\rho} - \Gamma^\sigma_{\rho\lambda} \psi^\lambda, \quad \varphi_{;\rho} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\rho} + \varphi \Gamma^\sigma_\rho \quad (8)$$

are so called covariant derivatives of ψ and φ respectively, the Γ^σ_ρ being certain matrices, the necessity of which was first shown by Schrödinger

ger. Introducing the expression (6) for γ^i and omitting the term $\varphi \epsilon_0 \frac{\partial \psi}{\partial x^0} - \frac{\partial \varphi}{\partial x^0} \epsilon_0 \psi$ — which omission does not violate the invariance required although from a formal point of view it is not altogether satisfactory — we get

$$\varphi \gamma^k (\nabla_k \psi) - (\nabla_k \varphi) \gamma^k \psi = \varphi (\gamma^i \Gamma_i + \Gamma_i \gamma^i) \psi \quad (7a)$$

where

$$\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x^k} - \beta \chi_k \frac{\partial}{\partial x^0} \quad (9)$$

From the assumption made above (and to be stated more precisely below) about the x^0 dependance of the quantities concerned, it follows that $\beta \frac{\partial}{\partial x^0}$ will not contain and will have to be retained when — as now we shall do all terms in the expression (7a) containing β or any power of it are omitted, which means that we neglect all direct gravitational effects. Using a cartesian co-ordinate system ($g_{kl} = \delta_{kl}$) only Γ_0 will be a finite with this approximation and given by

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} \beta \frac{\partial \chi_k}{\partial x^0} \epsilon_0 \epsilon_k;$$

but the term $\gamma^0 \Gamma_0 + \Gamma_0 \gamma^0$ will be small of the order β since ϵ_0 anti-commutes with all four ϵ_k , and we are left with the expression

$$\varphi \gamma^k (\Delta_k \psi) - (\Delta_k \varphi) \gamma^k \psi \quad (7b)$$

only, which by a suitable choice of the γ^k will also be correct in a non-cartesian co-ordinate system, even in the non-Euclidean case ⁽¹⁾.

As Lagrangian L^0 for our spin particles we take now

$$L^0 = -\hbar c [\varphi \gamma^k (\nabla_k \psi) - (\nabla_k \varphi) \gamma^k \psi] + 2Mc^2 \varphi \psi \quad (10)$$

where the mass M of the particle is to be taken very nearly equal to the proton mass for the pair proton-neutron and probably equal to 0 for the pair electron-neutrino.

⁽¹⁾ By a suitable choice of the γ^i we might have made $\gamma^i \Gamma_i + \Gamma_i \gamma^i$ equal to 0 from the beginning, but such a choice would in general not correspond to $\gamma_0 = \epsilon_0$.

In a Cartesian co-ordinate system we may put

$$\gamma^k = \epsilon_k \quad (11)$$

and further

$$\varphi = \psi^* \epsilon_4 \quad (12)$$

ψ^* being the conjugate complex wave function to ψ .

The more general expression (10) may be used in a well-known way to derive the components T^0 of the corresponding energy-momentum tensor, which — since L^0 will have the numerical value 0 — may be defined as by means of the relation

$$\delta L^0 = -T_{kl}^0 \delta g^{kl}$$

obtained by putting

$$\delta \gamma^k = \frac{1}{2} \gamma^l \delta g^{kl} \quad (13)$$

This gives

$$T_{kl}^0 = \frac{\hbar c}{4} \left[\gamma^i \gamma_l (\gamma_k \psi) + \varphi \gamma_k (\gamma_l \psi) - (\gamma_k \varphi) \gamma_l \psi - (\gamma_l \varphi) \gamma_k \psi \right] \quad (14)$$

where in a Cartesian co-ordinate system

$$\gamma_k = \epsilon_k \quad (11a)$$

In conformity with what has been said above about the x^0 -dependence of the quantities concerned we put now

$$\chi_k = \begin{pmatrix} A_k & B_k \\ B_k & A_k \end{pmatrix}, \quad \beta \frac{\partial \chi_k}{\partial x^0} = \frac{ie}{\hbar c} \begin{pmatrix} 0 & -B_k \\ B_k & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_p \end{pmatrix}, \quad \beta \frac{\partial \psi}{\partial x^0} = \frac{ie}{\hbar c} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_p \end{pmatrix} \quad (15a)$$

$$\varphi = (\varphi_x, \varphi_p), \quad \beta \frac{\partial \varphi}{\partial x^0} = -\frac{ie}{\hbar c} (0, \varphi_p).$$

χ_1, χ_2, χ_3 , being Hermitian matrices and χ_4 a Hermitian matrix multiplied by i . The A_k will be seen to be the components of the electromagnetic potential four-vector, while the B_k and $\tilde{B}_k$ describe the charged field. After a simple calculation we get from (10) and (13)

$$L^0 = -\hbar c \left[\varphi_N \gamma^k \frac{\partial \psi_N}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_N}{\partial x^k} \gamma^k \psi_N + \varphi_P \gamma^k \frac{\partial \psi_P}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_P}{\partial x^k} \gamma^k \psi_P - 2 \frac{ie}{\hbar c} A_k \varphi_P \gamma^k \psi_P - \right. \\ \left. - \frac{ie}{\hbar c} (B_k \varphi_N \gamma^k \psi_P + B_k \varphi_P \gamma^k \psi_N) + 2Mc^2 (\varphi_N \psi_N + \varphi_P \psi_P) \right] \quad (16)$$

$$T_{ik}^0 = \frac{\hbar c}{4} \left[\varphi_N \gamma_k \frac{\partial \psi_N}{\partial x^i} + \varphi_N \gamma^i \frac{\partial \psi_N}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_N}{\partial x^i} \gamma_k \psi_N - \frac{\partial \varphi_N}{\partial x^k} \gamma_i \psi_N + \right. \\ \left. + \varphi_P \gamma_k \frac{\partial \psi_P}{\partial x^i} + \varphi_P \gamma^i \frac{\partial \psi_P}{\partial x^k} - \frac{\partial \varphi_P}{\partial x^i} \gamma_k \psi_P - \frac{\partial \varphi_P}{\partial x^k} \gamma_i \psi_P - \right. \\ \left. - 2 \frac{ie}{\hbar c} (A_k \varphi_P \gamma_i \psi_P + A_i \varphi_P \gamma_k \psi_P) - \right. \\ \left. - \frac{ie}{\hbar c} (B_k \varphi_N \gamma_i \psi_P + B_i \varphi_N \gamma_k \psi_P + B_k \varphi_P \gamma_i \psi_N + B_i \varphi_P \gamma_k \psi_N) \right] \quad (17)$$

The expression (16) for L^0 may further be used to determine the current-density four-vector s^{0k} since

$$S^{0k} = \frac{1}{2} \frac{\partial L^0}{\partial A_k} \quad (18)$$

In this way we get

$$S^{0k} = ie \varphi_P \gamma^k \psi_P \quad (19)$$

In a Cartesian co-ordinate system this gives according to (12)

$$S^{0k} = ie \psi_P^* \epsilon_k^0 \epsilon_k \psi_P \quad (20)$$

and especially

$$S^{04} = ie \psi_P^* \psi_P$$

in conformity with Dirac's original assumption about $\psi^* \psi$. We see also that only ψ_P and not ψ_N contributes to the electric current and density.

From the expression (16) for L^0 and by means of the variation principle

$$\delta \int L^0 \sqrt{g} \, dx = 0, \quad g = |g_{ik}|, \quad dx = dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \quad (21)$$

the variations of φ and ψ vanishing at the border of the space-time region under consideration, we obtain the following wave equations 77

for $\psi_x, \varphi_x, \psi_p, \varphi_p$, where for the sake of simplicity we have used a Cartesian co-ordinate system

$$\epsilon_k \left(\frac{\partial \psi_x}{\partial x^k} - \frac{ie}{2\hbar c} B_k \psi_p \right) = \frac{Mc}{\hbar} \psi_x \left(\frac{\partial \varphi_x}{\partial x^k} + \frac{ie}{2\hbar c} B_k \varphi_p \right) \epsilon_k = - \frac{Mc}{\hbar} \varphi_x. \quad (22)$$

$$\epsilon_k \left(\frac{\partial \psi_p}{\partial x^k} - \frac{ie}{\hbar c} A_k \psi_p - \frac{ie}{2\hbar c} B_k \psi_x \right) = \frac{Mc}{\hbar} \psi_p \left(\frac{\partial \varphi_p}{\partial x^k} + \frac{ie}{\hbar c} A_k \varphi_p + \frac{ie}{2\hbar c} B_k \varphi_x \right) \epsilon_k = - \frac{Mc}{\hbar} \varphi_p.$$

which are seen to be of the Dirac type, the terms containing the B-field, which do not appear in the ordinary equations, describing the action on the spinor particles due to the charged fields or heavy electrons.

III. — TREATMENT OF CHARGED AND NEUTRAL FIELDS.

In order to obtain field equations for the A- and B-fields we shall now regard the quantity Γ , which is the five-dimensional analogue to the Lagrangian of the Einstein gravitational field equations, namely

$$\Gamma = \gamma_{\mu\nu} \left[\left\{ \begin{matrix} \mu & \tau \\ \sigma & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \nu & \sigma \\ \tau & \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \rho & \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} \rho & \tau \\ \tau & \end{matrix} \right\} \right] \quad (23)$$

$\left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \rho & \end{matrix} \right\}$ being the well-known bracket expressions

$$\left\{ \begin{matrix} \mu & \nu \\ \rho & \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \gamma^{\tau\tau} \left(\frac{\partial \gamma_{\tau\mu}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial \gamma_{\tau\nu}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x^\tau} \right) \quad (24)$$

To begin with we consider only the case where gravitation may be altogether neglected using a Cartesian co-ordinate system, where the Einstein metric tensor is given by

$$g_{kl} = \delta_{kl} \quad (25)$$

and further we neglect all quantities containing higher powers of β than the second. Using the expressions (1) we get after a simple calculation

$$\Gamma = - \frac{\beta^2}{4} x_1 x_1 \quad (26)$$

where

$$\chi_{rs} = \nabla_r \chi_s - \nabla_s \chi_r \quad (27)$$

∇_r being the operator defined in (9).

In a non Cartesian co-ordinate system the corresponding formula will be (where we have still neglected those terms in g_{kl} which depend upon x^0)

$$\Gamma = -\frac{\beta^2}{4} g^{kr} g^{ls} \chi_{kl} \chi_{rs} + G \quad (28)$$

where G is the Einstein Lagrangian formed by means of the g_{kl} in a similar way as (23) is formed by means of the $\gamma_{\mu\nu}$. Apart from the terms containing x^0 , where we have neglected all terms of gravitational order of magnitude, the formula (28) is exact and contains the well-known five-dimensional representation of the Maxwell-Einstein field theory, the χ_{rs} being apart from x^0 -terms the components of the electromagnetic field six-vector. Although (28) has a generally relativistic form and therefore may be expected to give a correct description of the influence of ordinary gravitational fields it will probably not give a consequent treatment of the finer gravitational effects, since the neglected terms—among others these corresponding to charged g_{kl} —fields—are of the same gravitational order of magnitude. For our present purpose, however, which is to determine the energy-momentum tensor of the charged field in the 'non-gravitational case' it will suffice.

Substituting now for the χ_r the expression (15) we get

$$\chi_{rs} = \begin{pmatrix} A_{rs} & B_{rs} \\ B_{rs} & A_{rs} \end{pmatrix} \quad (29)$$

where

$$A_{rs} = F_{rs} + \frac{ie}{hc} (B_r B_s - B_s B_r) \text{ and } F_{rs} = \frac{\partial A_s}{\partial x^r} - \frac{\partial A_r}{\partial x^s} \quad (30)$$

F_{rs} being the components of the ordinary electromagnetic field six-vector and

$$\begin{aligned}
 B_{rs} &= \delta_r B_s - \delta_s B_r, & \delta_r &= \frac{\partial}{\partial x^r} - \frac{ie}{\hbar c} A_r \\
 \tilde{B}_{rs} &= \tilde{\delta}_r \tilde{B}_s - \tilde{\delta}_s \tilde{B}_r, & \tilde{\delta}_r &= \frac{\partial}{\partial x^r} + \frac{ie}{\hbar c} A_r
 \end{aligned} \quad (31)$$

We have now to substitute the diagonal term of χ_{rs} , χ_{rs} , namely $A_{rs} A_{rs} + B_{rs} \tilde{B}_{rs}$, into our Lagrangian (26) giving if we go over to the generally relativistic form

$$\Gamma = -\frac{\kappa}{2} g^{kr} g^{ls} (A_{kl} A_{rs} + B_{kl} \tilde{B}_{rs}) + G, \quad (32)$$

where we have replaced $\frac{\beta^2}{2}$ by κ . To obtain the total Lagrangian we have further to add a term corresponding to the rest mass μ of the mesoton, namely $-\kappa \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} g^{kl} \tilde{B}_k B_l$ and also the quantity κL_0 which gives

$$L = \Gamma + \kappa L^0 - \kappa \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} g^{kl} \tilde{B}_k B_l \quad (33)$$

In the variation principle

$$\delta \int L \sqrt{g} dx = 0 \quad (34)$$

the quantities to be varied are now ψ_N , φ_N , ψ_P , φ_P , A_k , B_k , $\tilde{B}_k$, and g^{kl} , $k, l = 1, 2, 3, 4$, all variations vanishing at the border of the region. The variation with respect to the ψ 's and φ 's give, as we have already seen, the equations (22). The variation with respect to g^{kl} gives us the Einstein field equations with right sides containing the energy-momentum tensor, namely

$$G_{kl} = R_{kl} - \frac{1}{2} g_{kl} R = -\kappa T_{kl} \quad (35)$$

where

$$T_{kl} = T_{kl}^0 + T_{kl}^* \quad (36)$$

T_{kl}^0 being the quantities defined by (17) while

$$T_{kl}^* = A_{kr} A_{lr} + \frac{1}{2} (B_{kr} \tilde{B}_r + B_r \tilde{B}_{kr}) - \frac{1}{4} g_{kl} (A_{rs} A_{rs} + B_{rs} \tilde{B}_{rs}) \quad (37)$$

R_{kl} are the components of the well-known Einstein curvature tensor and R the corresponding invariant. In the formula for T_{kl}^* , the components of the energy-momentum tensor due to the A- and B-fields, we have used for the sake of simplicity a Cartesian co-ordinate system. If the terms containing the B 's are omitted, we obtain the usual formula for the electromagnetic energy-momentum tensor.

A variation of the A_k^* gives after a simple calculation, where again we use a Cartesian co-ordinate system,

$$\frac{\partial F_{kl}}{\partial x^l} = S_k = S_k^0 + S_k^* \quad (38)$$

with

$$S_k^* = \frac{ie}{\hbar c} \left[\frac{\partial}{\partial x^l} (B_k B_l - B_l B_k) + \frac{1}{2} (B_{kl} B_l - B_{kl} B_l) \right] \quad (39)$$

while

$$S_k^0 = ie \varphi_p \epsilon_k^p \psi_p \quad (19a)$$

is the spinor particle current given above. We see that the equations (39) are the ordinary Maxwell equations for the electromagnetic field, the right side containing the current-density four-vector, to which the charged B-field contributes by the quantities s_k^* .

Finally we get wave equations for B_k and $\tilde{B}_k$ by varying B_k and $\tilde{B}_k$ respectively, namely

$$\begin{aligned} \partial_l B_{kl} - 2 \frac{ie}{\hbar c} A_{kl} B_l + \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} B_k &= ie \varphi_p \epsilon_k^p \psi_p \\ \partial_l \tilde{B}_{kl} + 2 \frac{ie}{\hbar c} A_{kl} \tilde{B}_l + \frac{\mu^2 c^2}{\hbar^2} \tilde{B}_k &= ie \varphi_p^* \epsilon_k^p \psi_p^* \end{aligned} \quad (40)$$

We may easily verify the conservation theorem for the total electric charge. Indeed a simple calculation gives

$$\frac{\partial S_k^*}{\partial x^k} = \frac{ie}{2\hbar c} \left[B_l (\partial_k B_{kl}) - \tilde{B}_l (\partial_k B_{kl}) \right]$$

or by means of (40)

$$\frac{\partial S_k^*}{\partial x^k} = \frac{e^2}{2\hbar c} (B_k \varphi_p \epsilon_k^p \psi_p - \tilde{B}_k \varphi_p^* \epsilon_k^p \psi_p^*) \quad (41)$$

From (22) we get similarly

$$\frac{\partial S_k^0}{\partial x^k} = -\frac{e^2}{2\hbar c} (B_k \varphi_p \epsilon_k \psi_N - \bar{B}_k \varphi_N \epsilon_k \psi_p) \quad (41'')$$

showing that

$$\frac{\partial S_k}{\partial x^k} = \frac{\partial S_k^0}{\partial x^k} + \frac{\partial S_k^e}{\partial x^k} = 0$$

Thus the total charge is conserved, but not the charge of the spinor particles or that of the charged fields separately. At the same time the number of spinor particles (charged and uncharged) is conserved. In fact the sum of the probability current-density vectors belonging to the neutral and the charged spinor particles respectively, $i \varphi_N \epsilon_N \psi_N + i \varphi_p \epsilon_k \psi_p$ fulfils the continuity equation, in that

$$\frac{\partial}{\partial x^k} (i \varphi_N \epsilon_k \psi_N) = \frac{e}{2\hbar c} (B_k \varphi_p \epsilon_k \psi_N - \bar{B}_k \varphi_N \epsilon_k \psi_p)$$

The equations (40) for the B-field are similar to though not identical with the equations given by Proca ⁽¹⁾ and applied by several authors to the problem of the mesoton. The most important difference is the appearance of non-linear terms in (40) due to the quantities $\frac{ie}{\hbar c} (B_r B_s - \bar{B}_r \bar{B}_s)$ in the A_{rs} . These same quantities are also seen to appear in the expression for the current-density vector, where they give rise to a magnetic spin moment. In fact, the component of the magnetic moment due to that part of the current in the direction of x^1 is given by the following expression

$$\frac{ie}{\hbar c} \int (B_2 B_3 - \bar{B}_2 \bar{B}_3) dr, \quad dr = dx^1 dx^2 dx^3,$$

where the integral has to be taken over all space, the expressions $\frac{ie}{\hbar c} (B_k B_l - \bar{B}_k \bar{B}_l)$ defining thus the density of magnetic spin moment ⁽²⁾.

⁽¹⁾ Proca, *J. Phys. Radium*, 7, 347, 1936.

⁽²⁾ See Proca, *J. Phys. Radium*, l. c.

It should perhaps be pointed out once more that the Lagrangian L^0 may belong either to the pair neutron-proton or to the pair neutrino-electron. In (33) L^0 should therefore, strictly speaking, be the sum of two different L^0 's, the one referring to the heavy and the other to the light spinor particles, each with its own set of ψ 's. This we have omitted for the sake of shortness and because the corresponding completion is quite obvious. But it is worth while to notice that the complete Lagrangian will imply an interaction of heavy and light spinor particles not only through the intermediate of the electromagnetic field but also through the B-field, an interaction which will entail the occurrence of β -processes, the probability of which may be calculated on the basis of the theory developed in this report.

This theory, however, will not be completely founded before we have given rules for its quantization, a question we shall briefly touch upon here. First of all the ψ corresponding to the different kinds of spinor particles have to satisfy well-known quantization rules, being the application of the formalism of Jordan-Wigner to the wave equation of Dirac and corresponding to Fermi statistics. Moreover the electromagnetic quantities have to be quantized in the usual way, so that the remaining problem is the formulation of quantization rules for the B-field. Here we meet with the same formal difficulty as in the case of the electromagnetic field that the time derivatives of B_1 and B_2 are not present in the Lagrangian. We may, however, get over this difficulty by means of the general method developed by Rosenfeld. As a result one obtains the following commutation relations ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} [\tilde{B}_{4k}(r), B_l(r')] &= 2\hbar c \delta_{kl} \delta(r-r') \\ [B_{4k}(r), \tilde{B}_l(r')] &= 2\hbar c \delta_{kl} \delta(r-r') \end{aligned} \quad (42)$$

where r and r' indicate two space points to be taken at the same time t , $\delta(r-r')$ being the well-known singular function. Further the B_k com-

⁽¹⁾ Similar relations for the Proca equations are given by Kemmer and Bhabha, *Proc. Roy. Soc., I. c.*

mute with all the B_k , $\hat{B}_k$ and all the B_{kl} , the $\hat{B}_k$ similarly with all the B_k , $\hat{B}_k$ and all the B_{kl} , while B_4 and $\hat{B}_4$ commute with all the quantities mentioned.

As an interesting application of the commutation rules we may inquire into the commutation expression for the total charge Q^e of the B-field with one of the quantities B_k , $\hat{B}_k$. We have

$$Q^e = -i \int S_4^e(r') dr' \quad (43)$$

S_4^e being given by (39). A simple calculation gives now

$$[Q^e, B_k(r)] = \frac{e}{2\hbar c} \int [\hat{B}_{4k}(r'), B_k(r)] B_k(r') dr' = e B_k(r) \quad (44)$$

and similarly

$$[Q^e, \hat{B}_k(r)] = -\frac{e}{2\hbar c} \int [B_{4k}(r'), \hat{B}_k(r)] \hat{B}_k(r) dr' = -e \hat{B}_k(r) \quad (44a)$$

Since

$$\frac{\partial B_k}{\partial x^0} = \frac{ie}{\beta\hbar c} B_k, \quad \frac{\partial \hat{B}_k}{\partial x^0} = -\frac{ie}{\beta\hbar c} \hat{B}_k,$$

we see that $\frac{Q^e}{\beta c}$ as far as the B-field is concerned plays the role of the canonical conjugate to x^0 , which is a special case of a general rule according to which x^0 is canonically conjugate to the total charge divided by βc . At the same time the relations (44) are seen to be closely related to the fact that the charge is always a whole positive or negative multiple of the elementary electric charge. They express moreover the gauge transformation properties of the B_k and $\hat{B}_k$ ⁽¹⁾.

PROFESSOR MOELLER recalled that discussions of the experimental results relative to the interactions between the particles constituting

nuclei appeared to show the existence of forces between two protons and between two neutrons of the same order of magnitude as the force between one proton and one neutron. If we wished to explain these forces by the intermediary of a field of particles capable of being given out or absorbed by protons and neutrons, we must then admit, in addition to Yukawa's charged particles, neuter particles of the same mass. It was hard to see how such neuter particles could naturally find a place in a general scheme of the type proposed by Professor Klein.

PROFESSOR KLEIN answered that if, in the Lagrangian, we replace the γ_n given by (29), by the following expression

$$\gamma_n' = \begin{pmatrix} \Lambda_n - C_n, \bar{B}_n \\ B_n, A_n + C_n \end{pmatrix} \quad 29 (a)$$

where

$$C_n = \frac{\partial C_s}{\partial x^r} - \frac{\partial C_r}{\partial x}$$

and, in the Lagrangian (10), the γ_r given by (15), by the corresponding expression,

$$\gamma_r' = \begin{pmatrix} \Lambda_r - C_r, \bar{B}_r \\ B_r, A_r + C_r \end{pmatrix} \quad (15 a)$$

The C- field corresponds to neuter particles to which it is possible to give any mass, for instance that of the mesoton. It seems, however, that such particles would give rise, according to the Lagrangian concerned, to repressive forces and not to attractive forces between protons.

Лев Борисович Окунь

ВВЕДЕНИЕ В КАЛИБРОВОЧНЫЕ ТЕОРИИ

Редактор Н. Н. Антонова
Техн. редактор З. И. Хазова
Корректор Н. М. Соболева

Л.-83529

Объем 5,5 п.л.

Цена 30 коп.

Подписано в печать 2/хл-84 г. Формат 60х84 1/16

Уч.-изд. л. 5,0

Изд. № 085-1

Тираж 1000 экз.

Заказ 1140

Типография МИФИ, Каширское шоссе, 31